МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

# ВИПРОМІНЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до розв'язування задач з вибраних розділів електродинаміки

для студентів III курсу фізичного факультету

ЛЬВІВ – 1999

Рекомендовано до друку
кафедрою теоретичної фізики
Протокол № 51 від 2.07.99

Уклав Василь Михайлович Мигаль

Відповідальний за випуск проф. Л. Блажиєвський

Редактор М. Прихода

**ВИПРОМІНЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до розв'язування задач з вибраних розділів електродинаміки

для студентів III курсу фізичного факультету

Підписано до друку 5.07.99. Формат 60×84/16. Умовн. друк. арк. 2.
Умовн. фарбовідб. 2. Тираж 50. Зам. 314

Видавничий центр Львівського державного університету імені Івана Франка
290602 Львів, вул. Університетська, 1

Випромінювання електромагнітних хвиль будемо розглядати, вводячи векторний $\mathbf{A}$ і скалярний $\varphi$ електромагнітні потенціали:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{1}$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{2}$$

де $\mathbf{H}$ і $\mathbf{E}$ — напруженості магнітного і електричного полів, $c$ — швидкість світла.

Потенціали $\mathbf{A}$ і $\varphi$ визначені з точністю до ґрадієнтного перетворення:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi, \tag{3}$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \tag{4}$$

$\chi = \chi(\mathbf{r}, t)$ — довільна функція координат $\mathbf{r}$ і часу $t$. Якщо $\chi$ вибрати так, щоб задовольнялась умова Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

то отримаємо рівняння Даламбера для електромагнітних потенціалів:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \tag{6}$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \tag{7}$$

тут $\mathbf{j}$ — густина струму, $\rho$ — густина заряду.

Випромінювання електромагнітних хвиль описується частковими розв'язками рівнянь Даламбера у вигляді запізнюючих потенціалів:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',\ t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dV', \tag{8}$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}',\ t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dV', \tag{9}$$

де $\mathbf{r}$ — радіус–вектор точки спостереження, $\mathbf{r}'$ — радіус–вектор елемента об'єму, $t$ — час спостереження.

На великих віддалях від системи заряджених частинок достатньо малий елемент поверхні сферичної хвилі можна розглядати як плоску хвилю, в якій напруженості електричного $\mathbf{E}$ і магнітного $\mathbf{H}$ полів рівні за модулем ($E = H$) і утворюють правогвинтову трійку векторів з напрямком $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ поширення хвилі

$$\mathbf{E} = [\mathbf{H}, \mathbf{n}]. \tag{10}$$

Отже, для розрахунку електромагнітного поля випромінювання достатньо обчислити напруженість магнітного поля.

Помістимо початок координат всередині зарядженої системи, лінійні розміри якої є порядку $l$. На великих віддалях $r$ від системи $r \gg l \geq r'$ можна обмежитися розкладом $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - (\mathbf{n}, \mathbf{r}')$. Тоді векторний потенціал (8):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}',\ t - \frac{r}{c} + \frac{(\mathbf{n},\, \mathbf{r}')}{c})\ dV', \tag{11}$$

Розглянемо електромагнітне поле на великих віддалях від нашої системи зарядів — у хвильовій зоні: $r \gg \lambda \gg l$. Оскільки довжина випромінюваної хвилі велика порівняно з лінійними розмірами системи $\lambda \gg l$, то $\mathbf{j}(\mathbf{r}',\ t - \frac{r}{c} + \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{r}')}{c})$ можна розкласти в ряд за $\frac{(\mathbf{n}, \mathbf{r}')}{c}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_p(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}_m(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}_Q(\mathbf{r}, t) + \ldots, \tag{12}$$

$$\mathbf{A}_p(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c})}{cr}, \tag{13}$$

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{r}, t) = \frac{[\dot{\mathbf{m}}(t - \frac{r}{c}),\, \mathbf{n}]}{cr}, \tag{14}$$

$$\mathbf{A}_Q(\mathbf{r}, t) = \frac{\ddot{\mathbf{Q}}(t - \frac{r}{c})}{6c^2 r}, \tag{15}$$

де $\mathbf{A}_p(\mathbf{r}, t)$ — дипольне, $\mathbf{A}_m(\mathbf{r}, t)$ — магнітно–дипольне, $\mathbf{A}_Q(\mathbf{r}, t)$ — квадрупольне наближення для векторного потенціалу; $\dot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c})$ — похідна за часом від електричного дипольного моменту

$$\mathbf{p}(t - \frac{r}{c}) = \int \mathbf{r}'\, \rho(\mathbf{r}',\, t - \frac{r}{c})\, dV';$$

$\dot{\mathbf{m}}(t - \frac{r}{c})$ — похідна за часом від магнітного дипольного моменту

$$\mathbf{m}(t - \frac{r}{c}) = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r}',\ \mathbf{j}(\mathbf{r}',\, t - \frac{r}{c})]\, dV';$$

$\ddot{\mathbf{Q}}(t-\frac{r}{c})$ — друга похідна за часом від вектора, компоненти якого

$$Q_\alpha(t-\frac{r}{c}) = \sum_\beta n_\beta\, Q_{\alpha\beta}(t-\frac{r}{c}),$$

$$Q_{\alpha\beta}(t-\frac{r}{c}) = \int \rho(\mathbf{r}',\, t-\frac{r}{c})\,(3x'_\alpha\, x'_\beta - \mathbf{r}'^2\,\delta_{\alpha\beta})\, dV',$$

$Q_{\alpha\beta}$ — тензор квадрупольного моменту системи.

Електричний дипольний момент, магнітний дипольний момент, тензор квадрупольного моменту залежать від часу з урахуванням запізнення.

Для напруженості магнітного поля випромінюваної хвилі (без врахування членів $\sim 1/r^2$) одержуємо

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}_p(\mathbf{r},t) + \mathbf{H}_m(\mathbf{r},t) + \mathbf{H}_Q(\mathbf{r},t) + \ldots, \tag{16}$$

$$\mathbf{H}_p(\mathbf{r},t) = \frac{[\ddot{\mathbf{p}},\, \mathbf{n}]}{c^2 r}, \tag{17}$$

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{r},t) = \frac{[[\ddot{\mathbf{m}},\, \mathbf{n}],\, \mathbf{n}]}{c^2 r}, \tag{18}$$

$$\mathbf{H}_Q(\mathbf{r},t) = \frac{[\dddot{\mathbf{Q}},\, \mathbf{n}]}{6c^3 r}. \tag{19}$$

У хвильовій зоні потік енергії електромагнітного поля визначається вектором Умова–Пойтінга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{E},\, \mathbf{H}] = \frac{cH^2}{4\pi}\,\mathbf{n}. \tag{20}$$

Інтенсивність випромінювання $I$ рівна потоку вектора Умова–Пойтінга через сферу великого радіуса $r$ з центром в початку координат

$$I = \frac{c}{4\pi}\int H^2 r^2 d\Omega. \tag{21}$$

Використовуючи (16) і (21), для інтенсивності випромінювання одержуємо такий вираз:

$$I = I_p + I_m + I_Q, \tag{22}$$

$$I_p = \frac{2\ddot{\mathbf{p}}^2}{3c^3}, \tag{23}$$

$$I_m = \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3}, \tag{24}$$

$$I_Q = \frac{1}{180c^5} \sum_{\alpha\beta} \dddot{\mathbf{Q}}^2_{\alpha\beta}, \tag{25}$$

де $I_p$, $I_m$, $I_Q$, — інтенсивності дипольного, магнітно–дипольного, квадрупольного випромінювання відповідно.

