

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

ВИПРОМІНЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до розв'язування задач з вибраних розділів електродинаміки
для студентів III курсу фізичного факультету

ЛЬВІВ – 1999

Рекомендовано до друку
кафедрою теоретичної фізики
Протокол № 51 від 2.07.99

Уклав Василь Михайлович Мигаль

Відповідальний за випуск проф. Л. Блажиевський

Редактор М. Прихода

ВИПРОМІНЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до розв'язування задач з вибраних розділів електродинаміки

для студентів III курсу фізичного факультету

Підписано до друку 5.07.99. Формат 60×84/16. Умовн. друк. арк. 2.
Умовн. фарбовідб. 2. Тираж 50. Зам. 314

Видавничий центр Львівського державного університету імені Івана Франка
290602 Львів, вул. Університетська, 1

Випромінювання електромагнітних хвиль будемо розглядати, вводячи векторний \mathbf{A} і скалярний φ електромагнітні потенціали:

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2)$$

де \mathbf{H} і \mathbf{E} — напруженості магнітного і електричного полів, c — швидкість світла.

Потенціали \mathbf{A} і φ визначені з точністю до градієнтного перетворення:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi, \quad (3)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (4)$$

$\chi = \chi(\mathbf{r}, t)$ — довільна функція координат \mathbf{r} і часу t . Якщо χ вибрати так, щоб задовольнялась умова Лоренца

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

то отримаємо рівняння Даламбера для електромагнітних потенціалів:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (6)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (7)$$

тут \mathbf{j} — густина струму, ρ — густина заряду.

Випромінювання електромагнітних хвиль описується частковими розв'язками рівнянь Даламбера у вигляді запізнюючих потенціалів:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV', \quad (8)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV', \quad (9)$$

де \mathbf{r} — радіус-вектор точки спостереження, \mathbf{r}' — радіус-вектор елемента об'єму, t — час спостереження.

На великих віддалях від системи заряджених частинок достатньо малий елемент поверхні сферичної хвилі можна розглядати як плоску хвилю, в якій напруженості електричного \mathbf{E} і магнітного \mathbf{H} полів рівні за модулем ($E = H$) і утворюють правоївнгову трійку векторів з напрямком $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ поширення хвилі

$$\mathbf{E} = [\mathbf{H}, \mathbf{n}]. \quad (10)$$

Отже, для розрахунку електромагнітного поля випромінювання достатньо обчислити напруженість магнітного поля.

Помістимо початок координат всередині зарядженої системи, лінійні розміри якої є порядку l . На великих віддалях r від системи $r \gg l \geq r'$ можна обмежитися розкладом $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - (\mathbf{n}, \mathbf{r}')$. Тоді векторний потенціал (8):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{r}')}{c}) dV', \quad (11)$$

Розглянемо електромагнітне поле на великих віддалях від нашої системи зарядів — у хвильовій зоні: $r \gg \lambda \gg l$. Оскільки довжина випромінюваної хвилі велика порівняно з лінійними розмірами системи $\lambda \gg l$, то $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{r}')}{c})$ можна розкласти в ряд за $\frac{(\mathbf{n}, \mathbf{r}')}{c}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_p(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}_m(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}_Q(\mathbf{r}, t) + \dots, \quad (12)$$

$$\mathbf{A}_p(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c})}{cr}, \quad (13)$$

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{r}, t) = \frac{[\dot{\mathbf{m}}(t - \frac{r}{c}), \mathbf{n}]}{cr}, \quad (14)$$

$$\mathbf{A}_Q(\mathbf{r}, t) = \frac{\ddot{\mathbf{Q}}(t - \frac{r}{c})}{6c^2r}, \quad (15)$$

де $\mathbf{A}_p(\mathbf{r}, t)$ — дипольне, $\mathbf{A}_m(\mathbf{r}, t)$ — магнітно-дипольне, $\mathbf{A}_Q(\mathbf{r}, t)$ — квадрупольне наближення для векторного потенціалу; $\dot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c})$ — похідна за часом від електричного дипольного моменту

$$\mathbf{p}(t - \frac{r}{c}) = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) dV';$$

$\dot{\mathbf{m}}(t - \frac{r}{c})$ — похідна за часом від магнітного дипольного моменту

$$\mathbf{m}(t - \frac{r}{c}) = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r}', \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c})] dV';$$

$\ddot{\mathbf{Q}}(t - \frac{r}{c})$ — друга похідна за часом від вектора, компоненти якого

$$Q_\alpha(t - \frac{r}{c}) = \sum_\beta n_\beta Q_{\alpha\beta}(t - \frac{r}{c}),$$

$$Q_{\alpha\beta}(t - \frac{r}{c}) = \int \rho(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) (3x'_\alpha x'_\beta - \mathbf{r}'^2 \delta_{\alpha\beta}) dV',$$

$Q_{\alpha\beta}$ — тензор квадрупольного моменту системи.

Електричний дипольний момент, магнітний дипольний момент, тензор квадрупольного моменту залежать від часу з урахуванням запізнення.

Для напруженості магнітного поля випромінюваної хвилі (без врахування членів $\sim 1/r^2$) одержуємо

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_p(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_m(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_Q(\mathbf{r}, t) + \dots, \quad (16)$$

$$\mathbf{H}_p(\mathbf{r}, t) = \frac{[\ddot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}]}{c^2 r}, \quad (17)$$

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{r}, t) = \frac{[[\ddot{\mathbf{m}}, \mathbf{n}], \mathbf{n}]}{c^2 r}, \quad (18)$$

$$\mathbf{H}_Q(\mathbf{r}, t) = \frac{[\ddot{\mathbf{Q}}, \mathbf{n}]}{6c^3 r}. \quad (19)$$

У хвильовій зоні потік енергії електромагнітного поля визначається вектором Умова–Пойтінга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \frac{cH^2}{4\pi} \mathbf{n}. \quad (20)$$

Інтенсивність випромінювання I рівна потоку вектора Умова–Пойтінга через сферу великого радіуса r з центром в початку координат

$$I = \frac{c}{4\pi} \int H^2 r^2 d\Omega. \quad (21)$$

Використовуючи (16) і (21), для інтенсивності випромінювання одержуємо такий вираз:

$$I = I_p + I_m + I_Q, \quad (22)$$

$$I_p = \frac{2\dot{\mathbf{p}}^2}{3c^3}, \quad (23)$$

$$I_m = \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3}, \quad (24)$$

$$I_Q = \frac{1}{180c^5} \sum_{\alpha\beta} \ddot{\mathbf{Q}}_{\alpha\beta}^2, \quad (25)$$

де I_p , I_m , I_Q , — інтенсивності дипольного, магнітно-дипольного, квадрупольного випромінювання відповідно.

