

Х. П. ГНАТЕНКО

**ФІЗИЧНІ ПРОБЛЕМИ У
НЕКОМУТАТИВНОМУ
ПРОСТОРИ**

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}$$

ЛНУ імені Івана Франка
Львів 2017

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Х. П. Гнатенко

**ФІЗИЧНІ ПРОБЛЕМИ
У НЕКОМУТАТИВНОМУ
ПРОСТОРІ**

Монографія

Львів
2017

УДК 530.145
ББК В 318
Г 56

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. **Ю. О. Ситенко**
(Інститут теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова НАН України);
д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. В. Ткач**
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича).

*Рекомендовано Вченою радою Львівського національного
університету імені Івана Франка
(Протокол №36/5 від 31.05.2017)*

Гнатенко Х. П.

Г 56 Фізичні проблеми у некомутативному просторі. — Львів : ЛНУ
імені Івана Франка, 2017. — 128 с.
ISBN 978-617-10-0390-3.

У монографії розглядається квантований простір, реалізований за допомогою некомутативності координат. Аналізується вплив некомутативності на властивості фізичних систем. Також висвітлюються проблеми у некомутативному просторі, серед них: проблема порушення принципу еквівалентності, проблема порушення сферичної симетрії, проблема опису системи багатьох частинок, порушення властивостей кінетичної енергії. Вивчаються шляхи для вирішення вищезазначених проблем. Представлені у монографії результати є важливими для подальших досліджень особливостей простору на планківських масштабах.

Для студентів, аспірантів фізико-математичних спеціальностей, викладачів та науковців.

In monograph quantized space realized with the help of coordinates noncommutativity is considered. Influence of noncommutativity on the properties of physical systems is analyzed. Problems in noncommutative space are also considered, among them the problem of violation of the equivalence principle, the problem of rotational symmetry breaking, the problem of describing of many-particle system, violation of properties of kinetic energy. Ways to solve the problems are studied. Results presented in the monograph are important for further studies of space features at the Planck scale.

The monograph is meant for students, post-graduates of physics and mathematics, teachers and researchers.

**УДК 530.145
ББК В 318**

© Гнатенко Х. П., 2017

© Львівський національний університет
імені Івана Франка, 2017

ISBN 978-617-10-0390-3

Зміст

Передмова	5
1 Некомутативний простір	7
1.1 Ідея некомутативності	7
1.2 Некомутативний простір канонічного типу	10
1.3 Співвідношення невизначеностей у некомутативному просторі канонічного типу. Обмеження на довжину, площу та об'єм	12
1.4 Квантування площі у некомутативному просторі . .	14
2 Система багатьох частинок у некомутативному просторі канонічного типу	17
2.1 Система двох частинок у некомутативному просторі. Ефективний параметр некомутативності	18
2.2 Система N частинок у некомутативному просторі .	21
2.3 Оцінка верхньої межі параметра некомутативності .	23
3 Принцип еквівалентності у просторі з канонічною некомутативністю координат	27
3.1 Рух тіла у гравітаційному полі у некомутативному просторі. Принцип еквівалентності	28
3.2 Оцінка верхньої межі параметра некомутативності на основі принципу еквівалентності	30
3.3 Некомутативний простір канонічного типу з збереженням принципом еквівалентності	33
3.4 Властивості кінетичної енергії у некомутативному просторі та принцип еквівалентності	36
4 Принцип еквівалентності у некомутативному фазовому просторі	39
4.1 Простір з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів	40

4.2	Слабкий принцип еквівалентності	42
4.3	Система N частинок у некомутативному фазовому просторі та принцип еквівалентності	46
4.4	Властивості кінетичної енергії у некомутативному фазовому просторі та параметри некомутативності .	52
5	Сферична симетрія у некомутативному просторі	55
5.1	Некомутативний простір канонічного типу з відновленою сферичною симетрією	57
5.2	Оператор повороту у некомутативному просторі . .	60
5.3	Обмеження на довжину, площу та об'єм у сферично-симетричному некомутативному просторі	62
6	Частинка у однорідному полі у некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією	65
6.1	Гамільтоніан частинки у однорідному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі	66
6.2	Вплив некомутативності на масу частинки у однорідному полі	69
6.3	Принцип еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі	70
7	Атом водню у сферично-симетричному некомутативному просторі	75
7.1	Гамільтоніан атома водню у некомутативному просторі з відновленою сферичною симетрією	76
7.2	Енергетичні рівні атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі	78
7.3	Поправки до ns енергетичних рівнів атома водню .	84
7.4	Енергетичні рівні атома водню та тензор некомутативності	98
7.5	Оцінка верхньої межі параметра некомутативності на основі поправок до ns рівнів атома водню	105
8	Система двох частинок у некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією	107
8.1	Імпульс та координати центра мас двочастинкової системи	107
8.2	Атом водню, як двочастинкова система у сферично-симетричному некомутативному просторі	111
	Список літератури	119

Передмова

Монографія написана на основі досліджень, виконаних автором під керівництвом професора кафедри теоретичної фізики В. М. Ткачука, та разом із старшим викладачем кафедри теоретичної фізики Ю. С. Криницьким.

У роботі висвітлюється ідея побудови квантованого простору (простору з мінімальною довжиною) за допомогою некомутативної алгебри. Теорія некомутативного простору активно формується фізиками сучасності, що пов'язано з розвитком теорії струн та квантової гравітації. Некомутативність координат дозволяє вирішити проблему квантування простору, проте водночас вона зумовлює ряд проблем, серед них: проблема порушення принципу еквівалентності, порушення сферичної симетрії та інші. У монографії розглядаються проблеми у квантованому просторі та пропонуються шляхи для їх розв'язання.

У першому розділі монографії коротко представлено історію виникнення ідеї некомутативності та розглянуто особливості некомутативного простору канонічного типу.

Другий розділ монографії присвячений проблемі опису системи багатьох частинок у некомутативному просторі канонічного типу. Вивчається система частинок у загальному випадку, коли різним частинкам відповідають різні параметри некомутативності. Знаходиться умова на параметр некомутативності, при якій координати центра мас та координати відносного руху комутують, а, отже, є незалежними у некомутативному просторі.

У третьому розділі досліджується рух системи частинок (макроскопічного тіла) у двовимірному просторі з канонічною некомутативністю координат та вивчається принцип еквівалентності. Оцінюється верхня межа для параметра некомутативності на основі принципу еквівалентності. На основі аналізу рівнянь руху системи частинок у гравітаційному полі у некомутативному просторі пропонується умова, що дозволяє відновити принципи екви-

валентності у некомутативному просторі канонічного типу.

Четвертий розділ присвячено дослідженню принципу еквівалентності у двовимірному просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів. Встановлено, що коли параметри координатної та імпульсної некомутативності залежать від маси частинки, відновлюється принцип еквівалентності, зберігаються властивості кінетичної енергії, можна розділити рух центра мас та відносний рух у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів.

У п'ятому розділі розглядається тривимірний некомутативний простір канонічного типу та вивчається проблема порушення сферичної симетрії у такому просторі. Розглядається некомутативна алгебра, яка є еквівалентна некомутативній алгебрі канонічного типу та є сферично-симетрична. У запропонованому некомутативному просторі з відновленою сферичною симетрією вивчається оператор повороту.

У шостому розділі аналізується рух частинки у однорідному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі. На основі точних розрахунків показується, що некомутативність координат впливає на масу частинки та зумовлює її анізотропію. Розглядається рух частинки у однорідному гравітаційному полі та знаходяться умови для відновлення принципу еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі.

Сьомий розділ присвячено дослідженню атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу. У розділі знаходяться поправки до енергетичних рівнів атома водню, зумовлені некомутативністю координат. На основі порівняння отриманих результатів із експериментальними даними для частоти переходу $1s - 2s$ оцінюється верхня межа для параметра некомутативності.

Задача двох частинок у сферично-симетричному просторі з канонічною некомутативністю координат вивчається у восьмому розділі монографії. Розглядаються особливості опису системи частинок у такому просторі. Як приклад двочастинкової системи, досліджується атом водню.

Автор висловлює велику подяку професору В. М. Ткачуку та старшому викладачу Ю. С. Криницькому за консультації та допомогу в отриманні результатів досліджень, представлених у монографії. Також автор вдячна колективу кафедри теоретичної фізики за участь в обговоренні результатів під час наукових дискусій та семінарів. Особливо дякую професору І. О. Вакарчуку, доценту А. А. Ровенчаку та асистенту М. І. Самару за активні дискусії та поради.

Розділ 1

Некомутативний простір

1.1 Ідея некомутативності

У некомутативному просторі оператори координат X_i та імпульсів P_i задовольняють такі комутаційні співвідношення

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \quad (1.1)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (1.2)$$

$$[P_i, P_j] = 0. \quad (1.3)$$

Звернімо увагу на те, що у порівнянні зі звичними комутаційними співвідношеннями: $[X_i, X_j] = 0$, $[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}$, $[P_i, P_j] = 0$, у некомутативному просторі для координат виконується рівність (1.1). Комутатор координат дорівнює $i\hbar\theta_{ij}$, де параметри θ_{ij} називають параметрами некомутативності.

Ідея про те, що координати можуть не комутувати має довгу історію [1]. Вперше вона була запропонована В. Гайзенбергом [2,3]. Згодом Пайерлс (R. Peierls), почувши ідею некомутативності від Гайзенберга, використав її при аналізі електричних систем у сильному магнітному полі. Пайерлс розповів про цю ідею Паулі, який повідомив її Оппенгеймеру (J. R. Oppenheimer). Перша публікація, у якій ідея некомутативності оформлена математично, написана Снайдером (H. S. Snyder), аспірантом Оппенгеймера, у 1947 році [4].

Останніми роками дослідження фізичних систем у некомутативному просторі привернули велику увагу, що пов'язано з передбаченнями теорії струн та квантової гравітації про особливості структури простору на планківських масштабах, існування мінімальної ненульової невизначеності координат (див., для прикла-

ду, [5, 6]). Така особливість простору може бути описана за допомогою некомутативності координат з параметром некомутативності порядку планківських масштабів. Також увага фізиків до вивчення некомутативності зумовлена наявністю фізичних систем з некомутативними координатами. А саме, некомутативність координат виникає при розгляді квантової задачі про рух частинки у сильному магнітному полі [1, 3, 7–9]. Опишемо цей приклад детальніше.

Розгляньмо частинку з зарядом e та масою m , яка рухається на площині (x, y) за наявності сильного однорідного магнітного поля $\mathbf{B}$, яке напрямлене вздовж осі z . Запишемо лагранжіан частинки у магнітному полі

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{e}{c}\dot{x}A_x + \frac{e}{c}\dot{y}A_y - V(x, y), \quad (1.4)$$

де A_x , A_y – компоненти векторного потенціалу, доданок $V(x, y)$ описує додаткові взаємодії, c – швидкість світла. Випадок сильного магнітного поля $\mathbf{B}$ відповідає малій масі m [1, 3]. У границі $m \rightarrow 0$, вибравши калібрування $\mathbf{A} = (0, xB)$, лагранжіан (1.4) запишеться як

$$L = \frac{e}{c}Bx\dot{y} - V(x, y). \quad (1.5)$$

З іншого боку, зауважимо, що

$$L = p_y\dot{y} - H, \quad (1.6)$$

$$p_y = \frac{e}{c}Bx, \quad (1.7)$$

тут H – гамільтоніан. Врахувавши, що координата y є спряженою до імпульсу p_y

$$[y, p_y] = i\hbar, \quad (1.8)$$

із (1.7) отримаємо таке комутаційне співвідношення для координат

$$[x, y] = -i\hbar\frac{c}{eB}. \quad (1.9)$$

Отже, координати частинки з зарядом e та масою m , яка рухається на площині (x, y) за наявності сильного однорідного магнітного поля $\mathbf{B}$, що напрямлене вздовж осі z , не комутують [1, 3].

У більш загальному випадку неоднорідного магнітного поля $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ авторами статті [10] показано, що координати частинки у такому полі задовольняють співвідношення:

$$[x^i, x^j] = -i\hbar \frac{c}{e} \varepsilon^{ijk} \frac{B_k(\mathbf{x})}{B^2(\mathbf{x})}, \quad (1.10)$$

де індекси i, j, k , набувають значень $(1, 2, 3)$, e – заряд частинки. Зауважимо, що у випадку неоднорідного магнітного поля некомутативність є функцією координат.

Отже, задача про рух частинки у сильному магнітному полі за наявності ще додаткового зовнішнього потенціалу $V(x, y)$ може бути описана як задача руху частинки у зовнішньому потенціалі $V(x, y)$ за відсутності магнітного поля у некомутативному просторі, де параметр некомутативності визначається величиною поля B .

Багато робіт присвячено вивченню фізичних систем у некомутативному просторі. Серед перших статей, у яких розглядалася квантова механіка у випадку некомутативності координат канонічного типу є [11–15]. У роботах [11, 12] авторами розглянуто частинку у центрально-симетричному полі у двовимірному некомутативному просторі. Авторами статті [13] досліджено задачу руху частинки у магнітному полі та за наявності квадратичного за координатами потенціалу. Робота [14] присвячена вивченню співвідношень невизначеностей у квантовій механіці на некомутативній площині. У статті [16] проаналізовано другий закон Ньютона у некомутативному просторі. Багато уваги приділялося дослідженню впливу некомутативності на енергетичні рівні гармонічного осцилятора [13, 16–20], атома водню [18, 21–29], розв’язанню задачі Ландау [30–34], вивченню квантових полів [35, 36].

Дослідження фізичних задач у некомутативному просторі дозволяють встановити вплив некомутативності на властивості фізичних систем, визначити системи, які є найбільш “чутливими” до особливостей структури простору на планківських масштабах. Такі результати сприяють покращенню оцінки величини кванта простору шляхом порівняння висновків теоретичних досліджень властивостей фізичних систем у некомутативному просторі із високоточними експериментальними даними.

1.2 Некомутативний простір канонічного типу

Найпростішою алгеброю, яка дозволяє описати особливості простору на планківських масштабах (квантованість простору), є некомутативна алгебра канонічного типу

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \quad (1.11)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (1.12)$$

$$[P_i, P_j] = 0, \quad (1.13)$$

де параметри некомутативності θ_{ij} – елементи антисиметричної матриці

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta_{12} & -\theta_{31} \\ -\theta_{12} & 0 & \theta_{23} \\ \theta_{31} & -\theta_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

є константами.

Звернімо увагу, що у випадку канонічної некомутативності, зважаючи на те, що θ_{ij} є сталими, виконуються такі комутаційні співвідношення

$$[X_i, \theta_{jk}] = [P_i, \theta_{jk}] = 0. \quad (1.14)$$

У двовимірному випадку комутаційні співвідношення, які відповідають некомутативній алгебрі канонічного типу, мають такий вигляд:

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \quad (1.15)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (1.16)$$

$$[P_i, P_j] = 0, \quad (1.17)$$

де θ – параметр некомутативності – є константою, $i, j = (1, 2)$. Звернімо увагу, що величини $\hbar\theta$, $\hbar\theta_{ij}$ мають розмірність площі, м^2 .

У класичній границі $\hbar \rightarrow 0$ комутатор (1.11) переходить у деформовану дужку Пуассона

$$\frac{1}{i\hbar}[X_i, X_j] \rightarrow \{X_i, X_j\}, \quad (1.18)$$

$$\{X_i, X_j\} = \theta_{ij}. \quad (1.19)$$

Деформовані дужки Пуассона відрізняються від канонічних наявністю додаткового доданку, зумовленого некомутативністю координат. Для прикладу, у двовимірному випадку маємо

$$\{X_1, X_2\} = \theta, \quad (1.20)$$

де $\theta = \text{const}$ та дужки Пуассона означені як

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial P_i} \right) + \theta \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \frac{\partial g}{\partial X_2} - \frac{\partial g}{\partial X_1} \frac{\partial f}{\partial X_2} \right), \quad (1.21)$$

тут $i = (1, 2)$ [15].

Координати та імпульси, які задовольняють співвідношення алгебри (1.15)-(1.17), можна представити через координати x_i та імпульси p_i , які задовольняють звичні комуताційні співвідношення

$$[x_i, x_j] = 0, \quad (1.22)$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (1.23)$$

$$[p_i, p_j] = 0. \quad (1.24)$$

Таке представлення має вигляд:

$$X_i = x_i - \sum_j \frac{\theta_{ij}}{2} p_j, \quad (1.25)$$

$$P_i = p_i. \quad (1.26)$$

Легко переконатися, що, враховуючи (1.27)-(1.24), отримаємо:

$$[X_i, X_j] = [x_i - \sum_k \frac{\theta_{ik}}{2} p_k, x_j - \sum_k \frac{\theta_{jk}}{2} p_k] = i\hbar\theta_{ij}, \quad (1.27)$$

$$[X_i, P_j] = [x_i - \sum_k \frac{\theta_{ik}}{2} p_k, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (1.28)$$

$$[P_i, P_j] = [p_i, p_j] = 0. \quad (1.29)$$

У двовимірному випадку представлення (1.25)-(1.26) має такий вигляд:

$$X_1 = x_1 - \frac{\theta}{2} p_2, \quad (1.30)$$

$$X_2 = x_2 + \frac{\theta}{2} p_1, \quad (1.31)$$

$$P_1 = p_1, \quad (1.32)$$

$$P_2 = p_2. \quad (1.33)$$

Важливо звернути увагу на те, що відповідно до (1.25)-(1.26), (1.30)-(1.33) координати X_i у некомутативному просторі залежать від імпульсів, тому залежать від маси. Дослідімо цю проблему детальніше.

Розгляньмо двовимірний некомутативний простір. Відповідно до рівностей (1.30)-(1.31) некомутативні координати не залежать від маси m у випадку, коли параметр некомутативності θ задовольняє таку умову

$$\theta = \frac{\gamma}{m}, \quad (1.34)$$

тут γ – константа, яка не залежить від маси.

Отже, у випадку, коли частинкам у некомутативному просторі відповідають параметри некомутативності, які визначаються їх масою відповідно до рівності (1.34), проблема залежності координат від маси розв'язується та координати частинки можна розглядати як кінематичні змінні.

Зауважимо, що крім незалежності координат частинки від її маси, умова (1.34) дозволяє отримати ряд важливих результатів у некомутативному просторі, що буде показано у наступних розділах монографії.

1.3 Співвідношення невизначеностей у некомутативному просторі канонічного типу. Обмеження на довжину, площу та об'єм

У некомутативному просторі (1.11)-(1.13), враховуючи те, що переставні співвідношення для координат мають вигляд (1.11), можемо записати такі співвідношення невизначеностей:

$$\langle \Delta X_i^2 \rangle \langle \Delta X_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 \theta_{ij}^2}{4}. \quad (1.35)$$

Розгляньмо оператор квадрата довжини $\mathbf{R}^2$

$$\mathbf{R}^2 = \sum_i X_i^2, \quad (1.36)$$

де координати X_i задовольняють співвідношення (1.11). Враховуючи (1.36), маємо

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle = \langle \Delta X_1^2 \rangle + \langle \Delta X_2^2 \rangle + \langle \Delta X_3^2 \rangle. \quad (1.37)$$

Знайдемо обмеження на $\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle$ у некомутативному просторі (1.11)-(1.13). Із цією метою піднесемо (1.37) до квадрату. Зауважимо, що справедливою є така нерівність:

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle^2 \geq 2\langle \Delta X_1^2 \rangle \langle \Delta X_2^2 \rangle + 2\langle \Delta X_2^2 \rangle \langle \Delta X_3^2 \rangle + 2\langle \Delta X_3^2 \rangle \langle \Delta X_1^2 \rangle. \quad (1.38)$$

Із (1.35) отримаємо:

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle^2 \geq \frac{\hbar^2}{2} (\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2). \quad (1.39)$$

Отже, для середньоквадратичного відхилення оператора $\mathbf{R}$ справедливою є нерівність:

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle \geq \frac{\hbar}{2^{\frac{1}{2}}} (\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.40)$$

Відповідно до цієї нерівності, у некомутативному просторі канонічного типу існує обмеження на довжину. Мінімальна довжина визначається параметрами некомутативності.

Розгляньмо обмеження на площу та об'єм у некомутативному просторі (1.11)-(1.13). Визначимо ΔX_i як

$$\Delta X_i = \sqrt{\langle \Delta X_i^2 \rangle}. \quad (1.41)$$

Беручи до уваги (5.88), можемо записати таку нерівність:

$$\Delta X_i \Delta X_j \geq \frac{\hbar |\theta_{ij}|}{2}. \quad (1.42)$$

Отже, існує обмеження на величину площі у некомутативному просторі. Зауважимо, що оскільки у загальному випадку елементи матриці некомутативності можуть мати різні значення ($\theta_{12} \neq \theta_{23} \neq \theta_{31}$), із (1.42) можемо зробити висновок, що некомутативність канонічного типу (1.11) зумовлює анізотропію площі.

Знайдемо мінімальне значення $\Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3$, що відповідає об'єму у просторі з канонічною некомутативністю координат. Розписавши (1.42)

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{\hbar |\theta_{12}|}{2}, \quad (1.43)$$

$$\Delta X_2 \Delta X_3 \geq \frac{\hbar |\theta_{23}|}{2}, \quad (1.44)$$

$$\Delta X_3 \Delta X_1 \geq \frac{\hbar |\theta_{31}|}{2}, \quad (1.45)$$

та перемноживши отримані нерівності (1.43), (1.44), (1.45), маємо

$$(\Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3)^2 \geq \frac{\hbar^3}{8} |\theta_{12} \theta_{23} \theta_{31}|. \quad (1.46)$$

Остаточно із (1.46) отримаємо

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3 \geq \frac{\hbar^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} |\theta_{12} \theta_{23} \theta_{31}|^{\frac{1}{2}}. \quad (1.47)$$

Отже, у тривимірному просторі з некомутативністю координат (1.11)-(1.13) існують обмеження знизу на довжину, площу, об'єм. Обмеження на ці величини визначаються елементами матриці некомутативності відповідно до нерівностей (1.40), (1.42), (1.47) [37].

1.4 Квантування площі у некомутативному просторі

У попередньому підрозділі було показано, що у некомутативному просторі існують обмеження на величину площі, які випливають із співвідношень невизначеностей. Важливо також зауважити, що у просторі з некомутативністю координат площа може набувати дискретних значень [38]. Щоб це показати, зручно розглянути оператор площі круга

$$S = \pi(X_1^2 + X_2^2), \quad (1.48)$$

чи оператор квадрата довжини

$$l^2 = X_1^2 + X_2^2, \quad (1.49)$$

у двовимірному некомутативному просторі канонічного типу (1.15)-(1.17). Для знаходження власних значень оператора l^2 перейдемо до представлення

$$X_1 = x_1 - \frac{\theta}{2} p_2, \quad (1.50)$$

$$X_2 = x_2 + \frac{\theta}{2} p_1, \quad (1.51)$$

де оператори x_i, p_i задовольняють звичні співвідношення $[x_1, x_2] = 0$, $[p_1, p_2] = 0$, $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$. Отримаємо:

$$l^2 = x_1^2 + x_2^2 + \frac{\theta^2}{4} (p_1^2 + p_2^2) - \theta L_z, \quad (1.52)$$

тут

$$L_z = xp_y - yp_x. \quad (1.53)$$

Введемо оператори

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi_1 + \frac{d}{d\xi_1} \right), \quad (1.54)$$

$$b_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi_1 - \frac{d}{d\xi_1} \right), \quad (1.55)$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi_2 + \frac{d}{d\xi_2} \right), \quad (1.56)$$

$$b_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi_2 - \frac{d}{d\xi_2} \right), \quad (1.57)$$

де використано такі позначення

$$\xi_i = \frac{x_i}{l_0}, \quad l_0 = \sqrt{\frac{\hbar\theta}{2}}. \quad (1.58)$$

Врахувавши (1.54)-(1.57), можна записати

$$l^2 = \hbar\theta(b_1^+b_1 + b_2^+b_2 + i(b_1^+b_2 - b_2^+b_1) + 1) \quad (1.59)$$

Оператор l^2 можна звести до діагонального вигляду. Для цього розгляньмо такі оператори

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_1 + ib_2), \quad (1.60)$$

$$a_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_1^+ - ib_2^+), \quad (1.61)$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-b_1 + ib_2), \quad (1.62)$$

$$a_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (-b_1^+ - ib_2^+), \quad (1.63)$$

Звернімо увагу, що для введених операторів (1.60)-(1.63) виконуються такі співвідношення

$$[a_i, a_j^+] = \delta_{ij}, \quad (1.64)$$

Перейшовши до операторів (1.60)-(1.63), отримаємо l^2 у такому вигляді

$$l^2 = 2\hbar\theta \left(a_1^+ a_1 + \frac{1}{2} \right). \quad (1.65)$$

Маємо оператор, який відповідає гамільтоніану одновимірного гармонічного осцилятора з частотою 2θ . Отже, можемо записати власні значення оператора l^2 як

$$l_n^2 = 2\hbar\theta \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (1.66)$$

Відповідно, врахувавши вигляд оператора площі (1.48), маємо такі власні значення

$$S_n = 2\pi\hbar\theta \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (1.67)$$

Отже, некомутативність координат зумовлює дискретність власних значень оператора площі [38]. Звернімо увагу, що квант площі у некомутативному просторі пропорційний до параметра некомутативності та має вигляд $2\pi\hbar\theta$. Мінімальна площа залежить від величини параметра некомутативності та визначається як

$$S_{min} = \pi\hbar\theta. \quad (1.68)$$

Розділ 2

Система багатьох частинок у некомутативному просторі канонічного типу

У загальному випадку різним частинкам у некомутативному просторі можуть відповідати різні параметри некомутативності. Тому існує проблема визначення координат центра мас системи N частинок, знаходження параметра некомутативності, який описує рух центра мас системи.

Проблема опису системи багатьох частинок у некомутативному просторі особливо гостро постає при аналізі оцінок величини параметра некомутативності. Для прикладу, у роботах [39–41] представлено верхні межі для параметра некомутативності, отримані на основі порівнянь зсуву перигею планети Меркурій, зумовленого некомутативністю координат, із спостережуваними даними. Авторами статей не враховано особливості опису макроскопічного тіла (в даному випадку планети Меркурій) у некомутативному просторі. Як наслідок, у роботах представлено оцінки величини параметра некомутативності, які потребують пояснень, оскільки накладають дуже сильне обмеження на його величину.

У розділі розглядається система багатьох частинок у загальному випадку, коли різним частинкам системи відповідають різні параметри некомутативності. Знаходиться імпульс центра мас, як інтеграл руху у некомутативному просторі канонічного типу. Аналізуються комутаційні співвідношення для координат та імпульсів центра мас системи [42].

2.1 Система двох частинок у некомутативному просторі. Ефективний параметр некомутативності

Розгляньмо дві частинки з масами m_1 та m_2 у двовимірному просторі з канонічною некомутативністю координат (1.15)-(1.17). У загальному випадку координати різних частинок можуть задовольняти некомутативну алгебру з різними параметрами некомутативності. Припустимо, що координати різних частинок комутують. Отже, для координат $X_\mu^{(i)}$ та імпульсів $P_\mu^{(i)}$ частинок виконуються такі співвідношення:

$$[X_1^{(i)}, X_2^{(j)}] = -[X_2^{(i)}, X_1^{(j)}] = i\hbar\delta^{ij}\theta_i, \quad (2.1)$$

$$[X_\mu^{(i)}, P_\nu^{(j)}] = i\hbar\delta_{\mu\nu}\delta^{ij}, \quad (2.2)$$

$$[P_\mu^{(i)}, P_\nu^{(j)}] = 0, \quad (2.3)$$

де $\mu = (1, 2)$, $\nu = (1, 2)$, індекси i, j позначають частинки $i = (1, 2)$ та $j = (1, 2)$, θ_i – параметр некомутативності, що відповідає частинці з масою m_i . У класичному випадку співвідношенням (2.1)-(2.3) відповідають такі дужки Пуассона:

$$\{X_1^{(i)}, X_2^{(j)}\} = \delta^{ij}\theta_i, \quad (2.4)$$

$$\{X_\mu^{(i)}, P_\nu^{(j)}\} = \delta_{\mu\nu}\delta^{ij}, \quad (2.5)$$

$$\{P_\mu^{(i)}, P_\nu^{(j)}\} = 0. \quad (2.6)$$

Будемо вважати, що гамільтоніан у некомутативному просторі має такий самий вигляд, як у звичайному просторі ($\theta_i = 0$). Отже, можемо записати гамільтоніан системи двох частинок у такому вигляді

$$H = \frac{(\mathbf{P}^{(1)})^2}{2m_1} + \frac{(\mathbf{P}^{(2)})^2}{2m_2} + V(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|), \quad (2.7)$$

де координати $\mathbf{X}^{(i)}$ та імпульси $\mathbf{P}^{(i)}$ задовольняють співвідношення (2.4)-(2.6), $V(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|)$ – потенціальна енергія взаємодії частинок.

Знайдемо імпульс центра мас, як інтеграл руху у некомутативному просторі (2.4)-(2.6). Зауважимо, що для імпульсу центра мас, визначеного як

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)}, \quad (2.8)$$

виконується таке співвідношення:

$$\{\tilde{\mathbf{P}}, H\} = 0. \quad (2.9)$$

Отже, імпульс центра мас (2.8), визначений традиційним чином як сума імпульсів частинок системи, є інтегралом руху у некому-тативному просторі. Спряжені до імпульсу (2.8) координати центра мас мають вигляд

$$\tilde{\mathbf{X}} = \frac{m_1 \mathbf{X}^{(1)} + m_2 \mathbf{X}^{(2)}}{m_1 + m_2}, \quad (2.10)$$

де координати $\mathbf{X}^{(1)} = (X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_3^{(1)})$, $\mathbf{X}^{(2)} = (X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, X_3^{(2)})$ задовольняють (2.4).

Зауважимо, що для координат та імпульсів центра мас справедливими є такі співвідношення:

$$\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\} = \frac{m_1^2 \theta_1 + m_2^2 \theta_2}{(m_1 + m_2)^2}, \quad (2.11)$$

$$\{\tilde{X}_\mu, \tilde{P}_\nu\} = \delta_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

$$\{\tilde{P}_\mu, \tilde{P}_\nu\} = 0. \quad (2.13)$$

Отже, дужки Пуассона для координат центра мас дорівнюють ефективному параметру

$$\tilde{\theta} = \frac{m_1^2 \theta_1 + m_2^2 \theta_2}{(m_1 + m_2)^2}, \quad (2.14)$$

який визначається параметрами некомутативності частинок системи та їхніми масами.