Інтенсивність випромінювання $dI$ в елемент тілесного кута $d\Omega$ рівна потокові вектора Умова–Пойтінга через елемент сферичної поверхні $dS = r^2 d\Omega$ великого радіуса $r$, центр якої розміщений в початку координат. Кутовий розподіл інтенсивності випромінювання знаходимо, розрахувавши потік вектора Умова–Пойтінга (20) через вказаний елемент сферичної поверхні

$$dI = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2 d\Omega, \tag{26}$$

де напруженість магнітного поля визначається виразами (16)–(19). Для інтенсивності випромінювання $dI$ в одиничному тілесному куті $d\Omega$ маємо

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2. \tag{27}$$

Якщо випромінює макроскопічне тіло розмірами $l \geq \lambda$, то розклад поля випромінювання в ряд за $\frac{(\mathbf{n}, \mathbf{r}')}{c}$ не є справедливим, тому треба користуватися точними виразами для запізнюючих потенціалів (8), (9).

На заряджену частинку, яка випромінює, з боку випроміненого нею електромагнітного поля діє гальмівна сила — сила радіаційного тертя, яка для нерелятивістських швидкостей частинки має вигляд

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \dddot{\mathbf{r}}, \tag{28}$$

де $e$ — заряд, $\mathbf{r}$ — радіус–вектор рухомої частинки. Ця сила мала порівняно з зовнішньою силою, що діє на частинку.

**1**. Показати, що для ізольованої системи, яка складається з $N$ частинок з однаковим питомим зарядом ($e_i/m_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \ldots, N$), інтенсивність дипольного випромінювання $I_p$ дорівнює нулеві.

Дипольний момент системи

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} e_i \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{e_i}{m_i} m_i \mathbf{r}_i = \text{const} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i.$$

Інтенсивнисть дипольного випромінювання $I_p$ згідно з (23):

$$I_p = \frac{2\ddot{\mathbf{p}}^2}{3c^3}.$$

Імпульс ізольованої системи є інтеґралом руху:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i = \text{const}_1.$$

Отже,

$$\ddot{\mathbf{p}} = \frac{d^2}{dt^2} \left[ \text{const} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \right] = \frac{d}{dt} \left[ \text{const} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \right] = 0.$$

**2**. Через конденсатор пролетіла частинка масою $m$ і зарядом $q$. Відстань між обкладками конденсатора рівна $l$, а напруженість електричного поля $\mathbf{E}$ в конденсаторі однорідна і постійна. Кут між вектором $\mathbf{E}$ і напрямком швидкості частинки $\mathbf{v_0}$ під час вльоту дорівнює $\alpha$. Знаки заряду $q$ і $\cos\alpha$ однакові. Оцінити енергію, що втрачається частинкою під час прольоту через конденсатор на дипольне випромінювання.

Початок координат виберемо в точці вльоту частинки в конденсатор, а вісь $y$ спрямуємо в бік руху перпендикулярно до пластин конденсатора. З рівняння руху

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}$$

знаходимо прискорення частинки, після чого для інтенсивності дипольного випромінювання отримуємо

$$I_p = \frac{2q^2\ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3} = \frac{2q^4E^2}{3c^3m^2}.$$

Спроектуємо рівняння руху на вісь $y$:

$$\ddot{y} = \frac{qE}{m}$$

і, проінтеґрувавши його, знайдемо закон руху частинки вздовж осі $y$

$$\dot{y} = \frac{qE}{m}\,t + \dot{y}_0,$$

$$y = \frac{qE}{2m}\,t^2 + \dot{y}_0 t + y_0.$$

З початкових умов ($t = 0, \quad y_0 = 0$) знаходимо початкову швидкість:

$$\dot{y}_0 = v_0 \cos\alpha.$$

Остаточно закон руху частинки вздовж осі $y$:

$$y = \frac{qE}{2m}\,t^2 + v_0 t \cos\alpha.$$

Час руху $t_p$ зарядженої частинки через конденсатор оцінимо з умови $l \sim y$:

$$l = \frac{qE}{2m}\,t_p^2 + v_0 t_p \cos\alpha.$$

Це є квадратне рівняння стосовно $t_p$, взявши додатний корінь, отримаємо

$$t_p = \frac{v_0 m}{qE}\left[\sqrt{\frac{2qEl}{mv_0^2} + \cos^2\!\alpha} - \cos\alpha\right].$$

Енергія $\mathcal{E}$, випромінена за час прольоту зарядженої частинки через конденсатор, є порядку:

$$\mathcal{E} = I_p \cdot t_p = \frac{2q^3 E v_0}{3c^3 m}\left[\sqrt{\frac{2qEl}{mv_0^2} + \cos^2\!\alpha} - \cos\alpha\right].$$

**3**. Електрон масою $m$ і зарядом $e$ пролітає на великій віддалі $a$ від нерухомого ядра з зарядом $Z|e|$. У безмежно віддалений момент часу $t = -\infty$ електрон мав швидкість по абсолютній величині рівну $v_0$. Нехтуючи викривленням траєкторії, знайти енергію $\mathcal{E}$, яку втрачає електрон на дипольне випромінювання за час прольоту.

Повна енергія випромінювання електрона

$$\mathcal{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_p \, dt = \frac{2e^2}{3c^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ddot{\mathbf{r}}^2 \, dt.$$

Прискорення електрона $\ddot{\mathbf{r}}$ знаходимо з рівняння руху

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{Ze^2\mathbf{r}}{r^3}.$$

Це дає змогу записати енергію випромінювання у вигляді

$$\mathcal{E} = \frac{2Z^2e^6}{3m^2c^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r^4} \, dt.$$

Нехай ядро знаходиться в початку координат, а електрон рухається, як зображено на рис. 1, в площині $xoy$ і в момент часу $t = 0$ перетинає вісь $y$.

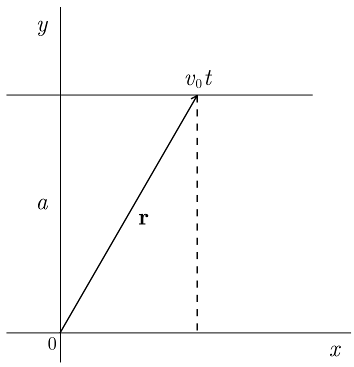


Рис. 1.

Вважаючи траєкторію електрона прямолінійною і нехтуючи зміною його швидкості $v_x \sim v_0$, запишемо віддаль між електроном і ядром у вигляді

$$r = \sqrt{a^2 + v_0^2 t^2},$$

звідки

$$\mathcal{E} = \frac{2Z^2e^6}{3m^2c^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(a^2+v_0^2t^2)^2}.$$

Для розрахунку інтеґрала

$$A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(a^2+v_0^2t^2)^2}$$

використаємо підстановку

$$t = \frac{a}{v_0}\operatorname{tg}\theta,$$

тоді

$$A = \frac{1}{v_0a^3}\int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2v_0a^3}.$$

У результаті одержуємо

$$\mathcal{E} = \frac{\pi Z^2e^6}{3m^2c^3v_0a^3}.$$

**4**. У класичній моделі атома, запропонованій Резерфордом, електрон масою $m$ і зарядом $e$ обертається по коловій орбіті навколо нерухомого ядра з зарядом $Z|e|$. Знайти закон зменшення повної енергії електрона $\mathcal{E}$ за рахунок дипольного випромінювання. Обчислити час $t$, через який електрон впаде на ядро внаслідок втрати енергії на дипольне випромінювання. У початковий момент часу $t_0 = 0$ електрон знаходився на віддалі $R$ від ядра.