Інтенсивність випромінювання dI в елемент тілесного кута $d\Omega$ рівна потокові вектора Умова-Пойтінга через елемент сферичної поверхні $dS = r^2 d\Omega$ великого радіуса r , центр якої розміщений в початку координат. Кутовий розподіл інтенсивності випромінювання знаходимо, розрахувавши потік вектора Умова-Пойтінга (20) через вказаний елемент сферичної поверхні

$$dI = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2 d\Omega, \quad (26)$$

де напруженість магнітного поля визначається виразами (16)–(19). Для інтенсивності випромінювання dI в одиничному тілесному куті $d\Omega$ маємо

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2. \quad (27)$$

Якщо випромінює макроскопічне тіло розмірами $l \geq \lambda$, то розклад поля випромінювання в ряд за $\frac{(\mathbf{n}, \mathbf{r}')}{c}$ не є справедливим, тому треба користуватися точними виразами для запізнюючих потенціалів (8), (9).

На заряджену частинку, яка випромінює, з боку випроміненого нею електромагнітного поля діє гальмівна сила — сила радіаційного тертя, яка для нерелятивістських швидкостей частинки має вигляд

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}}, \quad (28)$$

де e — заряд, \mathbf{r} — радіус-вектор рухомої частинки. Ця сила мала порівняно з зовнішньою силою, що діє на частинку.

1. Показати, що для ізольованої системи, яка складається з N частинок з однаковим питомим зарядом ($e_i/m_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, N$), інтенсивність дипольного випромінювання I_p дорівнює нулеві.

Дипольний момент системи

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{m_i} m_i \mathbf{r}_i = \text{const} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i.$$

Інтенсивність дипольного випромінювання I_p згідно з (23):

$$I_p = \frac{2\ddot{\mathbf{p}}^2}{3c^3}.$$

Імпульс ізольованої системи є інтегралом руху:

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \text{const}_1.$$

Отже,

$$\ddot{\mathbf{p}} = \frac{d^2}{dt^2} \left[\text{const} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right] = \frac{d}{dt} \left[\text{const} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right] = 0.$$

2. Через конденсатор пролетіла частинка масою m і зарядом q . Відстань між обкладками конденсатора рівна l , а напруженість електричного поля \mathbf{E} в конденсаторі однорідна і постійна. Кут між вектором \mathbf{E} і напрямком швидкості частинки \mathbf{v}_0 під час вльоту дорівнює α . Знаки заряду q і $\cos \alpha$ однакові. Оцінити енергію, що втрачається частинкою під час прольоту через конденсатор на дипольне випромінювання.

Початок координат виберемо в точці вльоту частинки в конденсатор, а вісь y спрямуємо в бік руху перпендикулярно до пластин конденсатора. З рівняння руху

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}$$

знаходимо прискорення частинки, після чого для інтенсивності дипольного випромінювання отримуємо

$$I_p = \frac{2q^2\ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3} = \frac{2q^4 E^2}{3c^3 m^2}.$$

Спроекуємо рівняння руху на вісь y :

$$\ddot{y} = \frac{qE}{m}$$

і, проінтегрувавши його, знайдемо закон руху частинки вздовж осі y

$$\dot{y} = \frac{qE}{m} t + \dot{y}_0,$$

$$y = \frac{qE}{2m} t^2 + \dot{y}_0 t + y_0.$$

З початкових умов ($t = 0$, $y_0 = 0$) знаходимо початкову швидкість:

$$\dot{y}_0 = v_0 \cos \alpha.$$

Остаточно закон руху частинки вздовж осі y :

$$y = \frac{qE}{2m} t^2 + v_0 t \cos \alpha.$$

Час руху t_p зарядженої частинки через конденсатор оцінимо з умови $l \sim y$:

$$l = \frac{qE}{2m} t_p^2 + v_0 t_p \cos \alpha.$$

Це є квадратне рівняння стосовно t_p , взявши додатний корінь, отримаємо

$$t_p = \frac{v_0 m}{qE} \left[\sqrt{\frac{2qEl}{mv_0^2} + \cos^2 \alpha} - \cos \alpha \right].$$

Енергія \mathcal{E} , випромінена за час прольоту зарядженої частинки через конденсатор, є порядку:

$$\mathcal{E} = I_p \cdot t_p = \frac{2q^3 E v_0}{3c^3 m} \left[\sqrt{\frac{2qEl}{mv_0^2} + \cos^2 \alpha} - \cos \alpha \right].$$

3. Електрон масою m і зарядом e пролітає на великій віддалі a від нерухомого ядра з зарядом $Z|e|$. У безмежно віддалений момент часу $t = -\infty$ електрон мав швидкість по абсолютній величині рівну v_0 . Нехтуючи викривленням траєкторії, знайти енергію \mathcal{E} , яку втрачає електрон на дипольне випромінювання за час прольоту.

Повна енергія випромінювання електрона

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} I_p dt = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{\mathbf{r}}^2 dt.$$

Прискорення електрона $\ddot{\mathbf{r}}$ знаходимо з рівняння руху

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{Ze^2\mathbf{r}}{r^3}.$$

Це дає змогу записати енергію випромінювання у вигляді

$$\mathcal{E} = \frac{2Z^2e^6}{3m^2c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r^4} dt.$$

Нехай ядро знаходиться в початку координат, а електрон рухається, як зображено на рис. 1, в площині xoy і в момент часу $t = 0$ перетинає вісь y .

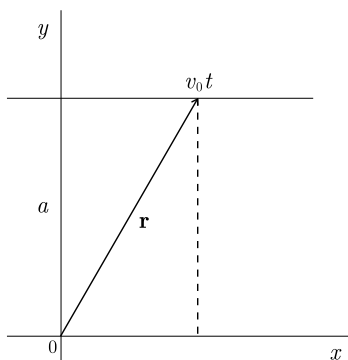


Рис. 1.

