Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

О.І. Григорчак, М.І. Самар

ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО І ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ В ЗАДАЧАХ І ПРИКЛАДАХ

Методичні вказівки

Львів
2023

УДК [514.742.4+514.743.4](075.8)
Г 83

Рекомендувала до друку кафедра теоретичної фізики імені професора Івана Вакарчука, протокол № 6 від 10.04.2023

Григорчак О. І., Самар М. І.

Г 83 Основи векторного і тензорного аналізу у задачах і прикладах : методичні вказівки / О. І. Григорчак., М. І. Самар. — Львів : Львівський національний університет імені Івана Франка, 2023. — 72 с.

Методичні вказівки з курсу "Основи векторного і тензорного аналізу" складаються з семи розділів та списку літератури. Кожен розділ містить теоретичний матеріал, приклади розв'язування вибраних задач з відповідної теми, які супроводжуються детальним поясненням методики та підходів до вирішення типових задач, а також завдання для самостійного опрацювання.

Для студентів та аспірантів фізико-математичних спеціальностей університетів.

УДК [514.742.4+514.743.4](075.8)

Зміст

Перелік позначень

$\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ — орти тривимірної декартової системи координат;

$\mathbf{r}$ — радіус-вектор (вектор, проведений з початку координат);

$r = |\mathbf{r}|$ — модуль радіус-вектора;

$x,\ y,\ z$ — координати точки у тривимірній декартовій системі координат;

$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_i, \ldots, \mathbf{e}_n$ — масштабні вектори n-вимірної косокутної системи координат;

$\mathbf{e}^1,\ \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^i, \ldots, \mathbf{e}^n$ — дуальні вектори n-вимірної косокутної системи координат;

$x^1,\ x^2, \ldots, x^i, \ldots, x^n$ — узагальнені складові радіус-вектора у n-вимірній косокутній системі координат;

$x_1,\ x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ — узагальнені проекції радіус-вектора у n-вимірній косокутній системі координат;

$\mathbf{n}$ — одиничний вектор нормалі до елемента площі;

$\boldsymbol{\tau}$ — одиничний вектор, дотичний до елемента довжини;

δ_i^k — дельта-символ Кронекера, який рівний 1, коли $i = j$ і нулю, коли $i \neq j$;

g_{ij} — коваріантні складові метричного тензора;

g^{ij} — контраваріантні складові метричного тензора;

$\xi^1,\ \xi^2, \ldots, \xi^i, \ldots, \xi^n$ — сукупність координат, які задають положення точки у n-вимірній криволінійній системі координат;

Розділ 1

Основи векторної алгебри

Скаляр — математичний об'єкт, який характеризується одним числом. При зміні системи координат скаляр залишається незмінним.

Вектор — математичний об'єкт, для характеристики якого потрібно принаймні два поняття, а саме: довжина і напрям.

Якщо в просторі задана система координат, то вектор однозначно задається набором своїх координат. Тому часто упорядкований набір чисел теж називають вектором. Для векторів є означені правила додавання векторів і множення на число, що підкоряються аксіомам лінійного векторного простору.

Два вектори **рівні** тоді і тільки тоді, коли вони мають однакову довжину і однакові напрямки.

Вектори $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ називаються **лінійно незалежними**, якщо рівність $\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + ...\alpha_n\mathbf{e_n} = 0$ можлива лише при одному наборі значень α_i: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. В протилежному випадку вектори є лінійно залежними.

Набір будь-яких n лінійно незалежних векторів називається **векторним базисом** n-вимірного простору, причому будь-який вектор $\mathbf{a}$ може бути в єдиний спосіб представлений у вигляді лінійної комбінації цих векторів:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + ...\alpha_N\mathbf{e_n}.$$

Два лінійно залежних вектори називаються **колінеарними**. Колінеарні вектори лежать на паралельних прямих. Три лініїно залежних вектори називаються **компланарними**. Компланарні вектори лежать в одній площині.

Трійка векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ називається **правою**, якщо напрям вектора $\mathbf{c}$ такий, що з його кінця найменший кут повороту від $\mathbf{a}$ до $\mathbf{b}$ видно проти годинникової стрілки. В іншому разі трійка векторів називається **лівою**.

Операції з векторами

1) Добутком вектора $\mathbf{a}$ на скаляр λ називається вектор, довжина якого в λ разів більша, ніж у вектора $\mathbf{a}$, а напрям збігається з напрямом вектора $\mathbf{a}$, якщо $\lambda > 0$ і є протилежним до напряму вектора $\mathbf{a}$, якщо $\lambda < 0$.

2) Сумою двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ є вектор, який збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ і має з цими векторами спільний початок. Вектор, який збігається з іншою діагоналлю паралелограма і напрямлений від кінця другого вектора до кінця першого, є різницею векторів.

3) Скалярний добуток двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ab\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}).$$

4) Векторний добуток в декартовій системі координат

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Модуль векторного добутку двох векторів чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах.

5) Змішаний добуток трьох векторів у декартовій системі координат:

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Модуль мішаного добутку трьох векторів чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

6) Подвійний векторний добуток:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})\,.$$

Вектори, які при інверсії системи координат не змінюють напрямку, називаються **полярними**, а ті, які змінюють напрям на протилежний — **аксіальними**.

Величина, аналогічна скаляру, але з тією відмінністю, що при перетворенні інверсії змінює свій знак на протилежний, називається **псевдоскаляром**. Скалярний добуток полярного і аксіального вектора є псевдоскаляром.

Якщо вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ є функцією скалярного аргументу t, то він називається **вектор-функцією скалярного аргументу**, а геометричне місце точок кінця цього вектора називається **годографом**.

Похідна від вектор-функції $\mathbf{a}(t)$ по скалярному аргументу t:

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \frac{da_x(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_y(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_z(t)}{dt}\mathbf{k}.$$

Інтеграл від вектор-функції $\mathbf{a}(t)$ за скалярним аргументом t:

$$\int \mathbf{a}(t)dt = \mathbf{i}\int a_x(t)dt + \mathbf{j}\int a_y(t)dt + \mathbf{k}\int a_z(t)dt.$$

▼ **Приклад 1.1.** Вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ лінійно незалежні. Знайти значення параметра λ, при якому вектори $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$, $\mathbf{y} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$, $\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ компланарні.

Розв'язування.

Вектори $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ та $\mathbf{z}$ компланарні тоді і лише тоді, коли ці вектор є лінійно залежними, тобто виконується рівність:

$$\mathbf{z} = k_1\mathbf{x} + k_2\mathbf{y}$$

або

$$(k_1 + k_2 - 1)\mathbf{a} + (k_1 + 2k_2 - 1)\mathbf{b} + (\lambda k_1 + \lambda k_2 - 1)\mathbf{c} = 0.$$

Оскільки вектори **a**, **b**, **c** лінійно незалежні, то отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 - 1 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - 1 = 0 \\ \lambda k_1 + \lambda k_2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши її, знаходимо:

$$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}.$$

Отже, при $\lambda = 1$ вектори **x**, **y** та **z** будуть компланарними.

▼ **Приклад 1.2.** Задано трикутник ABC. Знайти довжину відрізка AD, якщо точка D поділяє напрямлений відрізок BC у відношенні $2 : 3$, а координати точок вершин трикутника такі: $A(5, -5, 8)$, $B(0, -7, 10)$, $C(5, -2, -5)$.

Розв'язування.

Знайдемо координати точки D. Для цього, для початку, знайдемо кординати вектора **BC** як різницю координат точок B і C:

$$\mathbf{BC} = \big(5, -2, -5\big) - \big(0, -7, 10\big) = \big(5, 5, -15\big).$$

Оскільки точка D поділяє напрямлений відрізок BC у відношенні $2 : 3$, то вектор **BD** рівний:

$$\mathbf{BD} = \frac{2}{5}\mathbf{BC} = (2, 2, -6).$$

Тоді, координати точки D дорівнюватимуть сумі координат точки B та вектора **BD**:

$$D = (0, -7, 10) + (2, 2, -6) = (2, -5, 4).$$

Відстані між двома точками $A(x_1, y_1, z_1)$ та $D(x_2, y_2, z_2)$ знаходять за формулою:

$$AD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Підставляючи відповідні значення, отримаємо:

$$AD = \sqrt{(2-5)^2 + (-5-(-5))^2 + (4-8)^2} = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Отже, довжина відрізка AD дорівнює 5.

▼ **Приклад 1.3.** Нехай задано вектори в ортонормованому базисі $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$: $\mathbf{a} = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i}_1 + 5\mathbf{i}_2$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$. Вектори $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ утворюють праву трійку.

a) Визначити праву чи ліву трійку утворюють вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

b) Знайти об'єм паралелепіпеда, який побудований на цих векторах.

c) Розрахувати площу діагонального перерізу паралелепіпеда, проведеного через вектор $\mathbf{a}$.

Розв'язування.

a) Відповідь на це питання легко дати за допомогою змішаного добутку $(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])$. Якщо змішаний добуток буде додатнім, то трійка буде правою, якщо від'ємним — то лівою. У нашому випадку змішаний добуток є від'ємним:

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-7) = -24,$$

тому вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ утворюють ліву трійку.

Якщо б базисні вектори утворюювали ліву трійку, трійка векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ була б правою.

b) Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ рівний модулю змішаного добутку цих векторів:

$$V = |(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])| = 24.$$

c) Діагональним перерізом паралелепіпеда проведеного через вектор $\mathbf{a}$ буде паралелограм, побудований на векторах $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b} + \mathbf{c}$. Площу паралелограма знайдемо як модуль векторного добутку векторів, на яких він побудований:

$$S = |[\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}])| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{matrix} \right\| = |-19\mathbf{i}_1 + 20\mathbf{i}_2 - 7\mathbf{i}_3| = 9\sqrt{10}.$$

▼ **Приклад 1.4.** Довести: $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{d}])\, \mathbf{c} - (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])\, \mathbf{d}$.

Розв'язування.

Скористаємося тотожністю Лагранжа для подвійного векторного добутку (*більш відомою як формула "бац мінус цаб"*), приймаючи $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ за перший вектор, а $\mathbf{c}$ та $\mathbf{d}$ — за два інших:

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = (\mathbf{d}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}])\, \mathbf{c} - (\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}])\, \mathbf{d}.$$

Оскільки циклічна перестановка векторів в мішаному добутку не змінює його значення, то

$$(\mathbf{d}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{d}])\,,$$

$$(\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])\,.$$

Після підстановки отримуємо шукану тотожність:

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = (\mathbf{d}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}])\, \mathbf{c} - (\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}])\, \mathbf{d}.$$

▼ **Приклад 1.5.** Знайти похідну та інтеграл від вектор-функції скалярного аргументу: $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, t)$.

Розв'язування.

Похідна вектор-функції $\mathbf{r}(t)$ по скалярному аргументу t обчислюється шляхом окремого диференціювання кожної компоненти функції:

$$\mathbf{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, 1)\,.$$

Щоб знайти інтеграл від вектор-функції $\mathbf{r}(t)$, спочатку запишемо окремі інтеграли від кожної компоненти:

$$\int r_x(t)dt = \int a\cos t dt = a\sin t + C_1,$$
$$\int r_y(t)dt = \int a\sin t dt = -a\cos t + C_2,$$
$$\int r_z(t)dt = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C_3.$$

Тут C_1, C_2 та C_3 — сталі інтегрування.

Таким чином, інтеграл від вектор-функції $\mathbf{r}(t)$ має вигляд:

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left(a\sin t, -a\cos t, \frac{1}{2}t^2\right) + \mathbf{C},$$

де $\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3)$ — вектор сталих інтегрування.

▼ **Приклад 1.6.** Знайти відстань від центра мас точок, розташованих у вершинах квадрата зі стороною a і масами $1, 2, 3, 4$ грами, до центра квадрата.

Розв'язування.

Виберемо систему координат з початком у центрі квадрата і осями, паралельними сторонам квадрата. Вершини квадрата матимуть координати:

$$A\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right),\quad B\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right),\quad C\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right),\quad D\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right).$$

Координати (X, Y) центра мас системи точкових частинок можуть бути знайдені за наступними формулами:

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},\ Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

де n - кількість частинок, m_i — маса i-ї частинки, x_i, y_i — її координати. Підставляючи значення для точок A, B, C та D, отримаємо:

$$X = \frac{1\left(-\frac{a}{2}\right) + 2\left(-\frac{a}{2}\right) + 3\left(\frac{a}{2}\right) + 4\left(\frac{a}{2}\right)}{1+2+3+4} = \frac{a}{5},$$

$$Y = \frac{1\left(-\frac{a}{2}\right) + 2\left(\frac{a}{2}\right) + 3\left(\frac{a}{2}\right) + 4\left(-\frac{a}{2}\right)}{1+2+3+4} = 0.$$

Звідси легко бачити, що відстань від центра мас точок до центра квадрата, тобто до початку координат, рівна $a/5$.

Задачі для самостійної роботи

1.1. Нехай вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ лінійно незалежні. Визначити, при якому значенні параметра λ наступні пари векторів колінеарні: $2\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$, $-\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

1.2. З векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ вибрати трійки векторів, що утворюють базис у тривимірному просторі: $\mathbf{a} = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}_3$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$, $\mathbf{d} = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$, де $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — орти прямокутної декартової системи координат.