Відхилення від колової орбіти, спричинене втратою енергії електрона на випромінювання, достатньо мале за один оберт навколо ядра. Тому можна вважати, що

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2},$$

звідки

$$v^2 = \frac{Ze^2}{mr}.$$

Повна енергія електрона

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{r} = -\frac{Ze^2}{2r}.$$

Знайшовши прискорення електрона $\ddot{\mathbf{r}}$ з рівняння руху

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Ze^2}{r^2},$$

виразимо інтенсивність дипольного випромінювання через повну енергію електрона $\mathcal{E}$:

$$I_p = \frac{2e^2\ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3} = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{Ze^2}{mr^2}\right)^2 = \frac{32}{3c^3(mZe)^2}\left(\frac{Ze^2}{2r}\right)^4 = \frac{32\,\mathcal{E}^4}{3c^3(mZe)^2}.$$

Енергія електрона втрачається на випромінювання:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{32\,\mathcal{E}^4}{3c^3(mZe)^2},$$

звідки отримуємо закон зменшення повної енергії електрона, розділивши змінні

$$-\int\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}^4} = \frac{32}{3c^3(mZe)^2}\int dt + \text{const},$$

$$\frac{1}{3\mathcal{E}^3} = \frac{32\,t}{3c^3(mZe)^2} + \text{const}.$$

Константу інтеґрування знаходимо з початкових умов: при $t = 0$ початкова енергія електрона

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{Ze^2}{2R},$$

а саме

$$\text{const} = \frac{1}{3\,\mathcal{E}_0^3}.$$

Остаточно

$$\frac{1}{\mathcal{E}^3} = \frac{1}{\mathcal{E}_0^3} + \frac{32\,t}{c^3(mZe)^2}.$$

Час падіння $t$ електрона на ядро отримаємо при $r \to 0$, тобто коли $\mathcal{E} \to -\infty$:

$$t = \frac{m^2c^3R^3}{4Ze^4}.$$

**5**. Частинка масою $m$ і зарядом $e$ пролітає по діаметру кулі радіуса $R$, всередині якої рівномірно розподілений заряд $Q$. Заряди частинки і кулі протилежного знака. Перед вльотом у кулю частинка мала кінетичну енергію $\mathcal{E}_0$. Знайти енергію $\mathcal{E}$, що втрачається частинкою на дипольне випромінювання під час прольоту через кулю.

Виберемо початок координат у центрі кулі. Спочатку обчислимо напруженість електричного поля всередині кулі, скориставшись теоремою Ґауса

$$\oint\limits_S (\mathbf{E},\, d\mathbf{S}) = 4\pi \int\limits_V \rho\, dV.$$

Поле такої системи є центрально–симетричним (напрямок вектора $\mathbf{E}$ в будь-якій точці проходить через центр кулі, а модуль вектора $\mathbf{E}$ повинен залежати тідьки від віддалі $r$ до центра кулі), тому за замкнену поверхню $S$ зручно взяти концентричну сферу.

Сфера радіусом $r < R$ охоплює заряд $q = Q(r/R)^3$, бо

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho, \quad q = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho, \quad \frac{q}{Q} = \frac{r^3}{R^3}.$$

Тому згідно з теоремою Ґауса

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\, \frac{Q\, r}{R^3},$$

звідки

$$E_r = \frac{Q\, r}{R^3},$$

або

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{R^3}\,\mathbf{r}.$$

Отже, всередині рівномірно зарядженої кулі напруженість електричного поля лінійно росте з віддаллю $r$ від її центра.

Запишемо рівняння руху частинки всередині кулі. Якщо вплив поля випромінювання на рух частинки незначний і ним можна знехтувати, то

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\frac{Q}{R^3}\,\mathbf{r}.$$

Нехай рух відбувається вздовж осі $x$, тоді

$$\ddot{x} = e\,\frac{Q}{mR^3}\,x.$$

Тепер інтенсивність дипольного випромінювання частинки $I_p$ є функцією координати $x$:

$$I_p = \frac{2e^2\ddot{x}^2}{3c^3} = \frac{2Q^2e^4x^2}{3c^3m^2R^6}.$$

Енергію, яка втрачається частинкою під час прольоту через кулю, запишемо так:

$$\mathcal{E} = \int\limits_{-R}^{+R} I_p\,\frac{dx}{\dot{x}}\,.$$

Для розрахунку швидкості частинки $\dot{x}$ скористаємось законом збереження енергії

$$\mathcal{E}_0 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x).$$

Тут не врахована енергія випромінювання $\mathcal{E}$, яка є малою.

Потенціальну енергію $U(x)$ знайдемо з виразу

$$F_x = -\frac{\partial U(x)}{\partial x},$$

де $F_x = e\cdot E_x = e\cdot(Q\,x)/R^3$. Проінтеґрувавши, маємо

$$U(x) = -\int F_x\,dx + \mathrm{const},$$

$$U(x) = -\frac{e\,Q}{R^3}\,\frac{x}{2} + \mathrm{const},$$

Постійну інтеґрування знайдемо з умови $U(R) = 0$

$$\mathrm{const} = \frac{e\,Q}{2R^3}\,R^2.$$

У результаті маємо

$$U(x) = -\frac{e\,Q}{2R^3}\,(x^2 - R^2).$$

При таких наближеннях швидкість частинки всередині кулі

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0}{m} + \frac{e\,Q}{mR^3}\,(x^2 - R^2)}$$

і для $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \frac{2Q^2e^4}{3c^3m^2R^6}\int\limits_{-R}^{+R}\frac{x^2dx}{\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0}{m} + \frac{e\,Q}{mR^3}\,(x^2 - R^2)}}.$$

Оскільки заряди частинки і кулі протилежного знака ($e\,Q = -|e\,Q|$), то

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{2Q^2e^4}{3c^3m^2R^6}\int\limits_{-R}^{+R}\frac{x^2dx}{\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0}{m} + \frac{|e\,Q|}{mR} - \frac{|e\,Q|}{mR^3}x^2}}\\ &= \frac{2Q^2e^4\sqrt{mR}}{3c^3m^2R^6}\int\limits_{-R}^{+R}\frac{x^2dx}{\sqrt{2R\mathcal{E}_0 + |e\,Q| - \frac{|e\,Q|}{R^2}x^2}}.\end{aligned}$$

Потрібно розрахувати інтеґрал

$$A = \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a - b\,x^2}}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Запишемо

$$A = -\frac{1}{b}\int\frac{a - b\,x^2 - a}{\sqrt{a - b\,x^2}}\,dx = -\frac{1}{b}\int\sqrt{a - b\,x^2}\,dx + \frac{a}{b}\int\frac{dx}{\sqrt{a - b\,x^2}}.$$