Вважаючи траєкторію електрона прямолінійною і нехтуючи зміною його швидкості $v_x \sim v_0$, запишемо віддаль між електроном і ядром у вигляді

$$r = \sqrt{a^2 + v_0^2 t^2},$$

звідки

$$\mathcal{E} = \frac{2Z^2 e^6}{3m^2 c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + v_0^2 t^2)^2}.$$

Для розрахунку інтеграла

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + v_0^2 t^2)^2}$$

використаємо підстановку

$$t = \frac{a}{v_0} \operatorname{tg} \theta,$$

тоді

$$A = \frac{1}{v_0 a^3} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{2v_0 a^3}.$$

У результаті одержуємо

$$\mathcal{E} = \frac{\pi Z^2 e^6}{3m^2 c^3 v_0 a^3}.$$

4. У класичній моделі атома, запропонованій Резерфордом, електрон масою m і зарядом e обертається по коловій орбіті навколо нерухомого ядра з зарядом $Z|e|$. Знайти закон зменшення повної енергії електрона \mathcal{E} за рахунок дипольного випромінювання. Обчислити час t , через який електрон впаде на ядро внаслідок втрати енергії на дипольне випромінювання. У початковий момент часу $t_0 = 0$ електрон знаходився на віддалі R від ядра.

Відхилення від колової орбіти, спричинене втратою енергії електрона на випромінювання, достатньо мале за один оберт навколо ядра. Тому можна вважати, що

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2},$$

звідки

$$v^2 = \frac{Ze^2}{mr}.$$

Повна енергія електрона

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{r} = -\frac{Ze^2}{2r}.$$

Знайшовши прискорення електрона $\ddot{\mathbf{r}}$ з рівняння руху

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Ze^2}{r^2},$$

виразимо інтенсивність дипольного випромінювання через повну енергію електрона \mathcal{E} :

$$I_p = \frac{2e^2\ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3} = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{Ze^2}{mr^2} \right)^2 = \frac{32}{3c^3(mZe)^2} \left(\frac{Ze^2}{2r} \right)^4 = \frac{32\mathcal{E}^4}{3c^3(mZe)^2}.$$

Енергія електрона втрачається на випромінювання:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{32\mathcal{E}^4}{3c^3(mZe)^2},$$

звідки отримуємо закон зменшення повної енергії електрона, розділивши змінні

$$-\int \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}^4} = \frac{32}{3c^3(mZe)^2} \int dt + \text{const},$$
$$\frac{1}{3\mathcal{E}^3} = \frac{32t}{3c^3(mZe)^2} + \text{const}.$$

Константу інтегрування знаходимо з початкових умов: при $t = 0$ початкова енергія електрона

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{Ze^2}{2R},$$

а саме

$$\text{const} = \frac{1}{3\mathcal{E}_0^3}.$$

Остаточню

$$\frac{1}{\mathcal{E}^3} = \frac{1}{\mathcal{E}_0^3} + \frac{32t}{c^3(mZe)^2}.$$

Час падіння t електрона на ядро отримаємо при $r \rightarrow 0$, тобто коли $\mathcal{E} \rightarrow -\infty$:

$$t = \frac{m^2 c^3 R^3}{4Ze^4}.$$

5. Частинка масою m і зарядом e пролітає по діаметру кулі радіуса R , всередині якої рівномірно розподілений заряд Q . Заряди частинки і кулі протилежного знака. Перед вльотом у кулю частинка мала кінетичну енергію \mathcal{E}_0 . Знайти енергію \mathcal{E} , що втрачається частинкою на дипольне випромінювання під час прольоту через кулю.

Виберемо початок координат у центрі кулі. Спочатку обчислимо напруженість електричного поля всередині кулі, скориставшись теоремою Гауса

$$\oint_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 4\pi \int_V \rho dV.$$

Поле такої системи є центрально-симетричним (напрямок вектора \mathbf{E} в будь-якій точці проходить через центр кулі, а модуль вектора \mathbf{E} повинен залежати тільки від віддалі r до центра кулі), тому за замкненою поверхню S зручно взяти концентричну сферу.

Сфера радіусом $r < R$ охоплює заряд $q = Q(r/R)^3$, бо

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho, \quad q = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho, \quad \frac{q}{Q} = \frac{r^3}{R^3}.$$

Тому згідно з теоремою Гауса

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \frac{Q r}{R^3},$$

звідки

$$E_r = \frac{Q r}{R^3},$$

або

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{R^3} \mathbf{r}.$$

Отже, всередині рівномірно зарядженої кулі напруженість електричного поля лінійно росте з віддаллю r від її центра.

Запишемо рівняння руху частинки всередині кулі. Якщо вплив поля випромінювання на рух частинки незначний і ним можна знехтувати, то

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e \frac{Q}{R^3} \mathbf{r}.$$

Нехай рух відбувається вздовж осі x , тоді

$$\ddot{x} = e \frac{Q}{mR^3} x.$$

Тепер інтенсивність дипольного випромінювання частинки I_p є функцію координати x :

$$I_p = \frac{2e^2 \ddot{x}^2}{3c^3} = \frac{2Q^2 e^4 x^2}{3c^3 m^2 R^6}.$$

Енергію, яка втрачається частинкою під час прольоту через кулю, запишемо так:

$$\mathcal{E} = \int_{-R}^{+R} I_p \frac{dx}{\dot{x}}.$$

Для розрахунку швидкості частинки \dot{x} скористаємось законом збереження енергії

$$\mathcal{E}_0 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x).$$

Тут не врахована енергія випромінювання \mathcal{E} , яка є малою.

Потенціальну енергію $U(x)$ знайдемо з виразу

$$F_x = -\frac{\partial U(x)}{\partial x},$$

де $F_x = e \cdot E_x = e \cdot (Qx)/R^3$. Проінтегрувавши, маємо

$$U(x) = -\int F_x dx + \text{const},$$

$$U(x) = -\frac{eQ}{R^3} \frac{x^2}{2} + \text{const},$$

Постійну інтегрування знайдемо з умови $U(R) = 0$

$$\text{const} = \frac{eQ}{2R^3} R^2.$$

У результаті маємо

$$U(x) = -\frac{eQ}{2R^3} (x^2 - R^2).$$

При таких наближеннях швидкість частинки всередині кулі

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0}{m} + \frac{eQ}{mR^3}(x^2 - R^2)}$$

і для \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = \frac{2Q^2 e^4}{3c^3 m^2 R^6} \int_{-R}^{+R} \frac{x^2 dx}{\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0}{m} + \frac{eQ}{mR^3}(x^2 - R^2)}}.$$

Оскільки заряди частинки і кулі протилежного знака ($eQ = -|eQ|$), то

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{2Q^2 e^4}{3c^3 m^2 R^6} \int_{-R}^{+R} \frac{x^2 dx}{\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0}{m} + \frac{|eQ|}{mR} - \frac{|eQ|}{mR^3} x^2}} \\ &= \frac{2Q^2 e^4 \sqrt{mR}}{3c^3 m^2 R^6} \int_{-R}^{+R} \frac{x^2 dx}{\sqrt{2R\mathcal{E}_0 + |eQ| - \frac{|eQ|}{R^2} x^2}}. \end{aligned}$$