1.3. Нехай $a = 3$, $b = 4$ і $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \pi/3$. Знайти, при якому значенні параметра α вектори $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ і $\mathbf{q} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ є

а) перпендикулярні;

б) паралельні;

в) утворюють кут $\frac{\pi}{4}$.

1.4. Перевірити, чи трикутник з вершинами $A(5,-4)$, $B(3,2)$, $C(2,-3)$ є прямокутним.

1.5. Задано вектори, які задовольняють умові: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$. Довести, що $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = [\mathbf{b},\mathbf{c}] = [\mathbf{c},\mathbf{a}]$.

1.6. При якому значенні α вектори $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$, $\quad \mathbf{q} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ будуть колінеарними, якщо вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ не є колінеарні.

1.7. Обчислити площу паралелограма, діагоналями якого є вектори $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $3\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2$, якщо $\mathbf{e}_1 = 1, \mathbf{e}_2 = 2$, а кут між векторами $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$ рівний $\frac{\pi}{3}$.

1.8. Знайти одиничний вектор, перпендикулярний до векторів $\mathbf{a} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, де $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орти прямокутної декартової системи координат.

1.9. Обчислити найбільшу висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, де $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орти прямокутної декартової системи координат.

1.10. Знайти відстань від центра мас точок, розташованих у вершинах куба з ребром a і масами $1, 2, 3, 4$ грами (нижня основа) та $5, 6, 7, 8$ грамів (верхня основа), до центра куба.

1.11. Довести тотожність Лагранжа:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

1.12. Довести тотожність Якобі:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = 0.$$

1.13. Довести: $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}, \mathbf{d})(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

1.14. Нехай **a** та **b** сторони ромба. Довести, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

1.15. Довести, що скалярний добуток аксіального і скалярного векторів є псевдоскаляром.

1.16. Знайти похідну та інтеграл від вектор-функції скалярного аргументу:

$$\begin{aligned} &a) \quad \mathbf{r}(t) = \left(2t^2, -5t, \cos t\right), \\ &b) \quad \mathbf{r}(t) = \left(e^t, 1, \frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

Розділ 2

Скалярне поле. Градієнт

Скалярне поле — це скалярна функція просторових координат, яка кожній точці простору ставить у відповідність певне числове значення. У фізиці за допомогою скалярних полів описують просторові значення фізичних величин, які не залежать від орієнтації системи координат, наприклад температури, тиску, вологості, електричного потенціалу тощо. Характеристикою скалярного поля є поверхні рівня.

Поверхнею рівня $\phi(\mathbf{r}) = C$, де C — константа, називають геометричне місце точок, де скалярна функція поля має одне й те саме значення. У випадку тривимірного простору поверхня рівня задається рівнянням $\phi(x, y, z) = C$. На площині замість поверхонь рівня будемо мати **лінії рівня**. Поверхі (лінії) рівня, які утворюють відповідну сім'ю при різних значеннях константи C, не перетинаються між собою. Взаємне розміщення поверхонь рівня у просторі дає наочне уявлення про це скалярне поле. У випадку електростатичного потенціалу поверхні рівня називають еквіпотенціальними поверхнями. Переміщення заряду (зі сталою швидкістю) по таких поверхнях відбувається без виконання роботи.

Похідна від скалярного поля за напрямом одиничного вектора $\mathbf{s}$ характеризує швидкість його зміни в даній точці за вказаним напрямом:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = (\mathbf{s}, \operatorname{grad} \phi) \, ,$$

де

$$\operatorname{grad}\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

Градієнт — це вектор, який вказує напрям найшвидшої зміни функції скалярного поля у даній точці і за абсолютною величиною дорівнює похідній функції скалярного поля за напрямком найшвидшого її зростання.

Часто замість символа grad використовують символ $\boldsymbol{\nabla}$. Тоді $\operatorname{grad}\phi$ і $\boldsymbol{\nabla}\phi$ — це еквівалентні вирази. “Набла” $\boldsymbol{\nabla}$ є лінійним диференціальним оператором першого порядку і зображається так:

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Властивості оператора оператора “набла”:

1. $\boldsymbol{\nabla}(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) = c_1\boldsymbol{\nabla}\phi_1 + c_2\boldsymbol{\nabla}\phi_2$.
2. $\boldsymbol{\nabla}(\phi_1\phi_2) = \phi_2\boldsymbol{\nabla}\phi_1 + \phi_1\boldsymbol{\nabla}\phi_2$.
3. $\boldsymbol{\nabla}\phi_2(\phi_1) = \phi_2'(\phi_1)\boldsymbol{\nabla}\phi_1$.

▼ **Приклад 2.1.** Задано скалярне поле $\phi(x, y, z) = x^2+3y^2-2z^2$ й точки $A(2; 1; 2)$ та $B(1; 0; 1)$. Знайти:

а) поверхні рівня, що проходять через точки A і B;

б) похідну скалярного поля у точці A за напрямом вектора, який з’єднує точки A і B;

в) напрям та швидкість найшвидшого зростання скалярного поля у цих точках.

Розв’язування.

а) Для знаходження поверхні рівня, яка проходить через точки A і B, знайдемо значення скалярного поля у цих точках:

$$\phi(2, 1, 2) = 2^2 + 3\cdot 1^2 - 2\cdot 2^2 = -1,$$

$$\phi(1, 0, 1) = 1^2 + 3\cdot 0^2 - 2\cdot 1^2 = -1.$$

Оскільки скалярне поле приймає в точках A та B одне і те ж значення, то існує поверхня рівня, яка проходить через обидві точки. Рівняння цієї поверхі: $x^2 + 3y^2 - 2z^2 = -1$.

б) Знайдемо спочатку вектор, який з'єднує точки A і B:

$$\mathbf{AB} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Пронормуємо вектор $\mathbf{AB}$, щоб отримати вектор одиничної довжини у цьому напрямку:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|} = \frac{-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Знаходимо градієнт скалярного поля ϕ:

$$\boldsymbol{\nabla}\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} = 2x\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} - 4z\mathbf{k},$$

та обчислюємо його значення в точці A:

$$\boldsymbol{\nabla}\phi\Big|_A = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 8\mathbf{k}.$$

Тепер можемо обчислити похідну скалярного поля ϕ у точці A за напрямом вектора $\mathbf{s}$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{s}}\Big|_A = \left(\boldsymbol{\nabla}\phi\Big|_A, \mathbf{s}\right) = 4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 6\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 8\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

в) Оскільки градієнт функції спрямований в сторону найбільшого зростання функції в заданій точці, то напрями найбільшого зростання скалярного поля ϕ в точках A та B відповідно рівні:

$$\boldsymbol{\nabla}\phi\Big|_A = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 8\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\nabla}\phi\Big|_B = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{k}.$$

Швидкість найшвидшого зростання функції у точках A та B рівна модулю градієнта у відповідних точках:

$$|\boldsymbol{\nabla}\phi|\Big|_A = \sqrt{4^2+6^2+(-8)^2} = 2\sqrt{29},$$

$$|\boldsymbol{\nabla}\phi|\Big|_B = \sqrt{2^2+(-4)^2} = 2\sqrt{5}.$$

▼ **Приклад 2.2.**

Користуючись означенням градієнта, обчислити:

a) $\boldsymbol{\nabla} r^n$;

b) $\boldsymbol{\nabla} \exp[(\mathbf{q}, \mathbf{r})]$;

c) $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\nabla})\, r^5$.

Розв'язування.

a) Знайдемо градієнт довільної функції $f(r)$:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Часткові похідні від функції $f(r)$ по змінних x, y та z обчислюємо за правилом диференціювання для складених функцій:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{df}{dr}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{df}{dr}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}\frac{df}{dr}.$$

Тут використано, що $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Після підстановки отримаємо:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{df}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

де $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ — радіус-вектор.

У нашому випадку $f(r) = r^n$, тому:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = nr^{n-1}.$$

Отже, градієнт r^n можна записати як

$$\boldsymbol{\nabla} r^n = nr^{n-2}\mathbf{r}.$$

b) Оскільки за означенням скалярного добутку $(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = q_x x + q_y y + q_z z$, то часткові похідні від $f = \exp[(\mathbf{q}, \mathbf{r})]$ матимуть вигляд:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = q_x \exp(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = q_y \exp(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = q_z \exp(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}).$$

Тому градієнт $\exp[(\mathbf{q}, \mathbf{r})]$ можна записати як:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \exp[(\mathbf{q}, \mathbf{r})] &= q_x \exp(\mathbf{q}, \mathbf{r})\mathbf{i} + q_y \exp(\mathbf{q}, \mathbf{r})\mathbf{j} + q_z \exp(\mathbf{q}, \mathbf{r})\mathbf{k} \\ &= \mathbf{q} \exp[(\mathbf{q}, \mathbf{r})]. \end{aligned}$$

c) Оскільки r^5 є скалярною функцією, то її можна внести в скалярний добуток:

$$(\mathbf{a}, \boldsymbol{\nabla})\, r^5 = \left(\mathbf{a}, \boldsymbol{\nabla} r^5\right).$$

Обчислимо $\boldsymbol{\nabla} r^5$ за правилом, отриманим в **Прикладі 2.2 a)** з використанням означення градієнта:

$$\boldsymbol{\nabla} r^n = n r^{n-2} \mathbf{r}.$$

Як результат отримаємо:

$$\boldsymbol{\nabla} r^5 = 5 r^3 \mathbf{r}.$$

Звідси остаточно:

$$(\mathbf{a}, \boldsymbol{\nabla})\, r^5 = 5 r^3 (\mathbf{a}, \mathbf{r}).$$

▼ **Приклад 2.3.** Обчислити:

a) $\boldsymbol{\nabla} \dfrac{(\mathbf{b}, \mathbf{r})^2}{(\mathbf{c}, \mathbf{r})}$;

b) $\boldsymbol{\nabla} ([\mathbf{a}, \mathbf{r}], [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{r}]])$.

Розв'язування.

a) При обчисленні градієнта від складних функцій зручно користуватися властивостями оператора “набла”, які є узагальненням відповідних властивостей диференціювання. Скористаємося властивістю градієнта від добутку функцій:

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{(\mathbf{b},\mathbf{r})^2}{(\mathbf{c},\mathbf{r})} = (\mathbf{c},\mathbf{r})^{-1}\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{b},\mathbf{r})^2 + (\mathbf{b},\mathbf{r})^2\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{c},\mathbf{r})^{-1}.$$

Отримані градієнти обчислимо за формулою для градієнта від складеної функції:

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{b},\mathbf{r})^2 = 2(\mathbf{b},\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{b},\mathbf{r}) = 2(\mathbf{b},\mathbf{r})\mathbf{b},$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{c},\mathbf{r})^{-1} = -(\mathbf{c},\mathbf{r})^{-2}\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{c},\mathbf{r}) = -(\mathbf{c},\mathbf{r})^{-2}\mathbf{c}.$$

Тут ми скористалися тотожністю, яку легко отримати, користуючись означенням градієнта:

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{a},\mathbf{r}) = \mathbf{a},$$

де $\mathbf{a}$ — довільний сталий вектор. Остаточно:

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{(\mathbf{b},\mathbf{r})^2}{(\mathbf{c},\mathbf{r})} = \frac{(\mathbf{b},\mathbf{r})}{(\mathbf{c},\mathbf{r})^2}(2(\mathbf{c},\mathbf{r})\mathbf{b} - (\mathbf{b},\mathbf{r})\mathbf{c}).$$

b) Перетворимо скалярне поле, розклавши подвійний векторний добуток за формулою “бац мінус цаб”:

$$([\mathbf{a},\mathbf{r}],[\mathbf{b},[\mathbf{c},\mathbf{r}]]) = (\mathbf{b},\mathbf{r})(\mathbf{c},[\mathbf{a},\mathbf{r}]) - (\mathbf{b},\mathbf{c})(\mathbf{r},[\mathbf{a},\mathbf{r}]).$$

Здійснивши циклічну перестановку векторів, мішані добутки можна записати як

$$(\mathbf{c},[\mathbf{a},\mathbf{r}]) = (\mathbf{r},[\mathbf{c},\mathbf{a}]), \qquad (\mathbf{r},[\mathbf{a},\mathbf{r}]) = (\mathbf{a},[\mathbf{r},\mathbf{r}]) = 0.$$

Таким чином

$$([\mathbf{a},\mathbf{r}],[\mathbf{b},[\mathbf{c},\mathbf{r}]]) = (\mathbf{b},\mathbf{r})(\mathbf{r},[\mathbf{c},\mathbf{a}]).$$

Для знаходження градієнта скористаємося властивістю градієнта від добутку функцій. Отримаємо:

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{b},\mathbf{r})(\mathbf{r},[\mathbf{c},\mathbf{a}]) = (\mathbf{r},[\mathbf{c},\mathbf{a}])\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{b},\mathbf{r}) + (\mathbf{b},\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{r},[\mathbf{c},\mathbf{a}]).$$

Оскільки $\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{b},\mathbf{r}) = \mathbf{b}$ і $\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{r},[\mathbf{c},\mathbf{a}]) = [\mathbf{c},\mathbf{a}]$, то остаточно знаходимо, що

$$\boldsymbol{\nabla}\left([\mathbf{a},\mathbf{r}],[\mathbf{b},[\mathbf{c},\mathbf{r}]]\right) = (\mathbf{r},[\mathbf{c},\mathbf{a}])\mathbf{b} + (\mathbf{b},\mathbf{r})[\mathbf{c},\mathbf{a}].$$

Задачі для самостійної роботи

2.1. Задано скалярне поле ϕ і дві точки $A(0,1)$ і $B(2,0)$. Знайти лінії рівня, що проходять через ці точки, похідні скалярного поля в цих точках за напрямом $\mathbf{s} = (1,1)$, а також напрям та швидкість найшвидшого зростання скалярного поля у цих точках для

a) $\phi(x,y) = 2x^2 + 4y^2$;

b) $\phi(x,y) = 5x^2 - y$;

c) $\phi(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z$.