Проінтеґруємо перший інтеґрал у правій частині частинами

$$\int\sqrt{a - b\,x^2}\,dx = x\,\sqrt{a - b\,x^2} + b\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a - b\,x^2}},$$

звідки

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a - b\,x^2}} = -\frac{x}{b}\,\sqrt{a - b\,x^2} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a - b\,x^2}} + \frac{a}{b}\int\frac{dx}{\sqrt{a - b\,x^2}}.$$

Тепер

$$\begin{aligned}A &= -\frac{x}{2b}\,\sqrt{a - b\,x^2} + \frac{a}{2b}\int\frac{dx}{\sqrt{a - b\,x^2}}\\ &= \frac{1}{2b}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\,\arcsin\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,x\right) - x\,\sqrt{a - b\,x^2}\right).\end{aligned}$$

Підставивши межі інтеґрування, остаточно отримаємо

$$\mathcal{E} = \frac{2Qe^3}{3mc^2R^2}\sqrt{\frac{|e\,Q|}{mc^2R}}\left[\left(\frac{2\mathcal{E}_0R}{|e\,Q|}+1\right)\arcsin\frac{1}{\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0R}{|e\,Q|}+1}} - \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0R}{|e\,Q|}}\right].$$

**6**. Частинка масою $m$ і зарядом $e$ здійснює гармонійні коливання з частотою $\omega$ (гармонійний осцилятор). Знайти напруженості електричного і магнітного полів в хвильовій зоні та середню за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність дипольного випромінювання.

Нехай заряджена частинка коливається за гармонійним законом

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0\cos(\omega t + \alpha);$$

її дипольний момент

$$\mathbf{p} = e\mathbf{d} = e\mathbf{d}_0\cos(\omega t + \alpha),$$

$\mathbf{d}_0$ — постійний вектор, $\alpha$ — початкова фаза.

Для напруженостей магнітного та електричного полів випромінюваної хвилі згідно з (17), (10) маємо

$$\mathbf{H} = \frac{[\ddot{\mathbf{p}},\,\mathbf{n}]}{c^2r},$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{H},\,\mathbf{n}].$$

Знайдемо спочатку напруженість магнітного поля

$$\mathbf{H} = -\frac{e\omega^2\cos(\omega(t-r/c)+\alpha)}{c^2r^2}\,[\mathbf{d}_0,\,\mathbf{r}].$$

Введемо сферичну систему координат з центром в диполі і зорієнтуємо диполь вздовж полярної осі (рис. 2).

У точці спостереження $P$ розкладемо всі вектори на складові, спрямовані вздовж взаємно перпендикулярних напрямків *зростання* сферичних координат $r, \theta, \varphi$, тобто ортів $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$.

Векторний добуток $[\mathbf{d}_0,\,\mathbf{r}]$ у кожній точці поля $P$ спрямований по дотичній до дуги паралелі, яка проходить через точку $P$, і притому у бік *зростання* кута $\varphi$. Складові вектора $[\mathbf{d}_0,\,\mathbf{r}]$ дорівнюють

$$[\mathbf{d}_0,\,\mathbf{r}]_r = [\mathbf{d}_0,\,\mathbf{r}]_\theta = 0, \quad [\mathbf{d}_0,\,\mathbf{r}]_\varphi = rd_0\sin\theta,$$

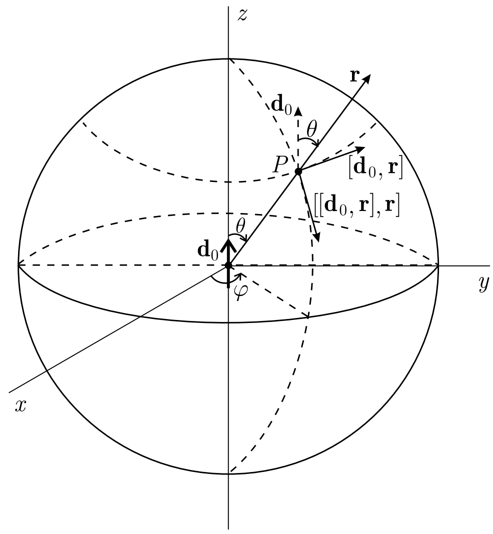


Рис. 2.

тому

$$H_r = H_\theta = 0, \quad H_\varphi = -\frac{e\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)\, d_0 \sin\theta}{c^2 r}.$$

Напруженість електричного поля

$$\mathbf{E} = -\frac{e\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)}{c^2 r^3}\, [[\mathbf{d}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}].$$

Векторний добуток $[[\mathbf{d}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]$ у точці $P$ спрямований по дотичній до дуги меридіана, який проходить через точку $P$, у бік *зростання* кута $\theta$. Складові вектора $[[\mathbf{d}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]$ дорівнюють

$$[[\mathbf{d}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]_r = [[\mathbf{d}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]_\varphi = 0, \quad [[\mathbf{d}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]_\theta = r^2 d_0 \sin\theta,$$

тому

$$E_r = E_\varphi = 0, \quad E_\theta = -\frac{e\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)\, d_0 \sin\theta}{c^2 r}.$$

Отже,

$$H_\varphi = E_\theta.$$

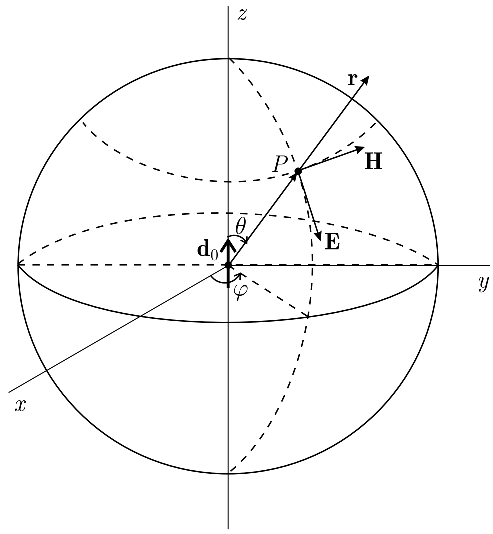


Рис. 3.

У хвильовій зоні осцилятора напруженості електричного і магнітного полів по модулю рівні, вони залежать від віддалі до осцилятора $r$ і від полярного кута $\theta$: на осі осцилятора ($\theta = 0,\ \theta = \pi$) поле відсутнє, максимального значення воно досягає в екваторіальній площині осцилятора ($\theta = \pi/2$). У кожній точці хвильової зони вектори $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{r}$ взаємо перпендикулярні і утворюють правогвинтову систему, причому $\mathbf{E}$ спрямований по дузі меридіана, $\mathbf{H}$ — по дузі паралелі (див. рис. 3). Фаза $\omega(t - r/c)$ векторів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ поширюється в напрямку радіус–вектора зі швидкістю $c$.

Інтенсивність дипольного випромінювання

$$I_p = \frac{2\ddot{\mathbf{p}}^2}{3c^3} = \frac{2\omega^4 e^2 d_0^2 \cos^2(\omega(t - r/c) + \alpha)}{3c^3}.$$

Середня за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність дипольного випромінювання:

$$\langle I_p \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I_p\, dt = \frac{2\omega^4 e^2 d_0^2}{3c^3}\ \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega(t - r/c) + \alpha)\, dt = \frac{\omega^4 e^2 d_0^2}{3c^3}.$$

**7**. Найпростіша лінійна антена — це тонкий прямолінійний провідник завдовжки $l$, по якому тече струм $J = J_0 \cos\omega t$, причому антена настільки коротка, що струм вважається незмінним по всій її довжині. Знайти середню за період зміни струму $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність випромінювання антени.