Розгляньмо координати та імпульси відносного руху у некому-тативному просторі

$$\Delta \mathbf{P} = \mu_1 \mathbf{P}^{(2)} - \mu_2 \mathbf{P}^{(1)}, \quad (2.15)$$

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}^{(2)} - \mathbf{X}^{(1)}, \quad (2.16)$$

де $\mu_i = m_i/M$, $M = m_1 + m_2$. Обчислимо дужки Пуассона для координат та імпульсів $\Delta \mathbf{X}$, $\Delta \mathbf{P}$, врахувавши співвідношення (2.4)-(2.6). Маємо:

$$\{\Delta X_1, \Delta X_2\} = \theta_1 + \theta_2, \quad (2.17)$$

$$\{\Delta X_\mu, \Delta P_\nu\} = \delta_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

$$\{\Delta P_\mu, \Delta P_\nu\} = 0. \quad (2.19)$$

Отже, координати відносного руху також задовольняють некомутативну алгебру з ефективним параметром некомутативності, визначеним як $\theta_1 + \theta_2$.

Важливо зауважити, що координати центра мас та координати відносного руху не є незалежними у некомутативному просторі. Обчисливши дужки Пуассона для цих координат, отримуємо:

$$\{\tilde{X}_1, \Delta X_2\} = \frac{m_2\theta_2 - m_1\theta_1}{m_2 + m_1}, \quad (2.20)$$

$$\{\Delta X_1, \tilde{X}_2\} = \frac{m_2\theta_2 - m_1\theta_1}{m_2 + m_1}. \quad (2.21)$$

Звернімо увагу на те, що дужки Пуассона для координат $\tilde{X}_\mu, \Delta X_\nu$ дорівнюють нулеві у випадку, коли виконується таке співвідношення:

$$m_i\theta_i = \gamma = \text{const}, \quad (2.22)$$

де γ – константа, яка є однаковою для частинок з різними масами. Отже, при виконанні умови (2.22), координати центра мас та координати відносного руху є незалежними у некомутативному просторі. Крім цього, при умові, що параметр некомутативності, який відповідає частинці, є обернено пропорційним до її маси (2.22), ефективний параметр некомутативності (2.11) не залежить від композиції системи. Із (2.11) та (2.22) маємо:

$$\tilde{\theta} = \frac{\gamma}{M} = \text{const}. \quad (2.23)$$

Отже, умова (2.22) виконується і для ефективного параметра некомутативності. Із (2.23) отримуємо:

$$m_i\theta_i = M\tilde{\theta} = \gamma = \text{const}. \quad (2.24)$$

Врахувавши (2.8), (2.10), (2.15), (2.16), можемо записати Гамільтоніан системи двох частинок у такому вигляді

$$H = \frac{(\tilde{\mathbf{P}})^2}{2M} + \frac{(\Delta\mathbf{P})^2}{2\mu} + V(|\Delta\mathbf{X}|), \quad (2.25)$$

де $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$. Дужки Пуассона для $(\tilde{\mathbf{P}})^2/2M$ та $(\Delta\mathbf{P})^2/2\mu + V(|\Delta\mathbf{X}|)$ мають вигляд

$$\left\{ \frac{(\tilde{\mathbf{P}})^2}{2M}, \frac{(\Delta\mathbf{P})^2}{2\mu} + V(|\Delta\mathbf{X}|) \right\} = 0. \quad (2.26)$$

Отже, задача руху двох взаємодіючих частинок у некомутативному просторі може бути зведена до задачі руху центра мас та відносного руху.

Важливо зауважити, що отримані результати можна легко узагальнити на квантовий випадок, ввівши відповідні оператори фізичних величин та замінивши дужки Пуассона на комутатори.

У наступному підрозділі задача двох частинок у просторі з канонічною некомутативністю координат буде узагальнена на випадок N частинок.

2.2 Система N частинок у некомутативному просторі

Розгляньмо систему N частинок з масами m_i , яким відповідають параметри некомутативності θ_i . Запишемо гамільтоніан системи

$$H = \sum_i \frac{(\mathbf{P}^{(i)})^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V(|\mathbf{X}^{(i)} - \mathbf{X}^{(j)}|), \quad (2.27)$$

де індекси i та j ($i \neq j$) набувають значення $1, 2, \dots, N$. Координати $X_\mu^{(i)}$ та імпульси $P_\mu^{(i)}$ частинок задовольняють такі співвідношення:

$$\{X_1^{(i)}, X_2^{(j)}\} = -\{X_2^{(i)}, X_1^{(j)}\} = \delta^{ij}\theta_i, \quad (2.28)$$

$$\{X_\mu^{(i)}, P_\nu^{(j)}\} = \delta_{\mu\nu}\delta^{ij}, \quad (2.29)$$

$$\{P_\mu^{(i)}, P_\nu^{(j)}\} = 0, \quad (2.30)$$

де $\mu = (1, 2)$, $\nu = (1, 2)$. Легко переконатися, що імпульс центра мас системи, визначений як сума імпульсів частинок

$$\tilde{\mathbf{P}} = \sum_i \mathbf{P}^{(i)}, \quad (2.31)$$

є інтегралом руху у некомутативному просторі,

$$\left\{ \sum_i \mathbf{P}^{(i)}, H \right\} = 0, \quad (2.32)$$

де H має вигляд (2.27). Отже, у просторі з дужками Пуассона (2.28)-(2.30) можемо записати координати центра мас, координати та імпульси відносного руху у звичному вигляді:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \sum_i \mathbf{P}^{(i)}, \quad (2.33)$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_i \mu_i \mathbf{X}^{(i)}, \quad (2.34)$$

$$\Delta \mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{X}^{(i)} - \tilde{\mathbf{X}}, \quad (2.35)$$

$$\Delta \mathbf{P}^{(i)} = \mathbf{P}^{(i)} - \mu_i \tilde{\mathbf{P}}, \quad (2.36)$$

де

$$\mu_i = \frac{m_i}{\sum_j m_j}. \quad (2.37)$$

Для координат та імпульсів центра мас виконуються такі співвідношення

$$\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\} = \frac{\sum_i m_i^2 \theta_i}{(\sum_j m_j)^2}, \quad (2.38)$$

$$\{\tilde{X}_\mu, \tilde{P}_\nu\} = \delta_{\mu\nu}, \quad (2.39)$$

$$\{\tilde{P}_\mu, \tilde{P}_\nu\} = 0. \quad (2.40)$$

Отже, для опису руху центра мас системи N частинок у просторі з некомутативними координатами необхідно вводити ефективний параметр некомутативності:

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum_i m_i^2 \theta_i}{(\sum_j m_j)^2}. \quad (2.41)$$

Розглянемо частковий випадок. Нехай система складається з N однакових елементарних частинок з однаковими масами $m_1 = m_2 = \dots = m_N = m$ та параметрами некомутативності $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_N = \theta$. Тоді відповідно до (2.41) отримаємо:

$$\tilde{\theta} = \frac{\theta}{N}. \quad (2.42)$$

Звернімо увагу на те, що величина ефективного параметра некомутативності $\tilde{\theta}$ є меншою від величини параметра некомутативності частинок θ та зменшується з збільшенням кількості частинок у системі як $1/N$.

Зауважимо, що відповідно до (2.41) ефективний параметр некомутативності системи частинок залежить від її композиції. У випадку виконання умови (2.22) із (2.41) отримуємо:

$$\tilde{\theta} = \frac{\gamma}{M}. \quad (2.43)$$

Отже, умова (2.22) також є справедливою для ефективного параметра некомутативності (2.41) та дозволяє уникнути залежності $\tilde{\theta}$ від композиції системи.

Координати та імпульси відносного руху задовольняють такі співвідношення:

$$\{\Delta X_1^{(i)}, \Delta X_2^{(j)}\} = \delta^{ij}\theta_i - \mu_i\theta_i - \mu_j\theta_j + \tilde{\theta}, \quad (2.44)$$

$$\{\Delta X_\mu, \Delta P_\nu\} = \delta_{\mu\nu}, \quad (2.45)$$

$$\{\Delta P_\mu, \Delta P_\nu\} = 0. \quad (2.46)$$

Запишемо також дужки Пуассона для координат центра мас та відносного руху

$$\{\tilde{X}_1, \Delta X_2^{(i)}\} = \mu_i\theta_i - \tilde{\theta}, \quad (2.47)$$

$$\{\Delta X_1^{(i)}, \tilde{X}_2\} = \mu_i\theta_i - \tilde{\theta}. \quad (2.48)$$

Дужки Пуассона для координат центра мас та координат відносного руху не дорівнюють нулеві. Центр мас "відчуває" відносний рух у системі. Зауважимо, що у випадку виконання умови (2.22), дужки Пуассона для координат центра мас та відносного руху дорівнюють нулеві, координати центра мас та відносного руху є незалежними у некомутативному просторі.

У наступному підрозділі на основі отриманого виразу для ефективного параметра некомутативності буде отримано оцінку для верхньої межі параметра некомутативності, що відповідає елементарним частинкам.

2.3 Оцінка верхньої межі параметра некомутативності

У статтях [39–41] розглянуто рух частинки у гравітаційному полі у некомутативному просторі та досліджено зсув перигелію, зумовлений некомутативністю координат. У випадку планети Меркурій, порівнявши отриманий зсув перигелію з експериментальними даними, авторами статей [39–41] отримано такі результати

для верхньої межі для параметра некомутативності:

$$\hbar\theta \leq 21 \cdot 10^{-64} \text{м}^2, \quad (2.49)$$

$$\hbar\theta \leq 10^{-62} \text{м}^2, \quad (2.50)$$

$$\hbar\theta \leq 40 \cdot 10^{-62} \text{м}^2. \quad (2.51)$$

Результат (2.49) представлено у [39], (2.50) отримано у [40] та (2.51) у [41].

Звернімо увагу на те, що оцінки (2.49)-(2.51) є близькими до планківських масштабів. Важливо зауважити, що автори статей [39–41] не врахували те, що рух макроскопічного тіла у некомутативному просторі описується ефективним параметром некомутативності. Як було показано в попередньому підрозділі рух центра мас системи частинок (макроскопічного тіла) описується за допомогою ефективного параметра некомутативності (2.41), який є меншим за параметри некомутативності, що відповідають частинкам системи, та зменшується з збільшенням кількості частинок у системі. Тому при дослідженні руху макроскопічного тіла, у даному випадку планети Меркурій, необхідно враховувати вираз для ефективного параметра некомутативності (2.41). Як наслідок, оцінки (2.49)-(2.51), отримані авторами, мають бути переписаними у такому вигляді

$$\hbar\tilde{\theta} \leq 21 \cdot 10^{-64} \text{м}^2, \quad (2.52)$$

$$\hbar\tilde{\theta} \leq 10^{-62} \text{м}^2, \quad (2.53)$$

$$\hbar\tilde{\theta} \leq 40 \cdot 10^{-62} \text{м}^2, \quad (2.54)$$

де $\tilde{\theta}$ – ефективний параметр некомутативності планети Меркурій.

Знайдемо вираз для ефективного параметра некомутативності планети Меркурій. Із цією метою оцінимо кількість елементарних частинок у планеті. Оскільки основний внесок у масу Меркурію дають нуклони, їхню кількість можемо наближено визначити зі співвідношення:

$$N_{nuc} \simeq \frac{M}{m_{nuc}} = 1.98 \cdot 10^{50}, \quad (2.55)$$

де $M = 3.3 \cdot 10^{23} \text{кг}$ – маса Меркурію, $m_{nuc} = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{кг}$ – маса нуклона. Кількість протонів наближено дорівнює $N_{nuc}/2$ та відповідає кількості електронів N_e . Врахувавши (2.41), можемо

записати вираз для ефективного параметра некомутативності, що відповідає планеті Меркурій, у такому вигляді

$$\tilde{\theta} = N_{nuc}\theta_{nuc} \left(\frac{m_{nuc}}{M} \right)^2 + N_e\theta_e \left(\frac{m_e}{M} \right)^2, \quad (2.56)$$

де m_e – маса електрона, θ_e , θ_{nuc} – параметри некомутативності, що відповідають електронам та нуклонам. Крім того, оскільки нуклони складаються з кварків, то для них відповідно до (2.41) маємо:

$$\tilde{\theta}_{nuc} = \frac{\theta_q}{3}, \quad (2.57)$$

де θ_q – параметр некомутативності, що відповідає кваркам.
Зауважимо, що

$$\frac{m_e}{M} \simeq \frac{m_e}{N_{nuc}m_{nuc}} \simeq \frac{1}{1840N_{nuc}}. \quad (2.58)$$

Припустивши, що для елементарних частинок, таких як електрони та кварки, параметри некомутативності однакові, тобто $\theta_q = \theta_e$ та врахувавши (2.58), останнім доданком у (2.56) можемо знехтувати. Отже, ефективний параметр некомутативності визначатимемо як

$$\tilde{\theta} = \frac{\theta_{nuc}}{N_{nuc}}. \quad (2.59)$$

Врахувавши отриманий вираз для ефективного параметра некомутативності (2.59) та (2.52)-(2.54), можемо оцінити верхню межу для параметра некомутативності, що відповідає нуклонам.
Отримаємо

$$\hbar\theta_{nuc} \leq 4.2 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2, \quad (2.60)$$

$$\hbar\theta_{nuc} \leq 2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2, \quad (2.61)$$

$$\hbar\theta_{nuc} \leq 7.9 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2, \quad (2.62)$$

відповідно. Неврахування авторами попередніх робіт того, що рух макроскопічних тіл описується ефективним параметром некомутативності привело до суттєвого заниження результатів для верхньої межі параметра некомутативності.

Отже, при дослідженні макроскопічних тіл у некомутативному просторі та оцінці верхньої межі для параметра некомутативності важливо враховувати те, що центр мас макроскопічного тіла (системи частинок) описується ефективним параметром некомутативності. Відповідно до отриманого виразу для ефективного параметра некомутативності (2.41), його величина зменшується зі збільшенням кількості частинок у системі. У випадку, коли система складається з N частинок з однаковими масами ефективний параметр некомутативності залежить від кількості частинок у системі як $1/N$ (2.42) [42].

Розділ 3

Принцип еквівалентності у просторі з канонічною некомутативністю координат

Некомутативність координат дозволяє вирішити фундаментальну проблему квантування простору, проте водночас вона зумовлює ряд важливих проблем, серед яких порушення принципу еквівалентності [43]. Зауважимо, що ця проблема виникає при припущенні про те, що параметр некомутативності є однаковим для всіх частинок. У цьому випадку траєкторія частинки у гравітаційному полі у просторі з некомутативністю координат залежить від її маси. Відповідно до слабкого принципу еквівалентності траєкторія частинки (макроскопічного тіла) у гравітаційному полі залежить тільки від її початкових координат та швидкості та не залежить від композиції та маси. Отже, слабкий принцип еквівалентності порушується у некомутативному просторі.

Щоб знайти шлях для вирішення проблеми порушення принципу еквівалентності, у розділі розглядається загальний випадок, коли різним частинкам відповідають різні параметри некомутативності та досліджується рух макроскопічного тіла (системи частинок) у гравітаційному полі у просторі з канонічною некомутативністю координат [42]. Знаходиться верхня межа для параметра некомутативності на основі принципу еквівалентності [44].

3.1 Рух тіла у гравітаційному полі у некомутативному просторі. Принцип еквівалентності

Розгляньмо задачу вільного падіння тіла масою m у просторі з канонічною некомутативністю координат. Виберемо осі координат так, щоб напрям прискорення вільного падіння $\mathbf{g}$ збігався з віссю X . Тоді класична функція Гамільтона буде мати вигляд

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} - mgX. \quad (3.1)$$

При цьому ми вважаємо, що вплив відносного руху на рух центра мас не є суттєвим. Таке припущення є справедливим, наприклад, для системи жорстко зв'язаних частинок.

Координати та імпульси задовольняють такі співвідношення:

$$\{X, Y\} = \tilde{\theta}, \quad (3.2)$$

$$\{X, P_x\} = 1, \quad (3.3)$$

$$\{Y, P_y\} = 1, \quad (3.4)$$

$$\{P_x, P_y\} = 0, \quad (3.5)$$

тут $\tilde{\theta}$ – ефективний параметр некомутативності. Врахувавши (3.2)–(3.5), запишемо рівняння руху частинки з гамільтоніаном H (3.1)

$$\dot{X} = \{X, H\} = \frac{P_x}{m}, \quad (3.6)$$

$$\dot{Y} = \{Y, H\} = \frac{P_y}{m} + mg\tilde{\theta}, \quad (3.7)$$

$$\dot{P}_x = \{P_x, H\} = mg, \quad (3.8)$$

$$\dot{P}_y = \{P_y, H\} = 0. \quad (3.9)$$

Знайдемо розв'язок системи рівнянь (3.6)–(3.9) з початковими умовами

$$X(0) = X_0, \quad (3.10)$$

$$Y(0) = Y_0, \quad (3.11)$$

$$\dot{X}(0) = v_{ox}, \quad (3.12)$$

$$\dot{Y}(0) = v_{oy}, \quad (3.13)$$

де v_{ox} , v_{oy} – початкові швидкості. Маємо

$$X(t) = \frac{gt^2}{2} + v_{ox}t + X_0, \quad (3.14)$$

$$Y(t) = v_{oy}t + Y_0, \quad (3.15)$$

$$P_x(t) = mgt + mv_{ox}, \quad (3.16)$$

$$P_y(t) = -m^2g\tilde{\theta} + mv_{oy}. \quad (3.17)$$

Як бачимо з (3.14) та (3.15) швидкість падіння тіла не залежить від його маси. Згідно з слабким принципом еквівалентності в гравітаційному полі всі тіла незалежно від їхньої маси рухаються однаково. Цей принцип можна також сформулювати як принцип рівності інерційної та гравітаційної мас. Отже, принцип еквівалентності виконується у випадку руху тіла у однорідному гравітаційному полі у некомутовативному просторі.

Узагальнимо задачу. Нехай тіло з масою m знаходиться у неоднорідному гравітаційному полі $V(X, Y)$. Тоді класична функція Гамільтона буде мати вигляд:

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + mV(X, Y), \quad (3.18)$$

Знайдемо рівняння руху тіла з гамільтоніаном H , враховуючи при розкритті дужок Пуассона співвідношення (3.2)-(3.5). Отримаємо:

$$\dot{X} = \frac{P_x}{m} + m\tilde{\theta}\frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y}, \quad (3.19)$$

$$\dot{Y} = \frac{P_y}{m} - m\tilde{\theta}\frac{\partial V(X, Y)}{\partial X}, \quad (3.20)$$

$$\dot{P}_x = -m\frac{\partial V(X, Y)}{\partial X}, \quad (3.21)$$

$$\dot{P}_y = -m\frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y}. \quad (3.22)$$

Бачимо, що швидкість тіла (3.19), (3.20) у неоднорідному гравітаційному полі залежить від його маси та ефективного параметра некомутовативності. У рівняннях (3.19), (3.20) маємо доданки, зумовлені некомутовативністю координат

$$m\tilde{\theta}\frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y} \quad \text{та} \quad m\tilde{\theta}\frac{\partial V(X, Y)}{\partial X}. \quad (3.23)$$

Зауважимо, що ці доданки пропорційні до маси тіла та до ефективного параметра некомутативності.

Отже, з (3.19), (3.20) можемо зробити висновок, що принцип еквівалентності порушується у некомутативному просторі.

3.2 Оцінка верхньої межі параметра некомутативності на основі принципу еквівалентності

Як приклад руху тіла у гравітаційному полі розгляньмо рух Місяця. Запишемо функцію Гамільтона

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} - G \frac{mM}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad (3.24)$$

де m – маса Місяця, M – маса Землі та G – гравітаційна стала.

Знайдемо рівняння руху

$$\dot{X} = \frac{P_x}{m} + G \frac{Mm\tilde{\theta}Y}{R^3}, \quad (3.25)$$

$$\dot{Y} = \frac{P_y}{m} - G \frac{Mm\tilde{\theta}X}{R^3}, \quad (3.26)$$

$$\dot{P}_x = -G \frac{MmX}{R^3}, \quad (3.27)$$

$$\dot{P}_y = -G \frac{MmY}{R^3}, \quad (3.28)$$

де

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (3.29)$$

Із (3.25), (3.26) бачимо, що принцип еквівалентності порушується.

За даними LLR (Lunar Laser Ranging, лазерна далекометрія Місяця) експерименту принцип еквівалентності виконується з точністю [45]

$$\eta = \frac{\Delta a}{a} = (-0.8 \pm 1.3) \cdot 10^{-13}. \quad (3.30)$$

Припустивши, що порушення цього принципу, зумовлене некомутативністю координат, знаходиться в межах точності η , знайдемо верхню межу для ефективного параметра некомутативності.

Із (3.25), (3.26) маємо:

$$\ddot{X} = \frac{\dot{P}_x}{m} + G \frac{M m \tilde{\theta} \dot{Y}}{R^3} - G \frac{3m M \tilde{\theta} Y}{R^5} (X \dot{X} + Y \dot{Y}), \quad (3.31)$$

$$\ddot{Y} = \frac{\dot{P}_y}{m} - G \frac{M m \tilde{\theta} \dot{X}}{R^3} + G \frac{3m M \tilde{\theta} X}{R^5} (X \dot{X} + Y \dot{Y}). \quad (3.32)$$

Підставивши (3.25), (3.26), (3.27) у (3.31) та обмежившись членами першого порядку за $\tilde{\theta}$, отримаємо:

$$\ddot{X} = -G \frac{M X}{R^3} + G \frac{M \tilde{\theta} P_y}{R^3} - G \frac{3M \tilde{\theta} Y}{R^5} (X P_x + Y P_y). \quad (3.33)$$

Аналогічно, врахувавши (3.25), (3.26), (3.28) та (3.32), можемо записати

$$\ddot{Y} = -G \frac{M Y}{R^3} - G \frac{M \tilde{\theta} P_x}{R^3} + G \frac{3M \tilde{\theta} X}{R^5} (X P_x + Y P_y). \quad (3.34)$$

Оцінимо відхилення від виконання принципу еквівалентності у перигеї $X = r_p$, $Y = 0$, $P_x = 0$, $P_y = m v_p$, де r_p — перигейна відстань, v_p — максимальна орбітальна швидкість Місяця. Тоді

$$\ddot{X} = -G \frac{M}{r_p^2} + G \frac{M \tilde{\theta} m v_p}{r_p^3}, \quad (3.35)$$

$$\ddot{Y} = 0. \quad (3.36)$$

Позначимо Δa_x^{nc} поправку до прискорення, зумовлену некому-тативністю координат

$$\Delta a_x^{nc} = G \frac{M \tilde{\theta} m v_p}{r_p^3}, \quad (3.37)$$

тоді можемо переписати (3.35) у такому вигляді

$$\ddot{X} = a_x + \Delta a_x^{nc}, \quad (3.38)$$

де

$$a_x = -G \frac{M}{r_p^2}. \quad (3.39)$$

Отже, припустивши, що порушення принципу еквівалентності знаходиться в межах точності η , можемо оцінити верхню межу для параметра $\tilde{\theta}$

$$\frac{|\Delta a_x^{nc}|}{|a_x|} = \frac{\tilde{\theta} m v_p}{r_p} \leq |\eta|, \quad (3.40)$$

$$\tilde{\theta} \leq \frac{|\eta| r_p}{m v_p}. \quad (3.41)$$

Підставивши у (3.41) найбільше за модулем значення η , $|\eta| = 2.1 \cdot 10^{-13}$ та $m = 7.3477 \cdot 10^{22}$ кг, $v_p = 1076$ м/с, $r_p = 3.631 \cdot 10^8$ м, знайдемо:

$$\hbar \tilde{\theta} \leq 1 \cdot 10^{-64} \text{ м}^2. \quad (3.42)$$

Переобчислимо отриманий результат (3.42) для параметра некомутативності, що відповідає елементарним частинкам. Для цього знайдемо ефективний параметр некомутативності для Місяця. Оскільки основний вклад в масу Місяця дають нуклони, їхню кількість можемо наближено визначити із співвідношення:

$$N_{nuc} \simeq \frac{m}{m_{nuc}} = 4.4 \cdot 10^{49}, \quad (3.43)$$

де $m_{nuc} = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг – маса нуклона. На основі аналогічних міркувань, які були висвітлені у підрозділі 2.3 для знаходження виразу для ефективного параметра некомутативності, що відповідає планеті Меркурій, можемо записати

$$\tilde{\theta} = \frac{\theta_{nuc}}{N_{nuc}}. \quad (3.44)$$

Врахувавши (3.44), маємо:

$$\hbar \theta_{nuc} \leq 4.5 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2. \quad (3.45)$$

Аналогічно оцінимо відхилення від виконання принципу еквівалентності в апогеї $X = -r_a = -4.051 \cdot 10^8$ м, $Y = 0$, $P_x = 0$, $P_y = -m v_a$, де $v_a = 964$ м/с – мінімальна орбітальна швидкість Місяця

$$\frac{\tilde{\theta} m v_a}{r_a} \leq |\eta|, \quad (3.46)$$

$$\tilde{\theta} \leq \frac{|\eta| r_a}{m v_a}. \quad (3.47)$$

Підставивши числові дані у (3.47) та врахувавши (3.44), знайдемо:

$$\hbar\theta_{nuc} \leq 5.6 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2. \quad (3.48)$$

Зауважимо, що отримані результати (3.45), (3.48) накладають сильніше обмеження на параметр некомутативності ніж верхні межі, знайдені на основі даних GRANIT експерименту $\hbar\theta \leq 0.771 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$, ($n = 1$), $\hbar\theta \leq 1.021 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$, ($n = 2$) [46], та оцінки, які були отримані у підрозділі 2.3 (2.60)-(2.62).

3.3 Некомутативний простір канонічного типу з збереженим принципом еквівалентності

Як було показано у попередніх підрозділах, у просторі з канонічною некомутативністю координат існує проблема порушення принципу еквівалентності. Знайдемо умову, яка дозволить відновити принцип еквівалентності у некомутативному просторі.

Порушення принципу еквівалентності зумовлене залежністю від маси доданків (3.23) у рівняннях руху (3.19), (3.20). Зауважимо, що доданки (3.23) є пропорційними до маси частинки та до ефективного параметра некомутативності.

Розгляньмо випадок, коли тіло з масою M складається з N елементарних частинок з однаковими масами $m_1 = m_2 = \dots = m_N = m$ та параметрами некомутативності $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_N = \theta$. Тоді відповідно до (2.41) можемо записати

$$M\tilde{\theta} = \frac{M\theta}{N} = m\theta. \quad (3.49)$$

Зауважимо, що у цьому випадку добуток $M\tilde{\theta}$ визначається лише параметрами елементарної частинки, а саме її масою m та параметром некомутативності θ . Як наслідок рівняння руху залежать від добутку $m\theta$, який є однаковим для тіл різної маси

$$\dot{X} = \frac{P_x}{M} + m\theta \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y}, \quad (3.50)$$

$$\dot{Y} = \frac{P_y}{M} - m\theta \frac{\partial V(X, Y)}{\partial X}, \quad (3.51)$$

$$\dot{P}_x = -M \frac{\partial V(X, Y)}{\partial X}, \quad (3.52)$$

$$\dot{P}_y = -M \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y}. \quad (3.53)$$

Отже, принцип еквівалентності у цьому випадку виконується.

Розгляньмо загальний випадок, коли система складається з N елементарних частинок з різними масами m_i та різними параметрами некомутативності θ_i . Врахувавши вираз для ефективного параметра некомутативності (2.41), маємо:

$$\dot{X} = \frac{P_x}{M} + \frac{\sum_i m_i^2 \theta_i}{M} \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y}, \quad (3.54)$$

$$\dot{Y} = \frac{P_y}{M} - \frac{\sum_i m_i^2 \theta_i}{M} \frac{\partial V(X, Y)}{\partial X}, \quad (3.55)$$

$$\dot{P}_x = -M \frac{\partial V(X, Y)}{\partial X}, \quad (3.56)$$

$$\dot{P}_y = -M \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y}. \quad (3.57)$$

Зауважимо, що при виконанні умови

$$m_i \theta_i = \gamma = \text{const}, \quad (3.58)$$

де γ – константа, однакова для тіл різної маси, рівняння руху не залежать від маси системи та від її композиції. Маємо

$$\dot{X} = \frac{P_x}{m} + \gamma \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y}, \quad (3.59)$$

$$\dot{Y} = \frac{P_y}{m} - \gamma \frac{\partial V(X, Y)}{\partial X}, \quad (3.60)$$

$$\dot{P}_x = -m \frac{\partial V(X, Y)}{\partial X}, \quad (3.61)$$

$$\dot{P}_y = -m \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y}. \quad (3.62)$$

Отже, умова (3.58) дозволяє відновити принцип еквівалентності у просторі з канонічною некомутативністю координат.

Звернімо увагу на те, що із (3.58) випливає, що параметр некомутативності, що відповідає частинці, є обернено пропорційний до її маси

$$\theta_i = \frac{\gamma}{m_i}. \quad (3.63)$$

Зауважимо, що константа γ має розмірність часу. Для оцінки її величини припустимо, що виконується така рівність:

$$\sqrt{\hbar \theta_e} = L_p, \quad (3.64)$$

де L_p – довжина Планка, θ_e – параметр некомутативності, що відповідає електрону. Врахувавши рівність (3.64), можемо записати

$$\gamma = m_e \theta_e = \frac{m_e L_p^2}{\hbar}. \quad (3.65)$$

Зважаючи на розмірність константи γ виразимо (3.65) через час Планка

$$\gamma = 2\pi \frac{L_p}{\lambda_e} T_p = 4.2 \cdot 10^{-23} T_p = 2.3 \cdot 10^{-66} c, \quad (3.66)$$

де $\lambda_e = h/m_e c = 2.43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$ – комптонівська довжина хвилі електрона, $T_p = 5.4 \cdot 10^{-44} \text{ с}$ – час Планка. Зафіксувавши параметр некомутативності, що відповідає електрону як (3.64), можемо знайти параметр некомутативності θ_i , що відповідає частинці з масою m_i . Із (3.58) та (3.64) отримаємо:

$$\hbar \theta_i = \hbar \theta_e \frac{m_e}{m_i} = L_p^2 \frac{m_e}{m_i}. \quad (3.67)$$

Отже, у випадку виконання рівності (3.64), величина параметра некомутативності θ_i , що відповідає частинці з масою m_i , визначається відношенням маси електрона до маси частинки m_e/m_i . Зауважимо, що для нуклона $m_i = m_{nuc}$ отримаємо

$$\hbar \theta_{nuc} = \frac{L_p^2}{1840}. \quad (3.68)$$

На завершення цього підрозділу звернімо увагу на те, що умова (3.58), яка дозволяє відновити принцип еквівалентності у некомутативному просторі, співпадає із умовою (2.22), при якій координати центра мас системи частинок та координати відносного руху є незалежними у некомутативному просторі, а також ефективний параметр некомутативності, що відповідає системі частинок (макроскопічному тілу), не залежить від її композиції.

У наступному підрозділі умову (3.58) буде виведено з незалежності кінетичної енергії системи частинок (макроскопічного тіла) від її композиції.