2.2. Користуючись означенням градієнта, обчислити

a) $\boldsymbol{\nabla} r$; b) $\ln r$; c) $\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{a},\mathbf{r})$; d) $\boldsymbol{\nabla}\exp(\alpha r)$;

e) $\boldsymbol{\nabla}\dfrac{kq}{r}$; f) $\boldsymbol{\nabla}\exp(\alpha r^n)$.

2.3. Обчислити

a) $\boldsymbol{\nabla}\ (\mathbf{a},\mathbf{r})^2(\mathbf{c},\mathbf{r})$; b) $\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{a},\mathbf{r})^3 r^5$; c) $\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{c},[\mathbf{b},\mathbf{r}])r^3$;

d) $\boldsymbol{\nabla}\dfrac{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])}{(\mathbf{c},\mathbf{r})^2}$; e) $\boldsymbol{\nabla}\dfrac{(\mathbf{c},[\mathbf{b},\mathbf{r}])}{r^3}$; f) $\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{c},[\mathbf{a},\mathbf{r}])^5$.

2.4. Знайти похідну від скалярного поля за напрямом вектора $\mathbf{s} = (2,1,2)$ у точці $A(1,2,1)$, якщо скалярне поле має вигляд:

a) $\exp[(\mathbf{q},\mathbf{r})]/r$; b) $(\mathbf{a},\mathbf{r})\exp[(\mathbf{q},\mathbf{r})]$; c) $(\mathbf{a},\mathbf{r})(\mathbf{b},\mathbf{r})$;

d) $(\mathbf{a},\mathbf{r})(\mathbf{b},\mathbf{r})/r^3$; e) $(\mathbf{a},\mathbf{r})^4/r$; f) $([\mathbf{a},\mathbf{r}],[\mathbf{b},\mathbf{r}])$,

де $\mathbf{a} = (1,1,1)$; $\mathbf{b} = (-1,3,-2)$; $\mathbf{q} = (2,1,-3)$.

2.5. Обчислити

$a)[\mathbf{a},\boldsymbol{\nabla}]^2\, r^3$; b) $(\mathbf{r},\boldsymbol{\nabla})\,(\mathbf{a},\mathbf{r})\,/r^3$.

Розділ 3

Векторне поле. Дивергенція і ротор

Якщо деяка векторна величина $\mathbf{A}$ має визначене значення у кожній точці певної області простору, то ми можемо стверджувати, що в цій області простору задане **векторне поле** $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ цієї величини. Структуру векторного поля можна зобразити за допомогою **векторних ліній**, дотичні до яких у кожній точці вказують напрямок вектора $\mathbf{a}$. Система рівнянь для знаходження ліній векторного поля в декартовій системі координат має вигляд:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{A_x}{A_y}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{A_y}{A_z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{A_z}{A_x}.$$

Дивергенція вектора $\mathbf{A}$ в точці, яка оточена поверхнею S, що містить об'єм V:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint\limits_S (\mathbf{A}, d\mathbf{S})$$

або у явному вигляді в декартовій системі координат

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = (\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{A})\,.$$

Векторне поле $\mathbf{A}$ називається **соленоїдальним** в деякій області простору, якщо для нього $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ в цій області.

Похідна від векторного поля по напряму, представленого одиничним вектором $\mathbf{s}$:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial s} = (\mathbf{s}, \boldsymbol{\nabla})\, \mathbf{A}.$$

Векторне поле називається **потенціальним**, якщо його можна зобразити як градієнт деякої скалярної функції $\phi(x, y, z)$:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \boldsymbol{\nabla}\phi(x, y, z).$$

Для потенціального поля виконуються такі рівності:

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial z}.$$

Означення **ротора вектора** задається наступною рівністю:

$$\lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint\limits_C (\mathbf{A}, d\mathbf{r}) = (\mathbf{n}, \mathrm{rot}\, \mathbf{A}),$$

де $\mathbf{n}$ — вектор нормалі до площадки S, яка опирається на контур C. В явному вигляді в декартовій системі координат ротор векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ записується так:

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{A} = [\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Необхідною і достатньою умовою потенціальності векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в області D є рівність нулю ротора поля $\mathbf{A}(r)$ в цій області. Тому потенціальні поля ще називаються **безвихровими**.

Якщо в якійсь області $\mathrm{div}\, \mathbf{A} = 0$ і $\mathrm{rot}\; \mathbf{A} = 0$, то поле $\mathbf{A}$ називається **гармонічним** в цій області.

Деякі властивості дивергенції і ротора:

$$\mathrm{div}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\, \mathrm{div}\, \mathbf{A} + \beta\, \mathrm{div}\, \mathbf{B};$$
$$\mathrm{div}(\phi\mathbf{A}) = \phi\, \mathrm{div}\, \mathbf{A} + (\mathbf{grad}\, \phi, \mathbf{A});$$
$$\mathrm{rot}\, (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha \mathrm{rot}\, \mathbf{A} + \beta \mathrm{rot}\, \mathbf{B};$$
$$\mathrm{rot}\, (\phi\mathbf{A}) = \phi \mathrm{rot}\, \mathbf{A} + [\mathbf{grad}\, \phi, \mathbf{A}].$$

Теорема про подання векторного поля через скалярний і векторний потенціали. Якщо дивергенція і ротор неперервно-диференційовного векторного поля прямують до нуля на безмежності швидше, ніж $1/r^2$, то векторне поле $\mathbf{A}$ однозначно можна виразити у вигляді суми:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{grad}\,\phi + \mathrm{rot}\,\mathbf{B},$$

де ϕ називається скалярним потенціалом, а $\mathbf{B}$ — векторним потенціалом для поля $\mathbf{A}$.

▼ **Приклад 3.1.** Знайти векторні лінії поля $\mathbf{A} = [\omega, \mathbf{r}]$.

Розв'язування.

$$\mathbf{A} = [\omega, \mathbf{r}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \mathbf{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \mathbf{k}(\omega_x y - \omega_y x),$$

Векторні лінії поля визначаються системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z},$$

які також можуть бути записані у вигляді

$$dx = A_x dt, \quad dy = A_y dt, \quad dz = A_z dt.$$

В нашому випадку ця система рівнянь запишеться так:

$$dx = (\omega_y z - \omega_z y)dt,$$

$$dy = (\omega_z x - \omega_x z)dt,$$

$$dz = (\omega_x y - \omega_y x)dt.$$

Помножимо ці рівняння на ω_x, ω_y та ω_z відповідно, і додамо отримані рівняння. В результаті отримаємо диференціальне рівняння:

$$\omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz = 0,$$

проінтегрувавши яке, будемо мати рівняння площини:

$$\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z = C_1.$$

Аналогічно, якщо помножити ті ж самі рівняння на x, y та z відповідно, а потім їх додати, то отримаємо диференціальне рівняння

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

яке після інтегрування дає рівняння сфери:

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2.$$

Отримані рівняння площини та сфери будуть розв'язками початкових диференціальних рівнянь.

Таким чином, векторними лініями поля будуть кола, що лежать на перетині сфер $x^2+y^2+z^2 = C_2^2$ площинами $\omega_x x+\omega_y y+\omega_z z = C_1$, де C_1 та C_2 — довільні константи.

▼ **Приклад 3.2.** Обчислити дивергенцію та ротор векторних полів:

$a)\dfrac{[\mathbf{a},\mathbf{r}]}{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])}$;

$b)\sqrt{x}\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + \sqrt{xyz}\mathbf{k}$.

Розв'язування.

а) Користуючись властивостями дивергенції, запишемо:

$$\operatorname{div}\frac{[\mathbf{a},\mathbf{r}]}{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])} = \frac{1}{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])}\operatorname{div}[\mathbf{a},\mathbf{r}] + \left([\mathbf{a},\mathbf{r}], \operatorname{grad}\frac{1}{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])}\right).$$

Після обчислення утворених дивергенції та градієнта:

$$\operatorname{div}[\mathbf{a},\mathbf{r}] = (\boldsymbol{\nabla},[\mathbf{a},\mathbf{r}]) = -(\mathbf{a},[\boldsymbol{\nabla},\mathbf{r}]) = 0,$$

$$\operatorname{grad}\frac{1}{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])} = -\frac{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])^2},$$

остаточно знайдемо, що

$$\operatorname{div}\frac{[\mathbf{a},\mathbf{r}]}{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])} = -\frac{([\mathbf{a},\mathbf{r}],[\mathbf{a},\mathbf{b}])}{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])^2}.$$

Аналогічно розпишемо ротор векторного поля:

$$\operatorname{rot}\frac{[\mathbf{a},\mathbf{r}]}{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])} = \frac{1}{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])}\operatorname{rot}[\mathbf{a},\mathbf{r}] + \left[[\mathbf{a},\mathbf{r}], \operatorname{grad}\frac{1}{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])}\right].$$

Градієнт, який тут виник, був знайдений раніше, а утворений ротор обчислимо зараз:

$$\operatorname{rot}[\mathbf{a},\mathbf{r}] = [\boldsymbol{\nabla},[\mathbf{a},\mathbf{r}]] = 2\mathbf{a}.$$

Після підстановки та деяких спрощень, отримаємо:

$$\operatorname{rot}\frac{[\mathbf{a},\mathbf{r}]}{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])} = \frac{2\mathbf{a}}{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])} - \frac{[[\mathbf{a},\mathbf{r}],[\mathbf{a},\mathbf{b}]]}{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])^2} = \frac{3\mathbf{a}}{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])}.$$

b) Позначимо векторне поле як $\mathbf{A} = \sqrt{x}\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + \sqrt{xyz}\mathbf{k}$ і обчислимо дивергенцію та ротор за означенням:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{z}},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y}} - 2z\right) - \mathbf{j}\frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x}}.$$

▼ **Приклад 3.3.** Довести:

$$\operatorname{rot}[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} + (\mathbf{B},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} - (\mathbf{A},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}.$$

Розв'язування.

Розпишемо ротор за означенням та скористаємося властивістю подвійного векторного добутку, залишаючи вектори $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ під дією оператора “набла”:

$$\operatorname{rot}[\mathbf{A},\mathbf{B}] = [\boldsymbol{\nabla},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = (\boldsymbol{\nabla},\mathbf{B})\mathbf{A} - (\boldsymbol{\nabla},\mathbf{A})\mathbf{B}.$$

Далі, користуючись властивостями оператора “набла”, знайдемо

$$(\boldsymbol{\nabla},\mathbf{B})\mathbf{A} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\nabla},\mathbf{B}) + (\mathbf{B},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} = \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} + (\mathbf{B},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A},$$

$$(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{A}) + (\mathbf{A}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} = \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} + (\mathbf{A}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}.$$

Після підстановки отримуємо шукану тотожність.

▼ **Приклад 3.4.** Перевірити на потенціальність, соленоїдальність та гармонічність векторне поле: $[[\mathbf{a}, \mathbf{r}], [\mathbf{b}, \mathbf{r}]]$.

Розв'язування.

Задане векторне поле можна переписати як

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{r}], [\mathbf{b}, \mathbf{r}]] = \mathbf{r}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{r}).$$

Для перевірки на потенціальність знайдемо ротор поля

$$\operatorname{rot}\{\mathbf{r}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{r})\} = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{r} + [\mathbf{r}, \operatorname{grad}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{r})].$$

Оскільки $\operatorname{rot}\mathbf{r} = 0$ та $\operatorname{grad}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{r}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то

$$\operatorname{rot}\{\mathbf{r}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{r})\} = [\mathbf{r}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]].$$

Тепер можемо зробити висновок, що коли $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$, то і ротор поля рівний нулю, тобто поле буде потенціальним. В іншому випадку, коли $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq 0$, то ротор поля не рівний нулю, і поле не потенціальне.

Для перевірки на соленоїдальність знайдемо дивергенцію поля:

$$\operatorname{div}\{\mathbf{r}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{r})\} = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{r})\operatorname{div}\mathbf{r} + (\mathbf{r}, \operatorname{grad}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{r})).$$

Врахувавши те, що $\operatorname{div}\mathbf{r} = 3$ та $\operatorname{grad}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{r}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, отримаємо:

$$\operatorname{div}\{\mathbf{r}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{r})\} = 4(\mathbf{r}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]).$$

З цього результату випливає, що при $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$ дивергенція поля рівна нулю, тобто поле соленоїдальне. В іншому випадку, коли $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq 0$ — не соленоїдальне.

Гармонічне векторне поле — це поле, яке одночасно і потенціальне і соленоїдальне. Тому, при $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$ векторне поле є гамонічним, а при $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq 0$ — ні.