Оскільки довжина антени фіксована, то електричний дипольний момент $p = e(t)\, l$ буде змінюватися з часом за рахунок зміни заряду $e(t)$ на одному з кінців антени

$$\dot{p} = \frac{de}{dt}\, l = J\, l = J_0\, l \cos\omega t,$$

тому

$$\ddot{p} = -J_0\, l\, \omega \sin\omega t.$$

Інтенсивність випромінювання антени

$$I_p = \frac{2\ddot{\mathbf{p}}^2}{3c^3} = \frac{2J_0^2 l^2 \omega^2 \sin^2\omega(t - r/c)}{3c^3}.$$

Усереднення за період зміни струму $T = 2\pi/\omega$ дає

$$\langle I_p \rangle = \frac{1}{T}\int\limits_0^T I_p\, dt = \frac{2J_0^2 l^2 \omega^2}{3c^3}\ \frac{1}{T}\int\limits_0^T \sin^2\omega(t - r/c)\, dt = \frac{J_0^2 l^2 \omega^2}{3c^3}.$$

**8**. Показати, що для ізольованої системи, яка складається з $N$ частинок з однаковим питомим зарядом ($e_i/m_i = e/m = \mathrm{const}$, $i = 1, 2, \ldots, N$), інтенсивність магнітно–дипольного випромінювання $I_m$ дорівнює нулеві.

Магнітний момент системи $N$ частинок

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\sum_{i=1}^{N} e_i[\mathbf{r}_i,\, \mathbf{v}_i] = \frac{1}{2c}\sum_{i=1}^{N} \frac{e_i}{m_i}\, m_i[\mathbf{r}_i,\, \mathbf{v}_i] = \frac{e}{2mc}\sum_{i=1}^{N} m_i[\mathbf{r}_i,\, \mathbf{v}_i].$$

Якщо швидкості всіх заряджених частинок $v \ll c$, то $m_i\mathbf{v}_i$ є імпульс $i$-тої частинки $\mathbf{p}_i$, і ми отримуємо

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2mc}\sum_{i=1}^{N}\, [\mathbf{r}_i,\, \mathbf{p}_i] = \frac{e}{2mc}\,\mathbf{M}.$$

Тут

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{N}\, [\mathbf{r}_i,\, \mathbf{p}_i]$$

— механічний момент імпульсу системи, який для ізольованої системи є інтеґралом руху, тому $\dot{\mathbf{m}} = 0$.

Отже, інтенсивнисть магнітно–дипольного випромінювання дорівнює нулеві:

$$I_m = \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3} = 0.$$

**9**. Показати, що магнітно–дипольне випромінювання відсутнє у системі, яка складається з двох заряджених частинок, які рухаються з нерелятивістськими швидкостями.

Магнітний момент системи двох частинок з зарядами $e_1$ і $e_2$ дорівнює

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\left(e_1[\mathbf{r}_1,\, \mathbf{v}_1] + e_2[\mathbf{r}_2,\, \mathbf{v}_2]\right),$$

де $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ — координати частинок, $\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1$, $\mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2$ — їх швидкості. Перейдемо до системи центра мас

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,$$

де $\mathbf{R}$ — координата центра мас, $\mathbf{r}$ — координата відносного руху. Виразимо координати частинок $\mathbf{r}_1$ та $\mathbf{r}_2$ через $\mathbf{R}$ та $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{(m_1 + m_2)\mathbf{R} - m_2\mathbf{r}}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{r}_2 = \frac{(m_1 + m_2)\mathbf{R} + m_1\mathbf{r}}{m_1 + m_2}.$$

Виберемо початок координат у центрі мас $\mathbf{R} = 0$, тоді

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\mathbf{r}.$$

Запишемо магнітний момент $\mathbf{m}$ через координати центра мас

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2}\right)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left[\mathbf{r},\, \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{v}\right].$$

Механічний момент імпульсу $\mathbf{M}$ в координатах центра мас

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_1,\, \mathbf{p}_1] + [\mathbf{r}_2,\, \mathbf{p}_2] = [\mathbf{r}_1,\, m_1\mathbf{v}_1] + [\mathbf{r}_2,\, m_2\mathbf{v}_2] = \left[\mathbf{r},\, \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{v}\right].$$

Отже,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2}\right)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{M}.$$

Механічний момент імпульсу **M** для системи двох частинок є інтеґралом руху, тому $\dot{\mathbf{m}} = 0$. Отже, інтенсивнисть магнітно–дипольного випромінювання дорівнює нулеві:

$$I_m = \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3} = 0.$$

**10**. Найпростіша рамочна антена — це прямокутна рамка зі сторонами $a$ і $b$, по якій тече лінійний струм силою $J = J_0 \cos \omega t$. Визначити середню за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність магнітно–дипольного випромінювання.

У випадку лінійного струму формула для магнітного дипольного моменту

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r},\ \mathbf{j}]\, dV$$

набуває простішого вигляду. Об'єм елемента $dl$ провідника дорівнює

$$dV = S\, dl,$$

де $S$ — площа поперечного перетину. Тому можна записати:

$$\mathbf{j}\, dV = \mathbf{j}\, S\, dl = j\, S\, \mathbf{dl} = J\, d\mathbf{l},$$

де $J = j\, S$ — сила струму, а $d\mathbf{l}$ — елемент довжини провідника, який за напрямком збігається з напрямком струму в провіднику. Це перетворення включає інтеґрування по поперечному перетину провідника, але оскільки лінійні розміри поперечного перетину значно менші від відстані до точок, в яких розраховується магнітний момент, при такому інтеґруванні можна знехтувати зміною цієї відстані до різних елементів струму в цьому перетині і вважати цю відстань однаковою. Тому перехід до лінійних струмів здійснюється простою заміною

$$\mathbf{j}\, dV \to J\, d\mathbf{l},$$

після чого залишається інтеґрування за $d\mathbf{l}$ вздовж у нашому випадку замкнутого контура провідника $L$:

$$\mathbf{m} = \frac{J}{2c} \oint\limits_L [\mathbf{r},\ d\mathbf{l}].$$

Враховуючи, що

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2} [\mathbf{r},\ d\mathbf{l}]$$

є вектор елемента поверхні, яку обмежує контур струму, маємо

$$\frac{1}{2}\oint\limits_L [\mathbf{r},\ d\mathbf{l}] = \int\limits_S d\mathbf{S} = \mathbf{S}.$$

$\mathbf{S}$ — вектор поверхні, натягнутої на контур зі струмом $L$, який становить з напрямком обходу контура правогвинтову систему.

Звідси магнітний момент рамки зі струмом дорівнює

$$\mathbf{m} = \frac{J}{c}\ \mathbf{S},$$

де $|\mathbf{S}| = a\,b$ — площа рамки.