Потрібно розрахувати інтеграл

$$A = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a - bx^2}}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Запишемо

$$A = -\frac{1}{b} \int \frac{a - bx^2 - a}{\sqrt{a - bx^2}} dx = -\frac{1}{b} \int \sqrt{a - bx^2} dx + \frac{a}{b} \int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}}.$$

Проінтегруємо перший інтеграл у правій частині частинами

$$\int \sqrt{a - bx^2} dx = x \sqrt{a - bx^2} + b \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a - bx^2}},$$

звідки

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a - bx^2}} = -\frac{x}{b} \sqrt{a - bx^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a - bx^2}} + \frac{a}{b} \int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}},$$

Тепер

$$\begin{aligned} A &= -\frac{x}{2b} \sqrt{a - bx^2} + \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} \\ &= \frac{1}{2b} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x \right) - x \sqrt{a - bx^2} \right). \end{aligned}$$

Підставивши межі інтегрування, остаточно отримаємо

$$\mathcal{E} = \frac{2Qe^3}{3mc^2R^2} \sqrt{\frac{|eQ|}{mc^2R}} \left[\left(\frac{2\mathcal{E}_0R}{|eQ|} + 1 \right) \arcsin \frac{1}{\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0R}{|eQ|} + 1}} - \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0R}{|eQ|}} \right].$$

6. Частинка масою m і зарядом e здійснює гармонійні коливання з частотою ω (гармонійний осцилятор). Знайти напруженості електричного і магнітного полів в хвильовій зоні та середню за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність дипольного випромінювання.

Нехай заряджена частинка коливається за гармонійним законом

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega t + \alpha);$$

її дипольний момент

$$\mathbf{p} = e\mathbf{d} = e\mathbf{d}_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

\mathbf{d}_0 — постійний вектор, α — початкова фаза.

Для напруженостей магнітного та електричного полів випромінюваної хвилі згідно з (17), (10) маємо

$$\mathbf{H} = \frac{[\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}]}{c^2 r},$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{H}, \mathbf{n}].$$

Знайдемо спочатку напруженість магнітного поля

$$\mathbf{H} = -\frac{e\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)}{c^2 r^2} [\mathbf{d}_0, \mathbf{r}].$$

Введемо сферичну систему координат з центром в диполі і зорієнтуємо диполь вздовж полярної осі (рис. 2).

У точці спостереження P розкладемо всі вектори на складові, спрямовані вздовж взаємно перпендикулярних напрямків зростання сферичних координат r, θ, φ , тобто ортів $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$.

Векторний добуток $[\mathbf{d}_0, \mathbf{r}]$ у кожній точці поля P спрямований по дотичній до дуги паралелі, яка проходить через точку P , і притому у бік зростання кута φ . Складові вектора $[\mathbf{d}_0, \mathbf{r}]$ дорівнюють

$$[\mathbf{d}_0, \mathbf{r}]_r = [\mathbf{d}_0, \mathbf{r}]_\theta = 0, \quad [\mathbf{d}_0, \mathbf{r}]_\varphi = r d_0 \sin \theta,$$

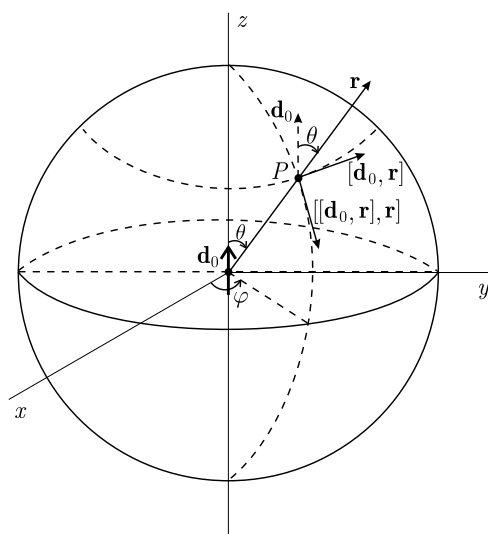


Рис. 2.

тому

$$H_r = H_\theta = 0, \quad H_\varphi = -\frac{e\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha) d_0 \sin \theta}{c^2 r}.$$

Напруженість електричного поля

$$\mathbf{E} = -\frac{e\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)}{c^2 r^3} [[\mathbf{d}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}].$$

Векторний добуток $[[\mathbf{d}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]$ у точці P спрямований по дотичній до дуги меридіана, який проходить через точку P , у бік зростання кута θ . Складові вектора $[[\mathbf{d}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]$ дорівнюють

$$[[\mathbf{d}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]_r = [[\mathbf{d}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]_\varphi = 0, \quad [[\mathbf{d}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]_\theta = r^2 d_0 \sin \theta,$$

тому

$$E_r = E_\varphi = 0, \quad E_\theta = -\frac{e\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha) d_0 \sin \theta}{c^2 r}.$$

Отже,

$$H_\varphi = E_\theta.$$

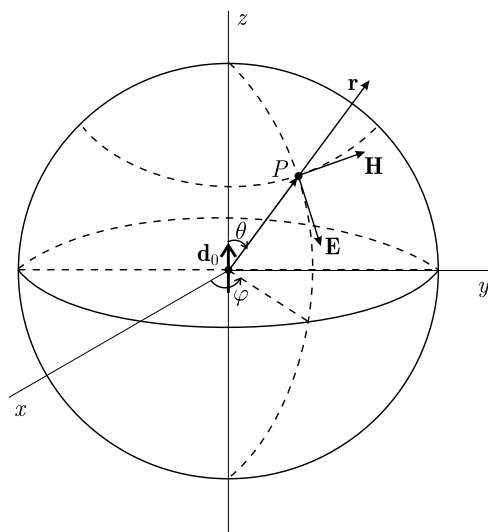


Рис. 3.

У хвильовій зоні осцилятора напруженості електричного і магнітного полів по модулю рівні, вони залежать від віддалі до осцилятора r і від полярного кута θ : на осі осцилятора ($\theta = 0$, $\theta = \pi$) поле відсутнє, максимального значення воно досягає в екваторіальній площині осцилятора ($\theta = \pi/2$). У кожній точці хвильової зони вектори \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{r} взаємно перпендикулярні і утворюють правогвинтову систему, причому \mathbf{E} спрямований по дузі меридіана, \mathbf{H} — по дузі паралелі (див. рис. 3). Фаза $\omega(t - r/c)$ векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} поширюється в напрямку радіус-вектора зі швидкістю c .