Задачі для самостійної роботи

3.1. Знайти векторні лінії полів:

a) $\mathbf{A}=\mathbf{i}/\mathrm{x}+\mathbf{j}/(2\mathrm{y})$; $b)\mathbf{A}=\mathbf{r}/\mathrm{r}^3$; c) $\mathbf{A}=[\mathbf{c},\mathbf{r}]/r$.

3.2. Обчислити div і rot для таких векторних полів

a) $\mathrm{r}^n\mathbf{r}$; $b)[\mathbf{c},\mathbf{r}]$; $c)[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}]]$; $d)\dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{r})}{(\mathbf{b},\mathbf{r})}\mathbf{r}$;

$e)\dfrac{[\mathbf{a},\mathbf{r}]}{(\mathbf{b},\mathbf{r})}r$; $f)[\mathbf{c},[\mathbf{b},[\mathbf{a},\mathbf{r}]]]$; $g)[\mathbf{r},[\mathbf{a},\mathbf{r}]]$; $h)\mathbf{r}e^{i\mathbf{kr}}$;

$i)[\mathbf{b},[\mathbf{a},\mathbf{r}]]$; $j)\left(\mathbf{a},\dfrac{\mathbf{r}}{r}\right)\left[\mathbf{b},\dfrac{\mathbf{r}}{r^2}\right]$; $k)\dfrac{(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])}{r^2}[\mathbf{c},\mathbf{r}]$;

$l)\dfrac{r^5}{(\mathbf{a},\mathbf{r})}[\mathbf{b},\mathbf{r}]$; $n)xy\mathbf{i}+zy\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$; $o)\dfrac{\mathbf{i}}{x}+\dfrac{\mathbf{j}}{y}+\dfrac{\mathbf{k}}{z}$.

3.3. Довести

$a)\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi=0$; $b)\,\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}=0$;

$c)\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}=\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}$;

$d)\Delta\mathbf{A}=\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\mathbf{A}-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$;

$e)\mathrm{div}[\mathbf{A},\mathbf{B}]=(\mathbf{B},\mathrm{rot}\,\mathbf{A})-(\mathbf{A},\mathrm{rot}\,\mathbf{B})$.

3.4. Перевірити, чи будуть потенціальними векторні поля. Якщо так, то знайти їхній скалярний потенціал.

a) $2xy\mathbf{i}+\left(x^2-2yz\right)\mathbf{j}-y^2\mathbf{k}$;

b) $\mathbf{r}(\mathbf{a},\mathbf{r})$;

c) $r[\mathbf{a},\mathbf{r}]$.

3.5. Перевірити, чи є соленоїдальними векторні поля

a)$x^2y\mathbf{i}+\left(z-xy^2\right)\mathbf{j}+2x\mathbf{k}$;

b) $\mathbf{r}(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{r}])/r^2$;

c) $[\mathbf{a},\mathbf{r}]([\mathbf{b},\mathbf{r}])r$.

3.6. Чи є гармонічними векторні поля

a) $\frac{(\mathbf{c},\mathbf{r})\mathbf{r}}{r}$;

b) $[[\mathbf{a},\mathbf{r}],[\mathbf{b},\mathbf{r}]]$;

c) $[\mathbf{b},\mathbf{r}]\exp[(\mathbf{c},\mathbf{r})]$.

Розділ 4

Потік. Циркуляція. Інтегральні теореми

Потік Φ вектора $\mathbf{A}$ через поверхню S:

$$\Phi = \int\limits_S (\mathbf{A},\, d\mathbf{S}) = \int\limits_S (\mathbf{A}, \mathbf{n})\, dS,$$

де $d\mathbf{S}$ — вектор, перпендикулярний до елемента площі dS поверхні S, $\mathbf{n}$ — одиничний вектор нормалі до цього ж елемента площі. Якщо поверхня S замкнена, то

$$\Phi = \oint\limits_S (\mathbf{A}, \mathbf{n})\, dS.$$

Теорема Остроградського-Гауса

Потік вектора через довільну замкнену поверхню дорівнює інтегралові від дивергенції цього вектора по об'єму, обмеженому цією поверхнею:

$$\oint\limits_S (\mathbf{A}, d\mathbf{S}) = \int\limits_V \operatorname{div} \mathbf{A}\, dV.$$

Лінійний інтеграл від вектора $\mathbf{A}$ по контуру C:

$$L = \int\limits_C (\mathbf{A}, d\boldsymbol{\ell}) = \int\limits_C (\mathbf{A}, \boldsymbol{\tau})\, d\ell,$$

де $d\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\tau} dl$ елемент контуру інтегрування, $\boldsymbol{\tau}$ — одиничний вектор, дотичний до елемента $d\ell$ контуру C. Якщо контур C замкнений, то

$$L = \oint\limits_C (\mathbf{A}, d\boldsymbol{\ell}) \,.$$

Теорема Стокса

Циркуляція вектора по замкненому контуру дорівнює потокові його ротора через довільну поверхню, яка спирається на цей контур:

$$\oint\limits_C (\mathbf{A}, \boldsymbol{\tau})\, d\ell = \int\limits_S (\operatorname{rot} \mathbf{A}, \mathbf{n})\, dS.$$

▼ **Приклад 4.1.** Обчислити потік радіус-вектора $\mathbf{r}$ через поверхню циліндра висотою h і радіусом основи R, якщо початок координат знаходиться в центрі нижньої основи циліндра.

Розв'язування.

За теоремою Остроградського-Гауса потік радіус-вектора $\mathbf{r}$ через поверхню циліндра запишемо як

$$\Phi = \oint\limits_S (\mathbf{r}, d\mathbf{S}) = \int\limits_V \operatorname{div} \mathbf{r}\, dV.$$

Оскільки $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$, а об'єм циліндра рівний $V = \pi R^2 h$, то в результаті отримаємо:

$$\Phi = 3 \int\limits_V dV = 3\pi R^2 h.$$

▼ **Приклад 4.2.** Обчислити поверхневі інтеграли

a) $\oint\limits_S ([\mathbf{a}, \mathbf{r}], [\mathbf{b}, \mathbf{n}])\, dS;$ b) $\oint\limits_S (\mathbf{a}, \mathbf{r})\, [\mathbf{b}, \mathbf{n}]\, dS,$

де $\mathbf{n}$ — це вектор нормалі до поверхні S.

Розв'язування.

а) Перетворимо підінтегральний вираз, здійснивши циклічну перестановку векторів у змішаному добутку:

$$([\mathbf{a},\mathbf{r}],[\mathbf{b},\mathbf{n}]) = (\mathbf{n},[[\mathbf{a},\mathbf{r}],\mathbf{b}]) = -\left(\mathbf{n},[\mathbf{b},[\mathbf{a},\mathbf{r}]]\right).$$

Тепер за теоремою Остроградського-Гауса шуканий інтеграл може бути записаний як

$$\oint\limits_S ([\mathbf{a},\mathbf{r}],[\mathbf{b},\mathbf{n}])\,dS = -\int\limits_V \operatorname{div}[\mathbf{b},[\mathbf{a},\mathbf{r}]]dV.$$

Розклавши подвійний векторний добуток

$$[\mathbf{b},[\mathbf{a},\mathbf{r}]] = \mathbf{a}(\mathbf{b},\mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{b},\mathbf{a}),$$

дивергенція може бути легко знайдена:

$$\operatorname{div}[\mathbf{b},[\mathbf{a},\mathbf{r}]] = (\mathbf{a},\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{b},\mathbf{r})) - (\mathbf{a},\mathbf{b})(\boldsymbol{\nabla},\mathbf{r}) = (\mathbf{a},\mathbf{b}) - 3(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -2(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Отже,

$$\oint\limits_S ([\mathbf{a},\mathbf{r}],[\mathbf{b},\mathbf{n}])\ dS = 2(\mathbf{a},\mathbf{b})V,$$

де $V = \int\limits_V dV$ — об'єм, обмежений поверхнею S.

б) Для того, щоб мати скалярну величину під інтегралом, скалярно помножимо інтеграл з умови задачі на сталий вектор $\mathbf{c}$ і перетворимо підінтегральну функцію:

$$\oint\limits_S (\mathbf{a},\mathbf{r})\,(\mathbf{c},[\mathbf{b},\mathbf{n}])\,dS = \oint\limits_S (\mathbf{n},(\mathbf{a},\mathbf{r})\,[\mathbf{c},\mathbf{b}])\ dS,$$

Останній інтеграл легко обчислюється за теоремою Остроградського-Гауса. Оскільки

$$\operatorname{div}\,(\mathbf{a},\mathbf{r})\,[\mathbf{c},\mathbf{b}] = (\mathbf{a},[\mathbf{c},\mathbf{b}]) = (\mathbf{c},[\mathbf{b},\mathbf{a}])\,,$$

то

$$\oint\limits_S (\mathbf{a},\mathbf{r})\,(\mathbf{c},[\mathbf{b},\mathbf{n}])\,dS = \int\limits_V \operatorname{div}(\mathbf{a},\mathbf{r})\,[\mathbf{c},\mathbf{b}]\,dV = (\mathbf{c},[\mathbf{b},\mathbf{a}])\,V.$$

Після "скорочення" на вектор **c** остаточно отримаємо:

$$\oint\limits_S (\mathbf{a},\mathbf{r})\,[\mathbf{b},\mathbf{n}]\,dS = [\mathbf{b},\mathbf{a}]V.$$

▼ **Приклад 4.3.** Знайти циркуляцію векторного поля $(x-2z)\mathbf{i}+(x+3y+z)\mathbf{j}+(5x+y)\mathbf{k}$ по контуру трикутника з вершинами $A(1,0,0), B(0,1,0)$ та $C(0,0,1)$. Задачу розв'язати безпосередньо за означенням і з допомогою теореми Стокса.

Розв'язування.

Спочатку знайдемо циркуляцію векторного поля за означенням

$$L = \oint\limits_C (\mathbf{A},\, d\mathbf{r}) = \oint\limits_C (x-2z)\,dx + (x+3y+z)\,dy + (5x+y)\,dz.$$

Циркуляцію векторного поля розіб'ємо на суму трьох лінійних інтегралів:

$$L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}.$$

На стороні AB $z=0$, $y=1-x$, тому підставивши це в інтеграл, отримаємо:

$$L_{AB} = \int\limits_{C_{AB}} (\mathbf{A}, d\mathbf{r}) = \int_0^1 (3x-3)dx = -1,5.$$

Аналогічно знаходимо відповідні лінійні інтеграли на сторонах BC $(x=0,\ z=1-y)$ та CA $(y=0,\ z=1-x)$:

$$L_{BC} = \int\limits_{C_{BC}} (\mathbf{A},\, d\mathbf{r}) = \int_0^1 (y+1)\,dy = 1,5.$$

$$L_{CA} = \int\limits_{C_{CA}} (\mathbf{A},\, d\mathbf{r}) = \int_0^1 (-2-2x)\,dx = -3.$$

Знаходимо циркуляцію:

$$L = -1,5 + 1,5 - 3 = -3.$$

Цей же результат можна отримати, використовуючи теорему Стокса

$$L = \int\limits_S (\operatorname{rot} \mathbf{A}, \mathbf{n})\, dS,$$

де за поверхню інтегрування виберемо трикутник ABC. Оскільки

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x - 2z & x + 3y + z & 5x + y \end{vmatrix} = -7\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

а вектор нормалі до площини трикутника $\mathbf{n} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, то

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A}, \mathbf{n}) = -\frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Отже

$$L = -\frac{6}{\sqrt{3}} S = -3,$$

бо площа трикутника рівна: $S = \sqrt{3}/2$.

▼ **Приклад 4.4.** Інтеграл по замкненій поверхні $\oint\limits_S \left(\mathbf{a}, \frac{\mathbf{r}}{r}\right) [\mathbf{b}, \mathbf{n}]\, dS$ перетворити в інтеграл по об'єму.

Розв'язування.

Після скалярного домноження інтегралу з умови задачі на сталий вектор $\mathbf{c}$:

$$\oint\limits_S \left(\mathbf{a}, \frac{\mathbf{r}}{r}\right) (\mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{n}])\, dS = \oint\limits_S \left(\mathbf{n}, \left(\mathbf{a}, \frac{\mathbf{r}}{r}\right) [\mathbf{c}, \mathbf{b}]\right)\, dS,$$

його можна обчислити за теоремою Остроградського-Гаусса.

$$\oint\limits_S \left(\mathbf{a}, \frac{\mathbf{r}}{r}\right) (\mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{n}])\, dS = \int\limits_V \operatorname{div} \left(\mathbf{a}, \frac{\mathbf{r}}{r}\right) [\mathbf{c}, \mathbf{b}]\, dV.$$

Оскільки

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{a}, \frac{\mathbf{r}}{r}\right)[\mathbf{c}, \mathbf{b}] = \frac{1}{r}\left(\mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]\right) - \frac{1}{r^3}\left(\mathbf{a}, \mathbf{r}\right)\left(\mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{r}]\right),$$

то після "скорочення" на вектор $\mathbf{c}$ отримаємо:

$$\oint\limits_S \left(\mathbf{a}, \frac{\mathbf{r}}{r}\right)\left(\mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{n}]\right) dS = \int\limits_V \left(\frac{1}{r}[\mathbf{b}, \mathbf{a}] - \frac{1}{r^3}\left(\mathbf{a}, \mathbf{r}\right)[\mathbf{b}, \mathbf{r}]\right) dV.$$

▼ **Приклад 4.5** Обчислити контурний інтеграл $\oint\limits_C (\mathbf{a}, [\mathbf{r}, \boldsymbol{\tau}])\, d\ell$, вважаючи що C — коло радіуса R з центром у початку координат, що лежить в площині XY.