3.4 Властивості кінетичної енергії у некомутативному просторі та принцип еквівалентності

Розгляньмо властивості кінетичної енергії системи частинок (макроскопічного тіла) у двовимірному просторі з некомутативністю координат канонічного типу. Для початку дослідимо властивість адитивності кінетичної енергії.

Розгляньмо систему, яка складається з N частинок з масами m_i та параметрами некомутативності θ_i ($i = 1, 2, \dots, N$), чи, еквівалентно, розгляньмо тіло, яке складається з N частин, які можемо трактувати як точкові частинки з відповідними масами m_i та параметрами некомутативності θ_i . Запишемо кінетичну енергію системи частинок (макроскопічного тіла) з масою M у двовимірному просторі

$$T = \frac{P_x^2}{2M} + \frac{P_y^2}{2M}. \quad (3.69)$$

Врахувавши (3.6), (3.7), перепишемо кінетичну енергію (3.69) як функцію $\dot{X}$ та $\dot{Y}$:

$$T = \frac{M\dot{X}^2}{2} + \frac{M\dot{Y}^2}{2} - M^2\tilde{\theta}g\dot{Y}, \quad (3.70)$$

де $M = \sum_i m_i$ – маса системи (макроскопічного тіла). За властивістю адитивності кінетична енергія системи частинок є сумою кінетичних енергій частинок T_i , з яких складається система

$$T = \sum_i T_i. \quad (3.71)$$

Кінетична енергія частинки з масою m_i та параметром некомутативності θ_i має вигляд

$$T_i = \frac{(P_x^{(i)})^2}{2m_i} + \frac{(P_y^{(i)})^2}{2m_i} = \frac{m_i(\dot{X}^{(i)})^2}{2} + \frac{m_i(\dot{Y}^{(i)})^2}{2} - m_i^2\theta_i g\dot{Y}^{(i)}. \quad (3.72)$$

Розгляньмо випадок, коли швидкості руху частинок, з яких складається система (макроскопічне тіло), є такими самими як швидкість руху всієї системи (макроскопічного тіла), тобто коли справедливими є рівності:

$$\dot{X}^{(i)} = \dot{X}, \quad (3.73)$$

$$\dot{Y}^{(i)} = \dot{Y}. \quad (3.74)$$

Тоді за властивістю адитивності кінетичної енергії (3.71) маємо

$$T = \frac{M\dot{X}^2}{2} + \frac{M\dot{Y}^2}{2} - \sum_i m_i^2 \theta_i g \dot{Y}. \quad (3.75)$$

Порівнявши (3.70) та (3.75), отримаємо

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum_i m_i^2 \theta_i}{(\sum_j m_j)^2}. \quad (3.76)$$

Отже, вираз для ефективного параметра некомутативності (2.41), який було знайдено на основі аналізу комутаційних співвідношень у підрозділі 2.2, також виведено із властивості адитивності кінетичної енергії у некомутативному просторі.

Важливо звернути увагу на те, що кінетична енергія системи (3.70) залежить від ефективного параметра некомутативності $\tilde{\theta}$, отже, згідно з (2.41), залежить від її композиції. Знайдемо умову при якій кінетична енергія системи (макроскопічного тіла) не залежить від її композиції. З цією метою достатньо розглянути простий випадок. Нехай тіло складається з двох частин (частинок) з масами m_1 та m_2 та параметрами некомутативності θ_1, θ_2 , відповідно. Тоді ефективний параметр некомутативності $\tilde{\theta}$ відповідно до (2.41) буде мати вигляд:

$$\tilde{\theta} = \frac{m_1^2 \theta_1 + m_2^2 \theta_2}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (3.77)$$

Використавши позначення $\mu = m_1/M$, та врахувавши, що

$$1 - \mu = \frac{m_2}{M}, \quad (3.78)$$

вираз (3.77) можемо переписати як

$$\tilde{\theta} = \theta_\mu \mu^2 + \theta_{1-\mu} (1 - \mu)^2, \quad (3.79)$$

де $\theta_\mu = \theta_1$, $\theta_{1-\mu} = \theta_2$. Відповідно до (3.70) кінетична енергія не залежить від композиції у випадку, коли ефективний параметр некомутативності $\tilde{\theta}$ є однаковим для тіл однакової маси, проте різної композиції, тобто для різних μ . Отже, виходячи з цих міркувань, із рівняння (3.79) можемо знайти θ_μ як функцію μ для деякого фіксованого $\tilde{\theta}$. Отримаємо:

$$\theta_\mu = \frac{\tilde{\theta}}{\mu} \quad (3.80)$$

Врахувавши те, що $\mu = m_1/M$ рівність (3.80) можемо переписати у вже знайомому вигляді

$$m_1\theta_1 = m_2\theta_2 = M\tilde{\theta}. \quad (3.81)$$

Отже, умову (3.58), яка дозволяє відновити принцип еквівалентності у некомутативному просторі, виведено з незалежності кінетичної енергії системи частинок від її композиції.

Важливо зауважити, що умова (3.58), яка дозволяє відновити принцип еквівалентності, збігається із умовою при якій координати частинки у некомутативному просторі можуть розглядатися як кінематичні змінні (1.34), також з умовою (2.22), при якій координати центра мас системи та координати відносного руху є незалежними, ефективний параметр некомутативності, що відповідає системі частинок, не залежить від її композиції. Отже, знайдено одну умову на параметр некомутативності (3.58), яка дозволяє отримати щонайменше п'ять важливих результатів у некомутативному просторі канонічного типу, а саме: відновити принцип еквівалентності, забезпечити незалежність кінетичної енергії системи частинок від її композиції, незалежність координат центра мас системи частинок та координат відносного руху, незалежність ефективного параметра некомутативності, що відповідає координатам центра мас системи частинок, від композиції, незалежність координат частинки від її маси.

Звернімо також увагу на те, що подібна до (3.58) умова була запропонована у деформованому просторі з мінімальною довжиною у якому координати та імпульси задовольняють таке співвідношення

$$[X, P] = i\hbar(1 + \beta P^2), \quad (3.82)$$

де β – параметр деформації. У роботі [47] показано, що у випадку, коли параметр деформації β , що відповідає частинці, є обернено пропорційним до m^2 , або, еквівалентно, виконується така умова

$$\sqrt{\beta}m = \text{const}, \quad (3.83)$$

принцип еквівалентності зберігається у деформованому просторі, також кінетична енергія системи частинок є незалежною від її композиції [42].

Розділ 4

Принцип еквівалентності у некомутативному фазовому просторі

У попередньому розділі ми розглянули принцип еквівалентності та умову для його відновлення у некомутативному просторі канонічного типу (1.15)-(1.17). Цікаво зауважити, що знайдена умова на параметр некомутативності

$$m_i \theta_i = \gamma = \text{const}, \quad (4.1)$$

є важливою при розгляді проблеми порушення принципу еквівалентності у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів. Ідея визначення параметра некомутативності через масу частинки дозволяє відновити виконання слабого принципу еквівалентності у некомутативному фазовому просторі.

У цьому розділі принцип еквівалентності вивчається у двовимірному некомутативному фазовому просторі. Знаходяться умови на параметри некомутативності, які дозволяють відновити слабкий принцип еквівалентності. Також обґрунтовується важливість знайдених умов. Показується, що при їх виконанні розв'язується ряд проблем у некомутативному фазовому просторі, серед них проблема порушення властивостей кінетичної енергії, залежності руху центра мас системи частинок та відносного руху [48].

4.1 Простір з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів

Некомутативний фазовий простір характеризується такими співвідношеннями для координат та імпульсів

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \quad (4.2)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (4.3)$$

$$[P_i, P_j] = i\hbar\eta_{ij}. \quad (4.4)$$

Звернімо увагу на те, що у порівнянні зі звичними комутаційними співвідношеннями у випадку (4.2)-(4.4) маємо некомутативність координат та некомутативність імпульсів. Комутатор координат дорівнює $i\hbar\theta_{ij}$, де θ_{ij} – елементи сталої антисиметричної матриці, які називають параметрами координатної некомутативності. Комутатор імпульсів дорівнює $i\hbar\eta_{ij}$, тут η_{ij} – елементи сталої антисиметричної матриці, які називають параметрами імпульсної некомутативності.

У некомутативному фазовому просторі, враховуючи те, що переставні співвідношення для координат та імпульсів мають вигляд (4.2), (4.4), можемо записати такі співвідношення невизначеностей:

$$\langle \Delta X_i^2 \rangle \langle \Delta X_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 \theta_{ij}^2}{4}, \quad (4.5)$$

$$\langle \Delta P_i^2 \rangle \langle \Delta P_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 \eta_{ij}^2}{4}. \quad (4.6)$$

Зауважимо, що поряд із обмеженнями на довжину, площу та об'єм, які впливають з (4.5) (див. підрозділ 1.3),

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle^2 \geq \frac{\hbar^2}{2} (\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2), \quad (4.7)$$

$$\Delta X_i \Delta X_j \geq \frac{\hbar |\theta_{ij}|}{2}, \quad (4.8)$$

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3 \geq \frac{\hbar^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} |\theta_{12} \theta_{23} \theta_{31}|^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

у некомутативному фазовому просторі існує обмеження знизу на величину імпульсу. Щоб це показати, розгляньмо оператор квадрата імпульсу

$$\mathbf{P}^2 = \sum_i P_i^2. \quad (4.10)$$

Тут оператори P_i задовольняють співвідношення некомутативної алгебри (4.4). Можемо записати

$$\langle \Delta \mathbf{P}^2 \rangle = \langle \Delta P_1^2 \rangle + \langle \Delta P_2^2 \rangle + \langle \Delta P_3^2 \rangle. \quad (4.11)$$

Піднесемо (4.11) до квадрату та запишемо таку нерівність

$$\langle \Delta \mathbf{P}^2 \rangle^2 \geq 2\langle \Delta P_1^2 \rangle \langle \Delta P_2^2 \rangle + 2\langle \Delta P_2^2 \rangle \langle \Delta P_3^2 \rangle + 2\langle \Delta P_3^2 \rangle \langle \Delta P_1^2 \rangle. \quad (4.12)$$

Взявши до уваги співвідношення невизначеностей (4.6), можемо записати

$$\langle \Delta \mathbf{P}^2 \rangle^2 \geq \frac{\hbar^2}{2} (\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2). \quad (4.13)$$

Введемо позначення: $\Delta P = \sqrt{\langle \Delta \mathbf{P}^2 \rangle}$.

Врахувавши (4.13), знаходимо нерівність, яка задає обмеження знизу на імпульс у некомутативному фазовому просторі

$$\Delta P \geq \left(\frac{\hbar^2}{2} (\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2) \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.14)$$

Отже, обмеження на величину імпульсу визначаються параметрами імпульсної некомутативності.

Багато робіт присвячено дослідженням фізичних систем у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів, серед них атом водню [49–52], гармонічний осцилятор [20, 32, 49, 53–55], частинка у гравітаційному полі [56, 57] та багато інших.

У роботах [58, 59] вивчався принцип еквівалентності у некомутативному фазовому просторі. Автори статті [59] прийшли до висновку, що система координат, яка рухається з прискоренням, є еквівалентною до гравітаційного поля у випадку, коли параметри імпульсної некомутативності є ізотропними (у загальному випадку існує анізотропія $\eta_{xy} \neq \eta_{xz} \neq \eta_{yz}$).

У наступному підрозділі монографії буде показано, що траєкторія частинки у гравітаційному полі у некомутативному фазовому просторі залежить від маси частинки навіть у випадку, коли параметри імпульсної некомутативності є ізотропними. Буде розглянуто шлях для відновлення принципу еквівалентності у некомутативному фазовому просторі.

4.2 Слабкий принцип еквівалентності

Розгляньмо двовимірний некомутативний фазовий простір

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \quad (4.15)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (4.16)$$

$$[P_1, P_2] = i\hbar\eta, \quad (4.17)$$

тут θ, η є константами, $i, j = (1, 2)$.

Дослідимо для початку класичний рух частинки у однорідному гравітаційному полі у двовимірному фазовому просторі та розгляньмо принцип еквівалентності.

У класичній границі з комуताційних співвідношень (4.15)-(4.17) отримаємо

$$\{X_1, X_2\} = \theta, \quad (4.18)$$

$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij}, \quad (4.19)$$

$$\{P_1, P_2\} = \eta. \quad (4.20)$$

Запишемо гамільтоніан частинки з масою m у однорідному гравітаційному полі. У випадку, коли поле напрямлене вздовж осі X_1 , можемо записати:

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - mgX_1. \quad (4.21)$$

Зауважимо, що тут координати та імпульси задовольняють співвідношення некомутативної алгебри (4.18)-(4.20). Врахувавши це, можемо записати такі рівняння руху

$$\dot{X}_1 = \{X_1, H\} = \frac{P_1}{m}, \quad (4.22)$$

$$\dot{X}_2 = \{X_2, H\} = \frac{P_2}{m} + mg\theta, \quad (4.23)$$

$$\dot{P}_1 = \{P_1, H\} = mg + \eta\frac{P_2}{m}, \quad (4.24)$$

$$\dot{P}_2 = \{P_2, H\} = -\eta\frac{P_1}{m}. \quad (4.25)$$

Із рівнянь (4.22)-(4.25) отримаємо траєкторію частинки у однорідному гравітаційному полі у некомутативному фазовому просторі

$$X_1(t) = \frac{A}{\eta} \sin \frac{\eta}{m}t - \frac{B}{\eta} \cos \frac{\eta}{m}t + C, \quad (4.26)$$

$$X_2(t) = \frac{A}{\eta} \cos \frac{\eta}{m}t + \frac{B}{\eta} \sin \frac{\eta}{m}t - \frac{mg}{\eta}t + mg\theta t + D, \quad (4.27)$$

тут A, B, C, D є константами. Розглянувши початкові умови

$$X_1(0) = X_{01}, \quad X_2(0) = X_{02} \quad (4.28)$$

$$\dot{X}_1(0) = v_{01}, \quad \dot{X}_2(0) = v_{02}, \quad (4.29)$$

отримаємо:

$$X_1(t) = \frac{mv_{01}}{\eta} \sin \frac{\eta}{m} t + \left(\frac{m^2 g}{\eta^2} - \frac{m^2 g \theta}{\eta} + \frac{mv_{02}}{\eta} \right) (1 - \cos \frac{\eta}{m} t) + X_{01}, \quad (4.30)$$

$$X_2(t) = \left(\frac{m^2 g}{\eta^2} - \frac{m^2 g \theta}{\eta} + \frac{mv_{02}}{\eta} \right) \sin \frac{\eta}{m} t - \frac{mv_{01}}{\eta} (1 - \cos \frac{\eta}{m} t) - \frac{mg}{\eta} t + mg\theta t + X_{02}. \quad (4.31)$$

Зауважимо, що у границі $\eta \rightarrow 0$ отримаємо добре відомий результат, який відповідає руху частинки у однорідному полі у звичному просторі ($\theta = 0, \eta = 0$)

$$X_1(t) = \frac{gt^2}{2} + v_{01}t + X_{01}, \quad (4.32)$$

$$X_2(t) = v_{02}t + X_{02}, \quad (4.33)$$

проте співвідношення між імпульсом та швидкістю є зміненими. А саме, маємо такі рівності

$$P_1 = m\dot{X}_1, \quad P_2 = m(\dot{X}_2 + mg\theta). \quad (4.34)$$

Наголосимо на тому, що відповідно до отриманих співвідношень (4.30)-(4.31) траєкторія частинки у однорідному гравітаційному полі залежить від її маси. Отже, слабкий принцип еквівалентності порушується у некомутативному фазовому просторі.

Зауважимо, що ми зустрічаємося з проблемою порушення принципу еквівалентності, якщо припустимо, що параметри некомутативності η та θ є однакові для частинок з різними масами. У загальному випадку різні частинки можуть відчувати особливості структури простору на планківських масштабах з різними параметрами некомутативності.

Відповідно до (4.30)-(4.31) траєкторія частинки у гравітаційному полі залежить від $m\theta$ та η/m . Важливо зауважити, що у

випадку, коли виконуються такі умови на параметри некомутативності

$$\theta m = \gamma = \text{const}, \quad (4.35)$$

$$\frac{\eta}{m} = \alpha = \text{const}, \quad (4.36)$$

тут γ та α – константи, які є однаковими для частинок з різними масами, отримаємо:

$$X_1(t) = \frac{v_{01}}{\alpha} \sin \alpha t + \left(\frac{g}{\alpha^2} - \frac{g\gamma}{\alpha} + \frac{v_{02}}{\alpha} \right) (1 - \cos \alpha t) + X_{01}, \quad (4.37)$$

$$X_2(t) = \left(\frac{g}{\alpha^2} - \frac{g\gamma}{\alpha} + \frac{v_{02}}{\alpha} \right) \sin \alpha t - \frac{v_{01}}{\alpha} (1 - \cos \alpha t) - \frac{g}{\alpha} t + \gamma g t + X_{02}. \quad (4.38)$$

Отже, у випадку, коли параметри некомутативності θ_a , η_a , які відповідають частинці, визначаються її масою m_a

$$\theta_a = \frac{\gamma}{m_a}, \quad (4.39)$$

$$\eta_a = \alpha m_a, \quad (4.40)$$

траєкторія частинки у гравітаційному полі у некомутативному фазовому просторі (4.37)-(4.38) не залежить від її маси. Отже, умови (4.39), (4.40) приводять до відновлення слабкого принципу еквівалентності у некомутативному фазовому просторі. На додаток зауважимо, що коли виконується умова (4.40), відповідно до співвідношення (4.34) отримаємо, що імпульс є пропорційним до маси, як це і мало б бути

$$P_2 = m(\dot{X}_2 + \gamma g). \quad (4.41)$$

Розгляньмо більш загальний випадок, коли частинка рухається у неоднорідному гравітаційному полі у некомутативному фазовому просторі та дослідимо виконання принципу еквівалентності. Гамільтоніан частинки з масою m у гравітаційному полі $V(X_1, X_2)$ має такий вигляд

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + mV(X_1, X_2), \quad (4.42)$$

де координати та імпульси задовольняють комутаційні співвідношення (4.18)-(4.20). Врахувавши (4.18)-(4.20), можемо записати

$$\dot{X}_1 = \{X_1, H\} = \frac{P_1}{m} + m\theta \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2}, \quad (4.43)$$

$$\dot{X}_2 = \{X_2, H\} = \frac{P_2}{m} - m\theta \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1}, \quad (4.44)$$

$$\dot{P}_1 = \{P_1, H\} = -m \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1} + \eta \frac{P_2}{m}, \quad (4.45)$$

$$\dot{P}_2 = \{P_2, H\} = -m \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2} - \eta \frac{P_1}{m}. \quad (4.46)$$

Якщо ми припустимо, що параметри некомутативності θ , η є однаковими для частинок з різними масами, з рівнянь (4.43)-(4.46) можемо зробити висновок, що швидкість частинки у гравітаційному полі залежить від її маси. Отже, принцип еквівалентності порушується. Для вирішення проблеми порушення принципу еквівалентності потрібно розглянути залежність параметрів некомутативності від маси. У випадку, коли умови (4.39), (4.40) задовольняються, маємо:

$$\dot{X}_1 = \frac{P_1}{m} + \gamma \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2}, \quad (4.47)$$

$$\dot{X}_2 = \frac{P_2}{m} - \gamma \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1}, \quad (4.48)$$

$$\dot{P}_1 = -m \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1} + \alpha P_2, \quad (4.49)$$

$$\dot{P}_2 = -m \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2} - \alpha P_1. \quad (4.50)$$

Рівняння (4.47)-(4.50) можуть бути переписані у такому вигляді

$$\dot{X}_1 = P'_1 + \gamma \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2}, \quad (4.51)$$

$$\dot{X}_2 = P'_2 - \gamma \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1}, \quad (4.52)$$

$$\dot{P}'_1 = -\frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1} + \alpha P'_2, \quad (4.53)$$

$$\dot{P}'_2 = -\frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2} - \alpha P'_1, \quad (4.54)$$

де ми використали такі позначення $P'_i = P_i/m$. Зауважимо, що у рівняння руху (4.51)-(4.54) не входить маса. Отже, їх розв'язок $X_i = X_i(t)$, $P'_i = P'_i(t)$ також не залежить від маси. Зважаючи на це, ми можемо зробити висновок, що у випадку, коли виконуються умови (4.39), (4.40), кінематичні характеристики частинки залежать від констант γ та α та не залежать від її маси. Отже, слабкий принцип еквівалентності є відновленим у некомутовативному фазовому просторі.

У більш загальному випадку необхідно розглядати рух системи частинок у гравітаційному полі у некомутовативному фазовому просторі та вивчати принцип еквівалентності. Тому необхідним є детальне вивчення руху системи частинок в некомутовативному фазовому просторі.

4.3 Система N частинок у некомутовативному фазовому просторі та принцип еквівалентності

Розглянемо систему двох частинок з масами m_1 та m_2 у двовимірному некомутовативному фазовому просторі. У загальному випадку різні частинки можуть відчувати некомутовативність з різними параметрами. Отже, існує проблема опису руху центра мас системи, яка складається з N частинок у некомутовативному фазовому просторі.

Розглянемо такі комутовативні співвідношення:

$$[X_1^{(a)}, X_2^{(b)}] = i\hbar\delta^{ab}\theta_a, \quad (4.55)$$

$$[X_i^{(a)}, P_j^{(b)}] = i\hbar\delta^{ab}\delta_{ij}, \quad (4.56)$$

$$[P_1^{(a)}, P_2^{(b)}] = i\hbar\delta^{ab}\eta_a, \quad (4.57)$$

тут $i = (1, 2)$, $j = (1, 2)$, індекси a, b позначають частинки, θ_a, η_a – параметри некомутовативності, які відповідають частинці з масою m_a . Можемо записати відповідні дужки Пуассона

$$\{X_1^{(a)}, X_2^{(b)}\} = \delta^{ab}\theta_a, \quad (4.58)$$

$$\{X_i^{(a)}, P_j^{(b)}\} = \delta^{ab}\delta_{ij}, \quad (4.59)$$

$$\{P_1^{(a)}, P_2^{(b)}\} = \delta^{ab}\eta_a. \quad (4.60)$$

Гамільтоніан системи частинок має вигляд

$$H = \frac{(\mathbf{P}^{(1)})^2}{2m_1} + \frac{(\mathbf{P}^{(2)})^2}{2m_2} + U(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|), \quad (4.61)$$

тут $U(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|)$ – потенціальна енергія взаємодії двох частинок.

Введемо координати та імпульси центра мас, координати та імпульси відносного руху

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)}, \quad (4.62)$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \frac{m_1 \mathbf{X}^{(1)} + m_2 \mathbf{X}^{(2)}}{m_1 + m_2}, \quad (4.63)$$

$$\Delta \mathbf{P} = \mu_1 \mathbf{P}^{(2)} - \mu_2 \mathbf{P}^{(1)}, \quad (4.64)$$

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}^{(2)} - \mathbf{X}^{(1)}, \quad (4.65)$$

Можемо переписати гамільтоніан (4.61) у такому вигляді

$$H = \frac{(\tilde{\mathbf{P}})^2}{2M} + \frac{(\Delta \mathbf{P})^2}{2\mu} + U(|\Delta \mathbf{X}|), \quad (4.66)$$

тут $M = m_1 + m_2$ – повна маса системи, $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – приведена маса.

Важливо зауважити, що у некомутативному фазовому просторі дужки Пуассона для імпульсу центра мас та імпульсу відносного руху не дорівнюють нулеві

$$\{\tilde{P}_1, \Delta P_2\} = -\{\tilde{P}_2, \Delta P_1\} = \mu_1 \eta_2 - \mu_2 \eta_1. \quad (4.67)$$

Зауважимо також, що координати центра мас та координати відносного руху задовольняють такі співвідношення:

$$\{\tilde{X}_1, \Delta X_2\} = \frac{m_2 \theta_2 - m_1 \theta_1}{m_2 + m_1}. \quad (4.68)$$

Отже, рух центра мас та відносний рух не є незалежними у некомутативному фазовому просторі. У такому просторі двочастинкова задача не зводиться до задачі руху центра мас та відносного руху.

Зауважимо, що дужки Пуассона для імпульсу центра мас та імпульсу відносного руху дорівнюють нулеві

$$\{\tilde{P}_1, \Delta P_2\} = \{\tilde{P}_2, \Delta P_1\} = 0, \quad (4.69)$$

у випадку, коли задовольняється така умова на параметр імпульсної некомутативності

$$\frac{\eta_1}{m_1} = \frac{\eta_2}{m_2} = \alpha = \text{const}, \quad (4.70)$$

тут α – безрозмірна константа, яка не залежить від маси.

Також важливо зауважити, що дужки Пуассона для координат центра мас та координат відносного руху дорівнюють нулеві у випадку, коли параметри координатної некомутативності задовольняють таку умову

$$\theta_1 m_1 = \theta_2 m_2 = \gamma = \text{const}, \quad (4.71)$$

тут θ_i – параметр координатної некомутативності, який відповідає частинці з масою m_i , γ – константа, яка не залежить від маси.

Отже, задача двох частинок може бути зведена до задачі руху центра мас та відносного руху у випадку, коли параметри некомутативності, які відповідають частинці, визначаються їхніми масами відповідно до рівностей (4.70), (4.71). Важливо зауважити, що умови (4.70), (4.71) співпадають з умовами (4.39), (4.40), запропонованими для відновлення принципу еквівалентності у некомутативному фазовому просторі.

Взявши до уваги співвідношення (4.58)-(4.60), (4.62), (4.63), можемо записати

$$\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\} = \tilde{\theta}, \quad (4.72)$$

$$\{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2\} = \tilde{\eta}, \quad (4.73)$$

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{P}_j\} = \delta_{ij}, \quad (4.74)$$

тут $\tilde{\theta}$ and $\tilde{\eta}$ – ефективні параметри координатної та імпульсної некомутативності, які визначаються як

$$\tilde{\theta} = \frac{m_1^2 \theta_1 + m_2^2 \theta_2}{(m_1 + m_2)^2}, \quad (4.75)$$

$$\tilde{\eta} = \eta_1 + \eta_2. \quad (4.76)$$

Також з (4.58)-(4.60), (4.65), (4.65) ми можемо записати дужки Пуассона для координат та імпульсів відносного руху

$$\{\Delta X_1, \Delta X_2\} = \Delta\theta, \quad (4.77)$$

$$\{\Delta P_1, \Delta P_2\} = \Delta\eta, \quad (4.78)$$

$$\{\Delta X_i, \Delta P_j\} = \delta_{ij}, \quad (4.79)$$

тут параметри $\Delta\theta$ та $\Delta\eta$ мають такий вигляд

$$\Delta\theta = \theta_1 + \theta_2, \quad (4.80)$$

$$\Delta\eta = \mu_2^2\eta_1 + \mu_1^2\eta_2. \quad (4.81)$$

Отже, координати та імпульси центра мас задовольняють некомутовативну алгебру з ефективними параметрами некомутовативності (4.75), (4.76), які залежать від мас частинок, які утворюють систему, та параметрів некомутовативності θ_i , η_i , які відповідають частинкам складовим системи. Зауважимо, що коли задовольняються умови (4.70), (4.71), ефективні параметри некомутовативності $\tilde{\theta}$, $\tilde{\eta}$ залежать тільки від повної маси системи та не залежать від її композиції. Маємо:

$$\tilde{\theta} = \frac{\gamma}{M}, \quad (4.82)$$

$$\tilde{\eta} = \alpha M. \quad (4.83)$$

Важливо також зауважити, що умови (4.70), (4.71) виконуються для ефективних параметрів некомутовативності $\tilde{\theta}$, $\tilde{\eta}$ та параметрів $\Delta\theta$, $\Delta\eta$. Взявши до уваги (4.70), (4.71), з (4.75), (4.76), (4.80), (4.81) отримаємо:

$$\frac{\tilde{\eta}}{M} = \frac{\Delta\eta}{\mu} = \frac{\eta_1}{m_1} = \frac{\eta_2}{m_2} = \alpha = \text{const}. \quad (4.84)$$

$$\tilde{\theta}M = \Delta\theta\mu = \theta_1m_1 = \theta_2m_2 = \gamma = \text{const}. \quad (4.85)$$

У більш загальному випадку, коли система складається з N частинок маємо такий гамільтоніан

$$H = \sum_a \frac{(\mathbf{P}^{(a)})^2}{2m_a} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} U(|\mathbf{X}^{(a)} - \mathbf{X}^{(b)}|). \quad (4.86)$$

Тут координати та імпульси задовольняють співвідношення (4.58)–(4.60). Координати та імпульси центра мас, координати та імпульси відносного руху мають вигляд

$$\tilde{\mathbf{P}} = \sum_a \mathbf{P}^{(a)}, \quad (4.87)$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_a \mu_a \mathbf{X}^{(a)}, \quad (4.88)$$

$$\Delta\mathbf{P}^a = \mathbf{P}^{(a)} - \mu_a \tilde{\mathbf{P}}, \quad (4.89)$$

$$\Delta\mathbf{X}^{(a)} = \mathbf{X}^{(a)} - \tilde{\mathbf{X}}. \quad (4.90)$$

Взявши до уваги (4.58)-(4.60), можемо записати

$$\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\} = \tilde{\theta}, \quad \{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2\} = \tilde{\eta}, \quad (4.91)$$

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{P}_j\} = \{\Delta X_i, \Delta P_j\} = \delta_{ij}, \quad (4.92)$$

$$\{\Delta X_1^{(a)}, \Delta X_2^{(b)}\} = \delta^{ab}\theta_a - \mu_a\theta_a - \mu_b\theta_b + \tilde{\theta}, \quad (4.93)$$

$$\{\Delta P_1^{(a)}, \Delta P_2^{(b)}\} = \delta^{ab}\eta_a - \mu_b\eta_a - \mu_a\eta_b + \mu_a\mu_b\tilde{\eta}, \quad (4.94)$$

Тут ефективні параметри некомутативності $\tilde{\theta}$, $\tilde{\eta}$ визначаються як

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum_a m_a^2 \theta_a}{(\sum_b m_b)^2}, \quad (4.95)$$

$$\tilde{\eta} = \sum_a \eta_a. \quad (4.96)$$

Звернімо увагу на те, що виконуються такі співвідношення

$$\{\tilde{X}_1, \Delta X_2^{(a)}\} = -\{\tilde{X}_2, \Delta X_1^{(a)}\} = \mu_a\theta_a - \tilde{\theta}, \quad (4.97)$$

$$\{\tilde{P}_1, \Delta P_2^a\} = -\{\tilde{P}_2, \Delta P_1^a\} = \eta_a - \mu_a \sum_b \eta_b. \quad (4.98)$$

Важливо зауважити, що у випадку, коли є справедливими умови (4.39), (4.40), дужки Пуассона для імпульсів центра мас та імпульсів відносного руху дорівнюють нулеві, також дорівнюють нулеві дужки Пуассона для координат центра мас та координат відносного руху

$$\{\tilde{X}_1, \Delta X_2^{(a)}\} = -\{\tilde{X}_2, \Delta X_1^{(a)}\} = 0, \quad (4.99)$$

$$\{\tilde{P}_1, \Delta P_2^a\} = -\{\tilde{P}_2, \Delta P_1^a\} = 0. \quad (4.100)$$

Отже, у цьому випадку рух центра мас та відносний рух є незалежними у некомутативному фазовому просторі. Крім цього, коли виконуються умови (4.39), (4.40), ефективні параметри некомутативності (4.95), (4.96), які описують рух центра мас системи частинок, не залежать від її композиції. Маємо

$$\tilde{\theta} = \gamma M, \quad \tilde{\eta} = \alpha M. \quad (4.101)$$

Отже, умови (4.35), (4.36), які запропоновані для відновлення слабого принципу еквівалентності, є також важливими при розгляді системи частинок у некомутативному фазовому просторі.