Інтенсивність магнітно–дипольного випромінювання

$$I_m = \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3} = \frac{2a^2b^2J_0^2\omega^4\cos^2\omega(t-r/c)}{3c^5}.$$

Усереднення за період зміни струму $T = 2\pi/\omega$ дає

$$\langle I_m\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_0^T I_m\,dt = \frac{2a^2b^2J_0^2\omega^4}{3c^5}\ \frac{1}{T}\int\limits_0^T \cos^2\omega(t-r/c)\,dt = \frac{a^2b^2J_0^2\omega^4}{3c^5}.$$

**11**. Знайти напруженості електричного і магнітного полів у хвильовій зоні та середню за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність випромінювання магнітного диполя, момент якого

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0\,\cos(\omega t + \alpha).$$

Для напруженостей магнітного та електричного полів випромінюваної хвилі магнітним диполем згідно з (18), (10) маємо

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{[[\ddot{\mathbf{m}},\,\mathbf{n}],\,\mathbf{n}]}{c^2r},$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{H},\,\mathbf{n}] = \frac{[\mathbf{n},\,\ddot{\mathbf{m}}]}{c^2r}.$$

Введемо сферичну систему координат з центром у диполі і зорієнтуємо магнітний диполь (за аналогією з електричним диполем, див. задачу **6**) вздовж полярної осі (рис. 4).

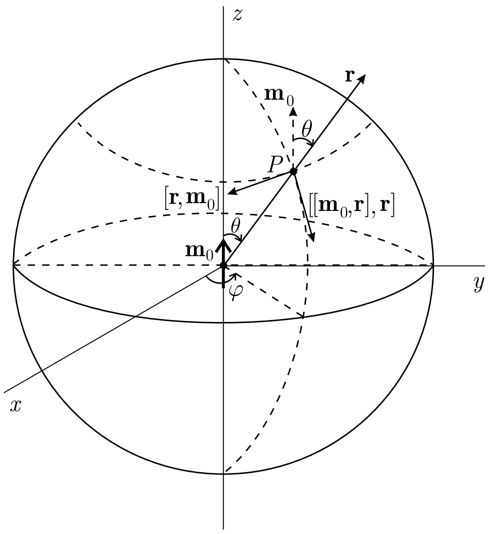


Рис. 4.

Обчислимо спочатку напруженість електричного поля

$$\mathbf{E} = \frac{\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)}{c^2 r^2} [\mathbf{m}_0, \mathbf{r}].$$

Складові вектора $[\mathbf{m}_0, \mathbf{r}]$ дорівнюють

$$[\mathbf{m}_0, \mathbf{r}]_r = [\mathbf{m}_0, \mathbf{r}]_\theta = 0, \quad [\mathbf{m}_0, \mathbf{r}]_\varphi = r m_0 \sin\theta,$$

тому

$$E_r = E_\theta = 0, \quad E_\varphi = \frac{\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)\, m_0 \sin\theta}{c^2 r}.$$

Напруженість магнітного поля

$$\mathbf{H} = -\frac{\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)}{c^2 r^3} [[\mathbf{m}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}].$$

Складові вектора $[[\mathbf{m}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]$ дорівнюють

$$[[\mathbf{m}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]_r = [[\mathbf{m}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]_\varphi = 0, \quad [[\mathbf{m}_0, \mathbf{r}], \mathbf{r}]_\theta = r^2 m_0 \sin\theta,$$

тому

$$H_r = H_\varphi = 0, \quad H_\theta = -\frac{\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)\, m_0 \sin\theta}{c^2 r}.$$

У хвильовій зоні магнітного диполя напруженості електричного і магнітного полів по модулю рівні, вони залежать від віддалі до осцилятора $r$ і від полярного кута $\theta$: на осі осцилятора ($\theta = 0$, $\theta = \pi$) поле відсутнє, максимального значення воно досягає в екваторіальній площині осцилятора ($\theta = \pi/2$). У кожній точці хвильової зони вектори $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{r}$ взаємо перпендикулярні і утворюють правогвинтову систему, причому $\mathbf{H}$ спрямований по дузі меридіана, $\mathbf{E}$ — по дузі паралелі (див. рис. 5). Отже, поле магнітного диполя може бути отримане з поля випромінювання електричного диполя (див. задачу **6**) шляхом заміни: $e\mathbf{d}_0 \to \mathbf{m}_0, \mathbf{E} \to \mathbf{H}, \mathbf{H} \to -\mathbf{E}$.

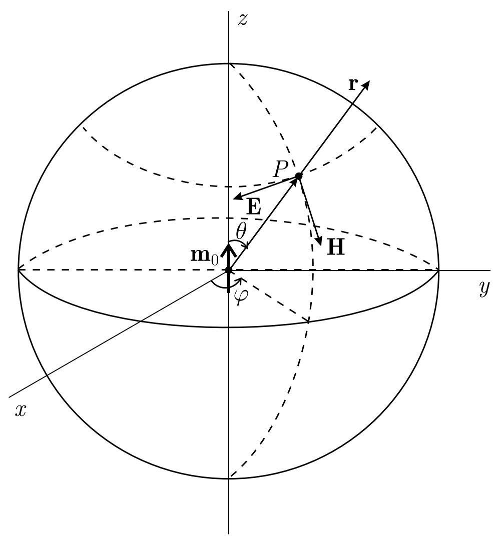


Рис. 5.

Інтенсивність магнітно–дипольного випромінювання

$$I_m = \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3} = \frac{2\omega^4 m_0^2 \cos^2(\omega(t - r/c) + \alpha)}{3c^3}.$$

Середня за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність магнітно–дипольного випромінювання:

$$\langle I_m \rangle = \frac{1}{T}\int\limits_0^T I_p\,dt = \frac{2\omega^4 m_0^2}{3c^3}\ \frac{1}{T}\int\limits_0^T \cos^2(\omega(t-r/c)+\alpha)\,dt = \frac{\omega^4 m_0^2}{3c^3}.$$

**12**. Лінійна антена є безмежно тонким провідником завдовжки $l$, в якому збуджена стояча хвиля струму

$$J(z,t) = J_0 \sin[k(z+l/2)]e^{-i\omega t}.$$

На кінцях провідника сила струму дорівнює нулеві, тому $k = \omega/c = m\pi/l$, де $m$ — число півхвиль, що вкладаються на довжині провідника. Знайти усереднений за період коливань струму кутовий розподіл інтенсивності випромінювання антени.

Виберемо початок координат посередині провідника і спрямуємо вісь $z$ вздовж провідника (див. рис. 6). Оскільки провідник безмежно тонкий, то об'ємна густина струму запишеться у вигляді

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \mathbf{e}_z J(z,t)\delta(x)\delta(y) = \mathbf{e}_z J_0 \sin[k(z+l/2)]e^{-i\omega t}\delta(x)\delta(y).$$

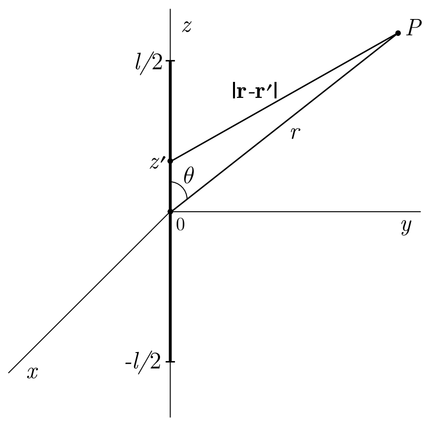


Рис. 6.