Розв'язування.

Обчислимо контурний інтеграл за теоремою Стокса:

$$\oint\limits_C (\mathbf{a}, [\mathbf{r}, \boldsymbol{\tau}])\, d\ell = \oint\limits_C (\boldsymbol{\tau}, [\mathbf{a}, \mathbf{r}])\, d\ell = \int\limits_S \left(\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}], \mathbf{n}\right)\, dS,$$

де S — круг радіуса R з центром у початку координат, що лежить в площині XY. Обчисливши ротор

$$\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}] = \mathbf{a}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{r}) - (\mathbf{a}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{r} = 3\mathbf{a} - \mathbf{a} = 2\mathbf{a},$$

знайдемо скалярний добуток ротора з ветором нормалі $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$:

$$(\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}], \mathbf{n}) = 2a_z.$$

Звідси шуканий контурний інтеграл:

$$\oint\limits_C (\mathbf{a}, [\mathbf{r}, \boldsymbol{\tau}])\, d\ell = 2a_z \int\limits_S dS = 2a_z S = 2\pi R^2 a_z.$$

Задачі для самостійної роботи

4.1. Обчислити потік радіус-вектора $\mathbf{r}$ через поверхню конуса висотою h і радіусом основи R, якщо початок координат знаходиться:

a) у вершині конуса; b) в центрі основи конуса;

Задачу зробити двома способами: безпосередньо за означенням і з допомогою теореми Остроградського-Гауса.

4.2. Обчислити потік радіус-вектора $\mathbf{r}$ через поверхню куба з ребром a, якщо початок координат знаходиться:

a) у одній з його вершин; b) в центрі куба.

Задачу зробити двома способами: безпосередньо за означенням і з допомогою теореми Остроградського-Гауса.

4.3. Обчислити потік вектора $\mathbf{r}/r^3$ через поверхню сфери R, якщо початок координат знаходиться у її центрі.

4.4. Обчислити поверхневі інтеграли, беручи до уваги, що $\mathbf{n}$ — це вектор нормалі до поверхні:

$$a) \oint\limits_S ([\mathbf{a},\mathbf{r}],\mathbf{b})\,\mathbf{n}\,dS; \quad b) \oint\limits_S \mathbf{r}\,([\mathbf{a},\mathbf{n}],\mathbf{b})\;dS; \quad c) \oint\limits_S ([\mathbf{a},\mathbf{n}],\mathbf{r})\;dS;$$

$$g) \oint\limits_S ([\mathbf{a},\mathbf{r}],[\mathbf{b},\mathbf{n}])\,\mathbf{c}\,dS; \quad h) \oint\limits_S [[\mathbf{a},\mathbf{n}],\mathbf{r}]\,dS; \quad i) \oint\limits_S \mathbf{r}(\mathbf{a},\mathbf{n})\,dS;$$

$$j) \oint\limits_S \mathbf{n}(\mathbf{a},\mathbf{r})\,dS; \quad k) \oint\limits_S \mathbf{a}(\mathbf{n},\mathbf{r})\,dS; \quad l) \oint\limits_S [[\mathbf{n},\mathbf{b}],[\mathbf{a},\mathbf{r}]]\;dS.$$

4.5. Інтеграл по замкненій поверхні перетворити в інтеграл по об'єму:

$$a) \oint\limits_S \left(\left[\mathbf{a},\frac{\mathbf{r}}{r}\right],\mathbf{b}\right)\mathbf{n}\,dS; \quad b) \oint\limits_S \frac{\mathbf{r}}{r}\,([\mathbf{a},\mathbf{n}],\mathbf{b})\;dS; \quad c) \oint\limits_S \frac{1}{r}\,([\mathbf{a},\mathbf{r}],\mathbf{b})\,\mathbf{n}\,dS;$$

$$d)\oint\limits_S (\mathbf{a},\mathbf{r})\left([\mathbf{b},\mathbf{r}],\mathbf{n}\right) dS;\ \ e)\oint\limits_S [\mathbf{n},\mathbf{r}][\mathbf{a},\mathbf{r}]dS;\ \ f)\oint\limits_S \left[[\mathbf{n},\mathbf{r}],[\mathbf{a},\mathbf{r}]\right] dS;$$

$$j)\oint\limits_S e^{i\mathbf{kr}}\,[\mathbf{a},\mathbf{n}]\ dS;\quad l)\oint\limits_S \frac{e^{i\mathbf{kr}}}{r}\,(\mathbf{a},\mathbf{n})\ dS.$$

4.6. Обчислити циркуляцію радіус-вектора $\mathbf{r}$ по еліптичному контуру з півосями a і b, який лежить у площині XY, якщо центр координат знаходиться

а) у центрі еліпса; б) в одному з його фокусів.

Задачу зробити двома способами: безпосередньо за означенням і з допомогою теореми Стокса.

4.7. Обчислити циркуляцію вектора $r^n\mathbf{r}$ по квадратному контуру зі стороною a, який лежить у площині YZ, якщо центр координат знаходиться

а) у центрі квадрату; б) в одній з його вершин.

Задачу зробити двома способами: безпосередньо за означенням і з допомогою теореми Стокса.

4.8. Обчислити контурний інтеграл для векторів $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ та $\mathbf{m}=x^2\mathbf{i}-3y^2\mathbf{j}$, якщо контур — це

а) пряма, що з'єднує точки $A(0,0)$ і $B(1,1)$;

b) ламана ACB, де $C(0,1)$;

c) ламана ADB, де $D(1,0)$.

4.9. Обчислити інтеграли, вважаючи що контур C — коло радіуса R з центром у початку координат:

$$a)\oint\limits_C (\mathbf{a},\mathbf{r})\,(\mathbf{r},\boldsymbol{\tau})\,d\ell;\qquad b)\oint\limits_C (x\,dy-y\,dx)\,.$$

4.10. Обчислити інтеграли, беручи до уваги, що L —замкнений контур, який обмежує площу S на площині $(\mathbf{r},\mathbf{n})$=р:

$$a)\oint (\mathbf{a},\mathbf{r})\ d\ell;\qquad b)\oint [\mathbf{r},\boldsymbol{\tau}]\ d\ell.$$

Розділ 5

Косокутні системи координат

Базис n-вимірного простору разом з точкою, яка називається початком координат, утворюють систему координат, в якій положення кожної точки характеризується набором n чисел: $x^1, \ldots, x^n$. Ці числа називаються координатами відповідної точки. Фактично — це коефіцієнти розкладу радіус-вектора $\mathbf{r}$ цієї точки по базису n-вимірного простору:

$$\mathbf{r} = x^1\mathbf{e_1} + \ldots + x^n\mathbf{e_n}.$$

Дуальний базис

Два базиси $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ і $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n)$ називаються дуальними, якщо їхні вектори задовольняють співвідношенням:

$$\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k\right) = \delta_i^k,$$

де δ_i^k — це символ Кронекера.

Тоді будь-який вектор $\mathbf{a}$ можна розкласти по кожному з базисів:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}^i = \sum_{i=1}^{n} a^i \mathbf{e}_i.$$

Величини a^i називаються контраваріантними, а числа a_i коваріантними компонентами вектора $\mathbf{a}$. Зв'язок між ними описується такими співвідношеннями:

$$a_i = \sum_{i=1}^{n} g_{ij} a^j, \qquad a^i = \sum_{i=1}^{n} g^{ij} a_j,$$

де компоненти метричого тензора обчислюються за формулою:

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\,, \qquad g^{ij} = \left(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j\right).$$

Базис називають ортогональним, якщо його вектори попарно перпендикулярні. Для ортогонального базису основний базис співпадає із дуальним, а матриця метричного тензора g_{ik} має діагональний вигляд і $g_{ii} = 1/g^{ii}$.

У тривимірному просторі зв'язок між векторами обох систем записується так:

$$\mathbf{e}^i = \frac{[\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k]}{(\mathbf{e}_i, [\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k])}, \qquad \mathbf{e}_i = \frac{\left[\mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k\right]}{(\mathbf{e}^i, [\mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k])},$$

причому для індексів i, j, k діє правило циклічної перестанови.

Якщо вектори базису $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ взаємно ортогональні і їх довжини рівні одиниці, то вони називаються ортами прямокутної декартової системи координат і позначаються $\mathbf{i_1}$, $\mathbf{i_2}$, $\mathbf{i_3}$.

Перехід від однієї системи координат до іншої здійснюється з допомогою матриці переходу за правилами

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_1^2 & \beta_1^3 \\ \beta_2^1 & \beta_2^2 & \beta_2^3 \\ \beta_3^1 & \beta_3^2 & \beta_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'^1 \\ \mathbf{e}'^2 \\ \mathbf{e}'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_1^2 & \beta_1^3 \\ \beta_2^1 & \beta_2^2 & \beta_2^3 \\ \beta_3^1 & \beta_3^2 & \beta_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}'^1 \\ \mathbf{e}'^2 \\ \mathbf{e}'^3 \end{pmatrix},$$

причому

$$\sum_k \alpha_k^l \beta_i^k = \delta_i^l.$$

В прямокутній декартовій системі координат $\alpha_i^k = \beta_k^i = a_{ik} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_k})$, а величини a_{ik} задовольняють рівність:

$$\sum_i a_{ik} a_{il} = \delta_{kl}.$$

Правило індексів

1. Якщо індекс фігурує у лівій частині рівності один раз у певній позиції (вгорі або внизу), то він повинен фігурувати і у правій частині рівності у тій самій позиції. Формула залишиться справедливою, якщо рухомий індекс одночасно опустити/підняти в обох частинах рівності.

2. Якщо якийсь індекс знаходиться під знаком суми, то він обов'язково один раз має бути вгорі, а один раз внизу. Формула залишається справедливою, якщо німий індекс в одному місці опустити, а в іншому підняти. При цьому суму можна опустити, якщо цей індекс набуває значень від 1 до n, де n — це вимірність простору.

Скалярний добуток у косокутній системі координат:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b^i = \sum_{i=1}^{n} a^i b_i = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} a^i b^j = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} a_i b_j.$$

Векторний добуток у косокутній системі координат:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \sum_{i<k} [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k] \left(a^i b^k - a^k b^i\right) = \sum_{i<k} \left[\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^k\right] (a_i b_k - a_k b_i).$$

▼ **Задача 5.1.** Задано базис $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_1$, де $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — орти декартової системи координат. Знайти базис, взаємний до заданого, а також ко- і контраваріантні складові метричного тензора.

Розв'язування.

Згідно означення, дуальний вектор до $\mathbf{e_1}$ рівний

$$\mathbf{e}^1 = \frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{(\mathbf{e}_1, [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3])}.$$

Обчисливши векторний та змішаний добутки:

$$[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \begin{vmatrix} \mathbf{i_1} & \mathbf{i_2} & \mathbf{i_3} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i_1} - \mathbf{i_2} + \mathbf{i_3},$$

$$(\mathbf{e}_1, [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

знайдемо вигляд вектора $\mathbf{e}^1$:

$$\mathbf{e}^1 = \frac{1}{2}(\mathbf{i_1} - \mathbf{i_2} + \mathbf{i_3}).$$

Аналогічно знаходимо вектори, дуальні до $\mathbf{e}_2$ та $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{e}^2 = \frac{[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_2, [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1])} = \frac{1}{2}(\mathbf{i_1} + \mathbf{i_2} + \mathbf{i_3}),$$

$$\mathbf{e}^3 = \frac{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_3, [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2])} = \frac{1}{2}(-\mathbf{i_1} - \mathbf{i_2} + \mathbf{i_3}).$$

Ко- та контраваріантні метричні тензори легко знаходимо за означенням:

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$g^{ij} = (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

▼ **Задача 5.2** Вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ у кососутній системі координат мають такі складові: $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -2, 1)$. Базисні масштабні вектори мають однакові довжини, рівні 2 і попарно утворюють кут 30^0 між собою. Знайти скалярний і векторний добуток векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, а також їхні проекції на базис масштабної та дуальної системи косокутних координат.

Розв'язування.

Оскільки масштабні вектори мають однакові довжини, рівні 2 і попарно утворюють кут 30^0 між собою, то метричний тензор рівний

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тоді скалярний добуток:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij}a^i b^j = 16.$$

Знайдемо коваріантні складові векторів **a** та **b**:

$$a_i = \sum_{j=1}^{3} g_{ij}a^j = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$b_i = \sum_{j=1}^{3} g_{ij}b^j = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці g_{ij} рівний $g = 32$. Тоді векторний добуток

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 6 & 2 & 8 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 3\sqrt{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}).$$

Проекції векторів на базисні вектори масштабної та дуальної систем координат знайдемо за означенням:

$$\begin{aligned}
a_{\mathbf{e}_i} &= \frac{(\mathbf{a},\mathbf{e}_i)}{|\mathbf{e}_i|} = \frac{\mathbf{a}_i}{|\mathbf{e}_i|} = (3,1,4), \\
b_{\mathbf{e}_i} &= \frac{(\mathbf{b},\mathbf{e}_i)}{|\mathbf{e}_i|} = \frac{\mathbf{b}_i}{|\mathbf{e}_i|} = (3,-1,2), \\
a_{\mathbf{e}^i} &= \frac{(\mathbf{a},\mathbf{e}^i)}{|\mathbf{e}^i|} = \frac{\mathbf{a}^i}{|\mathbf{e}^i|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1,-1,2), \\
b_{\mathbf{e}^i} &= \frac{(\mathbf{b},\mathbf{e}_i)}{|\mathbf{e}^i|} = \frac{\mathbf{b}^i}{|\mathbf{e}^i|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2,-2,1).
\end{aligned}$$

Тут враховано, що

$$|\mathbf{e}^i| = \left|\frac{[\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k]}{(\mathbf{e}_i,[\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k])}\right| = \frac{|\mathbf{e}_j||\mathbf{e}_k|\sin(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)}{\sqrt{g}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

▼ **Задача 5.3.** Знайти координати точки $A(-5, 10)$ у новій декартовій системі координат і побудувати матрицю повороту, якщо осі нової системи координат повернуто на кут $\pi/6$ за годинниковою стрілкою відносно старої системи координат.