Використавши результати, представлені вище, розгляньмо рух системи частинок (макроскопічного тіла) у гравітаційному полі у некомутовативному фазовому просторі та дослідимо принцип еквівалентності.

Для системи частинок у гравітаційному полі $V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ маємо такий гамільтоніан

$$H = \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + MV(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) + H_{rel}, \quad (4.102)$$

де M – загальна маса системи, $\tilde{X}_i, \tilde{P}_i$ – координати та імпульси центра мас, які визначаються як (4.87), (4.88) та задовольняють некомутовативну алгебру (4.91)-(4.92) з ефективними параметрами $\tilde{\theta}, \tilde{\eta}$. Ми використали позначення H_{rel} для гамільтоніану, який відповідає відносному руху та залежить від координат та імпульсів відносного руху.

Як було показано вище, рух центра мас системи частинок та відносні рухи є незалежними у випадку, коли виконуються умови (4.39), (4.40). У цьому випадку

$$\left\{ \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + MV(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2), H_{rel} \right\} = 0. \quad (4.103)$$

Отже, можемо записати рівняння руху для центра мас системи N частинок у гравітаційному полі у некомутовативному фазовому просторі

$$\dot{\tilde{X}}_1 = \frac{P_1}{M} + M\tilde{\theta} \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2}, \quad (4.104)$$

$$\dot{\tilde{X}}_2 = \frac{P_2}{M} - M\tilde{\theta} \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1}, \quad (4.105)$$

$$\dot{\tilde{P}}_1 = -M \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1} + \tilde{\eta} \frac{P_2}{M}, \quad (4.106)$$

$$\dot{\tilde{P}}_2 = -M \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2} - \tilde{\eta} \frac{P_1}{M}. \quad (4.107)$$

Важливо звернути увагу на те, що рівняння руху залежать від ефективних параметрів некомутовативності, які відповідно до (4.95), (4.96) залежать від композиції макроскопічного тіла. Цей факт є

додатковою причиною порушення принципу еквівалентності у некомутативному фазовому просторі.

Врахувавши умови (4.35), (4.36), можемо записати

$$\dot{\tilde{X}}_1 = \frac{P_1}{M} + \gamma \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2}, \quad (4.108)$$

$$\dot{\tilde{X}}_2 = \frac{P_2}{M} - \gamma \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1}, \quad (4.109)$$

$$\dot{\tilde{P}}_1 = -M \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1} + \alpha P_2, \quad (4.110)$$

$$\dot{\tilde{P}}_2 = -M \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2} - \alpha P_1. \quad (4.111)$$

Отже, у випадку виконання співвідношень (4.35), (4.36), рух тіла у гравітаційному полі не залежить від його маси та композиції, тому слабкий принцип еквівалентності зберігається у некомутативному фазовому просторі. У наступному підрозділі буде показано, що ці умови можуть бути також отримані з вимоги на незалежність кінетичної енергії системи частинок від її композиції та із властивості адитивності кінетичної енергії.

4.4 Властивості кінетичної енергії у некомутативному фазовому просторі та параметри некомутативності

Дослідимо властивості кінетичної енергії системи частинок у некомутативному фазовому просторі.

Розгляньмо систему N частинок з масами m_a та параметрами некомутативності θ_a , η_a , визначеними як (4.95), (4.96). Вивчимо випадок, коли кожна частинка у системі рухається зі швидкістю, яка дорівнює швидкості руху центра мас системи. Цей випадок є еквівалентним до випадку, коли макроскопічне тіло є поділене на N частин, які можуть розглядатися, як точкові частинки. Запишемо кінетичну енергію системи

$$T = \frac{\tilde{P}_1^2}{2M} + \frac{\tilde{P}_2^2}{2M}, \quad (4.112)$$

тут $\tilde{P}_i^{(a)}$ – імпульс центра мас, визначений як (4.87), $M = \sum_a m_a$ – загальна маса системи.

У випадку, коли система частинок (макроскопічне тіло) рухається у гравітаційному полі, врахувавши (4.104)-(4.107), можемо записати

$$\tilde{P}_1 = \tilde{A} \cos \frac{\tilde{\eta}}{M} t + \tilde{B} \sin \frac{\tilde{\eta}}{M} t, \quad (4.113)$$

$$\tilde{P}_2 = -\tilde{A} \sin \frac{\tilde{\eta}}{M} t + \tilde{B} \cos \frac{\tilde{\eta}}{M} t - \frac{M^2 g}{\tilde{\eta}}, \quad (4.114)$$

де $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ – константи, які визначаються як

$$\tilde{A} = M \tilde{v}_{01}, \quad (4.115)$$

$$\tilde{B} = M \tilde{v}_{02} + \frac{M^2 g}{\tilde{\eta}} - M^2 g \tilde{\theta}. \quad (4.116)$$

Тут ми врахували початкові умови (4.28)-(4.29) та використали позначення $\tilde{v}_{01}$, $\tilde{v}_{02}$ для початкових швидкостей центра мас системи $\dot{\tilde{X}}_1(0) = \tilde{v}_{01}$, $\dot{\tilde{X}}_2(0) = \tilde{v}_{02}$. Отже, кінетична енергія системи може бути записана у такому вигляді

$$T = T_0 + g^2 M^3 \left(\frac{1}{\tilde{\eta}^2} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} - \frac{\tilde{\theta}}{\tilde{\eta}} \right) + M^2 g \tilde{v}_{02} \left(\frac{1}{\tilde{\eta}} - \tilde{\theta} \right) + \\ + \frac{M^2 g}{\tilde{\eta}} \left(\tilde{v}_{01} \sin \frac{\tilde{\eta}}{M} t + \left(\frac{Mg}{\tilde{\eta}} - M g \tilde{\theta} + \tilde{v}_{02} \right) \cos \frac{\tilde{\eta}}{M} t \right), \quad (4.117)$$

де $T_0 = M(\tilde{v}_{01}^2 + \tilde{v}_{02}^2)/2$

Зауважимо, що кінетична енергія системи залежить від ефективних параметрів некомутативності (4.95), (4.96). Останні залежать від параметрів некомутативності складових системи та їхніх мас. Отже, кінетична енергія системи частинок (4.117) у некомутативному фазовому просторі залежить від композиції системи. Зауважимо, що у випадку виконання умов (4.35), (4.36), кінетична енергія системи частинок залежить від повної маси системи та не залежить від її композиції. Маємо

$$T = T_0 + M \left[g^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma}{\alpha} \right) + g \tilde{v}_{02} \left(\frac{1}{\alpha} - \gamma \right) + \right. \\ \left. + \frac{g}{\alpha} \left(\tilde{v}_{01} \sin \alpha t + \left(\frac{g}{\alpha} - g\gamma + \tilde{v}_{02} \right) \cos \alpha t \right) \right]. \quad (4.118)$$

З іншого боку, відповідно до властивості адитивності, кінетична енергія системи є сумою кінетичних енергій частинок, які її складають. Можемо записати

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_a T_a = \sum_a \frac{(P_1^{(a)})^2}{2m_a} + \frac{(P_2^{(a)})^2}{2m_a} = \\
 &= \sum_a \left[T_{0a} + g^2 m_a^3 \left(\frac{1}{\eta_a^2} + \frac{\theta_a^2}{2} - \frac{\theta_a}{\eta_a} \right) + m_a^2 g \tilde{v}_{02} \left(\frac{1}{\eta_a} - \theta_a \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m_a^2 g}{\eta_a} \left(\tilde{v}_{01} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t + \left(\frac{m_a g}{\eta_a} - m_a g \theta_a + \tilde{v}_{02} \right) \cos \frac{\eta_a}{m_a} t \right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.119}$$

Тут враховано те, що швидкість частинки у системі є такою самою як швидкість всієї системи.

Звернімо увагу на те, що вирази для кінетичної енергії (4.117), (4.119) відрізняються. Щоб вирішити цю проблему, розглянемо знову умови на параметри некомутативності (4.35), (4.36). У випадку їх виконання можемо записати:

$$\begin{aligned}
 T &= T_0 + \sum_a m_a \left[g^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma}{\alpha} \right) + g \tilde{v}_{02} \left(\frac{1}{\alpha} - \gamma \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{g}{\alpha} \left(\tilde{v}_{01} \sin \alpha t + \left(\frac{g}{\alpha} - g\gamma + \tilde{v}_{02} \right) \cos \alpha t \right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.120}$$

Отже, при виконанні (4.35), (4.36), вирази для кінетичної енергії (4.118), (4.120) співпадають, тому зберігається властивість адитивності кінетичної енергії.

Важливість співвідношень (4.35), (4.36) є обґрунтована кількістю проблем, які можуть бути розв'язаними при їх виконанні. У цьому розділі показано, що таких проблем є щонайменше чотири, а саме: проблема порушення принципу еквівалентності, проблема залежності руху центра мас та відносного руху, порушення властивості адитивності кінетичної енергії, залежність кінетичної енергії системи частинок від композиції у некомутативному фазовому просторі.

Розділ 5

Сферична симетрія у некомутативному просторі

У попередніх розділах ми розглядали двовимірний простір з канонічною некомутативністю координат (1.15)-(1.17), у якому симетрія відносно поворотів зберігається. Розгляньмо тривимірний некомутативний простір канонічного типу, який характеризується такими комутаційними співвідношеннями

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \quad (5.1)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (5.2)$$

$$[P_i, P_j] = 0, \quad (5.3)$$

де θ_{ij} є елементами сталої матриці. Зауважимо, що у такому просторі існує проблема порушення сферичної симетрії [21, 60]. Для збереження сферичної симетрії у некомутативному просторі запропоновано різні класи некомутативних алгебр (див., для прикладу, [61–63]). У літературі представлено сферично-симетричні некомутативні алгебри, для яких комутатор координат дорівнює деякій функції цих координат. Для прикладу, у статтях [64–67] розглянуто таку некомутативну алгебру:

$$[x_i, x_j] = 2i\lambda\varepsilon_{ijk}x_k, \quad (5.4)$$

де λ – деякий масштабний множник. У статті [61] вивчено сферично-симетричну некомутативну алгебру, яка характеризується такими комутаційними співвідношеннями для операторів координат:

$$[x_i, x_j] = i\theta\varepsilon_{ijk}r x_k, \quad (5.5)$$

де $r^2 = x_i x_i$, $\theta = \text{const.}$ У роботі [62] розглянуто некомутативний простір, у якому координати задовольняють співвідношення, яке має вигляд

$$[x_i, x_j] = i\theta \varepsilon^{ijk} x_k f(x_i x^i), \quad (5.6)$$

де $f(x_i x^i)$ – задана функція. У сферично-симетричному просторі (5.6) досліджено енергетичні рівні атома водню [62].

Зауважимо, що сферично-симетричні некомутативні алгебри (5.4), (5.5), (5.6) не є трансляційно-інваріантними. Відзначимо також відмінність некомутативних алгебр (5.4), (5.5), (5.6) від алгебри канонічного типу (1.1)-(1.3). Звернімо увагу, що у випадку алгебри (1.1)-(1.3), зважаючи на те, що θ_{ij} є елементами сталої матриці, справедливими є такі співвідношення:

$$[X_i, \theta_{jk}] = 0, \quad (5.7)$$

$$[P_i, \theta_{jk}] = 0. \quad (5.8)$$

Алгебри (5.4), (5.5), (5.6) характеризуються залежністю θ_{ij} від координат. Маємо $\theta_{ij} = 2\lambda \varepsilon_{ijk} x_k$ для алгебри (5.4), $\theta_{ij} = \theta \varepsilon_{ijk} r x_k$ у випадку алгебри (5.5) та $\theta_{ij} = \theta \varepsilon^{ijk} x_k f(x_i x^i)$ для алгебри (5.6). Як наслідок, комутатор координат та імпульсів із θ_{ij} не дорівнює нулеві. Тому алгебри (5.4), (5.5), (5.6) принципово відрізняються від алгебри канонічного типу (1.1)-(1.3).

Також для побудови сферично-симетричної некомутативної алгебри у статті [63, 68] представлено ідею розглядати θ^{ij} , як оператор некомутативності, який комутує з оператором координати x^i та оператором імпульсу p_i

$$[x^i, \theta^{jk}] = [p^i, \theta^{jk}] = 0, \quad (5.9)$$

та запропоновано таку сферично-симетричну алгебру:

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij}, \quad (5.10)$$

$$[x^i, p_j] = i\delta_j^i, \quad (5.11)$$

$$[\theta^{lm}, \theta^{jk}] = 0, \quad (5.12)$$

$$[\theta^{lm}, \pi^{jk}] = i\delta_{jk}^{lm}, \quad (5.13)$$

де π^{ij} спряжений до оператора θ^{ij} імпульс, $\delta_{jk}^{lm} = \delta_j^l \delta_k^m - \delta_k^l \delta_j^m$. У просторі (5.10)-(5.13) розглянуто гармонічний осцилятор [63].

У цьому розділі представляється некомутативна алгебра, побудована на основі ідеї узагальнення параметра некомутативності. Така алгебра є сферично-симетричною, трансляційно-інваріантною та еквівалентною до некомутативної алгебри канонічного типу [69].

5.1 Некомутативний простір канонічного типу з відновленою сферичною симетрією

З метою вирішення проблеми порушення сферичної симетрії у некомутативному просторі розгляньмо ідею узагальнення сталої матриці некомутативності θ_{ij} . Розгляньмо тензор некомутативності, визначений за допомогою додаткових координат, які описуються сферично-симетричною системою. Один із простих варіантів побудови тензора некомутативності має такий вигляд:

$$\theta_{ij} = \frac{\alpha}{\hbar}(a_i b_j - a_j b_i), \quad (5.14)$$

де α – безрозмірна константа, a_i , b_i – додаткові координати, які відповідають сферично-симетричній системі. Для простоти розгляньмо випадок, коли координати a_i , b_i визначаються гармонічним осцилятором із гамільтоніаном

$$H_{osc} = \frac{(p^a)^2}{2m} + \frac{(p^b)^2}{2m} + \frac{m\omega^2 a^2}{2} + \frac{m\omega^2 b^2}{2}. \quad (5.15)$$

Вважається, що величина параметра некомутативності має порядок планківських масштабів. Зважаючи на це, покладемо

$$\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = l_P, \quad (5.16)$$

де l_P – довжина Планка. Незалежно від (5.16) ми також розглядаємо випадок, коли частота осцилятора ω є великою, тому також є великою відстань між енергетичними рівнями осцилятора. Зважаючи на це, осцилятор, який знаходиться у основному стані, залишатиметься у ньому.

Отже, ми пропонуємо таку сферично-симетричну некомутативну алгебру:

$$[X_i, X_j] = i\alpha(a_i b_j - a_j b_i), \quad (5.17)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (5.18)$$

$$[P_i, P_j] = 0. \quad (5.19)$$

Зауважимо, що координати a_i , b_i та імпульси p_i^a , p_i^b задовольняють звичні комутаційні співвідношення

$$[a_i, a_j] = 0, \quad (5.20)$$

$$[a_i, p_j^a] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (5.21)$$

$$[b_i, b_j] = 0, \quad (5.22)$$

$$[b_i, p_j^b] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (5.23)$$

також

$$[a_i, b_j] = [a_i, p_j^b] = [b_i, p_j^a] = [p_i^a, p_j^b] = 0. \quad (5.24)$$

Важливо, що додаткові координати a_i , b_i комутують з X_i та P_i

$$[a_i, X_j] = [a_i, P_j] = [b_i, X_j] = [p_i^a, P_j] = 0. \quad (5.25)$$

Зажаючи на (5.20)-(5.25), тензор некомутативності θ_{ij} , визначений як (5.14), також комутує з X_i та P_i

$$[\theta_{ij}, X_k] = [\theta_{ij}, P_k] = 0. \quad (5.26)$$

Отже, X_i , P_i та θ_{ij} задовольняють такі самі комутаційні співвідношення як і у випадку некомутативної алгебри канонічного типу (5.1)-(5.3). В цьому сенсі сферично-симетрична алгебра (5.17)-(5.19) є еквівалентною алгебрі (5.1)-(5.3).

Зауважимо, що координати X_i , які не комутують, та імпульси P_i можна представити через координати x_i та імпульси p_i , які задовольняють звичні комутаційні співвідношення,

$$[x_i, x_j] = 0, \quad (5.27)$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (5.28)$$

$$[p_i, p_j] = 0. \quad (5.29)$$

Легко переконатися, що координати та імпульси, які задовольняють співвідношення (5.17)-(5.19) можна представити як

$$X_i = x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij}p_j, \quad (5.30)$$

$$P_i = p_i, \quad (5.31)$$

де θ_{ij} визначається як (5.14). Зручно використати таке позначення

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\alpha}{\hbar}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}], \quad (5.32)$$

та переписати рівність (5.30) у вигляді

$$X_i = x_i + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]_i. \quad (5.33)$$

Зауважимо, що x_i та p_i комутують з a_i , b_i , p_i^a та p_i^b

$$[x_i, a_j] = [x_i, b_j] = [x_i, p_j^a] = [x_i, p_j^b] = 0, \quad (5.34)$$

$$[p_i, a_j] = [p_i, b_j] = [p_i, p_j^a] = [p_i, p_j^b] = 0. \quad (5.35)$$

Звернімо увагу, що використавши представлення (5.31), (5.33), отримаємо такі співвідношення

$$[X_i, p_j^a] = \frac{i\alpha}{2} (b_i p_j - \delta_{ij}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{p})), \quad (5.36)$$

$$[X_i, p_j^b] = -\frac{i\alpha}{2} (a_i p_j - \delta_{ij}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})), \quad (5.37)$$

$$[P_i, p_j^a] = [P_i, p_j^b] = 0. \quad (5.38)$$

Отже, координати та імпульси, які задовольняють некомутативну алгебру (5.17)-(5.19) можуть бути переписані через координати та імпульси, що задовольняють звичні комутаційні співвідношення (5.27), (5.29). Це гарантує виконання тотожності Якобі та може бути легко перевірено для всіх можливих трійок операторів.

Зауважимо, що тензор некомутативності можна також будувати тільки за допомогою додаткових координат a_k , ввівши при цьому з розмірних міркувань константу l_0 з розмірністю довжини

$$\theta_{ij} = \frac{l_0}{\hbar} \varepsilon_{ijk} a_k, \quad (5.39)$$

тут a_k – додаткові координати, які визначаються сферично-симетричною системою, для прикладу, гармонічним осцилятором

$$H_{osc} = \frac{(p^a)^2}{2m} + \frac{m\omega^2 a^2}{2}. \quad (5.40)$$

У цьому випадку сферично-симетрична некомутативна алгебра буде мати вигляд

$$[X_i, X_j] = i l_0 \varepsilon_{ijk} a_k, \quad (5.41)$$

$$[X_i, P_j] = i \hbar \delta_{ij}, \quad (5.42)$$

$$[P_i, P_j] = 0. \quad (5.43)$$

Зазначимо, що у двох випадках (5.14), (5.39) у границі $\alpha \rightarrow 0$ ми отримаємо звичні комутаційні співвідношення:

$$[X_i, X_j] = 0, \quad (5.44)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (5.45)$$

$$[P_i, P_j] = 0. \quad (5.46)$$

5.2 Оператор повороту у некомутативному просторі

Алгебри (5.17)-(5.19), (5.41)-(5.43) є сферично-симетричними. Комутаційні співвідношення (5.17)-(5.19) залишаються такими самими після повороту

$$X'_i = U(\varphi)X_iU^+(\varphi), \quad (5.47)$$

$$P'_i = U(\varphi)P_iU^+(\varphi), \quad (5.48)$$

$$a'_i = U(\varphi)a_iU^+(\varphi), \quad (5.49)$$

$$b'_i = U(\varphi)b_iU^+(\varphi), \quad (5.50)$$

де оператор повороту має такий вигляд

$$U(\varphi) = e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{L}})}, \quad (5.51)$$

тут $\tilde{\mathbf{L}}$ – оператор моменту кількості руху, визначений як

$$\tilde{\mathbf{L}} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] + [\mathbf{a} \times \mathbf{p}^a] + [\mathbf{b} \times \mathbf{p}^b], \quad (5.52)$$

де $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Повернувшись до некомутативних координат (5.31), (5.33), можемо також записати $\tilde{\mathbf{L}}$ у такому вигляді

$$\tilde{\mathbf{L}} = [\mathbf{R} \times \mathbf{P}] + \frac{1}{2}[\mathbf{P} \times [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{P}]] + [\mathbf{a} \times \mathbf{p}^a] + [\mathbf{b} \times \mathbf{p}^b], \quad (5.53)$$

тут $\mathbf{R} = (X_1, X_2, X_3)$.

Після повороту (5.47)-(5.50) маємо

$$[X'_i, X'_j] = i\alpha(a'_ib'_j - a'_jb'_i), \quad (5.54)$$

$$[X'_i, P'_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (5.55)$$

$$[P'_i, P'_j] = 0. \quad (5.56)$$

Важливо зауважити, що $\tilde{\mathbf{L}}$ задовольняє звичні комутаційні співвідношення

$$[X_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}X_k, \quad (5.57)$$

$$[P_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}P_k, \quad (5.58)$$

$$[a_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}a_k, \quad (5.59)$$

$$[p_i^a, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}p_k^a, \quad (5.60)$$

$$[b_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}b_k, \quad (5.61)$$

$$[p_i^b, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}p_k^b. \quad (5.62)$$

Також оператор моменту кількості руху $\tilde{\mathbf{L}}$ комутує з r^2 , a^2 та b^2 та із скалярними добутками

$$\begin{aligned} [\tilde{L}_i, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})] &= [\tilde{L}_i, (\mathbf{b} \cdot \mathbf{p})] = \\ &= [\tilde{L}_i, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})] = [\tilde{L}_i, (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})] = [\tilde{L}_i, (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b})] = 0. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Зважаючи на це, очевидно, що $\tilde{\mathbf{L}}$ комутує із оператором довжини R , який може бути записаний у такій формі

$$R = \sqrt{\sum_i X_i^2} = \sqrt{\left(\mathbf{r} - \frac{\alpha}{2\hbar}\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}) + \frac{\alpha}{2\hbar}\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})\right)^2}. \quad (5.64)$$

Отже, довжина залишається незмінною після повороту

$$R' = U(\varphi)RU^+(\varphi) = R. \quad (5.65)$$

Розгляньмо сферично-симетричний некомутативний простір (5.41)-(5.43). Комутаційні співвідношення (5.41) залишаються такими самими після повороту

$$X'_i = U(\varphi)X_iU^+(\varphi), \quad (5.66)$$

$$a'_i = U(\varphi)a_iU^+(\varphi), \quad (5.67)$$

де

$$U(\varphi) = e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{L}})}, \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}} &= [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] + [\mathbf{a} \times \mathbf{p}^a] = \\ &= [\mathbf{R} \times \mathbf{P}] + \frac{l_0}{2\hbar}[\mathbf{P} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{P}]] + [\mathbf{a} \times \mathbf{p}^a]. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Маємо

$$[X'_i, X'_j] = i\varepsilon_{ijk}l_0a'_k. \quad (5.70)$$

Звернімо увагу, що оператор $\tilde{\mathbf{L}}$ (5.69) задовольняє звичні комутаційні співвідношення

$$[X_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}X_k, \quad (5.71)$$

$$[P_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}P_k, \quad (5.72)$$

$$[a_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}a_k, \quad (5.73)$$

$$[p_i^a, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}p_k^a, \quad (5.74)$$

та комує з оператором відстані

$$R = \sqrt{\sum_i X_i^2} = \sqrt{r^2 - \frac{l_0}{\hbar}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{L}) + \frac{l_0^2}{4\hbar^2}[\mathbf{a} \times \mathbf{p}]^2}. \quad (5.75)$$

Тут ми використали представлення (5.30), (5.31) та врахували (5.39).

5.3 Обмеження на довжину, площу та об'єм у сферично-симетричному некомутативному просторі

Розгляньмо середньо-квадратичне відхилення оператора довжини у сферично-симетричному некомутативному просторі

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle = \langle \Delta X_1^2 \rangle + \langle \Delta X_2^2 \rangle + \langle \Delta X_3^2 \rangle. \quad (5.76)$$

Перейдемо до координат та імпульсів, які задовольняють звичні комутаційні співвідношення. Використавши (5.85) та (5.33), отримаємо:

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle = \langle x^2 - (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \rangle - \sum_i \langle x_i + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]_i \rangle^2, \quad (5.77)$$

де $\mathbf{L} = [\mathbf{x} \times \mathbf{p}]$. Зважаючи на те, що для побудови сферично-симетричної некомутативної алгебри ми означили тензор некомутативності (5.32) за допомогою додаткових координат, при дослідженні фізичної системи із гамільтоніаном H_s у некомутативному

просторі з відновленою сферичною симетрією необхідно розглядати повний гамільтоніан H із врахуванням доданків, що відповідають гармонічному осцилятору

$$H = H_s + H_{osc}, \quad (5.78)$$

де H_{osc} визначається із (5.15). Отже, при обчисленні середніх у (5.77) необхідно розглядати хвильові функції, які відповідають повному гамільтоніану (5.78).

Розгляньмо випадок, коли хвильові функції, що відповідають гамільтоніану (5.78) можна записати у такому вигляді:

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \psi(\mathbf{x})\psi_{0,0,0}^a(\mathbf{a})\psi_{0,0,0}^b(\mathbf{b}), \quad (5.79)$$

де $\psi_{0,0,0}^a(\mathbf{a})$ $\psi_{0,0,0}^b(\mathbf{b})$ – добре відомі хвильові функції гармонічного осцилятора (5.15) у основному стані.

Зауважимо, що

$$\langle \psi_{0,0,0}^a(\mathbf{a})\psi_{0,0,0}^b(\mathbf{b}) | \theta_i | \psi_{0,0,0}^a(\mathbf{a})\psi_{0,0,0}^b(\mathbf{b}) \rangle = 0. \quad (5.80)$$

Отже, врахувавши (5.80), маємо

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle = \langle \Delta \mathbf{r}^2 \rangle + \frac{1}{6} \langle \theta^2 \rangle_{ab} \langle p^2 \rangle, \quad (5.81)$$

де ми використали таке позначення:

$$\langle \dots \rangle_{ab} = \langle \psi_{0,0,0}^a(\mathbf{a})\psi_{0,0,0}^b(\mathbf{b}) | \dots | \psi_{0,0,0}^a(\mathbf{a})\psi_{0,0,0}^b(\mathbf{b}) \rangle, \quad (5.82)$$

$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Зауважимо, що у правій стороні рівності (5.85) маємо середнє від оператора

$$r^2 + \frac{\langle \theta^2 \rangle_{ab}}{6} p^2, \quad (5.83)$$

який відповідає гамільтоніану гармонічного осцилятора з масою $3/\langle \theta^2 \rangle_{ab}$ та частотою $\sqrt{2\langle \theta^2 \rangle_{ab}}/\sqrt{3}$. Оператори x_i , p_i задовольняють звичні комутаційні співвідношення (5.10)-(5.13). Отже, енергія основного стану осцилятора (5.83), має вигляд:

$$E_{0,0,0} = \sqrt{\frac{3\hbar^2 \langle \theta^2 \rangle_{ab}}{2}}. \quad (5.84)$$

Враховуючи (5.84), можемо записати

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle \geq \sqrt{\frac{3\hbar^2 \langle \theta^2 \rangle_{ab}}{2}} - \langle \mathbf{r} \rangle^2 \geq \sqrt{\frac{3\hbar^2 \langle \theta^2 \rangle_{ab}}{2}}, \quad (5.85)$$

де $\langle \mathbf{r} \rangle = 0$.

Отже, у сферично-симетричному некомутативному просторі мінімальна довжина визначається із такої нерівності

$$\Delta R \geq \left(\frac{3\hbar^2 \langle \theta^2 \rangle_{ab}}{2} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (5.86)$$

де

$$\langle \theta^2 \rangle_{ab} = \langle \theta^2 \rangle = \frac{3\alpha^2 l_p^4}{2\hbar^2}. \quad (5.87)$$

При обчисленні $\langle \theta^2 \rangle_{ab}$ ми взяли до уваги (5.32).

Дослідимо також $\Delta X_i \Delta X_j$, що відповідає площі, а також розгляньмо $\Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3$, що відповідає об'єму у сферично-симетричному некомутативному просторі. Врахувавши комутаційні співвідношення (5.17), можемо записати

$$\langle \Delta X_i^2 \rangle \langle \Delta X_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 \langle \theta_{ij} \rangle^2}{4}. \quad (5.88)$$

Зауважимо, що усереднивши за хвильовими функціями осцилятора та врахувавши (5.80), маємо

$$\langle \Delta X_i^2 \rangle \langle \Delta X_j^2 \rangle \geq 0, \quad (5.89)$$

звідки

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq 0. \quad (5.90)$$

Із (5.90), можемо легко отримати

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3 \geq 0. \quad (5.91)$$

Отже, відповідно до нерівностей (5.90), (5.91) площа та об'єм можуть набувати як завгодно малих значень у сферично-симетричному некомутативному просторі (5.17)-(5.19). Це пов'язано із тим, що у такому просторі $\langle \theta_{ij} \rangle = 0$. Зауважимо, що у некомутативному просторі із відновленою сферичною симетрією (5.17)-(5.19) існує обмеження на довжину. Це обмеження визначається відповідно до нерівності (5.86) та залежить від $\langle \theta^2 \rangle$ [37].

Розділ 6

Частинка у однорідному полі у некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією

Задача про рух частинки у гравітаційному полі досліджувалася у просторі з канонічною некомутативністю координат [39, 40]. Авторами статей [39, 40] знайдено зсув перигелію, зумовлений некомутативністю координат та на основі порівняння отриманих результатів із експериментальними даними для планети Меркурій оцінено верхню межу для параметра некомутативності. Також розглянуто систему частинок у гравітаційному полі у некомутативному просторі канонічного типу та описано рух кожної частинки системи [70]. Досліджувалася задача про рух частинки у центральному полі у некомутативному просторі з канонічною некомутативністю координат [11]. Частинка у гравітаційній квантовій ямі розглядалася у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів у статтях [9, 71].