Інтенсивність дипольного випромінювання

$$I_p = \frac{2\ddot{\mathbf{p}}^2}{3c^3} = \frac{2\omega^4 e^2 d_0^2 \cos^2(\omega(t - r/c) + \alpha)}{3c^3}.$$

Середня за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність дипольного випромінювання:

$$\langle I_p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I_p dt = \frac{2\omega^4 e^2 d_0^2}{3c^3} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega(t - r/c) + \alpha) dt = \frac{\omega^4 e^2 d_0^2}{3c^3}.$$

7. Найпростіша лінійна антена — це тонкий прямолінійний провід-

ник завдовжки l , по якому тече струм $J = J_0 \cos \omega t$, причому антена настільки коротка, що струм вважається незмінним по всій її довжині. Знайти середню за період зміни струму $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність випромінювання антени.

Оскільки довжина антени фіксована, то електричний дипольний момент $p = e(t)l$ буде змінюватися з часом за рахунок зміни заряду $e(t)$ на одному з кінців антени

$$\dot{p} = \frac{de}{dt} l = J l = J_0 l \cos \omega t,$$

тому

$$\ddot{p} = -J_0 l \omega \sin \omega t.$$

Інтенсивність випромінювання антени

$$I_p = \frac{2\dot{\mathbf{p}}^2}{3c^3} = \frac{2J_0^2 l^2 \omega^2 \sin^2 \omega(t-r/c)}{3c^3}.$$

Усереднення за період зміни струму $T = 2\pi/\omega$ дає

$$\langle I_p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I_p dt = \frac{2J_0^2 l^2 \omega^2}{3c^3} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega(t-r/c) dt = \frac{J_0^2 l^2 \omega^2}{3c^3}.$$

8. Показати, що для ізольованої системи, яка складається з N частинок з однаковим питомим зарядом ($e_i/m_i = e/m = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, N$), інтенсивність магнітно-дипольного випромінювання I_m дорівнює нулеві.

Магнітний момент системи N частинок

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^N e_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i] = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{m_i} m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i] = \frac{e}{2mc} \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i].$$

Якщо швидкості всіх заряджених частинок $v \ll c$, то $m_i \mathbf{v}_i$ є імпульс i -тої частинки \mathbf{p}_i , і ми отримуємо

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2mc} \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i] = \frac{e}{2mc} \mathbf{M}.$$

Тут

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i]$$

— механічний момент імпульсу системи, який для ізольованої системи є інтегралом руху, тому $\dot{\mathbf{m}} = 0$.

Отже, інтенсивність магнітно-дипольного випромінювання дорівнює нулеві:

$$I_m = \frac{2\dot{\mathbf{m}}^2}{3c^3} = 0.$$

9. Показати, що магнітно-дипольне випромінювання відсутнє у системі, яка складається з двох заряджених частинок, які рухаються з нерелятивістськими швидкостями.

Магнітний момент системи двох частинок з зарядами e_1 і e_2 дорівнює

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} (e_1[\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1] + e_2[\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2]),$$

де \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 — координати частинок, $\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1$, $\mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2$ — їх швидкості. Перейдемо до системи центра мас

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,$$

де \mathbf{R} — координата центра мас, \mathbf{r} — координата відносного руху. Виразимо координати частинок \mathbf{r}_1 та \mathbf{r}_2 через \mathbf{R} та \mathbf{r} :

$$\mathbf{r}_1 = \frac{(m_1 + m_2)\mathbf{R} - m_2\mathbf{r}}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{(m_1 + m_2)\mathbf{R} + m_1\mathbf{r}}{m_1 + m_2}.$$

Виберемо початок координат у центрі мас $\mathbf{R} = 0$, тоді

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.$$

Запишемо магнітний момент \mathbf{m} через координати центра мас

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2} \right) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left[\mathbf{r}, \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \right].$$

Механічний момент імпульсу \mathbf{M} в координатах центра мас

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1] + [\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2] = [\mathbf{r}_1, m_1\mathbf{v}_1] + [\mathbf{r}_2, m_2\mathbf{v}_2] = \left[\mathbf{r}, \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \right].$$

Отже,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2} \right) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{M}.$$

Механічний момент імпульсу \mathbf{M} для системи двох частинок є інтегралом руху, тому $\dot{\mathbf{m}} = 0$. Отже, інтенсивність магнітно-дипольного випромінювання дорівнює нулеві:

$$I_m = \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3} = 0.$$

10. Найпростіша рамочна антена — це прямокутна рамка зі сторонами a і b , по якій тече лінійний струм силою $J = J_0 \cos \omega t$. Визначити середню за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність магнітно-дипольного випромінювання.

У випадку лінійного струму формула для магнітного дипольного моменту

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r}, \mathbf{j}] dV$$

набуває простішого вигляду. Об'єм елемента dV провідника дорівнює

$$dV = S dl,$$

де S — площа поперечного перетину. Тому можна записати:

$$\mathbf{j} dV = \mathbf{j} S dl = j S d\mathbf{l} = J d\mathbf{l},$$

де $J = j S$ — сила струму, а $d\mathbf{l}$ — елемент довжини провідника, який за напрямком збігається з напрямком струму в провіднику. Це перетворення включає інтегрування по поперечному перетину провідника, але оскільки лінійні розміри поперечного перетину значно менші від відстані до точок, в яких розраховується магнітний момент, при такому інтегруванні можна знехтувати зміною цієї відстані до різних елементів струму в цьому перетині і вважати цю відстань однаковою. Тому перехід до лінійних струмів здійснюється простою заміною

$$\mathbf{j} dV \rightarrow J d\mathbf{l},$$

після чого залишається інтегрування за $d\mathbf{l}$ вздовж у нашому випадку замкнутого контура провідника L :

$$\mathbf{m} = \frac{J}{2c} \oint_L [\mathbf{r}, d\mathbf{l}].$$

Враховуючи, що

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2}[\mathbf{r}, d\mathbf{l}]$$

є вектор елемента поверхні, яку обмежує контур струму, маємо

$$\frac{1}{2} \oint_L [\mathbf{r}, d\mathbf{l}] = \int_S d\mathbf{S} = \mathbf{S}.$$

\mathbf{S} — вектор поверхні, натягнутої на контур зі струмом L , який становить з напрямком обходу контура правогвинтову систему.

Звідси магнітний момент рамки зі струмом дорівнює

$$\mathbf{m} = \frac{J}{c} \mathbf{S},$$

де $|\mathbf{S}| = ab$ — площа рамки.