Розв'язування.

Матрицю повороту запишемо як

$$R = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Тепер координати точки A у новій декартовій системі координат прийматимуть значення

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}+10}{2} \\ \frac{5+10\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Задачі для самостійного опрацювання

5.1. З векторів $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ вибрати всі трійки векторів, що утворюють базис у тривимірному просторі, якщо $\mathbf{e}_1 = 3\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_1$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2$, $\mathbf{e}_4 = 2\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$, де $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — орти декартової системи координат.

5.2. Масштабні вектори попарно утворюють кут 60^0 між собою, а їхні модулі рівні відповідно $e_1 = 2, e_2 = 3, e_3 = 4$. Знайти ко- і контраваріантні складові метричного тензора, а також довжини і кути між векторами дуального базису.

5.3. Задано векторний базис: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_1$, де $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – орти декартової системи координат. Розкласти вектор $b = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$ за векторами основного й взаємного базисів.

5.4. Масштабні вектори косокутної системи координат $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_1$, де $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — орти декартової системи координат. Знайти складові вектора $\mathbf{a} = (1, 3, 5)$ у новій системі координат, заданій масштабними векторами $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_1$. Записати матрицю переходу для цього випадку.

5.5. Масштабні вектори косокутної системи координат мають однакову довжину 2 і попарно утворюють кут 30^0 між собою. Знайти проекції вектора $\mathbf{a}$ зі складовими $(3, -2, -1)$ на базисні вектори дуальної до нової системи координат, яка повернута на кут 60^0 (проти годинникової стрілки) навколо осі, що збігається з першим масштабним вектором старої системи координат.

5.6. Метричний тензор косокутної системи координат рівний:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1.5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1.5 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Знайти довжини масштабних вектораів і кути між ними, а також контраваріантні g^{ij} та змішані g_i^j складові метричного тензора.

5.7. Знайти координати точки $A(-3, 2)$ у новій декартовій системі координат, якщо осі нової системи координат відносно старої повернуті проти годинникової стрілки на кут:

$$a) -\frac{\pi}{4}; \qquad b)\frac{\pi}{3}; \qquad c) -\frac{\pi}{2}.$$

5.8. Знайти кут, на який повернуті координатні осі декартової системи координат, якщо формули перетворення координат мають вигляд:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y', \quad y = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'.$$

5.9. У старій декартовій системі координат задано точки $A(3, -2)$ і $B(2, -3)$. Чи існує така нова декартова система координат з початком в точці $O'(0, 2)$, в якій точки A і B мають координати $(3, 0)$ та $(0, 3)$ відповідно.

5.10. Задана матриця переходу від старої до нової косокутної системи координат:

$$\beta_i^j = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю переходу від нової до старої косокутної системи координат.

Розділ 6

Полілінійні форми. Тензори

Скалярна функція $\phi(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ називається полілінійною формою, якщо для всіх $j = 1 \ldots k$ виконуються рівності:

$$
\begin{aligned}
\phi(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j + \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{a}_k) &= \phi(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_k) + \\
&+ \phi(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{a}_k), \\
\phi(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, c\mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_k) &= c\phi(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_k),
\end{aligned}
$$

де $\mathbf{b}$ — довільний вектор, k — степінь полілінійності.

Полілінійна форма є інваріантом при перетворенні координат. Якщо вибрати довільний базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots, \mathbf{e}_n$ в n - вимірному просторі, то полілінійна форма запишеться у вигляді:

$$\phi(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_k) = \sum_{i_1 \ldots i_k} T_{i_1 i_2 \ldots i_k} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_k^{i_k},$$

де $a_m^{i_m}$ $(i_m = 1, 2, 3, \ldots, n)$ — це складові вектора $\mathbf{a}_m$, $T_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — коефіцієнти полілінійної форми.

При переході до нового базису коефіцієнти полілінійної форми змінюються за таким законом:

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \sum_{r_1} \ldots \sum_{r_k} \alpha_{i_1}^{r_1} \alpha_{i_2}^{r_2} \ldots \alpha_{i_k}^{r_k} T'_{r_1 r_2 \ldots r_k}.$$

Оскільки при переході до нового базису координати векторів змінюються, а сама форма – ні, то будуть змінюватись її координати.

Якщо вибрати дуальну до $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots, \mathbf{e}_n$ систему координат $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \ldots, \mathbf{e}^n$, то в ній полілінійна форма запишеться так:

$$\phi(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_k) = \sum_{j_1 \cdots j_k} T^{j_1 j_2 \cdots j_k} a_{1_{j_1}} a_{2_{j_2}} \ldots a_{k_{j_k}},$$

а закон перетворення набуде вигляду:

$$T^{j_1 j_2 \cdots j_k} = \sum_{s_1} \cdots \sum_{s_k} \beta^{j_1}_{s_1} \beta^{j_2}_{s_2} \ldots \beta^{j_k}_{s_k} T'^{s_1 s_2 \ldots s_k}.$$

Можна розглянути ситуацію, коли частина векторів записана у масштабній системі координат, а частина у дуальній до неї. Тоді

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_k) \;\; = \;\; & \sum_{i_1 \ldots i_p} \sum_{j_1 \ldots j_{k-p}} T^{j_1 j_2 \ldots j_{k-p}}_{i_1 i_2 \ldots i_p} \times \\ & \times a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \ldots a^{i_p}_p (a_{p+1})_{j_1} a_{p+2_{j_2}} \ldots a_{k_{j_k}} \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} T^{j_1 j_2 \ldots j_{k-p}}_{i_1 \ldots i_p} \;\; = \;\; & \sum_{r_1} \cdots \sum_{r_p} \sum_{s_1} \cdots \sum_{s_{k-p}} \beta^{j_1}_{s_1} \beta^{j_2}_{s_2} \ldots \beta^{j_{k-p}}_{s_{k-p}} \times \\ \times \;\; & \alpha^{r_1}_{i_1} \alpha^{r_2}_{i_2} \ldots \alpha^{i_{k-p}}_{r_{k-p}} T'^{s_1 s_2 \ldots s_{k-p}}_{r_1 r_2 \ldots r_p}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Множина коефіцієнтів полілінійної форми є важливим об'єктом, який називається **тензором**.

В загальному випадку використовують таке означення: **тензором** n-го рангу (r-раз контраваріантним і s-раз коваріантним, $n = r + s$) називається об'єкт, який у будь-якій системі координат визначається $3n$ числами (компонентами), що перетворюються при переході до іншої системи координат згідно із законом (6.1).

Рівність тензорів.

Два тензори називаються рівними тоді й лише тоді, коли в деякій системі координат усі їхні відповідні компоненти рівні.

Операції над тензорами

Додавання тензорів. Сумою $A+B$ двох тензорів називається тензор C того ж рангу й структури, що й тензори A та B, компоненти якого в будь-якій системі координат дорівнюють сумам відповідних компонент тензорів A і B. Додавати тензори можна лише однакового рангу і структури.

Множення тензора на скаляр. Добутком тензора А на скаляр λ називається тензор $B=\lambda A$, компоненти якого дорівнюють добутку компонент тензора А на скаляр λ.

Множення двох тензорів. Ця операція визначається для будь-яких двох тензорів, незалежно від їхнього рангу й будови. Добутком тензора А рангу n_1 з компонентами $A^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_k}$ $(p+k=n_1)$ на тензор В рангу n_2 з компонентами $B^{l_1\ldots m_r}_{m_1\ldots m_s}$ $(r+s=n_2)$ називається тензор C рангу n_1+n_2 з компонентами

$$C^{h_1\ldots h_{n_1 1}}_{f_1\ldots f_{n_2}} = A^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_k} B^{l_1\ldots m_r}_{m_1\ldots m_s}.$$

Згортка змішаного тензора. Згорткою називається підсумовування компонент тензора по двох різнойменним (“верхній”, “нижній”) індексах. Згортка застосовується тільки до змішаних компонент тензора. При згортці тензора рангу n по двох індексах одержимо тензор рангу $n-2$.

Операція перестановки індексів (утворення ізомеру). Ізомер утворюється при зміні порядку проходження верхніх або нижніх індексів.

Симетризація тензора по n верхнім (нижнім) індексам полягає в утворенні $n!$ ізомерів, у яких ці індекси розташовуються всіма можливими способами, із наступним додаванням і діленням суми на $n!$. Симетризація позначається парою круглих дужок, у яких розташовуються індекси, що беруть участь в операції. У результаті операції симетризації отримуємо новий тензор того ж рангу й будови, що має властивість симетрії по даному набору індексів.

Альтернування здійснюється аналогічно симетризації, але при цьому кожний з $n!$ ізомерів береться з додатнім знаком при парній перестановці індексів, і з від'ємним знаком — при непарній. Індекси, що беруть участь в альтернуванні позначають квадратними дужками.

Головні осі тензора другого рангу визначаються рівністю:

$$\sum_{k=1}^{n} T^i_k a^k = \lambda a^i.$$

Якщо розв'язок цього рівняння існує, то вектори **a**, що йому задовольняють, називаються власними векторами тензора; напрямки цих векторів – головними напрямами тензора; осі цих напрямків – головними осями тензора. Значення компонент тензора в координатній системі головних осей називаються головними значеннями тензора.

Характеристичне рівняняння:

$$\det\begin{pmatrix} T^1_1-\lambda & T^1_2 & T^1_3 \\ T^2_1 & T^2_2-\lambda & T^2_3 \\ T^3_1 & T^3_2 & T^3_3-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

з якого отримуємо головні значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ тензора T, причому усі або деякі з них можуть бути рівними між собою.

Тензорна поверхня.

Будь-якому симетричному тензору $T_{ik} = T_{ki}$ можна поставити у відповідність поверхню другого порядку, яка визначається рівністю:

$$\sum_{i,k=1}^{n} T_{ik} x^i x^k = 1.$$

Ця поверхня називається тензорною. Головні осі тензора є головними осями тензорної поверхні, яка у системі головних осей задається рівнянням:

$$\lambda_1(x^1)^2 + \lambda_2(x^2)^2 + \lambda_3(x^3)^2 = 1.$$

Інваріанти тензора.

Головні значення λ_1, λ_2, λ_3 тензора — це скаляри, які не залежать від системи координат. Звідси випливає, що коефіцієнти характеристичного рівняння також не повинні змінюватись при зміні системи координат. Величини, які не змінюються при зміні системи координат, називаються інваріантами. Таким чином, для тензора другого рангу інваріантами є

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Теорема Гамільтона–Келі.

Довільний симетричний тензор другого рангу є розв'язком свого характеристичного рівняння:

$$T^3 + I_1T^2 + I_2T + I_3E = 0.$$

▼ **Приклад 6.1.** Дано контраваріантні компоненти тензора другого рангу:
$T^{11} = -1$, $T^{12} = 4$, $T^{13} = -2$, $T^{21} = 1$, $T^{22} = 3$,
$T^{23} = -5$, $T^{31} = 5$, $T^{32} = 2$, $T^{33} = -4$,
матрицю переходу від старої системи координат до нової:

$$\alpha_i^k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

і метричний тензор

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

a) коваріантні T_{ik} та змішані $T_k^{i\bullet}$ компоненти тензора;

b) коваріантні компоненти T'_{ik} тензора в новій системі координат;

c) матрицю β_i^k переходу від нової системи координат до старої.