Вивчення задачі про рух частинки у однорідному гравітаційному полі у сферично-симетричному просторі є цікавим з кількох міркувань: ця задача розв'язується точно, без наближень, пов'язаних з тим, що величина параметра некомутативності є малою; дослідження руху частинки у однорідному полі дозволяє виявити цікавий ефект, зумовлений некомутативністю, а саме: вплив некомутативності на масу частинки.

У розділі розглядається частинка у однорідному полі у неко-

мутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією (5.41)-(5.43). Показується, що рух частинки може бути описаний за допомогою ефективної маси. Як приклад, досліджується рух частинки у однорідному гравітаційному полі у сферично-симетричному некомутовативному просторі та вивчається принцип еквівалентності. Зауважимо, що у цьому розділі задача руху частинки у однорідному полі у сферично-симетричному некомутовативному просторі (5.41)-(5.43) розв'язується точно [72].

6.1 Гамільтоніан частинки у однорідному полі у сферично-симетричному некомутовативному просторі

Розгляньмо рух частинки з масою m у однорідному полі у сферично-симетричному некомутовативному просторі

$$[X_i, X_j] = i l_0 \varepsilon_{ijk} a_k, \quad (6.1)$$

$$[X_i, P_j] = i \hbar \delta_{ij}, \quad (6.2)$$

$$[P_i, P_j] = 0. \quad (6.3)$$

Для простоти виберемо систему координат так, щоб напрям поля збігався із напрямом осі X_3 . Отже, можемо записати гамільтоніан частинки

$$H_p = \frac{P^2}{2m} + \kappa X_3, \quad (6.4)$$

де оператори координат та імпульсів задовольняють співвідношення (6.1)-(6.3), множник κ характеризує поле. Для прикладу, у випадку руху зарядженої частинки q в однорідному електричному полі E , напрямленому вздовж осі X_3 , множник κ має вигляд $\kappa = -qE$. У випадку руху частинки з масою m в однорідному гравітаційному полі g , напрямленому вздовж осі X_3 , маємо $\kappa = -mg$.

Як вже було зазначено у попередніх розділах, у сферично-симетричному просторі (6.1)-(6.3) при записі гамільтоніана необхідно брати до уваги додаткові доданки, що відповідають гармонічному осцилятору

$$H_{osc}^a = \frac{(p^a)^2}{2m} + \frac{m\omega^2 a^2}{2}. \quad (6.5)$$

та розглядати повний гамільтоніан у такому вигляді

$$H = H_p + H_{osc}^a = \frac{P^2}{2m} + \kappa X_3 + \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2 a^2}{2}. \quad (6.6)$$

Зауважимо, що координата X_3 не комує з імпульсами p_i^a . Справедливим є таке співвідношення

$$[X_3, p_i^a] = i\varepsilon_{3ij} \frac{l_0}{2} p_j. \quad (6.7)$$

Перепишемо гамільтоніан через оператори координат та імпульсів, що задовольняють звичні комутаційні співвідношення. Використавши представлення

$$X_i = x_i - \frac{l_0}{\hbar} \varepsilon_{ijk} a_k p_j, \quad (6.8)$$

$$P_i = p_i, \quad (6.9)$$

можемо записати

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa x_3 + \frac{\kappa l_0}{2\hbar} (a_1 p_2 - a_2 p_1) + \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2 a^2}{2}. \quad (6.10)$$

Після алгебраїчних перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} H = & \left(1 - \frac{\kappa^2 l_0^2 m}{4\hbar^2 \omega^2 m_{osc}}\right) \frac{p_1^2}{2m} + \left(1 - \frac{\kappa^2 l_0^2 m}{4\hbar^2 \omega^2 m_{osc}}\right) \frac{p_2^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m} + \\ & + \kappa x_3 + \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2}{2} \left(a_1 + \frac{\kappa l_0}{2\hbar \omega^2 m_{osc}} p_2\right)^2 + \\ & + \frac{m_{osc}\omega^2}{2} \left(a_2 - \frac{\kappa l_0}{2\hbar \omega^2 m_{osc}} p_1\right)^2 + \frac{m_{osc}\omega^2 a_3^2}{2}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Зауважимо, що гамільтоніан (6.11) можна переписати як

$$H = \tilde{H}_p + \tilde{H}_{osc}, \quad (6.12)$$

де

$$\tilde{H}_p = \frac{p_1^2}{2m_{eff}} + \frac{p_2^2}{2m_{eff}} + \frac{p_3^2}{2m} + \kappa x_3, \quad (6.13)$$

тут m_{eff} – ефективна маса

$$m_{eff} = m \left(1 - \frac{\kappa^2 l_0^2 m}{4 \hbar^2 \omega^2 m_{osc}} \right)^{-1}, \quad (6.14)$$

та

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{osc} = & \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2}{2} \left(a_1 + \frac{\kappa l_0}{2\hbar\omega^2 m_{osc}} p_2 \right)^2 + \\ & + \frac{m_{osc}\omega^2}{2} \left(a_2 - \frac{\kappa l_0}{2\hbar\omega^2 m_{osc}} p_1 \right)^2 + \frac{m_{osc}\omega^2 a_3^2}{2}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Звернімо увагу на те, що оператори

$$q_1 = a_1 + \frac{\kappa l_0}{2\hbar\omega^2 m_{osc}} p_2, \quad (6.16)$$

$$q_2 = a_2 - \frac{\kappa l_0}{2\hbar\omega^2 m_{osc}} p_1, \quad (6.17)$$

$$q_3 = a_3, \quad (6.18)$$

задовольняють такі комутаційні співвідношення

$$[q_i, q_j] = 0, \quad (6.19)$$

$$[q_i, p_j^a] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (6.20)$$

$$[q_i, p_j] = 0. \quad (6.21)$$

Отже, гамільтоніан $\tilde{H}_{osc}$ відповідає гамільтоніану тривимірного гармонічного осцилятора у звичайному просторі ($\theta_{ij} = 0$)

$$\tilde{H}_{osc} = \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2 q^2}{2}. \quad (6.22)$$

де $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Також зауважимо, що

$$[q_i, x_j] = -i\varepsilon_{ij3} \frac{\kappa l_0}{2m_{osc}\omega^2}. \quad (6.23)$$

6.2 Вплив некомутативності на масу частинки у однорідному полі

Знайдемо власні значення гамільтоніана (6.12). Зауважимо, що оператори

$$\tilde{H}_1 = \frac{p_1^2}{2m_{eff}}, \quad (6.24)$$

$$\tilde{H}_2 = \frac{p_2^2}{2m_{eff}}, \quad (6.25)$$

$$\tilde{H}_3 = \frac{p_3^2}{2m} + \kappa x_3, \quad (6.26)$$

та $\tilde{H}_{osc}$, визначений як (6.22), комутують між собою

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_1, \tilde{H}_2] &= [\tilde{H}_1, \tilde{H}_3] = [\tilde{H}_2, \tilde{H}_3] = \\ &= [\tilde{H}_1, \tilde{H}_{osc}] = [\tilde{H}_2, \tilde{H}_{osc}] = [\tilde{H}_3, \tilde{H}_{osc}] = 0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Зважаючи на це, власні функції гамільтоніана (6.12)

$$H = \tilde{H}_1 + \tilde{H}_2 + \tilde{H}_3 + \tilde{H}_{osc} \quad (6.28)$$

можуть бути записані як

$$\psi(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{q}}) = C e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} \psi^{(3)}(x_3) \psi^{\tilde{q}}(\tilde{\mathbf{q}}), \quad (6.29)$$

де k_1 та k_2 – компоненти хвильового вектора, що відповідає вільному руху частинки в перпендикулярних напрямках до напрямку поля, $\psi^{(3)}(x_3)$ – добре відомі власні функції гамільтоніана $\tilde{H}_3$, що описує рух частинки у напрямку поля, $\psi^{\tilde{q}}(\tilde{\mathbf{q}})$ – власні функції тривимірного гармонічного осцилятора з параметрами m_{osc} та ω , C – константа. Компоненти вектора $\tilde{\mathbf{q}}$ мають такий вигляд

$$\tilde{q}_1 = a_1 + \frac{\kappa l_0 k_2}{2\omega^2 m_{osc}}, \quad (6.30)$$

$$\tilde{q}_2 = a_2 - \frac{\kappa l_0 k_1}{2\omega^2 m_{osc}}, \quad (6.31)$$

$$\tilde{q}_3 = a_3. \quad (6.32)$$

Запишемо власні значення гамільтоніана (6.12). Врахувавши те, що частота осцилятора є великою та гармонічний осцилятор знаходиться у основному стані маємо

$$E = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m_{eff}} + \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m_{eff}} + E_3 + \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad (6.33)$$

де E_3 відповідає гамільтоніану $\tilde{H}_3$.

Аналізуючи перші два доданки у (6.33), можемо зробити висновок, що некомутативність координат впливає на масу частинки. Зауважимо, що некомутативність змінює по відношенню до звичного випадку ($\theta_{ij} = 0$) рух частинки у напрямках, що є перпендикулярними до напрямку поля. Рух частинки у напрямку поля визначається гамільтоніаном $\tilde{H}_3$ та є таким самим як у звичному просторі. Зважаючи на це, можемо зробити висновок, що некомутативність координат зумовлює анізотропію мас.

Звернімо увагу, що всі результати, отримані у даному підрозділі, є точними. Ми не робили наближень на основі міркувань про те, що параметр некомутативності є малим.

На завершення цього підрозділу важливо зауважити, що зважаючи на сферичну симетрію простору, знайдені результати можуть бути легко узагальнені на випадок довільного напрямку однорідного поля.

У наступному підрозділі, використовуючи отримані результати, буде розглянуто рух частинки в однорідному гравітаційному полі та досліджено принцип еквівалентності.

6.3 Принцип еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі

Розгляньмо рух частинки з масою m в однорідному гравітаційному полі у некомутативному просторі (6.1)-(6.3). Нехай напрям гравітаційного поля збігається з віссю X_3 . У цьому випадку

$$\kappa = -mg. \quad (6.34)$$

На основі результатів, отриманих у попередньому підрозділі, із (6.12), (6.13), (6.14) маємо:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_{eff}} + \frac{p_2^2}{2m_{eff}} + \frac{p_3^2}{2m} - mgx_3 + \tilde{H}_{osc}, \quad (6.35)$$

де

$$m_{eff} = m \left(1 - \frac{l_0^2 g^2 m^3}{4\hbar^2 \omega^2 m_{osc}} \right)^{-1}. \quad (6.36)$$

Проаналізувавши вираз (6.36) і також (6.33), можемо зробити висновки, що, зважаючи на доданок у (6.36), пропорційний до m^3 , слабкий принцип еквівалентності є порушеним у некомутативному просторі (6.1)-(6.3).

Знайдемо умову для відновлення принципу еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі (5.41)-(5.43). Із (6.33) та (6.36) випливає, що необхідною умовою для відновлення принципу еквівалентності є пропорційність ефективної маси (6.36) до маси частинки. Це може бути реалізовано, коли виконується така умова:

$$\frac{l_0^2 m^3}{\omega^2 m_{osc}} = A = const, \quad (6.37)$$

де A – константа, яка має однакові значення для частинок з різними масами. Зручно ввести безрозмірну константу

$$\tilde{A} = A \frac{\omega_P^2}{l_P^2 m_P^2}, \quad (6.38)$$

де l_P , m_P є довжиною Планка та масою Планка, відповідно, ω_P визначається як

$$\hbar\omega_P = E_P, \quad (6.39)$$

де E_P – енергія Планка.

Отже, можемо записати ефективну масу у такому вигляді

$$m_{eff} = m \left(1 - \frac{\tilde{A} l_P^2 m_P^2 g^2}{4\hbar^2 \omega_P^2} \right)^{-1}. \quad (6.40)$$

Звернімо увагу, що оператори X_i залежать від імпульсів, а отже залежать від маси. А саме, для операторів, які задовольняють некомутативну алгебру (6.1)-(6.3) справедливим є таке представлення через координати та імпульси, які задовольняють звичні комутаційні співвідношення

$$X_i = x_i - \theta_{ij} p_j, \quad (6.41)$$

$$P_i = p_i, \quad (6.42)$$

де θ_{ij} визначається як

$$\theta_{ij} = \frac{l_0}{\hbar} \varepsilon_{ijk} a_k. \quad (6.43)$$

Цей факт також зумовлює порушення принципу еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі. Знайдемо умову, при якій оператори X_i не залежать від маси частинки. Із цією метою зручно переписати тензор некомутативності у такому вигляді

$$\theta_{ij} = \frac{l_0 l_{osc}}{\hbar} \varepsilon_{ijk} \tilde{a}_k, \quad (6.44)$$

де

$$l_{osc} = \sqrt{\frac{\hbar}{m_{osc} \omega}}, \quad (6.45)$$

та $\tilde{a}_k$ – безрозмірні координати

$$\tilde{a}_k = \frac{a_k}{l_{osc}}. \quad (6.46)$$

Проаналізувавши (6.41), (6.44), можемо зробити висновок, що оператори X_i не залежать від маси у випадку, коли

$$\frac{l_0 l_{osc}}{l_P^2} = \tilde{\gamma} \frac{m_P}{m}, \quad (6.47)$$

де $\tilde{\gamma}$ – безрозмірна константа, яка є однаковою для частинок з різними масами. Для цієї константи ми використали позначення $\tilde{\gamma}$ для того, щоб відрізнити її від константи γ , яка використовувалася у випадку канонічної некомутативності координат у розділі 3. Беручи до уваги (6.44), очевидно, що умова (6.47) є подібною до умови (3.58), яка дозволяє відновити принцип еквівалентності у двовимірному просторі з канонічною некомутативністю координат.

Отже, умова (6.37) разом із умовою (6.47) дають можливість відновити принцип еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі (6.1)-(6.3).

Зауважимо, що із (6.37), (6.47), використовуючи (6.38) та (6.45), ми отримуємо

$$\omega = \frac{\tilde{\gamma}^2}{\tilde{A}} \omega_P \frac{m}{m_P}. \quad (6.48)$$

Отже, обидві умови (6.37), (6.47) задовольняються у випадку, коли частота гармонічного осцилятора є пропорційною до маси частинки. Врахувавши (6.45), (6.47) та (6.48), отримаємо, що l_{osc} , l_0 є обернено пропорційними до $\sqrt{m}$, а саме:

$$l_{osc} = l_P \sqrt{\frac{\tilde{A} m_P^2}{\tilde{\gamma}^2 m_{osc} m}}, \quad (6.49)$$

$$l_0 = l_P \sqrt{\frac{\tilde{\gamma}^4 m_{osc}}{\tilde{A} m}}. \quad (6.50)$$

Оцінимо можливі значення констант $\tilde{A}$ та $\tilde{\gamma}$. З цією метою припустим, що для електрона $l_0 = l_P$, $l_{osc} = l_P$ та $\omega = \omega_P$. У цьому випадку, беручи до уваги (6.45), маємо: $m_{osc} = m_P$. Як наслідок, із (6.37) та (6.38), можемо знайти

$$\tilde{A} = \frac{m_e^3}{m_P^3} = 7.3 \times 10^{-68}, \quad (6.51)$$

де m_e – маса електрона. Також із (6.47) отримаємо:

$$\tilde{\gamma} = \frac{m_e}{m_P} = 4.2 \times 10^{-23}. \quad (6.52)$$

Зауважимо, що вплив некомутативності координат на масу частинки спостерігається у випадку скінченної границі для ω , у границі $\omega \rightarrow \infty$ вплив некомутативності на масу частинки прямує до нуля.

Звернімо увагу на те, що, фіксуючи параметри ω , l_0 , l_{osc} для електрона

$$\omega = \omega_P, \quad (6.53)$$

$$l_0 = l_P, \quad (6.54)$$

$$l_{osc} = l_P \quad (6.55)$$

із (6.48), (6.49), (6.50) ми можемо обчислити ці параметри для частинки з масою m_i , а саме:

$$\omega^{(i)} = \frac{\omega_P m_i}{m_e}, \quad (6.56)$$

$$l_{osc}^{(i)} = l_P \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}, \quad (6.57)$$

$$l_0^{(i)} = l_P \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}. \quad (6.58)$$

Важливо зауважити, що отримані рівності (6.37), (6.47) узгоджуються з умовою (3.58), яка дозволяє відновити принцип еквівалентності у некомутативному просторі з канонічною некомутативністю координат (2.1)-(2.3).

Розділ 7

Атом водню у сферично-симетричному некомутативному просторі

Дослідженню атома водню у некомутативному просторі приділялося багато уваги. У випадку канонічної некомутативності координат атом водню вивчено у роботах [21–28]. Авторами досліджено вплив некомутативності координат на енергетичні рівні цього атома [21–23, 25]. Розглянуто енергетичні рівні атома водню у електричному полі у просторі з некомутативністю координат [21, 24]. Вивчено задачу атома водню у магнітному полі у некомутативному просторі [21]. Отримано поправки до зсуву Лемба, зумовлені некомутативністю координат [21]. Розглянуто рівняння Клейна-Гордона [26] та рівняння Дірака [27, 28] для атома водню у некомутативному просторі канонічного типу.

У цьому розділі атом водню досліджується у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу. Ми знаходимо поправки до енергетичних рівнів атома, зумовлені некомутативністю координат з точністю до другого порядку за параметром некомутативності. Порівнюються поправки до енергетичних рівнів атома водню у різних випадках визначення тензора некомутативності (5.14) та (5.39) [73]. На основі порівняння результатів для поправок до ns енергетичних рівнів атома водню з експериментальними даними знаходиться верхня межа для параметра некомутативності [69, 72, 74].

7.1 Гамільтоніан атома водню у некомутативному просторі з відновленою сферичною симетрією

Розгляньмо атом водню у сферично-симетричному некомутативному просторі (5.17)-(5.19). Припустимо, що гамільтоніан у некомутативному просторі має таку саму форму як і в звичайному просторі ($\theta_{ij} = 0$) із заміною координат, які комутують, на координати, що задовольняють співвідношення некомутативної алгебри. Отже, гамільтоніан атома водню у некомутативному просторі має вигляд

$$H_h = \frac{P^2}{2M} - \frac{e^2}{R}, \quad (7.1)$$

де

$$R = \sqrt{\sum_i X_i^2}, \quad (7.2)$$

координати X_i та імпульси P_i задовольняють некомутативну алгебру (5.17)-(5.19).

Оскільки тензор некомутативності побудовано за допомогою додаткових координат (5.14), у сферично-симетричному некомутативному просторі при записі гамільтоніану необхідно брати до уваги також додаткові доданки, що відповідають гармонічному осцилятору, та розглядати повний гамільтоніан

$$H = H_h + H_{osc}, \quad (7.3)$$

де H_{osc} має вигляд (5.15).

Знайдемо збурення, зумовлене некомутативністю координат. З цією метою розкладемо гамільтоніан (7.3) в ряд за θ , визначеним як (5.32). Для початку знайдемо розклад для R (7.2) з точністю до другого порядку за θ . Використавши представлення (5.33), можемо записати

$$R = \sqrt{(\mathbf{r} + \frac{1}{2}[\theta \times \mathbf{p}])^2} = \sqrt{r^2 - (\theta \cdot \mathbf{L}) + \frac{1}{4}[\theta \times \mathbf{p}]^2}, \quad (7.4)$$

де $r = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ та $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$. Зауважимо, що оператори під коренем квадратним не комутують між собою, оператор r^2 не комутує

з оператором $[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2/4$. Отже, необхідно знайти розклад для кореня квадратного від суми некомутативних операторів. Запишемо розклад для R у звичному вигляді (як у випадку, коли оператори під коренем квадратним комутують), проте із невідомою функцією $f(\mathbf{r})$, а саме:

$$R = r - \frac{1}{2r}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) - \frac{1}{8r^3}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L})^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{r}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 + [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r} + \theta^2 f(\mathbf{r}) \right). \quad (7.5)$$

Для знаходження невідомої функції $f(\mathbf{r})$ піднесемо до квадрату ліву і праву частину рівності (7.5). З точністю до другого порядку за параметром некомутативності отримаємо:

$$r^2 - (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 = r^2 - (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) + \frac{1}{16} \left(2[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 + r[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 r + 2r\theta^2 f(\mathbf{r}) \right). \quad (7.6)$$

Рівняння (7.6) можемо записати у більш простому вигляді:

$$\frac{\hbar^2}{r^4}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}]^2 - r\theta^2 f(\mathbf{r}) = 0. \quad (7.7)$$

Остаточно, з (7.7) знаходимо:

$$\theta^2 f(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{r^5}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}]^2. \quad (7.8)$$

Врахувавши результат для функції $f(\mathbf{r})$ (7.8), можемо записати:

$$R = r - \frac{1}{2r}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) - \frac{1}{8r^3}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L})^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{r}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 + [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{r^5}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}]^2 \right). \quad (7.9)$$

Знаючи розклад для оператора R (7.9), можна знайти розклад в ряд за $\boldsymbol{\theta}$ для оператора R^{-1}

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r^3}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) + \frac{3}{8r^5}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L})^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{r^2}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^7}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}]^2 \right). \quad (7.10)$$

Отже, врахувавши (7.10), перепишемо гамільтоніан (7.3) у такому вигляді:

$$H = H_0 + V, \quad (7.11)$$

де

$$H_0 = \frac{p^2}{2M} - \frac{e^2}{r} + H_{osc}, \quad (7.12)$$

та V – збурення, зумовлене некомутативністю координат

$$V = -\frac{e^2}{2r^3}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) - \frac{3e^2}{8r^5}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L})^2 + \frac{e^2}{16} \left(\frac{1}{r^2}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^7}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}]^2 \right). \quad (7.13)$$

У наступному підрозділі, використовуючи отриманий вираз для гамільтоніана (7.11), будуть знайдені поправки до енергетичних рівнів атома водню, зумовлені некомутативністю координат.

7.2 Енергетичні рівні атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі

Розгляньмо енергетичні рівні атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі (5.17)-(5.19). Знайдемо поправки до енергетичних рівнів атома з точністю до другого порядку за параметром некомутативності. Із цією метою застосуємо теорію збурень.

Зауважимо, що гамільтоніан H_0 (7.12) є сумою гамільтоніана атома водню у звичному просторі ($\theta_{ij} = 0$)

$$\tilde{H}_h = \frac{p^2}{2M} - \frac{e^2}{r}, \quad (7.14)$$

та гамільтоніана тривимірного гармонічного осцилятора H_{osc} (5.15), записаного також у звичному просторі. Оператори $\tilde{H}_h$ та H_{osc} комутують

$$\left[\frac{p^2}{2M} - \frac{e^2}{r}, \frac{(p^a)^2}{2m} + \frac{(p^b)^2}{2m} + \frac{m\omega^2 a^2}{2} + \frac{m\omega^2 b^2}{2} \right] = 0. \quad (7.15)$$

Отже, можемо записати власні значення та власні функції гамільтоніана H_0 (7.12) у такому вигляді

$$E_{n,\{n^a\},\{n^b\}}^{(0)} = -\frac{e^2}{2a_B n^2} + \hbar\omega(n_1^a + n_2^a + n_3^a + n_1^b + n_2^b + n_3^b + 3), \quad (7.16)$$

$$\psi_{n,l,m,\{n^a\},\{n^b\}}^{(0)} = \psi_{n,l,m} \psi_{n_1^a, n_2^a, n_3^a}^a \psi_{n_1^b, n_2^b, n_3^b}^b, \quad (7.17)$$

де a_B – радіус Бора, $\psi_{n,l,m}$ – добре відомі власні функції атома водню. $\psi_{n_1^a, n_2^a, n_3^a}^a$, $\psi_{n_1^b, n_2^b, n_3^b}^b$ – власні функції тривимірного гармонічного осцилятора.

Відповідно до теорії збурень у першому порядку за V маємо:

$$\begin{aligned} \Delta E_{n,l}^{(1)} &= \langle \psi_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(0)} | V | \psi_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(0)} \rangle = \\ &= \left\langle \psi_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(0)} \left| -\frac{e^2}{2r^3} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) - \frac{3e^2}{8r^5} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L})^2 \right| \psi_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(0)} \right\rangle + \\ &+ \frac{e^2}{16} \left\langle \psi_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(0)} \left| \frac{1}{r^2} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\hbar^2}{r^7} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}]^2 \right| \psi_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(0)} \right\rangle, \quad (7.18) \end{aligned}$$

де ми врахували те, що осцилятор H_{osc} знаходиться у основному стані ($\{n^a\} = \{0\}$, $\{n^b\} = \{0\}$). Для знаходження поправок (7.18) обчислимо відповідні інтеграли.

Зауважимо, що

$$\langle \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b | \theta_i | \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b \rangle = 0. \quad (7.19)$$

Отже, поправки до енергетичних рівнів атома водню у першому порядку за $\boldsymbol{\theta}$ дорівнюють нулеві. Маємо

$$\langle \psi_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(0)} | \frac{e^2}{2r^3} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) | \psi_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(0)} \rangle = 0. \quad (7.20)$$

Щоб знайти поправки, зумовлені доданком $3e^2(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L})^2/8r^5$ у гамільтоніані (7.11), використаємо відомі результати для середніх,

представлені, наприклад, у [75], а саме:

$$\begin{aligned} & \left\langle \psi_{n,l,m} \left| \frac{1}{r^5} \right| \psi_{n,l,m} \right\rangle = \\ & = \frac{4(5n^2 - 3l(l+1) + 1)}{a_B^5 n^5 l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Зауважимо, що

$$\langle \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b | \theta_i \theta_j | \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{m\omega} \right)^2 \delta_{ij} = \frac{1}{3} \langle \theta^2 \rangle \delta_{ij}. \quad (7.22)$$

Також

$$\langle \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b | \theta_i \theta_j | \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b \rangle = \frac{1}{3} \langle \theta^2 \rangle \delta_{ij}, \quad (7.23)$$

тут

$$\theta^2 = \sum_i \theta_i^2 = \frac{\alpha^2}{\hbar^2} \sum_i [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i^2, \quad (7.24)$$

$$\langle \theta^2 \rangle = \langle \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b | \theta^2 | \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b \rangle = \frac{3}{2} \left(\frac{\alpha}{m\omega} \right)^2 = \frac{3\alpha^2 l_p^4}{2\hbar^2}. \quad (7.25)$$

Отже, врахувавши (7.21) та (7.23), отримаємо:

$$\begin{aligned} & \left\langle \psi_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(0)} \left| \frac{3e^2}{8r^5} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L})^2 \right| \psi_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(0)} \right\rangle = \\ & = \frac{\hbar^2 e^2 (5n^2 - 3l(l+1) + 1) \langle \theta^2 \rangle}{2a_B^5 n^5 (l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Останні три доданки у (7.13) зручно переписати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^7} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}]^2 = \theta^2 \frac{1}{r^2} p^2 \frac{1}{r} + \\ & + \theta^2 \frac{1}{r} p^2 \frac{1}{r^2} + \theta^2 \frac{\hbar^2}{r^5} - \frac{1}{r^2} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{p})^2 \frac{1}{r} - \frac{1}{r} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{p})^2 \frac{1}{r^2} - \frac{\hbar^2}{r^7} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{r})^2. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Тоді, використавши (7.23), знайдемо

$$\begin{aligned} & \left\langle \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b \left| \frac{1}{r^2} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{p})^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{p})^2 \frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^7} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{r})^2 \right| \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b \right\rangle = \\ & = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{r^2} p^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r} p^2 \frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^5} \right) \langle \theta^2 \rangle. \end{aligned} \quad (7.28)$$

У результаті можемо спростити три останні інтеграли у (7.18) та записати як

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(0)} \left| \frac{1}{r^2} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\hbar^2}{r^5} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}]^2 \right| \psi_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(0)} \right\rangle = \frac{2}{3} \left\langle \psi_{n,l,m} \left| \frac{1}{r^2} p^2 \frac{1}{r} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{r} p^2 \frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^5} \right| \psi_{n,l,m} \right\rangle \langle \theta^2 \rangle. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Оператор $\frac{1}{r^2} p^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r} p^2 \frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^5}$ можемо переписати як

$$\frac{1}{r^2} p^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r} p^2 \frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^5} = \frac{1}{r^3} p^2 + p^2 \frac{1}{r^3} + \frac{5\hbar^2}{r^5}. \quad (7.30)$$

Отже, маємо

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_{n,l,m} \left| \frac{1}{r^2} p^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r} p^2 \frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^5} \right| \psi_{n,l,m} \right\rangle = \\ = -\frac{2\hbar^2}{a_B^2 n^2} \left\langle \psi_{n,l,m} \left| \frac{1}{r^3} \right| \psi_{n,l,m} \right\rangle + \frac{4\hbar^2}{a_B} \left\langle \psi_{n,l,m} \left| \frac{1}{r^4} \right| \psi_{n,l,m} \right\rangle + \\ + 5\hbar^2 \left\langle \psi_{n,l,m} \left| \frac{1}{r^5} \right| \psi_{n,l,m} \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Використовуючи відомі результати для середніх, представлені, для прикладу, у [75]

$$\left\langle \psi_{n,l,m} \left| \frac{1}{r^3} \right| \psi_{n,l,m} \right\rangle = \frac{2}{a_B^3 n^3 l(l+1)(2l+1)}, \quad (7.32)$$

$$\left\langle \psi_{n,l,m} \left| \frac{1}{r^4} \right| \psi_{n,l,m} \right\rangle = \frac{4(3n^2 - l(l+1))}{a_B^4 n^5 l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)}, \quad (7.33)$$

знайдемо явний вигляд для поправок, зумовлених останніми трьо-

ма доданками у (7.13), а саме:

$$\begin{aligned} & \left\langle \psi_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(0)} \left| \frac{1}{r^2} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\hbar^2}{r^7} [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}]^2 \right| \psi_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(0)} \right\rangle = -\frac{\hbar^2 e^2 \langle \theta^2 \rangle}{a_B^5 n^5} \left(\frac{1}{6l(l+1)(2l+1)} - \right. \\ & \quad - \frac{6n^2 - 2l(l+1)}{3l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)} - \\ & \quad \left. - \frac{5}{6} \frac{5n^2 - 3l(l+1) + 1}{l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} \right) \end{aligned} \quad (7.34)$$

Остаточню, врахувавши отримані результати, можемо записати поправки до енергетичних рівнів атома водню, зумовлені некомутативністю координат, у першому порядку теорії збурень

$$\begin{aligned} \Delta E_{n,l}^{(1)} = & -\frac{\hbar^2 e^2 \langle \theta^2 \rangle}{a_B^5 n^5} \left(\frac{5n^2 - 3l(l+1) + 1}{2(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} - \right. \\ & - \frac{6n^2 - 2l(l+1)}{3l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)} + \frac{1}{6l(l+1)(2l+1)} - \\ & \left. - \frac{5}{6} \frac{5n^2 - 3l(l+1) + 1}{l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} \right) \end{aligned} \quad (7.35)$$

У другому порядку теорії збурень маємо

$$\begin{aligned} & \Delta E_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(2)} = \\ & \sum_{n',l',m',\{n^a\},\{n^b\}} \frac{\left| \left\langle \psi_{n',l',m',\{n^a\},\{n^b\}}^{(0)} \left| V \right| \psi_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(0)} \right\rangle \right|^2}{E_n^{(0)} - E_{n'}^{(0)} - \hbar\omega(n_1^a + n_2^a + n_3^a + n_1^b + n_2^b + n_3^b)}, \end{aligned} \quad (7.36)$$

де набір чисел $n', l', m', \{n^a\}, \{n^b\}$ не співпадає із набором $n, l, m, \{0\}, \{0\}$, та $E_n^{(0)}$ – енергетичні рівні атома водню у звичайному просторі

$$E_n^{(0)} = -\frac{e^2}{2a_B n^2}. \quad (7.37)$$

Зауважимо, що матричні елементи

$$\left\langle \psi_{n',l',m',\{n^a\},\{n^b\}}^{(0)} | V | \psi_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(0)} \right\rangle \quad (7.38)$$

не залежать від частоти осцилятора ω , оскільки виконується рівність (5.16). Отже, у границі $\omega \rightarrow \infty$ отримаємо

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta E_{n,l,m,\{0\},\{0\}}^{(2)} = 0. \quad (7.39)$$

Як наслідок, врахувавши (7.35), (7.39), запишемо поправки до енергетичних рівнів атома водню з точністю до другого порядку за параметром некомутативності

$$\begin{aligned} \Delta E_{n,l} = & -\frac{\hbar^2 e^2 \langle \theta^2 \rangle}{a_B^5 n^5} \left(\frac{5n^2 - 3l(l+1) + 1}{2(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} - \right. \\ & -\frac{6n^2 - 2l(l+1)}{3l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)} + \frac{1}{6l(l+1)(2l+1)} - \\ & \left. -\frac{5}{6} \frac{5n^2 - 3l(l+1) + 1}{l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} \right). \end{aligned} \quad (7.40)$$

Зазначимо, що результат (7.40) може бути отриманим, розглядаючи ефективний гамільтоніан, побудований у такому вигляді

$$H^{eff} = \langle \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b | H | \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b \rangle. \quad (7.41)$$

Із (7.1), (7.10), (7.19), маємо

$$\begin{aligned} H_h^{eff} = \langle \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b | H_h | \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b \rangle = & \frac{p^2}{2M} - \frac{e^2}{r} - \frac{e^2 L^2}{8r^5} \langle \theta^2 \rangle + \\ & + \frac{e^2}{24} \left(\frac{1}{r^2} p^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r} p^2 \frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^5} \right) \langle \theta^2 \rangle. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Звернімо увагу на те, що ефективний гамільтоніан (7.42) є сферично-симетричним. Використавши теорію збурень, отримаємо поправки до енергетичних рівнів атома водню у такому вигляді

$$\begin{aligned} \Delta E_{n,l}^{eff} = & -\frac{\hbar^2 e^2 \langle \theta^2 \rangle}{a_B^5 n^5} \left(\frac{5n^2 - 3l(l+1) + 1}{2(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} - \right. \\ & -\frac{6n^2 - 2l(l+1)}{3l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)} + \frac{1}{6l(l+1)(2l+1)} - \\ & \left. -\frac{5}{6} \frac{5n^2 - 3l(l+1) + 1}{l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} \right) \end{aligned} \quad (7.43)$$

Зазначимо, що результат (7.43) збігається з (7.40).