Інтенсивність магнітно-дипольного випромінювання

$$I_m = \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3} = \frac{2a^2b^2J_0^2\omega^4 \cos^2 \omega(t - r/c)}{3c^5}.$$

Усреднення за період зміни струму $T = 2\pi/\omega$ дає

$$\langle I_m \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I_m dt = \frac{2a^2b^2J_0^2\omega^4}{3c^5} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega(t - r/c) dt = \frac{a^2b^2J_0^2\omega^4}{3c^5}.$$

11. Знайти напруженості електричного і магнітного полів у хвильовій зоні та середню за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність випромінювання магнітного диполя, момент якого

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \cos(\omega t + \alpha).$$

Для напруженостей магнітного та електричного полів випромінюваної хвилі магнітним диполем згідно з (18), (10) маємо

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{[[\ddot{\mathbf{m}}, \mathbf{n}], \mathbf{n}]}{c^2 r},$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{H}, \mathbf{n}] = \frac{[\mathbf{n}, \ddot{\mathbf{m}}]}{c^2 r}.$$

Введемо сферичну систему координат з центром у диполі і зорієнтуємо магнітний диполь (за аналогією з електричним диполем, див. задачу **6**) вздовж полярної осі (рис. 4).

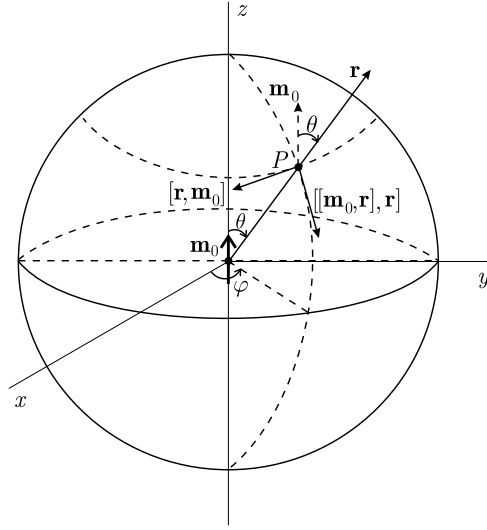


Рис. 4.

Обчислимо спочатку напруженість електричного поля

$$\mathbf{E} = \frac{\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)}{c^2 r^2} [\mathbf{m}_0, \mathbf{r}].$$

Складові вектора $[\mathbf{m}_0, \mathbf{r}]$ дорівнюють

$$[\mathbf{m}_0, \mathbf{r}]_r = [\mathbf{m}_0, \mathbf{r}]_\theta = 0, \quad [\mathbf{m}_0, \mathbf{r}]_\varphi = r m_0 \sin \theta,$$

тому

$$E_r = E_\theta = 0, \quad E_\varphi = \frac{\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha) m_0 \sin \theta}{c^2 r}.$$

Напруженість магнітного поля

$$\mathbf{H} = -\frac{\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)}{c^2 r^3} [[\mathbf{m}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}].$$

Складові вектора $[[\mathbf{m}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]$ дорівнюють

$$[[\mathbf{m}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]_r = [[\mathbf{m}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]_\varphi = 0, \quad [[\mathbf{m}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]_\theta = r^2 m_0 \sin \theta,$$

тому

$$H_r = H_\varphi = 0, \quad H_\theta = -\frac{\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha) m_0 \sin \theta}{c^2 r}.$$

У хвильовій зоні магнітного диполя напруженості електричного і магнітного полів по модулю рівні, вони залежать від віддалі до осцилятора r і від полярного кута θ : на осі осцилятора ($\theta = 0, \theta = \pi$) поле відсутнє, максимального значення воно досягає в екваторіальній площині осцилятора ($\theta = \pi/2$). У кожній точці хвильової зони вектори $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{r}$ взаємоперпендикулярні і утворюють правогвинтову систему, причому \mathbf{H} спрямований по дузі меридіана, \mathbf{E} — по дузі паралелі (див. рис. 5). Отже, поле магнітного диполя може бути отримане з поля випромінювання електричного диполя (див. задачу 6) шляхом заміни: $e\mathbf{d}_0 \rightarrow \mathbf{m}_0, \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$.

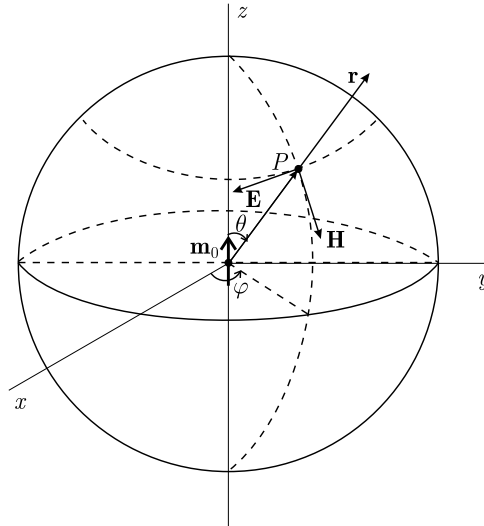


Рис. 5.

Інтенсивність магнітно-дипольного випромінювання

$$I_m = \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3} = \frac{2\omega^4 m_0^2 \cos^2(\omega(t - r/c) + \alpha)}{3c^3}.$$

Середня за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність магнітно-дипольного

випромінювання:

$$\langle I_m \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I_p dt = \frac{2\omega^4 m_0^2}{3c^3} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega(t - r/c) + \alpha) dt = \frac{\omega^4 m_0^2}{3c^3}.$$

12. Лінійна антена є безмежно тонким провідником завдовжки l , в якому збуджена стояча хвиля струму

$$J(z, t) = J_0 \sin[k(z + l/2)]e^{-i\omega t}.$$

На кінцях провідника сила струму дорівнює нулеві, тому $k = \omega/c = m\pi/l$, де m — число півхвиль, що вкладаються на довжині провідника. Знайти усереднений за період коливань струму кутовий розподіл інтенсивності випромінювання антени.

Виберемо початок координат посередині провідника і спрямуємо вісь z вздовж провідника (див. рис. 6). Оскільки провідник безмежно тонкий, то об'ємна густина струму запишеться у вигляді

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z J(z, t) \delta(x) \delta(y) = \mathbf{e}_z J_0 \sin[k(z + l/2)] e^{-i\omega t} \delta(x) \delta(y).$$

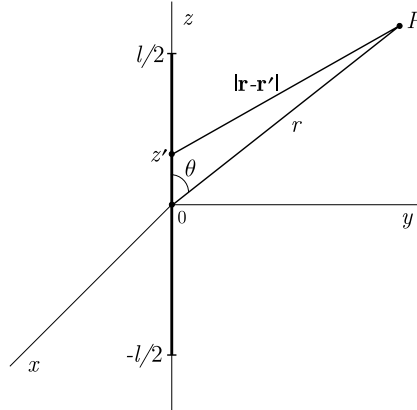


Рис. 6.