Розв'язування.

a) Змішані та коваріантні компоненти тензора знайдемо за допомогою процедури опускання індекса:

$$T_j^{i\bullet} = \sum_{l=1}^{3} g_{jl} T^{il} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 15 & 2 \\ -2 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^{3} g_{ik} T_j^{k\bullet} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 15 & 2 \\ -2 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 4 \\ 0 & 8 & -12 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

b) Коваріантні компоненти тензора в новій системі координат знайдемо за законом перетворення тензорів:

$$T'_{ik} = \sum_{j,l=1}^{3} \alpha_i^j \alpha_k^l T_{jl} = \sum_{j,l=1}^{3} \alpha_i^j T_{jl} \alpha_k^l.$$

Звідси

$$\begin{aligned} T'_{ik} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 9 & 4 \\ 0 & 8 & -12 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 32 & 22 \\ -28 & -44 & -1 \\ -56 & -16 & 34 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Матриця β_i^k переходу від нової системи координат до старої є оберненою до α_i^k. Тому знаходимо її за правилами обчислення оберненої матриці. В результаті отримаємо:

$$\beta_i^k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

▼ **Приклад 6.2.** Дано компоненти тензора третього рангу T_i^{jk}:
$T_1^{11}=1$, $T_1^{12}=2$, $T_1^{13}=3$, $T_1^{21}=2$, $T_1^{22}=4$, $T_1^{23}=6$, $T_1^{31}=5$, $T_1^{32}=1$, $T_1^{33}=4$, $T_2^{11}=-1$, $T_2^{12}=-2$, $T_2^{13}=0$, $T_2^{21}=4$, $T_2^{22}=6$, $T_2^{23}=-5$, $T_2^{31}=0$, $T_2^{32}=-1$, $T_2^{33}=4$, $T_3^{11}=0$, $T_3^{12}=-3$, $T_3^{13}=1$, $T_3^{21}=5$, $T_3^{22}=2$, $T_3^{23}=0$, $T_3^{31}=6$, $T_3^{32}=2$, $T_3^{33}=2$ і метричний тензор:

$$g_{ik}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 3\\ 2 & 3 & 9\end{pmatrix}.$$

a) Опустити перший верхній індекс в тензорі T_i^{jk};

b) згорнути тензор T_i^{jk} по першому верхньому і нижньому індексу;

c) альтернувати (антисиметризувати) тензор по двох верхніх індексах.

Розв'язування.

a) Опускання першого верхнього індекса тензора виконуємо за правилом:

$$T_{ij}^{k}=\sum_{l=1}^{3} g_{jl}T_i^{lk} = g_{j1}T_i^{1k}+g_{j2}T_i^{2k}+g_{j3}T_i^{3k}, \quad (i,j,k=1,2,3).$$

Після підстановки значень компонент тензорів отримаємо:
$T_{11}^{1}=13$, $T_{11}^{2}=8$, $T_{11}^{3}=17$, $T_{12}^{1}=24$, $T_{12}^{2}=21$, $T_{12}^{3}=39$, $T_{13}^{1}=53$, $T_{13}^{2}=25$, $T_{13}^{3}=60$, $T_{21}^{1}=3$, $T_{21}^{2}=2$, $T_{21}^{3}=3$, $T_{22}^{1}=15$, $T_{22}^{2}=19$, $T_{22}^{3}=-8$, $T_{23}^{1}=10$, $T_{23}^{2}=5$, $T_{23}^{3}=21$, $T_{31}^{1}=17$, $T_{31}^{2}=3$, $T_{31}^{3}=5$, $T_{32}^{1}=38$, $T_{32}^{2}=11$, $T_{32}^{3}=7$, $T_{33}^{1}=69$, $T_{33}^{2}=18$, $T_{33}^{3}=20$.

b) Згортку тензора по першому верхньому і нижньому індексу запишемо як

$$A^j=\sum_{i=1}^{3} T_i^{ij}=T_1^{1j}+T_2^{2j}+T_3^{3j},$$

або

$$A^1=11,\ A^2=10,\ A^3=0.$$

c) Альтернування тензора по верхніх індексах підлягає правилу:

$$T_i^{[jk]} = \frac{1}{2}\left(T_i^{jk} + T_i^{kj}\right),$$

яке після обчислення дає:
$T_1^{[11]} = 0$, $T_1^{[12]} = 0$, $T_1^{[13]} = -1$, $T_1^{[21]} = 0$, $T_1^{[22]} = 0$, $T_1^{[23]} = 5/2$, $T_1^{[31]} = 1$, $T_1^{[32]} = -5/2$, $T_1^{[33]} = 0$, $T_2^{[11]} = 0$, $T_2^{[12]} = -3$, $T_2^{[13]} = 0$, $T_2^{[21]} = 3$, $T_2^{[22]} = 0$, $T_2^{[23]} = -2$, $T_2^{[31]} = 0$, $T_2^{[32]} = 2$, $T_2^{[33]} = 0$, $T_3^{[11]} = 0$, $T_3^{[12]} = -4$, $T_3^{[13]} = -5/2$, $T_3^{[21]} = 4$, $T_3^{[22]} = 0$, $T_3^{[23]} = -1$, $T_3^{[33]} = 0$.

▼ **Приклад 6.3**. Дано компоненти двох тензорів (A^{ij} і B^{kl}) другого рангу:

$A^{11} = 1, \quad A^{12} = -1, \quad A^{21} = -1, \quad A^{22} = 2,$
$B^{11} = -3, \quad B^{12} = 1, \quad B^{21} = 2, \quad B^{22} = -4.$

Знайти:

a) добуток і суму тензорів A^{ij} і B^{kl};

b) ізомери та головні осі тензора B^{kl};

c) інваріанти тензора A^{ij} та відповідну тензорну поверхню;

d) зображення тензор B^{kl} у вигляді суми симетричного і антисиметричного тензорів.

Розв'язування.

a) В результаті добутку тензорів A^{ij} і B^{kl} отримаємо тензор четвертого рангу

$$T^{ijkl} = A^{ij}B^{kl},$$

компоненти якого рівні таким значенням:
$T^{1111} = -3$, $T^{1112} = 1$,$T^{1121} = 2$, $T^{1122} = -4$, $T^{1211} = 3$, $T^{1212} = -1$, $T^{1221} = -2$, $T^{1222} = 4$, $T^{2111} = 3$, $T^{2112} = -1$, $T^{2121} = -2$, $T^{2122} = 4$, $T^{2211} = -6$, $T^{2212} = 2$, $T^{2221} = 4$, $T^{2222} = -8$.

Сумою тензорів A^{ij} і B^{kl} буде тензор того ж рангу $C^{ij} = A^{ij} + B^{ij}$ з відповідними компонентами $C^{11} = -2$, $C^{12} = 0$, $C^{21} = 1$, $C^{22} = 2$.

b) Ізомери тензора виникають при перестановці пари верхніх або нижніх індексів. В нашому випадку ізомером тензора B^{kl} є тензор $D^{kl} = B^{lk}$, тобто $D^{11} = -3$, $D^{12} = 2$, $D^{21} = 1$, $D^{22} = -4$.

Головні осі тензора B^{kl} є напрямлені вздовж його власних векторів, які знаходимо з рівняння:

$$B\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a},$$

або

$$\begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Власні значення тензора знайдемо з характеристичного рівняння:

$$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

В результаті отримаємо $\lambda_1 = -5$ та $\lambda_2 = -2$. Після підстановки кожного власного значення у матричне рівняння отримаємо відповідні їм власні вектори $\mathbf{a}_1 = (-1, 2)$ та $\mathbf{a}_2 = (1, 1)$.

c) Для знаходження інваріантів тензора A^{ij} знайдемо розв'язок характеристичного рівняння

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

яке можна записати у вигляді:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0.$$

Отримаємо головні значення тензора: $\lambda_1 = (3-\sqrt{5})/2$ та $\lambda_2 = (3+\sqrt{5})/2$. Інваріанти тензора знаходимо за формулами:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 = 3, \\ I_2 &= \lambda_1 \lambda_2 = 1. \end{aligned}$$

Варто зауважити, що I_1 та I_2 відповідають коефіцієнтам квадратного рівняння.

d) Довільний тензор можна представити у вигляді суми симетричного та антисиметричного тензорів відносно перестановки індексів заданої пари. В нашому випадку

$$B^{lk} = B^{(lk)} + B^{[lk]}.$$

Тензори

$$B^{(lk)} = \frac{1}{2}(B^{lk} + B^{kl})$$

та

$$B^{[lk]} = \frac{1}{2}(B^{lk} - B^{kl})$$

є відповідно симетричною та антисиметричною частинами тензора. В матричному вигляді компоненти цих тензорів матимуть вигляд:

$$B^{(lk)} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix}, \; B^{[lk]} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Задачі для самостійного опрацювання

6.1. Задано коваріантні компоненти тензора другого рангу:

$T_{11} = 1, \quad T_{12} = 2, \quad T_{13} = 3, \quad T_{21} = 2, T_{22} = 4, \quad T_{23} = 6,$

$T_{31} = 5, \quad T_{32} = 1, \quad T_{33} = 4,$ матрицю переходу від старої системи координат до нової:

$$\alpha_i^k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

і метричний тензор:

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

a) контраваріантні T^{ik} та змішані $T_{i\bullet}^{k}$ компоненти тензора;

b) коваріантні компоненти T'_{ik} тензора в новій системі координат;

c) матрицю β_i^k переходу від нової системи координат до старої системи координат;

d) контраваріантні компоненти T'^{ik} тензора в новій системі координат;

e) змішані компоненти $T'^{k}_{i\bullet}$ в новій системі координат.

6.2. Дано компоненти тензора третього рангу T_{jk}^{i}:

$T_{11}^1 = 1, \quad T_{12}^1 = -2, \quad T_{13}^1 = 3, \quad T_{21}^1 = 2, \quad T_{22}^1 = -4, \quad T_{23}^1 = 6,$

$T_{31}^1 = 5, \quad T_{32}^1 = 1, \quad T_{33}^1 = 4, \quad T_{11}^2 = -1, \quad T_{12}^2 = -2, \quad T_{13}^2 = 0,$

$T_{21}^2 = 4, \quad T_{22}^2 = 6, \quad T_{23}^2 = -5, \quad T_{31}^2 = 0, \quad T_{32}^2 = -1, \quad T_{33}^2 = 4,$

$T_{11}^3 = 0, \quad T_{12}^3 = -3, \quad T_{13}^3 = 1, \quad T_{21}^3 = 5, \quad T_{22}^3 = 2, \quad T_{23}^3 = 0,$

$T^3_{31} = 6, \quad T^3_{32} = 2, \quad T^3_{33} = 2$ і метричний тензор:

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Підняти перший нижній індекс в тензорі T^i_{jk};

b) підняти другий нижній індекс у тензорі T^i_{jk};

c) опустити верхній індекс у тензорі T^i_{jk};

d) згорнути тензор T^i_{jk} по верхньому і першому нижньому індексу;

e) згорнути тензор T^i_{jk} по верхньому і другому нижньому індексу;

f) симетризувати тензор по двох нижніх індексах;

g) альтернувати (антисиметризувати) тензор по двох нижніх індексах.

6.3. Дано компоненти двох тензорів (A^j_i і B^{kl}) другого рангу: $A^1_1 = 1, \quad A^2_1 = -1, \quad A^1_2 = 0, \quad A^2_2 = 2, \quad B^{11} = -2, \quad B^{12} = 0,$ $B^{21} = 2, \quad B^{22} = -1$, а також метричний тензор:

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

a) добуток тензорів A^j_i і B^{kl};

b) суму тензорів A^{ji} та B^{kl};

c) ізомери тензорів A^j_i і B^{kl};

d) інваріанти тензорів A^j_i і B^{kl};

e) головні осі тензорів A_i^j і B^{kl};

f) представлення кожного з тензорів A_i^j і B^{kl} у вигляді суми симетричного і антисиметричного тензорів.

6.4. Дано симетричний тензор другого рангу T_{ij}:

$T_{11} = 1, \quad T_{12} = 1, \quad T_{13} = 2, \quad T_{21} = 1, \quad T_{22} = 4, \quad T_{23} = 3,$

$T_{31} = 2, \quad T_{32} = 3, \quad T_{33} = 9.$

Знайти:

a) тензорну поверхню;

b) інваріанти тензора;

c) перевірити теорему Гамільтона-Келі.

6.5. У декартовій системі координат, заданій векторами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, компоненти тензора другого рангу мають вигляд:

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Базисні вектори нової системи координат виражаються через орти старої декартової системи координат такими співвідношенням:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Визначити коваріантні, змішані й контарваріантні компоненти тензора T_{ik} в новій системі координат.

6.6. Знайти число, яке утворюється множенням тензора T^i_{jk} (із задачі 6.2) і вектора $a^i = (1, -1, 2)$ з наступною подвійною згорткою. Перевірити, чи результат залежить від того, які пари індексів використовувати для згортки.

6.7. Довести, що компоненти одиничного тензора δ_{ij} мають одні і ті ж значення в будь-якому ортонормованому базисі.

6.8. Довести, що сукупність величин $a_{ijkl} = 1$, коли $i = k, j = l$ і $a_{ijkl} = 0$, коли $i \neq k$ або $j \neq l$, утворюють тензор валентності чотири.

Розділ 7

Криволінійні системи координат

Кажуть, що у n-вимірному просторі задана **криволінійна система координат**, якщо положення кожної точки простору можна однозначно задати n величинами ξ^1, ξ^2,…,ξ^n, які є неперервно диференційовними функціями декартових координат, причому якобіан переходу

$$J = \frac{\partial(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0,$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — компоненти радіус-вектора у n-вимірному просторі. Це також означає існування обернених формул, які разом записуються так:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n).$$

У випадку тривимірного простору ми матимемо три криволінійні координати: $\xi^1(x, y, z)$, $\xi^2(x, y, z)$, $\xi^3(x, y, z)$ і якобіан переходу:

$$J = \frac{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \neq 0.$$

Якщо зафіксувати усі значення ξ^i, окрім однієї ξ^l, то це рівняння опише ξ^l-**координатну лінію**. Якщо зафіксувати лише одну ξ^l-координату, то отримаємо ξ^l-**координатну поверхню**.