Важливо зауважити, що у випадках, коли $l = 0$ чи $l = 1$ поправки (7.40) є розбіжні. Це означає, що для обчислень поправок до ns та np енергетичних рівнів ми не можемо використовувати розклад для $1/R$ (7.10). Щоб оцінити верхню межу для параметра некомутативності ми зацікавлені в обчисленні поправок до ns енергетичних рівнів. Зважаючи на це, у наступному підрозділі буде розглянута задача знаходження поправок до енергетичних рівнів атома водню у випадку, коли $l = 0$.

7.3 Поправки до ns енергетичних рівнів атома водню

Для знаходження поправок до ns енергетичних рівнів перепишемо збурення, зумовлене некомутативністю координат, у такому вигляді:

$$V = -\frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{\sqrt{r^2 - (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2}} + \frac{e^2}{r}. \quad (7.44)$$

Зауважимо, що у (7.44) ми не використовували розклад за параметром некомутативності (7.10). Відповідно до теорії збурень можемо записати

$$\begin{aligned} & \Delta E_{ns} = \\ & = \left\langle \psi_{n,0,0,\{0\},\{0\}}^{(0)} \left| \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\sqrt{r^2 - (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2}} \right| \psi_{n,0,0,\{0\},\{0\}}^{(0)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Звернімо увагу на те, що

$$[(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}), [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2] = 0, \quad (7.46)$$

$$[(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}), r^2] = 0. \quad (7.47)$$

Також важливо зауважити, що

$$(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L})\psi_{n,0,0,\{0\},\{0\}}^{(0)} = 0, \quad (7.48)$$

оскільки хвильова функція $\psi_{n,0,0,\{0\},\{0\}}^{(0)}$ не залежить від кутів. Отже, перепишемо (7.45) у такому вигляді

$$\Delta E_{ns} = \left\langle \psi_{n,0,0,\{0\},\{0\}}^{(0)} \left| \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2}} \right| \psi_{n,0,0,\{0\},\{0\}}^{(0)} \right\rangle. \quad (7.49)$$

З точністю до лінійних флуктуацій $[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2$ можемо записати

$$\Delta E_{ns} = \left\langle \psi_{n,0,0} \left| \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{6}\langle \theta^2 \rangle p^2}} \right| \psi_{n,0,0} \right\rangle. \quad (7.50)$$

Зауважимо, що для ns енергетичних рівнів виконується така рівність:

$$\begin{aligned} \Delta E_{ns} &= \left\langle \psi_{n,0,0} \left| \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{6}\langle \theta^2 \rangle p^2}} \right| \psi_{n,0,0} \right\rangle = \\ &= \left\langle R_{n,0} \left| \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{6}\langle \theta^2 \rangle p_r^2}} \right| R_{n,0} \right\rangle, \end{aligned} \quad (7.51)$$

де

$$p_r = -i\hbar \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r, \quad (7.52)$$

$R_{n,0}$ – радіальні хвильові функції атома водню

$$R_{n,0} = \sqrt{\frac{4}{a_B^3 n^5}} e^{-\frac{r}{na_B}} L_{n-1}^1 \left(\frac{2r}{a_B n} \right) \quad (7.53)$$

тут $L_{n-1}^1 \left(\frac{2r}{a_B n} \right)$ – узагальнені поліноми Лаґєра

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \left(\frac{d}{dx} \right)^n x^{n+\alpha} e^{-x}. \quad (7.54)$$

Для початку знайдемо поправки до $1s$ енергетичних рівнів. Зручно ввести безрозмірні координати

$$\rho = r \left(\frac{6}{\hbar^2 \langle \theta^2 \rangle} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (7.55)$$

Отже, можемо записати поправки до $1s$ енергетичних рівнів у такому вигляді

$$\begin{aligned} \Delta E_{1s} &= \left\langle R_{1,0} \left| \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{6} \langle \theta^2 \rangle p_r^2}} \right| R_{1,0} \right\rangle = \\ &= \frac{4e^2 \beta^2}{a_B} \int_0^\infty d\rho \rho^2 e^{-\beta \rho} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + p_\rho^2}} \right) e^{-\beta \rho}, \end{aligned} \quad (7.56)$$

де

$$p_\rho = -i \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho, \quad (7.57)$$

$$\beta = \left(\frac{\hbar^2 \langle \theta^2 \rangle}{6a_B^4} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (7.58)$$

Для обчислення інтеграла у (7.56) розкладемо $e^{-\beta \rho}$ в ряд за власними функціями оператора $\rho^2 + p_\rho^2$, які позначимо як ϕ_k . А саме, можемо записати

$$e^{-\beta \rho} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \phi_k, \quad (7.59)$$

де C_k – коефіцієнти розкладу. Власні функції та власні значення оператора $\rho^2 + p_\rho^2$ мають такий вигляд (див., для прикладу, [76])

$$\phi_k = \sqrt{\frac{2k!}{\Gamma(k + \frac{3}{2})}} e^{-\frac{\rho^2}{2}} L_k^{\frac{1}{2}}(\rho^2), \quad (7.60)$$

$$\lambda_k = 2 \left(2k + \frac{3}{2} \right). \quad (7.61)$$

У результаті, взявши до уваги (7.60) та (7.59), можемо знайти коефіцієнти розкладу

$$C_k = \sqrt{\frac{2k!}{\Gamma(k + \frac{3}{2})}} \int_0^\infty d\rho \rho^2 e^{-\frac{\rho^2}{2} - \beta\rho} L_k^{\frac{1}{2}}(\rho^2). \quad (7.62)$$

Отже, другий доданок у (7.56) перепишеться так

$$\int_0^\infty d\rho \rho^2 e^{-\beta\rho} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + p_\rho^2}} e^{-\beta\rho} = \sum_{k=0}^\infty \frac{C_k^2}{\sqrt{\lambda_k}}. \quad (7.63)$$

Аналогічно можемо записати перший доданок у (7.56) у такому вигляді

$$\int_0^\infty d\rho \rho e^{-2\beta\rho} = \sum_{k=0}^\infty C_k \int_0^\infty d\rho \rho e^{-\beta\rho} \phi_k = \sum_{k=0}^\infty C_k I_k, \quad (7.64)$$

де

$$I_k = \sqrt{\frac{2k!}{\Gamma(k + \frac{3}{2})}} \int_0^\infty d\rho \rho e^{-\frac{\rho^2}{2} - \beta\rho} L_k^{\frac{1}{2}}(\rho^2). \quad (7.65)$$

Врахувавши (7.63) та (7.64), поправки до 1s енергетичних рівнів можуть бути записаними у вигляді такого ряду

$$\Delta E_{1s} = \frac{4e^2\beta^2}{a_B} \sum_{k=0}^\infty \left(C_k I_k - \frac{C_k^2}{\sqrt{\lambda_k}} \right) = \frac{e^2\beta^2}{a_B} S_{1s}(\beta), \quad (7.66)$$

де ми використали позначення

$$\begin{aligned} S_{1s}(\beta) &= 4 \int_0^\infty d\rho \rho^2 e^{-\beta\rho} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + p_\rho^2}} \right) e^{-\beta\rho} = \\ &= 4 \sum_{k=0}^\infty \left(C_k I_k - \frac{C_k^2}{\sqrt{\lambda_k}} \right). \end{aligned} \quad (7.67)$$

Важливо зауважити, що ряд $S_{1s}(\beta)$ має скінченне значення при $\beta = 0$

$$\begin{aligned} S_{1s}(0) &= 16\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2})}{k!} \left({}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{\pi}{8k+6}} \right) = 1.72006, \end{aligned} \quad (7.68)$$

де ${}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right)$ – гіпергеометрична функція.

Результат $S_{1s}(0) = 1.72006$ отримано за допомогою таких міркувань. Два ряди у $S_{1s}(0)$, а саме:

$$16\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2})}{k!} {}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right), \quad (7.69)$$

$$16\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2})}{k!} \sqrt{\frac{\pi}{8k+6}}, \quad (7.70)$$

є розбіжними. Незважаючи на це, їх сума $S_{1s}(0)$ має скінченне значення. Щоб розглядати ряди (7.69) та (7.70) окремо, використовуємо додатковий множник η^k ($\eta < 1$)

$$16\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2})}{k!} {}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right) \eta^k, \quad (7.71)$$

$$16\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2})}{k!} \sqrt{\frac{\pi}{8k+6}} \eta^k. \quad (7.72)$$

Поклавши $\eta = 1$ у (7.71) та (7.72) ми отримуємо (7.69), (7.70), відповідно.

Спершу розглянемо ряд (7.72). Зауважимо, що

$$\sqrt{\frac{\pi}{k + \frac{3}{4}}} = 2 \int_0^{\infty} dz e^{-(k + \frac{3}{4})z^2}. \quad (7.73)$$

Також справедливою є така рівність

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2})}{k!} t^k = \frac{\sqrt{\pi}}{2(1-t)^{\frac{3}{2}}}. \quad (7.74)$$

В результаті, врахувавши (7.73) та (7.74), отримуємо

$$\begin{aligned} & 16\sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2})}{k! \sqrt{8k+6}} \eta^k = \\ & = 16 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2})}{k! \sqrt{\pi}} \eta^k \int_0^{\infty} dz e^{-(k + \frac{3}{4})z^2} = 8 \int_0^{\infty} dz \frac{e^{-\frac{3}{4}z^2}}{(1 - \eta e^{-z^2})^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Розгляньмо ряд (7.71). Гіпергеометрична функція ${}_2F_1(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2)$ може бути представлена у такому вигляді

$${}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right) = \sum_{q=0}^k \frac{(-1)^q C_k^q 2^q}{2q+1}, \quad (7.76)$$

де C_k^q – біноміальні коефіцієнти. Очевидно, що виконується рівність

$$\frac{1}{2q+1} = \int_0^1 dz z^{2q}. \quad (7.77)$$

Отже, використавши (7.76) та (7.77), отримаємо

$${}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right) = \sum_{q=0}^k \int_0^1 dz C_k^q (-2)^q z^{2q}. \quad (7.78)$$

Зауважимо, що

$$\sum_{q=0}^k C_k^q (-2)^q z^{2q} = (1 - 2z^2)^k. \quad (7.79)$$

Отже, маємо:

$${}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right) = \int_0^1 dz (1 - 2z^2)^k. \quad (7.80)$$

Остаточно, врахувавши (7.74) та (7.80), можемо переписати (7.71) у такому вигляді

$$\begin{aligned} & 16\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2})}{k!} {}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right) \eta^k = \\ & = 16\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2})}{k!} \eta^k \int_0^1 dz (1 - 2z^2)^k = \\ & = 8\sqrt{2} \int_0^1 \frac{dz}{(1 - \eta(1 - 2z^2))^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (7.81)$$

Розіб'ємо інтеграл (7.81) на два інтеграли

$$\int_0^1 \frac{dz}{(1 - \eta(1 - 2z^2))^{\frac{3}{2}}} = I_1(\eta) + I_2(\eta), \quad (7.82)$$

де

$$I_1(\eta) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dz}{(1 - \eta(1 - 2z^2))^{\frac{3}{2}}}, \quad (7.83)$$

$$I_2(\eta) = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{dz}{(1 - \eta(1 - 2z^2))^{\frac{3}{2}}}. \quad (7.84)$$

Звернімо увагу, що інтеграл $I_2(\eta)$ при $\eta = 1$ має скінченне значення. Поклавши $\eta = 1$ у (7.84), отримаємо

$$I_2(1) = \frac{\sqrt{2}}{8}. \quad (7.85)$$

Перепишемо (7.83) у формі, яка є близькою до (7.75). Використавши підстановку $e^{-t^2} = 1 - 2z^2$, маємо:

$$I_1(\eta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty dt \frac{te^{-t^2}}{(1 - e^{-t^2})^{\frac{1}{2}}(1 - \eta e^{-t^2})^{\frac{3}{2}}}. \quad (7.86)$$

Отже, врахувавши (7.75), (7.81), (7.82), (7.85) та (7.86), знайдемо

$$16\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2})}{k!} {}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right) \eta^k - \quad (7.87)$$

$$\begin{aligned} & -16\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2})}{k!} \sqrt{\frac{\pi}{8k+6}} \eta^k = \\ & = 8\sqrt{2}I_2(\eta) + 8 \int_0^\infty dt \frac{te^{-t^2} - e^{-\frac{3}{4}t^2}(1 - e^{-t^2})^{\frac{1}{2}}}{(1 - e^{-t^2})^{\frac{1}{2}}(1 - \eta e^{-t^2})^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (7.88)$$

Зазначимо, що інтеграл (7.88) має скінченне значення при $\eta = 1$. Як наслідок, поклавши $\eta = 1$ у (7.88), та врахувавши (7.85), знайдемо

$$S_{1s}(0) = 2 + 8 \int_0^\infty dt \frac{te^{-t^2} - e^{-\frac{3}{4}t^2} \sqrt{1 - e^{-t^2}}}{(1 - e^{-t^2})^2} = 1.72006 \dots \quad (7.89)$$

Отже, маємо таку асимптотику для ΔE_{1s} у випадку, коли $\beta \rightarrow 0$ ($\theta \rightarrow 0$)

$$\Delta E_{1s} = \frac{e^2 \beta^2}{a_B} S_{1s}(0). \quad (7.90)$$

Використавши (7.58), отримаємо

$$\Delta E_{1s} = \frac{e^2}{a_B^3} \sqrt{\frac{\hbar^2 \langle \theta^2 \rangle}{6}} S_{1s}(0). \quad (7.91)$$

Подібним способом можемо знайти поправки до збуджених s рівнів атома водню

$$\Delta E_{ns} = \frac{e^2 \beta^2}{a_B n^5} S_{ns}(\beta), \quad (7.92)$$

де

$$S_{ns}(\beta) = 4 \int_0^\infty d\rho \rho^2 e^{-\frac{\beta \rho}{n}} L_{n-1}^1 \left(\frac{2\beta \rho}{n} \right) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + p_\rho^2}} \right) e^{-\frac{\beta \rho}{n}} L_{n-1}^1 \left(\frac{2\beta \rho}{n} \right). \quad (7.93)$$

Зауважимо, що

$$S_{ns}(0) = S_{1s}(0) n^2 \simeq 1.72 n^2. \quad (7.94)$$

Отже, отримаємо такі поправки до ns енергетичних рівнів атома водню

$$\Delta E_{ns} = \frac{e^2}{a_B^3 n^3} \sqrt{\frac{\hbar^2 \langle \theta^2 \rangle}{6}} S_{1s}(0). \quad (7.95)$$

Результат (7.95) знайдено з точністю до лінійних флуктуацій $[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2$. У інтегралі (7.50) було зроблено заміну $\langle f(A) \rangle \rightarrow f(\langle A \rangle)$. А саме така заміна була розглянута

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{r^2 + [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2}} \right\rangle_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{r^2 + \langle [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 \rangle_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}}}, \quad (7.96)$$

де використано позначення

$$\langle \dots \rangle_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \langle \psi_{0,0,0}^a(\mathbf{a}) \psi_{0,0,0}^b(\mathbf{b}) | \dots | \psi_{0,0,0}^a(\mathbf{a}) \psi_{0,0,0}^b(\mathbf{b}) \rangle_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}. \quad (7.97)$$

Знайдемо поправки до ns енергетичних рівнів атома водню точно. Повернемося до інтегралу (7.49). Для зручності введемо безрозмірні координати

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{a}}{l_P}, \quad (7.98)$$

$$\mathbf{b}' = \frac{\mathbf{b}}{l_P}. \quad (7.99)$$

Отже, можемо записати $\boldsymbol{\theta}$ у такому вигляді

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\alpha l_p^2}{\hbar} \boldsymbol{\theta}', \quad (7.100)$$

де

$$\boldsymbol{\theta}' = [\mathbf{a}' \times \mathbf{b}']. \quad (7.101)$$

Також використаємо позначення

$$\mathbf{r}' = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \frac{\mathbf{r}}{l_p}. \quad (7.102)$$

Як наслідок, перепишемо поправки до ns рівнів атома водню ΔE_{ns} як

$$\Delta E_{ns} = \frac{\chi^2 e^2}{a_B} I_{ns}(\chi), \quad (7.103)$$

де

$$\begin{aligned} I_{ns}(\chi) = & \int d\mathbf{a}' \tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\mathbf{a}') \int d\mathbf{b}' \tilde{\psi}_{0,0,0}^b(\mathbf{b}') \int d\mathbf{r}' \tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi \mathbf{r}') \left(\frac{1}{r'} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + [\boldsymbol{\theta}' \times \mathbf{p}']^2}} \right) \tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi \mathbf{r}') \tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\mathbf{a}') \tilde{\psi}_{0,0,0}^b(\mathbf{b}'), \end{aligned} \quad (7.104)$$

тут параметр χ визначається як

$$\chi = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{l_p}{a_B}. \quad (7.105)$$

Функції $\tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\mathbf{a}')$, $\tilde{\psi}_{0,0,0}^b(\mathbf{b}')$ – безрозмірні власні функції гармонічного осцилятора

$$\tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\mathbf{a}') = \pi^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{(a')^2}{2}}, \quad (7.106)$$

$$\tilde{\psi}_{0,0,0}^b(\mathbf{b}') = \pi^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{(b')^2}{2}}. \quad (7.107)$$

Функції $\tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi \mathbf{r}')$ – безрозмірні власні функції атома водню

$$\tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi \mathbf{r}') = \sqrt{\frac{1}{\pi n^5}} e^{-\frac{\chi r'}{n}} L_{n-1}^1 \left(\frac{2\chi r'}{n} \right), \quad (7.108)$$

де $L_{n-1}^1 \left(\frac{2\chi r'}{n} \right)$ – поліноми Лагера.

Звернімо увагу на те, що при $\chi = 0$ інтеграл (7.104) має скінченне значення. Зважаючи на це, головний член асимптотичного розкладу ΔE_{ns} при $\chi \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow 0$) можемо записати як

$$\Delta E_{ns} = \frac{\chi^2 e^2}{a_B} I_{ns}(0). \quad (7.109)$$

Знайдемо $I_{ns}(0)$ точно. Із цією метою, для початку розглянемо такий інтеграл

$$I_{ns}(\chi, \boldsymbol{\theta}') = \int d\mathbf{r}' \tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi \mathbf{r}') \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + [\boldsymbol{\theta}' \times \mathbf{p}']^2}} \right) \tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi \mathbf{r}'). \quad (7.110)$$

Зазначимо, що

$$\begin{aligned} I_{ns}(0) &= \\ &= \int d\mathbf{a}' \tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\mathbf{a}') \int d\mathbf{b}' \tilde{\psi}_{0,0,0}^b(\mathbf{b}') I_{ns}(0, \boldsymbol{\theta}') \tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\mathbf{a}') \tilde{\psi}_{0,0,0}^b(\mathbf{b}') = \\ &= \langle I_{ns}(0, \boldsymbol{\theta}') \rangle_{\mathbf{a}', \mathbf{b}'} \end{aligned} \quad (7.111)$$

Для розрахунку (7.110) зручно перейти до імпульсного представлення

$$I_{ns}(\chi, \boldsymbol{\theta}') = \frac{1}{\chi^6} \int d\mathbf{p}' \tilde{\psi}_{n,0,0} \left(\frac{\mathbf{p}'}{\chi} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{-\nabla_{\mathbf{p}'}^2}} - \frac{1}{\sqrt{-\nabla_{\mathbf{p}'}^2 + [\boldsymbol{\theta}' \times \mathbf{p}']^2}} \right) \tilde{\psi}_{n,0,0} \left(\frac{\mathbf{p}'}{\chi} \right), \quad (7.112)$$

тут

$$\nabla_{\mathbf{p}'}^2 = \sum_i \frac{\partial^2}{(\partial p_i')^2}. \quad (7.113)$$

Важливо звернути увагу, що інтеграл $I_{ns}(\chi, \boldsymbol{\theta}')$ не залежить від напрямку $\boldsymbol{\theta}'$. Тому справедливою є така рівність

$$I_{ns}(\chi, \boldsymbol{\theta}') = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega I_{ns}(\chi, \boldsymbol{\theta}') = I_{ns}(\chi, \theta'). \quad (7.114)$$

де

$$\theta' = |\boldsymbol{\theta}'|, \quad (7.115)$$

$$d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\Phi, \quad (7.116)$$

тут Θ – кут між векторами $\boldsymbol{\theta}'$ та $\mathbf{p}'$. Інтеграл $I_{ns}(\chi, \theta')$ має такий вигляд

$$I_{ns}(\chi, \boldsymbol{\theta}') = I_{ns}(\chi, \theta') \cdot \frac{1}{4\pi\chi^6} \int d\Omega \int d\mathbf{p}' \tilde{\psi}_{n,0,0} \left(\frac{\mathbf{p}'}{\chi} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{-\nabla_{\mathbf{p}'}^2}} - \frac{1}{\sqrt{-\nabla_{\mathbf{p}'}^2 + [\boldsymbol{\theta}' \times \mathbf{p}']^2}} \right) \tilde{\psi}_{n,0,0} \left(\frac{\mathbf{p}'}{\chi} \right) = \quad (7.117)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi\chi^6} \int d\Omega \int d\mathbf{p}' \tilde{\psi}_{n,0,0} \left(\frac{\mathbf{p}'}{\chi} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{-\nabla_{p'}^2}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{-\nabla_{p'}^2 + (\theta')^2 (p')^2 \sin^2 \Theta}} \right) \tilde{\psi}_{n,0,0} \left(\frac{\mathbf{p}'}{\chi} \right).
\end{aligned} \tag{7.118}$$

Використавши заміну

$$\tilde{\mathbf{p}} = \kappa \mathbf{p}', \tag{7.119}$$

де

$$\kappa = \sqrt{\theta' \sin \Theta}, \tag{7.120}$$

та повернувшись до координатного представлення, можемо записати

$$\begin{aligned}
I_{ns}(\chi, \theta') &= \frac{\theta'}{2} \int_0^\pi d\Theta \sin^2 \Theta \int d\tilde{\mathbf{r}} \tilde{\psi}_{n,0,0}(\kappa\chi\tilde{\mathbf{r}}) \left(\frac{1}{\tilde{r}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}^2 + \tilde{p}^2}} \right) \tilde{\psi}_{n,0,0}(\kappa\chi\tilde{\mathbf{r}})
\end{aligned} \tag{7.121}$$

Зауважимо, що для ns рівнів інтеграл (7.121) можемо спростити та записати як

$$\begin{aligned}
&I_{ns}(\chi, \theta') = \\
&= \frac{\theta'}{2} \int_0^\pi d\Theta \sin^2 \Theta \int_0^\infty d\tilde{r} \tilde{r}^2 \tilde{R}_{n,0}(\kappa\chi\tilde{r}) \left(\frac{1}{\tilde{r}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}^2 + p_{\tilde{r}}^2}} \right) \tilde{R}_{n,0}(\kappa\chi\tilde{r}),
\end{aligned} \tag{7.122}$$

де

$$\tilde{R}_{n,0}(\kappa\chi\tilde{r}) = \sqrt{\frac{4}{n^5}} e^{-\frac{\kappa\chi\tilde{r}}{n}} L_{n-1}^1 \left(\frac{2\kappa\chi\tilde{r}}{n} \right) \tag{7.123}$$

радіальні власні функції атома водню, $p_{\tilde{r}}$ визначається як

$$p_{\tilde{r}} = -i \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \tilde{r}. \tag{7.124}$$

Зручно використати такі позначення

$$S_{ns}(\kappa\chi) = 4 \int_0^\infty d\tilde{r} \tilde{r}^2 e^{-\frac{\kappa\chi\tilde{r}}{n}} L_{n-1}^1 \left(\frac{2\kappa\chi\tilde{r}}{n} \right) \left(\frac{1}{\tilde{r}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}^2 + p_{\tilde{r}}^2}} \right) e^{-\frac{\kappa\chi\tilde{r}}{n}} L_{n-1}^1 \left(\frac{2\kappa\chi\tilde{r}}{n} \right), \quad (7.125)$$

та переписати $I_{ns}(\chi, \theta')$ у вигляді

$$I_{ns}(\chi, \theta') = \frac{\theta'}{2n^5} \int_0^\pi d\Theta \sin^2 \Theta S_{ns}(\kappa\chi). \quad (7.126)$$

Для $\chi = 0$ маємо:

$$I_{ns}(0, \theta') = \frac{\theta'}{2n^5} \int_0^\pi d\Theta \sin^2 \Theta S_{ns}(0) = \frac{\pi\theta'}{4n^5} S_{ns}(0). \quad (7.127)$$

Повертаючись до (7.109) та врахувавши (7.111), (7.127), отримаємо вираз для поправок до ns енергетичних рівнів у такому вигляді

$$\Delta E_{ns} = \frac{\pi\langle\theta'\rangle\chi^2 e^2}{4a_B n^5} S_{ns}(0), \quad (7.128)$$

де

$$\langle\theta'\rangle = \langle\tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\mathbf{a}')\tilde{\psi}_{0,0,0}^b(\mathbf{b}')|\sqrt{\sum_i(\theta'_i)^2}|\tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\mathbf{a}')\tilde{\psi}_{0,0,0}^b(\mathbf{b}')\rangle = 1. \quad (7.129)$$

Зауважимо, що результат $\langle\theta'\rangle = 1$ є очікуваним, зважаючи на вигляд безрозмірних координат $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$.

Звернімо увагу, що $S_{ns}(0)$ та $S_{1s}(0)$ пов'язані таким співвідношенням

$$S_{ns}(0) = S_{1s}(0)n^2. \quad (7.130)$$

Із (7.128), (7.129), (7.130), отримаємо вираз для головного члена асимптотичного розкладу поправок до ns рівнів атома водню

$$\Delta E_{ns} = \frac{\pi\chi^2 e^2}{4a_B n^3} S_{1s}(0). \quad (7.131)$$

Обчислимо $S_{1s}(0)$

$$S_{1s}(0) = 4 \int_0^\infty d\tilde{r} \tilde{r}^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}^2 + p_{\tilde{r}}^2}} \right). \quad (7.132)$$

Із цією метою розкладемо одиницю в ряд за власними функціями оператора $\tilde{r}^2 + p_{\tilde{r}}^2$

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \phi_k, \quad (7.133)$$

де ϕ_k – власні функції $\tilde{r}^2 + p_{\tilde{r}}^2$, C_k – коефіцієнти розкладу

$$C_k = \sqrt{\frac{2k!}{\Gamma(k + \frac{3}{2})}} \int_0^\infty d\tilde{r} \tilde{r}^2 e^{-\frac{\tilde{r}^2}{2}} L_k^{\frac{1}{2}}(\tilde{r}^2) = (-1)^k \sqrt{\frac{4\Gamma(k + \frac{3}{2})}{k!}}. \quad (7.134)$$

Отже, використавши (7.133), можемо записати другий доданок у (7.132) як

$$\int_0^\infty d\tilde{r} \tilde{r}^2 \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}^2 + p_{\tilde{r}}^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^2}{\sqrt{\lambda_k}}, \quad (7.135)$$

де λ_k – власні значення оператора $\tilde{r}^2 + p_{\tilde{r}}^2$.