Векторний потенціал будемо обчислювати на віддальх r , значно більших від $l \sim r'$, тобто $r'/r \ll 1$, тому в знаменнику (8) покладемо

$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r$, а в часовому аргументі вектора густини струму, який враховує запізнення, збережемо члени з точністю до лінійного степеня малого параметра r'/r

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{r^2} \right)^{1/2} = r \left(1 + \frac{1}{2} \left[\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{r^2} \right] + \dots \right)$$

$$\approx r - (\mathbf{n}, \mathbf{r}') = r - z' \cos \theta,$$

$\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — напрямок випромінювання, θ — кут між векторами \mathbf{r} та \mathbf{r}' .
Для векторного потенціалу маємо

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r - z' \cos \theta}{c}) dV'$$

$$= \mathbf{e}_z \frac{J_0}{cr} \int \sin[k(z' + l/2)] \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{r - z' \cos \theta}{c}\right)\right) \delta(x') \delta(y') dV'$$

$$= \mathbf{e}_z \frac{J_0}{cr} e^{i(kr - \omega t)} \int_{-l/2}^{l/2} \sin[(m\pi/l)(z' + l/2)] e^{-i(m\pi/l)z' \cos \theta} dz'.$$

Розрахуємо інтеграл

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} \sin[(m\pi/l)(z' + l/2)] e^{-i(m\pi/l)z' \cos \theta} dz'$$

$$= \int_{-l/2}^{l/2} \left(\frac{e^{i[(m\pi/l)(z' + l/2)]} - e^{-i[(m\pi/l)(z' + l/2)]}}{2i} \right) e^{-i(m\pi/l)z' \cos \theta} dz'$$

$$= \frac{l}{im\pi} \left(\frac{e^{im\pi/2}}{1 - \cos \theta} \sin[(m\pi/2)(1 - \cos \theta)] - \frac{e^{-im\pi/2}}{1 + \cos \theta} \sin[(m\pi/2)(1 + \cos \theta)] \right)$$

$$= \frac{2l}{im\pi} \left(\frac{-\cos^2(m\pi/2) \sin[(m\pi/2) \cos \theta] + i \sin^2(m\pi/2) \cos[(m\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta} \right)$$

$$= \frac{2l}{im\pi} e^{im\pi/2} \frac{\sin[(m\pi/2)(1 - \cos\theta)]}{\sin^2\theta} = \frac{2c}{i\omega} e^{im\pi/2} \frac{\sin[m\pi \sin^2(\theta/2)]}{\sin^2\theta}.$$

Остаточно для векторного потенціала отримуємо

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z A(r, \theta, t),$$

$$A(r, \theta, t) = \frac{2J_0}{i\omega r} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{\sin^2\theta} e^{im\pi/2} \sin(m\pi \sin^2(\theta/2)).$$

Обчислимо напруженість магнітного поля $\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A}$. У сферичних координатах

$$\text{rot}_r \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \cdot A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi} A_\theta \right),$$

$$\text{rot}_\theta \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} A_r - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\varphi) \right),$$

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta} A_r \right).$$

У нашому випадку початок сферичної системи координат (рис. 7) знаходиться посередині провідника і полярна вісь спрямована вздовж провідника. Будемо в кожній точці спостереження P розкласти векторний потенціал \mathbf{A} на складові, спрямовані вздовж взаємно перпендикулярних напрямків зростання сферичних координат r, θ, φ , тобто ортів $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$. Отже,

$$A_r = A(r, \theta, t) \cos\theta,$$

$$A_\theta = A(r, \theta, t) \cos(\pi/2 + \theta) = -A(r, \theta, t) \sin\theta,$$

$$A_\varphi = 0.$$

Вектор \mathbf{A} не має складової A_φ , крім того, він не залежить від φ , тому

$$H_r = \text{rot}_r \mathbf{A} = 0, \quad H_\theta = \text{rot}_\theta \mathbf{A} = 0,$$

$$H_\varphi = \text{rot}_\varphi \mathbf{A} = -\sin\theta \frac{\partial A(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial A(r, \theta, t)}{\partial\theta}.$$

Зберігаючи лише члени порядку $1/r$, другий доданок у H_φ , пропорційний $1/r^2$ (оскільки $A(r, \theta, t) \sim 1/r$), треба відкинути, тому остаточно

$$H_\varphi = -\sin\theta \frac{\partial A(r, \theta, t)}{\partial r}$$

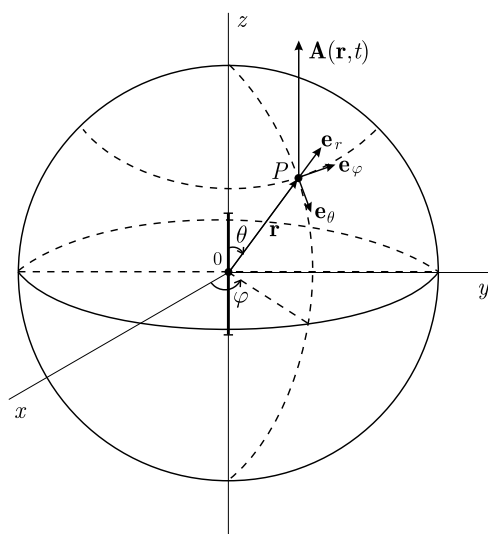


Рис. 7.

$$= -\frac{2J_0}{cr} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{\sin\theta} e^{im\pi/2} \sin(m\pi \sin(\theta/2)).$$

Усереднений за період коливань струму $T = 2\pi/\omega$ кутовий розподіл інтенсивності випромінювання антени знаходимо з (27)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{J_0^2}{\pi c} \frac{\sin^2(m\pi \sin^2(\theta/2))}{\sin^2\theta} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(m\pi/2 + kr - \omega t) dt \\ &= \frac{J_0^2}{2\pi c} \frac{\sin^2(m\pi \sin^2(\theta/2))}{\sin^2\theta}. \end{aligned}$$

З цього результату випливає, що мінімуми випромінювання визначаються умовою

$$\sin(m\pi \sin^2(\theta/2)) = 0,$$

звідки

$$\theta_n = 2 \arcsin \sqrt{n/m}, \quad n = 0, 1, \dots, m,$$

тобто кількість мінімумів дорівнює $m + 1$, а кількість максимумів дорівнює m — кількості півхвиль, що вкладаються на довжині антени.

Кутовий розподіл інтенсивності випромінювання для $m = 1, 2, 3$ зображено на рис. 8. Штриховою лінією зображено розподіл струму вздовж антени, суцільною — кутовий розподіл інтенсивності випромінювання.