Векторний потенціал будемо обчислювати на віддалях $r$, значно більших від $l \sim r'$, тобто $r'/r \ll 1$, тому в знаменнику (8) покладемо

$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r$, а в часовому арґументі вектора густини струму, який враховує запізнення, збережемо члени з точністю до лінійного степеня малого параметра $r'/r$

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| &= r\left(1+\frac{r'^2}{r^2}-\frac{2(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')}{r^2}\right)^{1/2} = r\left(1+\frac{1}{2}\left[\frac{r'^2}{r^2}-\frac{2(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')}{r^2}\right]+\ldots\right) \\
&\approx r-(\mathbf{n},\,\mathbf{r}') = r - z'\cos\theta,
\end{aligned}
$$

$\mathbf{n}=\mathbf{r}/r$ — напрямок випромінювання, $\theta$ — кут між векторами $\mathbf{r}$ та $\mathbf{r}'$.

Для векторного потенціалу маємо

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{cr}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}',\ t-\frac{r-z'\cos\theta}{c})\,dV' \\
&= \mathbf{e}_z\frac{J_0}{cr}\int \sin[k(z'+l/2)]\exp\left(-i\omega(t-\frac{r-z'\cos\theta}{c})\right)\delta(x')\delta(y')\,dV' \\
&= \mathbf{e}_z\frac{J_0}{cr}\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}\int\limits_{-l/2}^{l/2}\sin[(m\pi)/l)(z'+l/2)]\,\mathrm{e}^{-i(m\pi/l)z'\cos\theta}dz'.
\end{aligned}
$$

Розрахуємо інтеґрал

$$
\begin{aligned}
I &= \int\limits_{-l/2}^{l/2}\sin[(m\pi/l)(z'+l/2)]\,\mathrm{e}^{-i(m\pi/l)z'\cos\theta}\,dz' \\
&= \int\limits_{-l/2}^{l/2}\left(\frac{\mathrm{e}^{i[(m\pi/l)(z'+l/2)]}-\mathrm{e}^{-i[(m\pi/l)(z'+l/2)]}}{2i}\right)\mathrm{e}^{-i(m\pi/l)z'\cos\theta}dz' \\
&= \frac{l}{im\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^{im\pi/2}}{1-\cos\theta}\,\sin[(m\pi/2)(1-\cos\theta)]-\right. \\
&\left.-\ \frac{\mathrm{e}^{-im\pi/2}}{1+\cos\theta}\,\sin[(m\pi/2)(1+\cos\theta)]\right) \\
&= \frac{2l}{im\pi}\left(\frac{-\cos^2(m\pi/2)\sin[(m\pi/2)\cos\theta]+i\sin^2(m\pi/2)\cos[(m\pi/2)\cos\theta]}{\sin^2\theta}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2l}{im\pi}\ \mathrm{e}^{im\pi/2}\ \frac{\sin[(m\pi/2)(1-\cos\theta)]}{\sin^2\theta} = \frac{2c}{i\omega}\ \mathrm{e}^{im\pi/2}\ \frac{\sin[m\pi\sin^2(\theta/2)]}{\sin^2\theta}.$$

Остаточно для векторного потенціала отримуємо

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{e}_z\, A(r,\theta,t),$$

$$A(r,\theta,t) = \frac{2J_0}{i\omega r}\,\frac{\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}}{\sin^2\theta}\ \mathrm{e}^{im\pi/2}\sin\left(m\pi\sin^2(\theta/2)\right).$$

Обчислимо напруженість магнітного поля $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$. У сферичних координатах

$$\mathrm{rot}_r\mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\,(\sin\theta\cdot A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\,A_\theta\right),$$

$$\mathrm{rot}_\theta\mathbf{A} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r - \frac{\partial}{\partial r}\,(r\cdot A_\varphi)\right),$$

$$\mathrm{rot}_\varphi\mathbf{A} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot A_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right).$$

У нашому випадку початок сферичної системи координат (рис. 7) знаходиться посередині провідника і полярна вісь спрямована вздовж провідника. Будемо в кожній точці спостереження $P$ розкладати векторний потенціал $\mathbf{A}$ на складові, спрямовані вздовж взаємно перпендикулярних напрямків *зростання* сферичних координат $r,\theta,\varphi$, тобто ортів $\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\varphi$. Отже,

$$A_r = A(r,\theta,t)\cos\theta,$$

$$A_\theta = A(r,\theta,t)\cos(\pi/2+\theta) = -A(r,\theta,t)\sin\theta,$$

$$A_\varphi = 0.$$

Вектор $\mathbf{A}$ не має складової $A_\varphi$, крім того, він не залежить від $\varphi$, тому

$$H_r = \mathrm{rot}_r\mathbf{A} = 0,\quad H_\theta = \mathrm{rot}_\theta\mathbf{A} = 0,$$

$$H_\varphi = \mathrm{rot}_\varphi\mathbf{A} = -\sin\theta\,\frac{\partial A(r,\theta,t)}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial A(r,\theta,t)}{\partial\theta}.$$

Зберігаючи лише члени порядку $1/r$, другий доданок у $H_\varphi$, пропорційний $1/r^2$ (оскільки $A(r,\theta,t)\sim 1/r$), треба відкинути, тому остаточно

$$H_\varphi \;=\; -\sin\theta\,\frac{\partial A(r,\theta,t)}{\partial r}$$

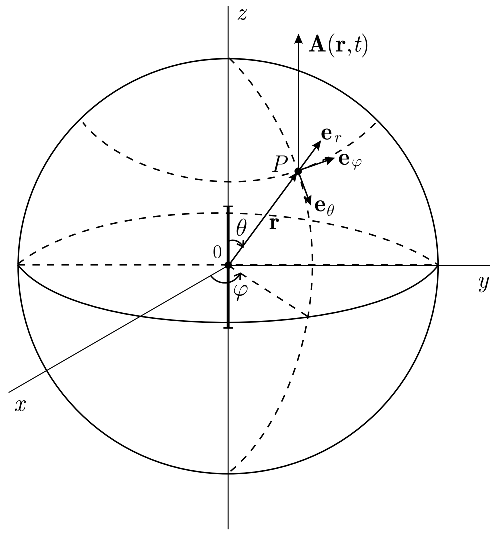


Рис. 7.

$$= -\frac{2J_0}{cr}\,\frac{\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}}{\sin\theta}\,\mathrm{e}^{im\pi/2}\sin\left(m\pi\sin(\theta/2)\right).$$

Усереднений за період коливань струму $T = 2\pi/\omega$ кутовий розподіл інтенсивності випромінювання антени знаходимо з (27)

$$\langle\frac{dI}{d\Omega}\rangle = \frac{J_0^2}{\pi c}\,\frac{\sin^2(m\pi\sin^2(\theta/2))}{\sin^2\theta}\,\frac{1}{T}\int\limits_0^T\cos^2(m\pi/2 + kr - \omega t)\,dt$$

$$= \frac{J_0^2}{2\pi c}\,\frac{\sin^2(m\pi\sin^2(\theta/2))}{\sin^2\theta}.$$

З цього результату випливає, що мінімуми випромінювання визначаються умовою

$$\sin(m\pi\sin^2(\theta/2)) = 0,$$

звідки

$$\theta_n = 2\arcsin\sqrt{n/m}, \quad n = 0, 1, \ldots, m,$$

тобто кількість мінімумів дорівнює $m+1$, а кількість максимумів дорівнює $m$ — кількості півхвиль, що вкладаються на довжині антени.