Перший доданок у (7.132) може бути представлений у такому вигляді

$$\int_0^\infty d\tilde{r} \tilde{r} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k I_k, \quad (7.136)$$

де

$$\begin{aligned} I_k &= \sqrt{\frac{2k!}{\Gamma(k + \frac{3}{2})}} \int_0^\infty d\tilde{r} \tilde{r} e^{-\frac{\tilde{r}^2}{2}} L_k^{\frac{1}{2}}(\tilde{r}^2) = \\ &= (-1)^k \sqrt{\frac{8k!}{\pi \Gamma(k + \frac{3}{2})^2}} F_1 \left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2 \right), \end{aligned} \quad (7.137)$$

тут ${}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right)$ – гіпергеометрична функція.

Отже, врахувавши (7.135) та (7.136), маємо

$$\begin{aligned} S_{1s}(0) &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} \left(C_k I_k - \frac{C_k^2}{\sqrt{\lambda_k}} \right) = \\ &= 16 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2})}{k!} \left({}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right) - \sqrt{\frac{\pi}{8k+6}} \right) = \\ &1.72006.... \end{aligned} \quad (7.138)$$

де ми використали результат (7.89). Взявши до уваги (7.138), можемо записати

$$\Delta E_{ns} \simeq 1.72 \frac{\pi \chi^2 e^2}{4a_B n^3}. \quad (7.139)$$

Перепишемо поправки до ns рівнів через параметр некомутативності, а саме, із (7.100), (7.105), маємо:

$$\Delta E_{ns} \simeq 1.72 \frac{\hbar \langle \theta \rangle \pi e^2}{8a_B^3 n^3}, \quad (7.140)$$

де

$$\langle \theta \rangle = \langle \psi_{0,0,0}^a(\mathbf{a}) \psi_{0,0,0}^b(\mathbf{b}) | \sqrt{\sum_i \theta_i^2} | \psi_{0,0,0}^a(\mathbf{a}) \psi_{0,0,0}^b(\mathbf{b}) \rangle = \frac{\alpha l_p^2}{\hbar}, \quad (7.141)$$

та вектор $\boldsymbol{\theta}$ заданий як (5.32).

Зауважимо, що

$$\langle \theta \rangle = \sqrt{\frac{2\langle \theta^2 \rangle}{3}}. \quad (7.142)$$

Отже, точний та наближений результати для поправок до ns енергетичних рівнів атома водню (7.140), (7.95), відповідно, відрізняються множителем $\pi/4$.

7.4 Енергетичні рівні атома водню та тензор некомутативності

Цікаво порівняти результати для поправок до енергетичних рівнів атома водню у випадках різних виглядів для тензора некомутативності та, відповідно, різних сферично-симетричних алгебр

(5.17)-(5.19), (5.41)-(5.43). Знайдемо поправки до енергетичних рівнів атома водню у випадку, коли сферично-симетрична некомутативна алгебра побудована як (5.41)-(5.43). Розгляньмо повний гамільтоніан

$$H^a = H_h + H_{osc}^a, \quad (7.143)$$

де

$$H_h = \frac{P^2}{2M} - \frac{e^2}{R}, \quad (7.144)$$

$$H_{osc}^a = \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2 a^2}{2}, \quad (7.145)$$

тут $R = \sqrt{\sum_i X_i^2}$ та координати X_i задовольняють (5.41).

Використаємо таке представлення

$$X_i = x_i - \frac{l_0}{2\hbar} \varepsilon_{ijk} a_k p_j, \quad (7.146)$$

$$P_i = p_i, \quad (7.147)$$

де θ_{ij} визначений як (5.39). Координати x_i та імпульси p_i задовольняють звичні комутаційні співвідношення (5.27)-(5.29) та комутують із a_i , p_i^a . Координати X_i (7.146) зручно переписати у такому вигляді

$$X_i = x_i + \frac{l_0}{2\hbar} [\mathbf{a} \times \mathbf{p}]_i. \quad (7.148)$$

Зауважимо, що для координат X_i та імпульсів p_j^a виконується співвідношення

$$[X_i, p_j^a] = i \varepsilon_{ijk} \frac{l_0}{2} p_k. \quad (7.149)$$

Знайдемо розклад для гамільтоніана H^a з точністю до другого порядку за $l_0 \mathbf{a} / \hbar$. Використавши (7.148), маємо:

$$R = \sqrt{\sum_i X_i^2} = \sqrt{r^2 - \frac{l_0}{\hbar} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{L}) + \frac{l_0^2}{4\hbar^2} [\mathbf{a} \times \mathbf{p}]^2}, \quad (7.150)$$

де $r = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ та $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$. Оскільки оператори під квадратним коренем не комутують, запишемо розклад для R у такому вигляді:

$$R = r - \frac{l_0}{2\hbar r}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{L}) - \frac{l_0^2}{8\hbar^2 r^3}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{L})^2 + \frac{l_0^2}{16\hbar^2} \left(\frac{1}{r}[\mathbf{a} \times \mathbf{p}]^2 + [\mathbf{a} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r} + a^2 f(\mathbf{r}) \right), \quad (7.151)$$

де $f(\mathbf{r})$ – невідома функція. Піднесемо до квадрату ліву та праву частини рівності (7.151)

$$\frac{\hbar^2}{r^4}[\mathbf{a} \times \mathbf{r}]^2 - r a^2 f(\mathbf{r}) = 0. \quad (7.152)$$

Із (7.152) легко отримати

$$a^2 f(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{r^5}[\mathbf{a} \times \mathbf{r}]^2. \quad (7.153)$$

Отже, врахувавши (7.151) та (7.153), знайдемо розклад для R^{-1}

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{l_0}{2\hbar r^3}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{L}) + \frac{3l_0^2}{8\hbar^2 r^5}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{L})^2 - \frac{l_0^2}{16\hbar^2} \left(\frac{1}{r^2}[\mathbf{a} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\mathbf{a} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^7}[\mathbf{a} \times \mathbf{r}]^2 \right). \quad (7.154)$$

В результаті, можемо записати гамільтоніан (7.143) у такому вигляді

$$H^a = H_0^a + V^a, \quad (7.155)$$

де

$$H_0^a = H_h^{(0)} + H_{osc}^a. \quad (7.156)$$

Тут V – збурення, зумовлене некомутативністю координат

$$V^a = -\frac{l_0 e^2}{2\hbar r^3}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{L}) - \frac{3l_0^2 e^2}{8\hbar^2 r^5}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{L})^2 + \frac{l_0^2 e^2}{16\hbar^2} \left(\frac{1}{r^2}[\mathbf{a} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\mathbf{a} \times \mathbf{p}]^2 \frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^7}[\mathbf{a} \times \mathbf{r}]^2 \right), \quad (7.157)$$

та $H_h^{(0)}$ – гамільтоніан атома водню у звичайному просторі.

Знайдемо поправки до енергетичних рівнів атома водню, зумовлені некомутативністю координат (5.41). Зауважимо, що $H_h^{(0)}$ комує з H_{osc}^a

$$\left[\frac{p^2}{2M} - \frac{e^2}{r}, \frac{(p^a)^2}{2m} + \frac{m\omega^2 a^2}{2} \right] = 0. \quad (7.158)$$

Отже, власні функції та власні значення, що відповідають H_0^a , (7.156) мають такий вигляд

$$E_{n,\{n^a\}}^{(0)} = -\frac{e^2}{2a_B n^2} + \hbar\omega \left(n_1^a + n_2^a + n_3^a + \frac{3}{2} \right), \quad (7.159)$$

$$\psi_{n,l,m,\{n^a\}}^{(0)} = \psi_{n,l,m} \psi_{n_1^a, n_2^a, n_3^a}^a, \quad (7.160)$$

де $\psi_{n,l,m}$ – власні функції атома водню у звичайному просторі ($\theta_{ij} = 0$), $\psi_{n_1^a, n_2^a, n_3^a}^a$ – власні функції гармонічного осцилятора (7.145).

Відповідно до теорії збурень, у випадку, коли гармонічний осцилятор H_{osc}^a знаходиться в основному стані, маємо такі поправки до енергетичних рівнів атома водню, зумовлені некомутативністю координат (5.41)

$$\begin{aligned} \Delta E_{n,l}^{a,(1)} &= \langle \psi_{n,l,m,\{0\}}^{(0)} | V | \psi_{n,l,m,\{0\}}^{(0)} \rangle = \\ &= -\frac{l_0^2}{\hbar^2} \frac{\hbar^2 e^2 \langle a^2 \rangle}{a_B^5 n^5} \left(\frac{5n^2 - 3l(l+1) + 1}{2(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{6n^2 - 2l(l+1)}{3l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)} + \frac{1}{6l(l+1)(2l+1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{6} \frac{5n^2 - 3l(l+1) + 1}{l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} \right), \end{aligned} \quad (7.161)$$

де $\langle a^2 \rangle$ визначається як

$$\langle a^2 \rangle = \langle \psi_{0,0,0}^a | a^2 | \psi_{0,0,0}^a \rangle = \frac{3}{2} \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right) = \frac{3}{2} l_P^2. \quad (7.162)$$

Тут ми використали результати обчислень відповідних інтегралів (7.26), (7.34).

У другому порядку теорії збурень можемо записати

$$\Delta E_{n,l,m,\{0\}}^{(2)} = \sum_{n',l',m',\{n^a\}} \frac{\left| \left\langle \psi_{n',l',m',\{n^a\}}^{(0)} | V | \psi_{n,l,m,\{0\}}^{(0)} \right\rangle \right|^2}{E_n^{(0)} - E_{n'}^{(0)} - \hbar\omega(n_1^a + n_2^a + n_3^a)}, \quad (7.163)$$

де набір чисел $n', l', m', \{n^a\}$ не співпадає із $n, l, m, \{0\}$, $E_n^{(0)} = -e^2/(2a_B n^2)$. У границі $\omega \rightarrow \infty$ отримаємо:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta E_{n,l,m,\{0\}}^{(2)} = 0. \quad (7.164)$$

Отже, поправки до енергетичних рівнів атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі (5.41)-(5.43) мають такий вигляд

$$\begin{aligned} \Delta E_{n,l} = & -\frac{l_0^2}{\hbar^2} \frac{\hbar^2 e^2 \langle a^2 \rangle}{a_B^5 n^5} \left(\frac{5n^2 - 3l(l+1) + 1}{2(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} - \right. \\ & - \frac{6n^2 - 2l(l+1)}{3l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)} + \frac{1}{6l(l+1)(2l+1)} - \\ & \left. - \frac{5}{6} \frac{5n^2 - 3l(l+1) + 1}{l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} \right). \end{aligned} \quad (7.165)$$

Звернімо увагу, що у випадку, коли $l = 0$ чи $l = 1$ поправки (7.165) є розбіжними. Знайдемо поправки до ns енергетичних рівнів атома водню. Із цією метою перепишемо збурення, зумовлене некомутативністю координат (5.41), у такому вигляді

$$V = -\frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{\sqrt{r^2 - \frac{l_0}{\hbar}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{L}) + \frac{l_0^2}{4\hbar^2}[\mathbf{a} \times \mathbf{p}]^2}} + \frac{e^2}{r}. \quad (7.166)$$

Як наслідок, відповідно до теорії збурень можемо записати вираз для поправок до ns енергетичних рівнів

$$\begin{aligned} \Delta E_{ns} = & \left\langle \psi_{n,0,0,\{0\}}^{(0)} \left| \frac{e^2}{r} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{e^2}{\sqrt{r^2 - \frac{l_0}{\hbar}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{L}) + \frac{l_0^2}{4\hbar^2}[\mathbf{a} \times \mathbf{p}]^2}} \right| \psi_{n,0,0,\{0\}}^{(0)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.167)$$

Зауважимо, що $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{L})$ комутує з $[\mathbf{a} \times \mathbf{p}]^2$ та r^2

$$[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{L}), [\mathbf{a} \times \mathbf{p}]^2] = 0, \quad (7.168)$$

$$[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{L}), r^2] = 0. \quad (7.169)$$

Також звернімо увагу на те, що

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{L})\psi_{n,0,0,\{0\}}^{(0)} = 0. \quad (7.170)$$

Отже, можемо переписати поправки (7.167) як

$$\begin{aligned} \Delta E_{ns} &= \left\langle \psi_{n,0,0,\{0\}}^{(0)} \left| \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\sqrt{r^2 + \frac{l_0^2}{4\hbar^2} [\mathbf{a} \times \mathbf{p}]^2}} \right| \psi_{n,0,0,\{0\}}^{(0)} \right\rangle = \\ &= \frac{\chi^2 e^2}{a_B} I_{ns}^a(\tilde{\chi}), \end{aligned} \quad (7.171)$$

де ми використали такі позначення

$$\begin{aligned} I_{ns}^a(\tilde{\chi}) &= \int d\mathbf{a}' \tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\mathbf{a}') \int d\mathbf{r}' \tilde{\psi}_{n,0,0}(\tilde{\chi}\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r'} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + [\mathbf{a}' \times \mathbf{p}]^2}} \right) \tilde{\psi}_{n,0,0}(\tilde{\chi}\mathbf{r}') \tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\mathbf{a}'), \end{aligned} \quad (7.172)$$

тут

$$\tilde{\chi} = \sqrt{\frac{l_0 l_P}{2a_B^2}}, \quad (7.173)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \sqrt{\frac{2}{l_0 l_P}}, \quad (7.174)$$

функції $\tilde{\psi}_{n,0,0}(\tilde{\chi}\mathbf{r}')$ та $\tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\mathbf{a}')$ визначаються як (7.108), (7.106), відповідно.

Зазначимо, що у випадку $\tilde{\chi} = 0$ інтеграл (7.172) має скінченне значення. Отже, у границі $\tilde{\chi} \rightarrow 0$ головний член асимптотичного розкладу ΔE_{ns} має вигляд

$$\Delta E_{ns} = \frac{\tilde{\chi}^2 e^2}{a_B} I_{ns}(0). \quad (7.175)$$

Щоб знайти $I_{ns}^a(0)$, розглянемо для початку такий інтеграл

$$I_{ns}(\tilde{\chi}, \mathbf{a}') = \int d\mathbf{r}' \tilde{\psi}_{n,0,0}(\tilde{\chi}\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + [\mathbf{a}' \times \mathbf{p}]^2}} \right) \tilde{\psi}_{n,0,0}(\tilde{\chi}\mathbf{r}'). \quad (7.176)$$

У випадку, коли $\tilde{\chi} = 0$, на основі результатів попередніх обчислень інтеграла (7.127) маємо

$$I_{ns}^a(0, \mathbf{a}') \simeq 1.72 \frac{\pi a'}{4n^3}, \quad (7.177)$$

тут $a' = |\mathbf{a}'|$. Зауважимо, що

$$I_{ns}^a(0) = \langle I_{ns}^a(0, \mathbf{a}') \rangle_{\mathbf{a}'}, \quad (7.178)$$

де $\langle \dots \rangle_{\mathbf{a}'}$ позначає $\langle \tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\mathbf{a}') | \dots | \tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\mathbf{a}') \rangle$. Отже, врахувавши (7.173), (7.175), (7.177), (7.178) та повернувшись до $\mathbf{a} = l_P \mathbf{a}'$, запишемо головний член асимптотичного розкладу поправок до ns енергетичних рівнів

$$\Delta E_{ns} \simeq 1.72 \frac{\hbar \langle \theta \rangle \pi e^2}{8a_B^3 n^3}, \quad (7.179)$$

де

$$\langle \theta \rangle = \frac{l_0}{\hbar} \langle \psi_{0,0,0}^a | \sqrt{\sum_i a_i^2} | \psi_{0,0,0}^a \rangle = \frac{2l_0 l_P}{\sqrt{\pi} \hbar}. \quad (7.180)$$

Порівнявши результати для поправок до енергетичних рівнів атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі (5.41)-(5.43) та (5.17)-(5.19), можемо зробити висновок, що вирази для поправок у двох випадках є однаковими. Відрізняються тільки вирази для середніх тензора некомутативності, що пов'язано з різними способами його побудови.

Звернімо увагу на те, що у двох випадках побудови сферично-симетричної некомутативної алгебри (5.41)-(5.43) та (5.17)-(5.19) поправки до ns енергетичних рівнів є пропорційними до $\langle \theta \rangle = \sqrt{2\langle \theta^2 \rangle} / \sqrt{3}$. Для енергетичних рівнів із $l > 1$ поправки пропорційні до $\langle \theta^2 \rangle$. Отже, можемо зробити висновок, що ns енергетичні рівні є більш чутливими до некомутативності координат.

7.5 Оцінка верхньої межі параметра некомутативності на основі поправок до ns рівнів атома водню

Знайдемо оцінку для верхньої межі параметра некомутативності, порівнявши результати для поправок до енергетичних рівнів атома водню, отримані у попередньому підрозділі, із експериментальними даними.

У статті [77] представлено такий результат для частоти переходу

$$f_{1s-2s} = 2466061413187018(11)\text{Гц}, \quad (7.181)$$

точність якого 4.5×10^{-15} .

Використавши (7.140) та (7.142) можемо записати поправки до енергії переходу $1s - 2s$, зумовлені некомутативністю координат

$$\Delta_{1,2} = \Delta E_{2s} - \Delta E_{1s} = -\frac{7}{32\sqrt{6}a_B^3} \sqrt{\langle \theta^2 \rangle} \hbar \pi e^2 S_{1s}(0). \quad (7.182)$$

Тут $S_{1s}(0) = 1.72006\dots$ (7.89). Знайдемо відношення $\Delta_{1,2}/(E_2^{(0)} - E_1^{(0)})$ де $E_n^{(0)}$ – енергетичні рівні атома водню у звичному випадку ($\theta_{ij} = 0$)

$$E_n^{(0)} = -\frac{e^2}{2a_B n^2}. \quad (7.183)$$

Із (7.182), (7.183) маємо

$$\frac{\Delta_{1,2}}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} = -\frac{7}{12\sqrt{6}a_B^2} \pi \hbar S_{1s}(0) \sqrt{\langle \theta^2 \rangle}. \quad (7.184)$$

З метою оцінки верхньої межі для параметра некомутативності припустимо, що поправки, зумовлені некомутативністю координат, знаходяться в межах точності експериментальних даних. Припустивши, що $|\Delta_{1,2}|/(E_2^{(0)} - E_1^{(0)})$ не перевищує 4.5×10^{-15}

$$\frac{|\Delta_{1,2}|}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} \leq 4.5 \times 10^{-15}, \quad (7.185)$$

маємо:

$$\frac{7}{12\sqrt{6}a_B^2}\pi\hbar S_{1s}(0)\sqrt{\langle\theta^2\rangle}\leq 4.5\times 10^{-15}. \quad (7.186)$$

Отже, із (7.186) отримаємо верхню межу для параметра некомутативності

$$\hbar\sqrt{\langle\theta^2\rangle}\leq 7.7\times 10^{-36}\text{ м}^2. \quad (7.187)$$

Важливо зауважити, що отриманий результат для верхньої межі (7.187) покращує результати, представлені у літературі, оскільки отримана нерівність (7.187) накладає сильніші обмеження на величину параметра некомутативності ніж результат, знайдений у [21] на основі даних про зсув Лемба.

Використовуючи (7.187) та врахувавши (7.25), ми також можемо оцінити величину константи α

$$\alpha\leq 2.4\times 10^{34}, \quad (7.188)$$

де константа α означена в (5.14).

Розділ 8

Система двох частинок у некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією

У загальному випадку у сферично-симетричному просторі з канонічною некомутативністю координат (5.41)-(5.43) різним частинкам можуть відповідати різні тензори некомутативності. Отже, існує проблема опису руху центра мас системи частинок у некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією.

У розділі вивчається система двох частинок у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу. Знаходиться вираз для ефективного тензора некомутативності, який описує рух центра мас системи частинок. Як приклад двочастинкової системи розглядається атом водню [78].

8.1 Імпульс та координати центра мас двочастинкової системи

Розгляньмо систему двох частинок m_1 , m_2 , які взаємодіють між собою у сферично-симетричному некомутативному просторі.

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \quad (8.1)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (8.2)$$

$$[P_i, P_j] = 0, \quad (8.3)$$

де тензор некомутативності θ_{ij} визначений як

$$\theta_{ij} = \frac{\alpha l_P^2}{\hbar} \varepsilon_{ijk} \tilde{a}_k. \quad (8.4)$$

Тут α – безрозмірна константа, l_P – довжина Планка, $\tilde{a}_i$ – додаткові координати, які описуються гармонічним осцилятором

$$H_{osc} = \hbar \omega \left(\frac{(\tilde{p}^a)^2}{2} + \frac{\tilde{a}^2}{2} \right). \quad (8.5)$$

У загальному випадку координати різних частинок можуть задовольняти некомутативну алгебру з різними тензорами некомутативності. Припустимо, що координати, які відповідають різним частинкам комутують. Отже, можемо записати таку алгебру

$$[X_i^{(n)}, X_j^{(m)}] = i\hbar \theta_{ij}^{(n)} \delta_{nm}, \quad (8.6)$$

$$[X_i^{(n)}, P_j^{(m)}] = i\hbar \delta_{ij} \delta_{nm}, \quad (8.7)$$

$$[P_i^{(n)}, P_j^{(m)}] = 0. \quad (8.8)$$

де індекси n, m позначають частинки, $\theta_{ij}^{(n)}$ – тензор некомутативності, який відповідає частинці з масою m_n . Координати $X_i^{(n)}$ та імпульси $P_i^{(n)}$ можуть бути представлені як

$$X_i^{(n)} = x_i^{(n)} - \frac{1}{2} \theta_{ij}^{(n)} p_j^{(n)}, \quad (8.9)$$

$$P_i^{(n)} = p_i^{(n)}, \quad (8.10)$$

Важливо зауважити, що відповідно до (8.9), оператори $X_i^{(n)}$ залежать від імпульсів $p_i^{(n)}$ і тому залежать від маси m_n . Координати $X_i^{(n)}$ не залежать від маси та можуть бути розглянуті як кінематичні змінні у випадку, коли тензор некомутативності є пропорційним до $1/m_n$, а саме коли виконується така умова

$$\alpha_n = \tilde{\gamma} \frac{m_P}{m_n}, \quad (8.11)$$

де $\tilde{\gamma}$ – безрозмірна константа, яка не залежить від маси, m_P – маса Планка.

Взявши до уваги умову (8.11), можемо записати

$$\theta_{ij}^{(n)} = \tilde{\gamma} \frac{l_P^2 m_P}{\hbar m_n} \varepsilon_{ijk} \tilde{a}_k. \quad (8.12)$$

Гамільтоніан, який відповідає системі, має такий вигляд:

$$H_s = \frac{(P^{(1)})^2}{2m_1} + \frac{(P^{(2)})^2}{2m_2} + V(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|), \quad (8.13)$$

де $V(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|)$ – потенціальна енергія взаємодії частинок. Координати $X_i^{(n)}$ задовольняють некомутативну алгебру (8.6)-(8.8).

У сферично-симетричному некомутативному просторі, зважаючи на визначення тензора некомутативності (8.4), при записі гамільтоніану потрібно брати до уваги додаткові доданки, які відповідають гармонічному осцилятору. Тому ми розглядаємо повний гамільтоніан у такому вигляді

$$H = \frac{(P^{(1)})^2}{2m_1} + \frac{(P^{(2)})^2}{2m_2} + V(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|) + \hbar\omega \left(\frac{(\tilde{p}^a)^2}{2} + \frac{\tilde{a}^2}{2} \right). \quad (8.14)$$

Знайдемо імпульс центра мас, як інтеграл руху у сферично-симетричному некомутативному просторі, та введемо координати центра мас. Звернімо увагу на те, що імпульс центра мас $\mathbf{P}^c$, визначений традиційним способом

$$\mathbf{P}^c = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)} \quad (8.15)$$

задовольняє таке співвідношення

$$[\mathbf{P}^c, H] = 0. \quad (8.16)$$

Отже, імпульс центра мас (8.15) є інтегралом руху у сферично-симетричному некомутативному просторі. Спряжені до нього координати центра мас мають вигляд

$$\mathbf{X}^c = \frac{m_1 \mathbf{X}^{(1)} + m_2 \mathbf{X}^{(2)}}{m_1 + m_2}. \quad (8.17)$$

Звернімо увагу на те, що координати центра мас X_i^c задовольняють некомутативну алгебру з ефективним тензором некомутативності $\tilde{\theta}_{ij}$. Із (8.6), (8.12) та (8.17) отримуємо:

$$[X_i^c, X_j^c] = i\hbar\tilde{\theta}_{ij}, \quad (8.18)$$

де ефективний тензор некомутативності визначений як

$$\tilde{\theta}_{ij} = \frac{m_1^2\theta_{ij}^{(1)} + m_2^2\theta_{ij}^{(2)}}{M^2} = \tilde{\gamma} \frac{l_P^2 m_P}{\hbar M} \varepsilon_{ijk} \tilde{a}_k, \quad (8.19)$$

тут $M = m_1 + m_2$.

Координати та імпульси, які відповідають відносному руху можуть також бути означені традиційним чином

$$\mathbf{X}^r = \mathbf{X}^{(2)} - \mathbf{X}^{(1)}, \quad (8.20)$$

$$\mathbf{P}^r = \mu_1 \mathbf{P}^{(2)} - \mu_2 \mathbf{P}^{(1)}, \quad (8.21)$$

тут $\mu_i = m_i/M$.

Координати X_i^r та імпульси P_i^r задовольняють такі співвідношення

$$[X_i^r, X_j^r] = i\hbar(\theta_{ij}^{(1)} + \theta_{ij}^{(2)}) = i\hbar\theta_{ij}^\mu, \quad (8.22)$$

$$[X_i^r, P_j^r] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (8.23)$$

$$[P_i^r, P_j^r] = 0. \quad (8.24)$$

Отже, координати відносного руху задовольняють некомутативну алгебру з ефективним тензором некомутативності, який визначається як

$$\theta_{ij}^\mu = \tilde{\gamma} \frac{l_P^2 m_P}{\hbar \mu} \varepsilon_{ijk} \tilde{a}_k. \quad (8.25)$$

Важливо підкреслити, що координати центра мас та координати відносного руху комутують, оскільки виконується умова (8.11). Маємо:

$$[X_i^c, X_j^r] = i \frac{\hbar}{M} \left(m_2 \theta_{ij}^{(2)} - m_1 \theta_{ij}^{(1)} \right) = 0. \quad (8.26)$$

Гамільтоніан двочастинкової системи H_s буде мати вигляд

$$H_s = \frac{(P^c)^2}{2M} + \frac{(P^r)^2}{2\mu} + V(|\mathbf{X}^r|), \quad (8.27)$$

тут $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – приведена маса.

На завершення цього підрозділу зауважимо, що у випадку, коли маси частинок системи є однаковими $m_1 = m_2$, та $\theta_{ij}^{(1)} = \theta_{ij}^{(2)} = \theta_{ij}$, відповідно до (8.19), отримаємо:

$$\tilde{\theta}_{ij} = \frac{\theta_{ij}}{2}. \quad (8.28)$$

Також із (8.25) маємо

$$\theta_{ij}^\mu = 2\theta_{ij}. \quad (8.29)$$

Отже, відносний рух є більш чутливий до некомутативності координат у порівнянні до руху окремих частинок.

8.2 Атом водню, як двочастинкова система у сферично-симетричному некомутативному просторі

Розгляньмо атом водню, як двочастинкову систему, у некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією (8.6)-(8.8). Запишемо повний гамільтоніан

$$H = \frac{(P^{(1)})^2}{2m_p} + \frac{(P^{(2)})^2}{2m_e} - \frac{e^2}{|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|} + \hbar\omega \left(\frac{(\tilde{p}^a)^2}{2} + \frac{\tilde{a}^2}{2} \right), \quad (8.30)$$

тут m_e та m_p – маси електрона та протона, відповідно. Використавши результати, представлені у попередньому підрозділі, можемо переписати гамільтоніан (8.30) у такому вигляді

$$H = \frac{(P^c)^2}{2M} + \frac{(P^r)^2}{2\mu} - \frac{e^2}{X^r} + \hbar\omega \left(\frac{(\tilde{p}^a)^2}{2} + \frac{\tilde{a}^2}{2} \right), \quad (8.31)$$

тут використано такі позначення:

$$M = m_e + m_p, \quad (8.32)$$

$$\mu = \frac{m_e m_p}{(m_e + m_p)}, \quad (8.33)$$

$$X^r = |\mathbf{X}^r|. \quad (8.34)$$

Знайдемо поправки до енергетичних рівнів атома водню з точністю до другого порядку за параметром некомутативності. Взявши до уваги (8.9) та (8.10), легко показати, що координати X_i^r та імпульси P_i^r можуть бути представлені як

$$X_i^r = x_i^r + \frac{\tilde{\gamma} m_P l_P^2}{2\hbar\mu} [\tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{p}^r]_i, \quad (8.35)$$

$$P_i^r = p_i^r, \quad (8.36)$$

тут

$$x_i^r = x_i^{(2)} - x_i^{(1)}, \quad (8.37)$$

$$p_i^r = \mu_1 p_i^{(2)} - \mu_2 p_i^{(1)}. \quad (8.38)$$

Координати x_i^r та імпульси p_i^r задовольняють звичні комутаційні співвідношення

$$[x_i^r, x_j^r] = 0, \quad (8.39)$$

$$[p_i^r, p_j^r] = 0, \quad (8.40)$$

$$[x_i^r, p_j^r] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (8.41)$$

Використовуючи представлення (8.35), (8.36), можемо переписати гамільтоніан (8.31) як

$$H = \frac{(p^c)^2}{2M} + \frac{(p^r)^2}{2\mu} - \frac{e^2}{\left| \mathbf{x}^r + \frac{\tilde{\gamma} m_P l_P^2}{2\hbar\mu} [\tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{p}^r] \right|} + \hbar\omega \left(\frac{(\tilde{p}^a)^2}{2} + \frac{\tilde{a}^2}{2} \right), \quad (8.42)$$

тут $\mathbf{p}^c = \mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{p}^{(2)}$.