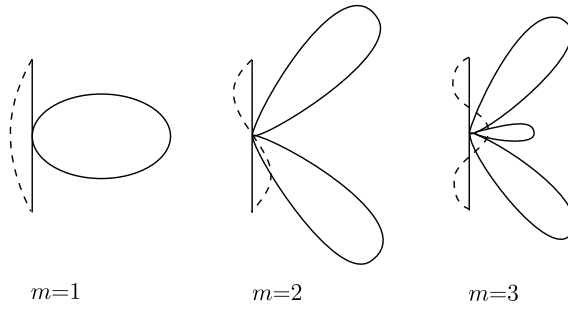


Рис. 8.

Для центрального максимуму (якщо m — непарне) $\theta = \pi/2$, тобто

$$\frac{\sin^2(m\pi \sin^2(\theta/2))}{\sin^2\theta} = 1.$$

Якщо кількість півхвиль велика ($m \gg 1$), то перший максимум випромінювання є при $\theta \approx \theta_1/2 \approx 1/\sqrt{m}$ і тоді

$$\frac{\sin^2(m\pi \sin^2(\theta/2))}{\sin^2\theta} = \frac{m}{2}.$$

Тому інтенсивність першого бокового листка випромінювання антени більша в $m/2$ раз від інтенсивності центрального листка. В цьому випадку випромінювання спрямоване здебільшого вздовж провідника антени.

13. У лінійній антені довжиною l поширюється біжуча хвиля струму (навантаження на кінцях антени підібрані так, щоб відбитої хвилі не виникало)

$$J(z, t) = J_0 \cos(\omega t - kz),$$

де $\omega = kc$, $|z| \leq l$, c — швидкість світла у вакуумі. Обчислити усереднений за період коливань струму кутовий розподіл інтенсивності випромінювання антени.

Як і в попередній задачі, виберемо початок координат посередині провідника і спрямуємо вісь z вздовж провідника (рис. 6). Об'ємна густина струму

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z J(z, t) \delta(x) \delta(y).$$

Для векторного потенціалу віддалях r , значно більших від $l \sim z'$, маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r - z' \cos \theta}{c}) dV' \\ &= \mathbf{e}_z \frac{J_0}{cr} \int_{-l/2}^{l/2} \cos \left(i\omega \left(t - \frac{r - z' \cos \theta}{c} \right) - kz' \right) dz' \\ &= \mathbf{e}_z \frac{J_0}{cr} \frac{1}{k(1 - \cos \theta)} 2 \sin \left(\frac{kl}{2} (1 - \cos \theta) \right) \cos(\omega t + kr). \end{aligned}$$

Для магнітного поля в сферичних координатах отримуємо

$$\begin{aligned} H_r &= H_\theta = 0, \\ H_\varphi &= -\sin \theta \frac{\partial A(r, \theta, t)}{\partial r} \\ &= \frac{2J_0}{cr} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \sin \left(\frac{kl}{2} (1 - \cos \theta) \right) \cos(\omega t + kr). \end{aligned}$$

Усереднений за період коливань струму $T = 2\pi/\omega$ кутовий розподіл інтенсивності випромінювання антени знаходимо з (27)

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle = \frac{J_0^2}{2\pi c} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} \sin^2 \left(\frac{kl}{2} (1 - \cos \theta) \right).$$

14. Частинка масою m і зарядом e під дією пружної сили може здійснювати гармонійні коливання з частотою ω_0 (гармонійний осцилятор). Враховуючи силу радіаційного тертя, знайти середню за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність дипольного випромінювання осцилятора, який здійснює вимушені коливання в зовнішньому електричному полі напруженістю $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$.

Рівняння руху осцилятора під дією зовнішньої сили (електричного поля) з урахуванням сили радіаційного тертя має вигляд

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2 \mathbf{r} - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0 \cos \omega t.$$

Оскільки сила радіаційного тертя значно менша від пружної сили, то в першому наближенні однорідне рівняння

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2\mathbf{r} - \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{r}} = 0$$

можна записати

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2\mathbf{r} = 0,$$

звідки

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2\mathbf{r}.$$

Отже, ми приходимо до рівняння для коливань, якщо є тертя

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0,$$

де

$$\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}.$$

Розв'язок цього рівняння загасає з часом

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \alpha).$$

Якщо є зовнішня періодична сила, нам достатньо знайти частковий розв'язок рівняння

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 \cos \omega t,$$

який коливається з частотою вимушуючої сили, оскільки власні коливання осцилятора загасають.

Розв'язок неоднорідного рівняння зручно шукати в комплексній формі, для чого пишемо в правій частині $e^{i\omega t}$ замість $\cos \omega t$ (беручи в остаточних виразах дійсну частину)

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Частковий інтеграл шукаємо у вигляді $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 e^{i\omega t}$, і знаходимо для \mathbf{r}_1 :

$$\mathbf{r}_1 = \frac{e\mathbf{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}.$$

Отже,

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)},$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{-\omega^2 e\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)} = \frac{-\omega^2 e\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}}{m\rho e^{i\varphi}},$$

де

$$\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{\omega \gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

Звідки

$$\ddot{\mathbf{r}}^2 = \frac{\omega^4 e^2 \mathbf{E}_0^2 (\operatorname{Re}\{e^{i(\omega t - \varphi)}\})^2}{m^2 \rho^2} = \frac{\omega^4 e^2 \mathbf{E}_0^2 \cos^2(\omega t - \varphi)}{m^2 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2)}.$$

Середня за період $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність випромінювання осцилятора

$$\begin{aligned} \langle I_p \rangle &= \frac{2e^2}{3c^3} \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{\mathbf{r}}^2 dt = \frac{2e^4 \omega^4 \mathbf{E}_0^2}{3c^3 m^2 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2)} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - \varphi) dt \\ &= \frac{e^4 \mathbf{E}_0^2}{3c^3 m^2} \frac{\omega^4}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2)}. \end{aligned}$$

Бібліографія

- [1] М. М. Бредов, В. В. Румянцев, И. Н. Топтыгин, *Классическая электродинамика* (Наука, Москва, 1985).
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (Наука, Москва, 1973).
- [3] И. Е. Тамм, *Основы теории электричества* (Наука, Москва, 1976).
- [4] А. И. Алексеев, *Сборник задач по классической электродинамике* (Наука, Москва, 1977).
- [5] Е. Г. Векштейн, *Сборник задач по электродинамике* (Высшая школа, Москва, 1966).
- [6] В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике* (Наука, Москва, 1970).