Кутовий розподіл інтенсивності випромінювання для $m = 1, 2, 3$ зображено на рис. 8. Штриховою лінією зображено розподіл струму вздовж антени, суцільною — кутовий розподіл інтенсивності випромінювання.

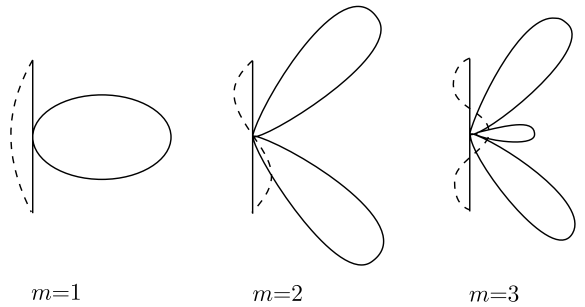

Рис. 8.

Для центрального максимуму (якщо $m$ — непарне) $\theta = \pi/2$, тобто

$$\frac{\sin^2(m\pi \sin^2(\theta/2))}{\sin^2\theta} = 1.$$

Якщо кількість півхвиль велика ($m \gg 1$), то перший максимум випромінювання є при $\theta \approx \theta_1/2 \approx 1/\sqrt{m}$ і тоді

$$\frac{\sin^2(m\pi \sin^2(\theta/2))}{\sin^2\theta} = \frac{m}{2}.$$

Тому інтенсивність першого бокового листка випромінювання антени більша в $m/2$ раз від інтенсивності центрального листка. В цьому випадку випромінювання спрямоване здебільшого вздовж провідника антени.

**13**. У лінійній антені довжиною $l$ поширюється біжуча хвиля струму (навантаження на кінцях антени підібрані так, шоб відбитої хвилі не виникало)

$$J(z,t) = J_0 \cos(\omega t - kz),$$

де $\omega = kc$, $|z| \leq l$, $c$ — швидкість світла у вакуумі. Обчислити усереднений за період коливань струму кутовий розподіл інтенсивності випромінювання антени.

Як і в попередній задачі, виберемо початок координат посередині провідника і спрямуємо вісь $z$ вздовж провідника (рис. 6). Об'ємна густина струму

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z J(z, t)\delta(x)\delta(y).$$

Для векторного потенціалу віддалях $r$, значно більших від $l \sim z'$, маємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{cr}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}',\ t - \frac{r - z'\cos\theta}{c})\, dV' \\
&= \mathbf{e}_z \frac{J_0}{cr} \int\limits_{-l/2}^{l/2} \cos\left(i\omega(t - \frac{r - z'\cos\theta}{c}) - kz'\right) dz' \\
&= \mathbf{e}_z \frac{J_0}{cr}\ \frac{1}{k(1-\cos\theta)}\ 2\sin\left(\frac{kl}{2}(1-\cos\theta)\right)\ \cos(\omega t + kr).
\end{aligned}$$

Для магнітного поля в сферичних координатах отримуємо

$$\begin{aligned}
H_r &= H_\theta = 0, \\
H_\varphi &= -\sin\theta\ \frac{\partial A(r, \theta, t)}{\partial r} \\
&= \frac{2J_0}{cr}\ \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\ \sin\left(\frac{kl}{2}(1-\cos\theta)\right)\ \cos(\omega t + kr).
\end{aligned}$$

Усереднений за період коливань струму $T = 2\pi/\omega$ кутовий розподіл інтенсивності випромінювання антени знаходимо з (27)

$$\langle \frac{dI}{d\Omega} \rangle = \frac{J_0^2}{2\pi c}\ \frac{\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}\ \sin^2\left(\frac{kl}{2}(1-\cos\theta)\right).$$

**14**. Частинка масою $m$ і зарядом $e$ під дією пружної сили може здійснювати гармонійні коливання з частотою $\omega_0$ (гармонійний осцилятор). Враховуючи силу радіаційного тертя, знайти середню за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність дипольного випромінювання осцилятора, який здійснює вимушені коливання в зовнішньому електричному полі напруженістю $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos\omega t$.

Рівняння руху осцилятора під дією зовнішньої сили (електричного поля) з урахуванням сили радіаційного тертя має вигляд

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2\mathbf{r} - \frac{2e^2}{3c^3}\,\dddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0\,\cos\omega t.$$

Оскільки сила радіаційного тертя значно менша від пружної сили, то в першому наближенні однорідне рівняння

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2\mathbf{r} - \frac{2e^2}{3c^3}\,\dddot{\mathbf{r}} = 0$$

можна записати

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2\mathbf{r} = 0,$$

звідки

$$\dddot{\mathbf{r}} = -\,\omega_0^2\dot{\mathbf{r}}.$$

Отже, ми приходимо до рівняння для коливань, якщо є тертя

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0,$$

де

$$\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}.$$

Розв'язок цього рівняння загасає з часом

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \alpha).$$

Якщо є зовнішня періодична сила, нам достатньо знайти частковий розв'язок рівняння

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\,\mathbf{E}_0\,\cos\omega t,$$

який коливається з частотою вимушуючої сили, оскільки власні коливання осцилятора загасають.

Розв'язок неоднорідного рівняння зручно шукати в комплексній формі, для чого пишемо в правій частині $e^{i\omega t}$ замість $\cos\omega t$ (беручи в остаточних виразах дійсну частину)

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\,\mathbf{E}_0\, e^{i\omega t}.$$

Частковий інтеґрал шукаємо у вигляді $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 e^{i\omega t}$, і знаходимо для $\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{e\mathbf{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}.$$

Отже,

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0\, e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)},$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{-\omega^2 e\mathbf{E}_0\, e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)} = \frac{-\omega^2 e\mathbf{E}_0\, e^{i\omega t}}{m\,\rho\, e^{i\varphi}},$$

де

$$\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}, \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

Звідки

$$\ddot{\mathbf{r}}^2 = \frac{\omega^4 e^2 \mathbf{E}_0^2 \left(\mathrm{Re}\left\{e^{i(\omega t - \varphi)}\right\}\right)^2}{m^2\rho^2} = \frac{\omega^4 e^2 \mathbf{E}_0^2 \cos^2(\omega t - \varphi)}{m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2)}.$$

Середня за період $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність випромінювання осцилятора

$$\begin{aligned} \langle I_p \rangle \;&=\; \frac{2e^2}{3c^3}\,\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{\mathbf{r}}^2\,dt = \frac{2e^4\omega^4\mathbf{E}_0^2}{3c^3m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2)}\,\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - \varphi)\,dt \\ &=\; \frac{e^4\mathbf{E}_0^2}{3c^3m^2}\;\frac{\omega^4}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2)}. \end{aligned}$$

# Бібліяґрафія


[1] М. М. Бредов, В. В. Румянцев, И. Н. Топтыгин, *Классическая электродинамика* (Наука, Москва, 1985).

[2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (Наука, Москва, 1973).

[3] И. Е. Тамм, *Основы теории электричества* (Наука, Москва, 1976).

[4] А. И. Алексеев, *Сборник задач по классической электродинамике* (Наука, Москва, 1977).

[5] Е. Г. Векштейн, *Сборник задач по электродинамике* (Высшая школа, Москва, 1966).

[6] В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике* (Наука, Москва, 1970).