Запишемо розклад для H з точністю до другого порядку за параметром

$$\boldsymbol{\theta}^\mu = \tilde{\gamma} \frac{l_P^2 m_P}{\hbar\mu} \tilde{\mathbf{a}}. \quad (8.43)$$

Щоб це зробити, для початку знайдемо розклад для оператора X^r .

$$\begin{aligned} X^r &= \left| \mathbf{x}^r + \frac{\tilde{\gamma} m_P l_P^2}{2\hbar\mu} [\tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{p}^r] \right| = \\ &= \sqrt{(x^r)^2 - (\boldsymbol{\theta}^\mu \cdot \mathbf{L}^r) + \frac{1}{4} [\boldsymbol{\theta}^\mu \times \mathbf{p}^r]^2}, \end{aligned} \quad (8.44)$$

тут

$$\mathbf{L}^r = [\mathbf{x}^r \times \mathbf{p}^r]. \quad (8.45)$$

Звернімо увагу, що оператори під коренем квадратним не комутують. Тому запишемо розклад для X^r із невідомою функцією $f(\mathbf{x}^r)$

$$\begin{aligned} X^r = & x^r - \frac{1}{2x^r}(\boldsymbol{\theta}^\mu \cdot \mathbf{L}^r) - \frac{1}{8(x^r)^3}(\boldsymbol{\theta}^\mu \cdot \mathbf{L}^r)^2 + \\ & + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x^r}[\boldsymbol{\theta}^\mu \times \mathbf{p}^r]^2 + [\boldsymbol{\theta}^\mu \times \mathbf{p}^r]^2 \frac{1}{x^r} + (\theta^\mu)^2 f(\mathbf{x}^r) \right). \end{aligned} \quad (8.46)$$

Щоб знайти Функцію $f(\mathbf{x}^r)$, піднесемо до квадрату ліву і праву частину рівності (8.46). Маємо

$$\frac{\hbar^2}{(x^r)^4}[\boldsymbol{\theta}^\mu \times \mathbf{x}^r]^2 - x^r(\theta^\mu)^2 f(\mathbf{x}^r) = 0. \quad (8.47)$$

Отже, із рівняння (8.47) можемо записати

$$(\theta^\mu)^2 f(\mathbf{x}^r) = \frac{\hbar^2}{(x^r)^5}[\boldsymbol{\theta}^\mu \times \mathbf{x}^r]^2. \quad (8.48)$$

На основі отриманих рівностей (8.46), (8.48) легко знайти розклад для $1/X^r$ та записати розклад для гамільтоніану (8.42) з точністю до другого порядку за параметром $\boldsymbol{\theta}^\mu$

$$H = H_0 + V, \quad (8.49)$$

$$H_0 = H_h^{(0)} + H_{osc}, \quad (8.50)$$

тут

$$H_h^{(0)} = \frac{(p^c)^2}{2M} + \frac{(p^r)^2}{2\mu} - \frac{e^2}{x^r} \quad (8.51)$$

є гамільтоніаном атома водню у звичному просторі ($\boldsymbol{\theta}^\mu = 0$) та гамільтоніан H_{osc} визначений як (8.5). Збурення, зумовлене неко-

мутатиністю, V запишеться як

$$V = -\frac{e^2}{2(x^r)^3}(\boldsymbol{\theta}^\mu \cdot \mathbf{L}^r) - \frac{3e^2}{8(x^r)^5}(\boldsymbol{\theta}^\mu \cdot \mathbf{L}^r)^2 + \\ + \frac{e^2}{16} \left(\frac{1}{(x^r)^2} [\boldsymbol{\theta}^\mu \times \mathbf{p}^r]^2 \frac{1}{x^r} + \frac{1}{x^r} [\boldsymbol{\theta}^\mu \times \mathbf{p}^r]^2 \frac{1}{(x^r)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\hbar^2}{(x^r)^7} [\boldsymbol{\theta}^\mu \times \mathbf{x}^r]^2 \right). \quad (8.52)$$

Знайдімо поправки до енергетичних рівнів атома водню, використовуючи теорію збурень. Звернімо увагу на те, що імпульс центра мас $\mathbf{p}^c$ є інтегралом руху. Оператор $\mathbf{p}^c$ комутує з $H_h^{(0)}$ та H_{osc} , тому можна замінити оператор $\mathbf{p}^c$ на його власні значення. Отже, можемо розглянути проблему для знаходження власних значень для такого гамільтоніану

$$\tilde{H}_0 = \frac{(p^r)^2}{2\mu} - \frac{e^2}{x^r} + H_{osc}. \quad (8.53)$$

Гамільтоніан, який відповідає за відносний рух, комутує з гамільтоніаном осцилятора

$$\left[\frac{(p^r)^2}{2\mu} - \frac{e^2}{x^r}, H_{osc} \right] = 0. \quad (8.54)$$

Отже, можемо записати власні значення та власні функції для $\tilde{H}_0$

$$E_{n,\{n^a\}}^{(0)} = -\frac{e^2}{2a_B^* n^2} + \hbar\omega \left(n_1^a + n_2^a + n_3^a + \frac{3}{2} \right), \quad (8.55)$$

$$\psi_{n,l,m,\{n^a\}}^{(0)} = \psi_{n,l,m} \psi_{n_1^a, n_2^a, n_3^a}^a, \quad (8.56)$$

тут $\psi_{n,l,m}$ – добре відомі хвильові функції атома водню у звичному просторі, $\psi_{n_1^a, n_2^a, n_3^a}^a$ – власні функції тривимірного гармонічного осцилятора H_{osc} та a_B^* – радіус Бора

$$a_B^* = \frac{\hbar^2}{\mu c^2}. \quad (8.57)$$

У випадку, коли гармонічний осцилятор знаходиться у основному стані, відповідно до теорії збурень можемо записати

$$\begin{aligned} \Delta E_{n,l}^{(1)} &= \langle \psi_{n,l,m,\{0\}}^{(0)} | V | \psi_{n,l,m,\{0\}}^{(0)} \rangle = \\ &= -\frac{\hbar^2 e^2 \langle (\theta^\mu)^2 \rangle}{(a_B^*)^5 n^5} \left(\frac{1}{6l(l+1)(2l+1)} - \right. \\ &\quad \left. -\frac{6n^2 - 2l(l+1)}{3l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)} + \right. \\ &\quad \left. +\frac{5n^2 - 3l(l+1) + 1}{2(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} - \right. \\ &\quad \left. -\frac{5}{6} \frac{5n^2 - 3l(l+1) + 1}{l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} \right). \end{aligned} \quad (8.58)$$

тут $\langle (\theta^\mu)^2 \rangle$ визначається як

$$\langle (\theta^\mu)^2 \rangle = \langle \psi_{0,0,0}^a | \theta_\mu^2 | \psi_{0,0,0}^a \rangle = \frac{3}{2} \left(\frac{\tilde{\gamma} m_P l_P^2}{\hbar \mu} \right)^2. \quad (8.59)$$

У другому порядку теорії збурень маємо

$$\begin{aligned} \Delta E_{n,l,m,\{0\}}^{(2)} &= \\ &= \sum_{n',l',m',\{n^a\}} \frac{\left| \left\langle \psi_{n',l',m',\{n^a\}}^{(0)} | V | \psi_{n,l,m,\{0\}}^{(0)} \right\rangle \right|^2}{E_n^{(0)} - E_{n'}^{(0)} - \hbar \omega (n_1^a + n_2^a + n_3^a)}, \end{aligned} \quad (8.60)$$

тут набір квантових чисел $n', l', m', \{n^a\}$ не співпадає з $n, l, m, \{0\}$. Ми також використали позначення $E_n^{(0)}$ для енергетичних рівнів атома водню у випадку відсутності збурення, зумовленого некомутативністю

$$E_n^{(0)} = -\frac{e^2}{2a_B^* n^2}. \quad (8.61)$$

У випадку, коли $\omega \rightarrow \infty$, маємо

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Delta E_{n,l,m,\{0\}}^{(2)} = 0. \quad (8.62)$$

Отже, поправки до енергетичних рівнів з точністю до другого порядку за параметром некомутативності мають такий вигляд

$$\Delta E_{n,l} = \Delta E_{n,l}^{(1)}. \quad (8.63)$$

Отриманий результат (8.63) є розбіжним для ns та np енергетичних рівнів. Це означає те, що розклад $1/X^r$ у ряд за параметром некомутативності не може бути використаним для обчислення поправок до ns та np енергетичних рівнів. Тому необхідно записати поправки до ns енергетичних рівнів атома водню як

$$\Delta E_{ns} = \left\langle \psi_{n,0,0,\{0\}}^{(0)} \left| \frac{e^2}{x^r} - \frac{e^2}{X^r} \right| \psi_{n,0,0,\{0\}}^{(0)} \right\rangle, \quad (8.64)$$

тут X^r визначається як (8.63). Звернімо увагу, що тут ми не використовуємо розклад в ряд за малим параметром некомутативності. Зауважимо, що $(\boldsymbol{\theta}^\mu \cdot \mathbf{L}^r)$ комутує з $[\boldsymbol{\theta}^\mu \times \mathbf{p}^r]^2$ та $(x^r)^2$.

$$[(\boldsymbol{\theta}^\mu \cdot \mathbf{L}^r), [\boldsymbol{\theta}^\mu \times \mathbf{p}^r]^2] = [(\boldsymbol{\theta}^\mu \cdot \mathbf{L}^r), (x^r)^2] = 0. \quad (8.65)$$

Також важливо, що

$$(\boldsymbol{\theta}^\mu \cdot \mathbf{L}^r) \psi_{n,0,0,\{0\}}^{(0)} = 0. \quad (8.66)$$

Отже, ми можемо переписати поправки (8.64) у такому вигляді

$$\begin{aligned} \Delta E_{ns} &= \\ \left\langle \psi_{n,0,0,\{0\}}^{(0)} \left| \frac{e^2}{x^r} - \frac{e^2}{\sqrt{(x^r)^2 + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\theta}^\mu \times \mathbf{p}^r]^2}} \right| \psi_{n,0,0,\{0\}}^{(0)} \right\rangle &= \\ = \frac{\chi^2 e^2}{a_B} I_{ns}(\chi), & \end{aligned} \quad (8.67)$$

де ми використали позначення

$$\begin{aligned} I_{ns}(\chi) &= \int d\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\tilde{\mathbf{a}}) \int d(\tilde{\mathbf{x}}^r) \tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi \tilde{\mathbf{x}}^r) \left(\frac{1}{\tilde{x}^r} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{(\tilde{x}^r)^2 + [\tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{p}}^r]^2}} \right) \tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi \tilde{\mathbf{x}}^r) \tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\tilde{\mathbf{a}}), \end{aligned} \quad (8.68)$$

тут

$$\chi = \sqrt{\frac{\tilde{\gamma} m_P}{2\mu}} \frac{l_P}{a_B^*}. \quad (8.69)$$

Функції $\tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi \tilde{\mathbf{x}}^r)$ є хвильовими функціями атома водню

$$\tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi \tilde{\mathbf{x}}^r) = \sqrt{\frac{1}{\pi n^5}} e^{-\frac{\chi \tilde{x}^r}{n}} L_{n-1}^1 \left(\frac{2\chi \tilde{x}^r}{n} \right) \quad (8.70)$$

де $L_{n-1}^1 \left(\frac{2\chi \tilde{x}^r}{n} \right)$ – узагальнені поліноми Лагера. Функції

$$\tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\tilde{\mathbf{a}}) = \pi^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{\tilde{a}^2}{2}} \quad (8.71)$$

є хвильовими функціями гармонічного осцилятора

$$\tilde{\mathbf{x}}^r = \sqrt{\frac{2\mu}{\tilde{\gamma} m_P l_P^2}} \mathbf{x}^r. \quad (8.72)$$

Інтеграл (8.68) має скінченне значення у випадку, коли $\chi = 0$. Як наслідок, для $\chi \rightarrow 0$ можемо записати головний член асимптотичного розкладу для ΔE_{ns}

$$\Delta E_{ns} = \frac{\chi^2 e^2}{a_B^*} I_{ns}(0) = \frac{\chi^2 e^2}{a_B^*} \langle I_{ns}(0, \tilde{\mathbf{a}}) \rangle_{\tilde{\mathbf{a}}}, \quad (8.73)$$

тут $\langle \dots \rangle_{\tilde{\mathbf{a}}}$ позначає $\langle \tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\tilde{\mathbf{a}}) | \dots | \tilde{\psi}_{0,0,0}^a(\tilde{\mathbf{a}}) \rangle$. Розгляньмо інтеграл

$$I_{ns}(\chi, \tilde{\mathbf{a}}) = \int d(\tilde{\mathbf{x}}^r) \tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi \tilde{\mathbf{x}}^r) \left(\frac{1}{\tilde{x}^r} - \frac{1}{\sqrt{(\tilde{x}^r)^2 + [\tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{p}}^r]^2}} \right) \tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi \tilde{\mathbf{x}}^r). \quad (8.74)$$

Для $\chi = 0$ маємо

$$I_{ns}(0, \tilde{\mathbf{a}}) \simeq 1.72 \frac{\pi \tilde{a}}{4n^3}, \quad (8.75)$$

тут $\tilde{a} = |\tilde{\mathbf{a}}|$.

Отже, взявши до уваги (8.69), (8.73), (8.75), можемо записати головний член асимптотичного розкладу для поправок до ns енергетичних рівнів за малим параметром некомутативності

$$\Delta E_{ns} \simeq 1.72 \frac{\hbar \langle \theta^\mu \rangle \pi e^2}{8(a_B^*)^3 n^3}, \quad (8.76)$$

де

$$\langle \theta^\mu \rangle = \langle \psi_{0,0,0}^a | \theta^\mu | \psi_{0,0,0}^a \rangle = \frac{2\tilde{\gamma} m_P l_P^2}{\sqrt{\pi} \hbar \mu}. \quad (8.77)$$

Важливо зауважити, що ns енергетичні рівні є дуже чутливі до некомутативності координат. Поправки до цих рівнів є пропорційними до $\langle \theta^\mu \rangle$ (8.76). Для поправок до енергетичних рівнів з $l > 1$ ми отримали, що вони пропорційні до $\langle (\theta^\mu)^2 \rangle$ (8.63).

Список літератури

- [1] *Jackiw, R.* Noncommuting fields and non-Abelian fluids / R. Jackiw // *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)*. — 2004. — Vol. 127. — Pp. 53–62.
- [2] *Polchinski, J.* M theory: Uncertainty and unification / J. Polchinski // *Fundamental Physics — Heisenberg and Beyond*. — 2003. — Pp. 157–166.
- [3] *Jackiw, R.* Observations on noncommuting coordinates and on fields depending on them / R. Jackiw // *Ann. Henri Poincarre*. — 2003. — Vol. 4, no. 2. — Pp. 913–919.
- [4] *Snyder, H. S.* Quantized space-time / H. S. Snyder // *Phys. Rev.* — 1947. — Vol. 71, no. 1. — Pp. 38–41.
- [5] *Doplicher, S.* Spacetime quantization induced by classical gravity / S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts // *Phys. Lett. B*. — 1994. — Vol. 331, no. 1. — Pp. 39–44.
- [6] *Seiberg, N.* String theory and noncommutative geometry / N. Seiberg, E. Witten // *J. High Energy Phys.* — 1999. — Vol. 1999, no. 09. — 92 pp.
- [7] *Dunne, G.* Topological (Chern-Simons) quantum mechanics / G. Dunne, R. Jackiw, L. Trugenberger // *Phys. Rev. D*. — Vol. 41, no. 2. — Pp. 661–666.
- [8] *Duval, C.* The exotic Galilei group and the “Peierls substitution” / C. Duval, P. A. Horváthy // *Phys. Lett. B*. — 2000. — Vol. 479, no. 1-3. — Pp. 284–290.
- [9] *Banerjee, R.* A novel approach to noncommutativity in planar quantum mechanics / R. Banerjee // *Mod. Phys. Lett. A*. — 2002. — Vol. 17, no. 11. — P. 631–645.

- [10] *Frenkel, J.* Coordinate noncommutativity in strong nonuniform magnetic fields / J. Frenkel, S. H. Pereira // *Phys. Rev. D.* — 2004. — Vol. 69. — 3 pp.
- [11] *Gamboa, J.* Noncommutative quantum mechanics / J. Gamboa, M. Loewe, J. C. Rojas // *Phys. Rev. D.* — 2001. — Vol. 64, no. 6. — 3 pp.
- [12] *Gamboa, J.* Noncommutative quantum mechanics: The two-dimensional central field / J. Gamboa, F. Méndez // *Int. J. of Mod. Phys. A.* — 2002. — Vol. 17, no. 19. — Pp. 2555–2565.
- [13] *Nair, V. P.* Quantum mechanics on the noncommutative plane and sphere / V. P. Nair, A. P. Polychronakos // *Phys. Lett. B.* — 2001. — Vol. 505, no. 1-4. — Pp. 267–274.
- [14] *Bolonek, K.* On uncertainty relations in noncommutative quantum mechanics / K. Bolonek, P. Kosiński // *Phys. Lett. B.* — 2002. — Vol. 547, no. 1-2. — Pp. 51–54.
- [15] *Duval, C.* Exotic Galilean symmetry in the non-commutative plane and the Hall effect / C. Duval, P. A. Horvathy // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2001. — Vol. 34, no. 47. — Pp. 10097–10107.
- [16] *Romero, J. M.* Newton's second law in a non-commutative space / J. M. Romero, J. A. Santiago, J. D. Vergara // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2003. — Vol. 310, no. 1. — Pp. 9–12.
- [17] *Kijanka, A.* Noncommutative isotropic harmonic oscillator / A. Kijanka, P. Kosiński // *Phys. Rev. D.* — 2004. — Vol. 70, no. 12. — 3 pp.
- [18] *Demetrian, M.* Quantum mechanics on non-commutative plane / M. Demetrian, D. Kochan // *Acta Physica Slovaca.* — 2002. — Vol. 52, no. 1. — Pp. 1–9.
- [19] *Jing, J.* Non-commutative harmonic oscillator in magnetic field and continuous limit / J. Jing, J.-F. Chen // *Eur. Phys. J. C.* — 2009. — Vol. 60, no. 4. — Pp. 669–674.
- [20] *Hatzinikitas, A.* The noncommutative harmonic oscillator in more than one dimension / A. Hatzinikitas, I. Smyrnakis // *J. Math. Phys.* — 2002. — Vol. 43, no. 1. — Pp. 113–125.

- [21] *Chaichian, M.* Hydrogen atom spectrum and the Lamb shift in noncommutative QED / M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86, no. 13. — Pp. 2716–2719.
- [22] *Ho, P.-M.* Noncommutative quantum mechanics from noncommutative quantum field theory / P.-M. Ho, H.-C. Kao // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 88, no. 15. — 4 pp.
- [23] *Chaichian, M.* Non-commutativity of space-time and the hydrogen atom spectrum / M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu // *Eur. Phys. J. C.* — 2004. — Vol. 36, no. 2. — Pp. 251–252.
- [24] *Chair, N.* The noncommutative quadratic Stark effect for the H-atom / N. Chair, M. A. Dalabeeh // *J. Phys. A.* — 2005. — Vol. 38, no. 7. — Pp. 1553–1558.
- [25] *Stern, A.* Noncommutative point sources / A. Stern // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100, no. 6. — 4 pp.
- [26] *Zaim, S.* Second-order corrections to the non-commutative Klein-Gordon equation with a Coulomb potential / S. Zaim, L. Khodja, Y. Delenda // *Int. J. Mod. Phys. A.* — 2011. — Vol. 26, no. 23. — Pp. 4133–4144.
- [27] Dirac equation in noncommutative space for hydrogen atom / T. C. Adorno, M. C. Baldiotti, M. Chaichian et al. // *Phys. Lett. B.* — 2009. — Vol. 682, no. 2. — Pp. 235–239.
- [28] *Khodja, L.* New treatment of the noncommutative Dirac equation with a Coulomb potential / L. Khodja, S. Zaim // *Int. J. Mod. Phys. A.* — 2012. — Vol. 27, no. 19. — 13 pp.
- [29] *Balachandran, A. P.* On time-space noncommutativity for transition processes and noncommutative symmetries / A. P. Balachandran, A. Pinzul // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2005. — Vol. 20, no. 27. — Pp. 2023–2034.
- [30] *Horvathy, P. A.* The non-commutative Landau problem / P. A. Horvathy // *Ann. Phys.* — 2002. — Vol. 299. — Pp. 128–140.
- [31] *Dayi, O. F.* Wigner functions for the Landau problem in noncommutative spaces / O. F. Dayi, L. T. Kelleyane // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2002. — Vol. 17, no. 29. — Pp. 1937–1944.

- [32] *Li, K.* Heisenberg algebra for noncommutative Landau problem / K. Li, X.-H. Cao, D.-Y. Wang // *Chin. Phys.* — 2006. — Vol. 15, no. 10. — Pp. 2236–2239.
- [33] *Dulat, S.* Landau problem in noncommutative quantum mechanics / S. Dulat, K. Li // *Chin. Phys. C.* — 2008. — Vol. 32, no. 2. — Pp. 92–95.
- [34] *Balachandran, A. P.* Landau energy levels for twisted N-enlarged Newton-Hooke space-time / A. P. Balachandran, A. Pinzul // *Acta Phys. Polon. B.* — 2013. — Vol. 44. — Pp. 59–68.
- [35] Quantum fields on noncommutative spacetimes: theory and phenomenology / A. P. Balachandran, A. Ibort, G. Marmo, M. Martone // *SIGMA*. — 2010. — Vol. 6. — 22 pp.
- [36] Covariant quantum fields on noncommutative spacetimes / A. P. Balachandran, A. Ibort, G. Marmo, M. Martone // *JHEP*. — 2011. — Vol. 1103. — 17 pp.
- [37] *Gnatenko, K. P.* Minimal length, area, and volume in a space with noncommutativity of coordinates / K. P. Gnatenko // *J. Phys. Stud.* — 2016. — Vol. 20, no. 1/2. — 5 pp.
- [38] *Romero, J. M.* Note about the quantum of area in a noncommutative space / J. M. Romero, J. A. Santiago, J. D. Vergara // *Phys. Rev. D.* — 2003. — Vol. 68. — 2 pp.
- [39] *Romero, J. M.* The Kepler problem and noncommutativity / J. M. Romero, J. D. Vergara // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2003. — Vol. 18, no. 24. — Pp. 1673–1680.
- [40] *Mirza, B.* Noncommutative geometry and classical orbits of particles in a central force potential / B. Mirza, M. Dehghani // *Commun. Theor. Phys.* — 2004. — Vol. 42, no. 2. — Pp. 183–184.
- [41] *Djemai, A. E. F.* Noncommutative classical mechanics / A. E. F. Djemai // *Int. J. Theor. Phys.* — 2004. — Vol. 43, no. 2. — Pp. 299–314.
- [42] *Gnatenko, K. P.* Composite system in noncommutative space and the equivalence principle / K. P. Gnatenko // *Phys. Lett. A.* — 2013. — Vol. 377, no. 43. — Pp. 3061–3066.

- [43] *Saha, A.* Colella-Overhauser-Werner test of the weak equivalence principle: A low-energy window to look into the noncommutative structure of space-time? / A. Saha // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Vol. 89, no. 2. — 5 pp.
- [44] *Gnatenko, K. P.* Estimating the upper bound of the parameter of noncommutativity on the basis of the equivalence principle / K. P. Gnatenko // *J. Phys. Stud.* — 2013. — Vol. 17. — 5 pp.
- [45] *Williams, J. G.* Lunar laser ranging tests of the equivalence principle / J. G. Williams, S. G. Turyshev, D. H. Boggs // *Class. Quantum Grav.* — 2012. — Vol. 29. — 11 pp.
- [46] *Castello-Branco, K. H. C.* Free-fall in a uniform gravitational field in noncommutative quantum mechanics / K. H. C. Castello-Branco, A. G. Martins // *Europhys. Lett.* — 2010. — Vol. 51, no. 10. — 25 pp.
- [47] *Tkachuk, V. M.* Deformed Heisenberg algebra with minimal length and the equivalence principle / V. M. Tkachuk // *Phys. Rev. A.* — 2012. — Vol. 86, no. 6. — 4 pp.
- [48] *Gnatenko, K. P.* Weak equivalence principle in noncommutative phase space and the parameters of noncommutativity / K. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // *Phys. Lett. A.* — 2017. — Vol. 381, no. 31. — P. 2463–2469.
- [49] *Djemai, A. E. F.* On quantum mechanics on noncommutative quantum phase space / A. E. F. Djemai, H. Smail // *Commun. Theor. Phys.* — 2004. — Vol. 41, no. 6. — Pp. 837–844.
- [50] *Li, K.* Hydrogen atom spectrum in noncommutative phase space / K. Li, N. Chamoun // *Chin. Phys. Lett.* — 2006. — Vol. 23, no. 5. — Pp. 1122–1123.
- [51] *Alavi, S. A.* Lamb shift and Stark effect in simultaneous space-space and momentum-momentum noncommutative quantum mechanics and θ -deformed $su(2)$ algebra / S. A. Alavi // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2007. — Vol. 22, no. 5. — Pp. 377–383.
- [52] *Bertolami, O.* Phase-space noncommutativity and the Dirac equation / O. Bertolami, R. Queiroz // *Phys. Lett. A.* — 2011. — Vol. 375, no. 2011. — Pp. 4116–4119.

- [53] *Smailagic, A.* Feynman path integral on the non-commutative plane / A. Smailagic, E. Spallucci // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2003. — Vol. 36. — Pp. L467—L471.
- [54] *Giri, P. R.* The non-commutative oscillator, symmetry and the Landau problem / P. R. Giri, P. Roy // *Eur. Phys. J. C.* — 2008. — Vol. 57, no. 4. — Pp. 835–839.
- [55] *Geloun, J.* Harmonic oscillator in a background magnetic field in noncommutative quantum phase-space / J. Geloun, S. Gangopadhyay, F. G. Scholtz // *EPL.* — 2009. — Vol. 86. — 4 pp.
- [56] Noncommutative gravitational quantum well / O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. Aragao et al. // *Phys. Rev. D.* — 2005. — Vol. 72, no. 2. — 9 pp.
- [57] Entropic gravity, phase-space noncommutativity and the equivalence principle / C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, J. N. Prata // *Class. Quantum Grav.* — 2011. — Vol. 28. — 8 pp.
- [58] Entropic gravity, phase-space noncommutativity and the equivalence principle / C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, J. N. Prata // *Class. Quant. Grav.* — 2011. — Vol. 28. — 8 pp.
- [59] *Bertolami, O.* Aspects of phase-space noncommutative quantum mechanics / O. Bertolami, P. Leal // *Phys. Lett. A.* — 2015. — Vol. 750. — Pp. 6–11.
- [60] *Balachandran, A. P.* Non-Pauli effects from noncommutative spacetimes / A. P. Balachandran, P. Padmanabhan // *J. High Energy Phys.* — 2010. — Vol. 2010, no. 12. — 16 pp.
- [61] *Moreno, E. F.* Spherically symmetric monopoles in noncommutative space / E. F. Moreno // *Int. J. Mod. Phys. A.* — 2005. — Vol. 72, no. 4. — 9 pp.
- [62] *Kupriyanov, V. G.* A hydrogen atom on curved noncommutative space / V. G. Kupriyanov // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2013. — Vol. 46, no. 24. — 7 pp.
- [63] *Amorim, R.* Tensor operators in noncommutative quantum mechanics / R. Amorim // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101, no. 8. — 4 pp.

- [64] *Galikova, V.* Hydrogen atom in fuzzy spaces - exact solution / V. Galikova, P. Presnajder // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2012. — Vol. 343. — 9 pp.
- [65] *Galikova, V.* Coulomb problem in non-commutative quantum mechanics / V. Galikova, P. Presnajder // *J. Math. Phys.* — 2013. — Vol. 54. — 20 pp.
- [66] *Kovacic, S.* The velocity operator in quantum mechanics in noncommutative space / S. Kovacic, P. Presnajder // *J. Math. Phys.* — 2013. — Vol. 54. — 12 pp.
- [67] *Hammou, A. B.* Coherent state induced star product on R_λ^3 and the fuzzy sphere / A. B. Hammou, M. Lagraa, M. M. Sheikh-Jabbari // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Vol. 66, no. 2. — 11 pp.
- [68] *Amorim, R.* Tensor coordinates in noncommutative mechanics / R. Amorim // *J. Math. Phys.* — 2009. — Vol. 50. — 7 pp.
- [69] *Gnatenko, K. P.* Hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space / K. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // *Phys. Lett. A.* — 2014. — Vol. 378, no. 47. — Pp. 3509–3515.
- [70] *Daszkiewicz, M. C.* Classical mechanics of many particles defined on canonically deformed nonrelativistic space-time / M. C. Daszkiewicz, J. Walczyk // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2011. — Vol. 26, no. 11. — Pp. 819–832.
- [71] Noncommutative gravitational quantum well / O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. Aragão et al. // *Phys. Rev. D.* — 2005. — Vol. 72, no. 2. — 9 pp.
- [72] *Gnatenko, K. P.* Effect of coordinate noncommutativity on the mass of a particle in a uniform field and the equivalence principle / K. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2016. — Vol. 31, no. 5. — 9 pp.
- [73] *Gnatenko, K. P.* Physical systems in a space with noncommutativity of coordinates / K. P. Gnatenko // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2016. — Vol. 670. — 9 pp.
- [74] *Gnatenko, K. P.* Perturbation of the ns levels of the hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space / K. P. Gnatenko, Y. S. Krynytskyi, V. M. Tkachuk // *Mod. Phys. Lett. A.* — 2015. — Vol. 30, no. 08. — 12 pp.

- [75] *Qiang, W.-C.* An alternative approach to calculating the mean values r^k for hydrogen-like atoms / W.-C. Qiang, S.-H. Dong // *Phys. Scripta*. — 2004. — Vol. 70, no. 5. — Pp. 276–279.
- [76] *Yáñez, R. J.* Position and momentum information entropies of the D -dimensional harmonic oscillator and hydrogen atom / R. J. Yáñez, W. V. Assche, J. S. Dehesa // *Phys. Rev. A*. — 1994. — Vol. 50, no. 4. — Pp. 3065–3079.
- [77] Precision measurement of the hydrogen $1s$ - $2s$ frequency via a 920-km fiber link / A. Matveev, C. G. Parthey, K. Predehl et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 110, no. 23. — 5 pp.
- [78] *Gnatenko, K. P.* Two-particle system in noncommutative space with preserved rotational symmetry / K. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // *Ukr. J. Phys.* — 2016. — Vol. 61, no. 5. — Pp. 432–439.

Монографія

ГНАТЕНКО Христина Павлівна

Фізичні проблеми у некомутативному просторі

Монографія

Редактор	Христина Гнатенко
Комп'ютерна верстка	Христина Гнатенко
Технічний редактор	Світлана Сеник

Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$ Умовн. друк. арк. 8.0
Наклад 200 прим. Зам. .

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів
видавничої продукції
Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів
видавничої продукції
Серія ДК № 498 від 20.06.2001 р.

Г 56 **Гнатенко Х. П.** Фізичні проблеми у некомутативному просторі. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2017. — 128 с.

У монографії розглядається квантований простір, реалізований за допомогою некомутативності координат. Аналізується вплив некомутативності на властивості фізичних систем. Також висвітлюються проблеми у некомутативному просторі, серед них: проблема порушення принципу еквівалентності, проблема порушення сферичної симетрії, проблема опису системи багатьох частинок, порушення властивостей кінетичної енергії. Вивчаються шляхи для вирішення вищезазначених проблем. Представлені у монографії результати є важливими для подальших досліджень особливостей простору на планківських масштабах.

Для студентів, аспірантів фізико-математичних спеціальностей, викладачів та науковців.

ISBN 978-617-10-0390-3

УДК 530.145
ББК В 318