Локальний базис криволінійних координат задається сукупністю рівностей:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i}, i = 1 \dots n.$$

Він змінюється від точки до точки, тобто ми маємо справу з полем базисів або полем реперів, причому $\mathbf{e}_i$ є дотичним до ξ^i-координатної лінії. У тривимірному просторі нумерація координат зазвичай вибирається так, щоб базисні вектори $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ утворювали праву трійку векторів.

Локальний дуальний базис визначається формулами:

$$\mathbf{e}^i = \frac{[\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k]}{(\mathbf{e}_i, [\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k])}, \quad \mathbf{e}^i = \boldsymbol{\nabla} \xi^i.$$

Як і в косокутній системі координат, зв'язок між коваріантними та контраваріантними координатами у розглядуваній точці здійснюється за допомогою метричного тензора, елементи якого тепер є функціями криволінійних координат. Метричний тензор визначає відстань між нескінченно близькими точками $\mathbf{r}$ та $\mathbf{r} + \mathbf{dr}$:

$$dl^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} d\xi^i d\xi^j.$$

Криволінійні координати називаються **ортогональними**, якщо вектори $\mathbf{e}_i$ попарно ортогональні. У такому випадку матриця метричного тензора має діагональний вигляд, а корінь з його визначина дає якобіан переходу: $J = \sqrt{\det(g_{ij})} = H_1 H_2 H_3$, причому $H_i = \sqrt{g_{ii}}$. Довжини масштабних векторів рівні відповідним коефіцієнтам Ламе:

$$e_i = H_i = \sqrt{\sum_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial \xi^i} \right)^2}, \quad e^i = \frac{1}{H_i}.$$

Векторний елемент відстані у криволінійних координатах:

$$d\mathbf{l}_k = H_k d\xi^k \mathbf{h}_k,$$

де $\mathbf{h}_k$ — одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом масштабного вектора $\mathbf{e}_k$.

Векторний елемент площі у криволінійних координатах:

$$d\mathbf{S}_k = H_i H_j d\xi^i d\xi^j \mathbf{h}_k,$$

причому $k \neq i \neq j$, $i < j$.

Елемент об'єму у криволінійних координатах:

$$dV = H_1 H_2 H_3 d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3.$$

Деякі види криволінійних координат на площині

1. **Полярна система координат**

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}\rho\cos\phi + \mathbf{j}\rho\sin\phi,$$
$$0 \leq \rho < \infty, \quad -\infty < \phi < \infty.$$

2. **Біполярна система координат**

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}a\frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma} + \mathbf{j}a\frac{\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma},$$
$$-\frac{\pi}{2} \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < \tau < \infty.$$

3. **Еліптична система координат**

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}a\operatorname{ch}\mu\cos\nu + \mathbf{j}a\operatorname{sh}\mu\sin\nu,$$
$$0 \leq \mu < \infty, \quad 0 \leq \nu \leq 2\pi.$$

4. **Параболічна система координат**

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}uv + \mathbf{j}\frac{(v^2 - u^2)}{2},$$
$$0 \leq u, v < \infty.$$

5. **Гіперболічна система координат**

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}v\exp(u) + \mathbf{j}v\exp(-u),$$
$$-\infty < u < \infty, \quad 0 < v \leq \infty.$$

Деякі види криволінійних координат у просторі

1. **Циліндрична система координат**

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}\rho\cos\phi + \mathbf{j}\rho\sin\phi + \mathbf{k}z,$$
$$0 \le \rho < \infty, \quad 0 \le \phi \le 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

2. **Сферична система координат**

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}\rho\cos\phi\sin\theta + \mathbf{j}\rho\sin\phi\sin\theta + \mathbf{k}\rho\sin\theta$$
$$0 \le \rho < \infty, \quad 0 \le \phi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

3. **Бісферична система координат**

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}\frac{a\sin\eta\cos\alpha}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta} + \mathbf{j}\frac{a\sin\eta\sin\alpha}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta} + \mathbf{k}\frac{a\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi - \cos\alpha},$$
$$a - \text{const}, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad 0 \le \eta \le \pi, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi.$$

4. **Тороїдальна система координат**

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}\frac{a\operatorname{sh}\tau\cos\phi}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma} + \mathbf{j}\frac{a\operatorname{sh}\tau\sin\phi}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma} + \mathbf{k}\frac{a\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma},$$
$$a - \text{const}, \quad 0 \le \tau < \infty, \quad -\pi < \sigma \le \pi, \quad 0 \le \phi < 2\pi.$$

5. **Еліптично-циліндрична система координат**

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}a\operatorname{ch}\mu\cos\nu + \mathbf{j}a\operatorname{sh}\mu\sin\nu + \mathbf{k}z,$$
$$0 \le \mu < \infty, \quad 0 \le \nu \le 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

6. **Сплюснута сфероїдальна система координат**

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}a\operatorname{ch}\mu\cos\nu\cos\phi + \mathbf{j}a\operatorname{ch}\mu\cos\nu\sin\phi + \mathbf{k}a\operatorname{sh}\mu\sin\nu,$$
$$a - \text{const}, \quad 0 \le \mu < \infty, \quad -\pi/2 \le \nu \le \pi/2, \quad -\pi \le \phi \le \pi$$

7. **Витягнута сфероїдальна система координат**

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}a\operatorname{sh}\mu\sin\nu\cos\phi + \mathbf{j}a\operatorname{sh}\mu\sin\nu\sin\phi + \mathbf{k}a\operatorname{ch}\mu\cos\nu,$$
$$a - \text{const}, \quad 0 \le \mu < \infty, \quad 0 \le \nu \le \pi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi.$$

8. **Параболічно-циліндрична система координат**

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}uv + \mathbf{j}\frac{(v^2 - u^2)}{2} + \mathbf{k}z,$$
$$0 \le u, v, z < \infty.$$

9. **Параболічна система координати**

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}uv\cos\phi + \mathbf{j}uv\sin\phi + \mathbf{k}\frac{u^2 - v^2}{2},$$
$$0 \le u, v < \infty \quad 0 \le \phi \le 2\pi.$$

▼ **Приклад 7.1.** Для гіперболічної системи координат побудувати координатну сітку, довести її ортогональність, знайти елементи довжини та площі.

Розв'язування.

Гіперболічні координати u та v пов'язані з декартовими координатами x та y точок в першому квадранті наступними співвідношеннями:

$$x = v\exp(u), \quad y = v\exp(-u), \; -\infty < u < \infty, \quad v > 0.$$

Для побудови координатної сітки зафіксуємо координату $u = u_0$. Тоді з наведених вище формул отримаємо сім'ю координатних ліній:

$$y = e^{-2u_0}x.$$

Аналогічно, зафіксувавши координату $v = v_0$, отримуємо іншу сім'ю координатних ліній:

$$y = \frac{v_0^2}{x}.$$

Згадані сім'ї ліній утворюють координатну сітку. Базисні вектори гіперболічної системи координат знайдемо за означенням:

$$\mathbf{e}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = v\exp(u)\mathbf{i} - v\exp(-u)\mathbf{j},$$

$$\mathbf{e}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \exp(u)\mathbf{i} + \exp(-u)\mathbf{j}.$$

Легко бачити, що

$$(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v) = 0,$$

тому координатна сітка є ортогональною. Оскільки довжини масштабних векторів рівні відповідним коефіцієнтам Ламе, то

$$H_u = v\sqrt{e^{2u} + e^{-2u}},\ H_v = \sqrt{e^{2u} + e^{-2u}}.$$

Тепер легко знаходимо модулі векторних елементів довжини:

$$dl_u = H_u du = \sqrt{e^{2u} + e^{-2u}} v du,$$

$$dl_v = H_v dv = \sqrt{e^{2u} + e^{-2u}} dv$$

та площі:

$$dS = H_u H_v du dv = v(e^{2u} + e^{-2u}) du dv.$$

▼ **Приклад 7.2.** Знайти коефіцієнти Ламе, локальний базис та метричний тензор для тороїдальної системи координат.

Розв'язування.

Для тороїдальної системи координат:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}\frac{a\,\mathrm{sh}\,\tau\cos\phi}{\mathrm{ch}\,\tau - \cos\sigma} + \mathbf{j}\frac{a\,\mathrm{sh}\,\tau\sin\phi}{\mathrm{ch}\,\tau - \cos\sigma} + \mathbf{k}\frac{a\sin\sigma}{\mathrm{ch}\,\tau - \cos\sigma},$$
$$a - \mathrm{const}, \quad 0 \le \tau < \infty, \quad -\pi < \sigma \le \pi, \quad 0 \le \phi < 2\pi.$$

Користуючись означенням, знайдемо масштабні вектори локального базису:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\tau &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} = \frac{a}{(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\sigma)^2}\left(\mathbf{i}\cos\phi(1 - \mathrm{ch}\,\tau\cos\sigma)\right. \\
&+ \left.\mathbf{j}\sin\phi(1 - \mathrm{ch}\,\tau\cos\sigma) - \mathbf{k}\,\mathrm{sh}\,\tau\sin\sigma\right), \\
\mathbf{e}_\sigma &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} = -\frac{a}{(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\sigma)^2}\left(\mathbf{i}\sin\sigma\cos\phi\,\mathrm{sh}\,\tau\right. \\
&+ \left.\mathbf{j}\sin\sigma\sin\phi\mathrm{sh}\,\tau - \mathbf{k}(\mathrm{ch}\,\tau\cos\sigma - 1)\right), \\
\mathbf{e}_\phi &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \frac{a\,\mathrm{sh}(\tau)}{(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\sigma)}\left(-\mathbf{i}\sin\phi + \mathbf{j}\cos\phi\right).
\end{aligned}$$

Їхні модулі рівні коефіцієнтам Ламе:

$$H_\tau = H_\sigma = \frac{a}{(\operatorname{ch}\tau - \cos(\sigma))}, \quad H_\phi = \frac{a\operatorname{sh}(\tau)}{(\operatorname{ch}\tau - \cos(\sigma))}.$$

Метричний тензор для тороїдальної системи координат знайдемо за означенням:

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{pmatrix} H_\tau^2 & 0 & \\ 0 & H_\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & H_\phi^2 \end{pmatrix}.$$

▼ **Приклад 7.3.** Записати кінетичну енергію точкової частинки масою m у параболічній системі координат.

Розв'язування.

Кінетична енергія точкової частинки масою m у декартовій системі координат записується як

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Перехід до параболічної системи координат виконаємо за формулами: $x = uv$ та $y = \frac{1}{2}(v^2 - u^2)$. Знайдемо вирази для компонентів швидкості:

$$\dot{x} = \dot{u}v + u\dot{v},$$
$$\dot{y} = \dot{v}v - u\dot{u}.$$

Тепер ми можемо обчислити кінетичну енергію:

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(v^2 + u^2)(\dot{v}^2 + \dot{u}^2).$$

▼ **Приклад 7.4.** Знайти потік векторного поля $\mathbf{A} = y^2\mathbf{i} + z\mathbf{j}$ через частину параболоїда $z = x^2 + y^2$, обмежену площиною $z = 8$, у напрямку зовнішньої нормалі.

Розв'язування.

Перейдемо до параболічної системи координат:

$$\begin{aligned} x &= uv\cos(\phi), \\ y &= uv\sin(\phi), \\ z &= \frac{u^2-v^2}{2}+\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

оскільки її координатна поверхня $v = 1/\sqrt{2}$ є параболоїдом $z = x^2 + y^2$. В цій системі координат $z = u^2v^2$ і z змінюється від 0 до 8 на заданій частині параболоїда. Таким чином, ділянка поверхні, через яку потрібно знайти потік, задається умовою:

$$0 \le uv \le 2\sqrt{2},$$

а для поверхні $v = 1/\sqrt{2}$:

$$0 \le u \le 4.$$

Якщо врахувати, що $\varphi \in [0, 2\pi]$, то область інтегрування буде прямокутною.

Векторний елемент координатної поверхні $v = \text{const}$ запишеться як

$$\mathbf{dS}_v = \mathbf{e}_v\frac{H_uH_\phi}{H_v}dud\varphi = uv(\mathbf{i}u\cos\varphi + \mathbf{j}u\sin\varphi - \mathbf{k}v)dud\varphi.$$

Тепер знайдемо скалярний добуток

$$\mathbf{AdS}_v = uv(u\sin\varphi y^2 - vz)dud\varphi,$$

який після підстановки $v = 1/\sqrt{2}$, $y = u\sin\varphi/\sqrt{2}$ та $z = u^2/2$ матиме вигляд:

$$\mathbf{AdS}_v = \frac{u^3}{2\sqrt{2}}\left(u\sin^3\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)dud\varphi.$$

Потік векторного поля знайдемо, проінтегрувавши $\mathbf{AdS}_v$ по прямокутній області — $\varphi \in [0, 2\pi]$ та $u \in [0, 4]$:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 du\, \frac{u^3}{2\sqrt{2}}\left(u\sin^3\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -32\pi.$$

Задачі для самостійного опрацювання

7.1. Для полярної системи координат знайти координатну сітку, довести її ортогональність, обчислити коефіцієнти Ламе та елементи довжини і площі.

7.2. Для прямокутної декартової системи координат знайти координатні поверхні, координатні лінії, обчислити коефіцієнти Ламе, елементи довжини, площі та об'єму.

7.3. Знайти коефіцієнти Ламе та метричний тензор для біполярної та бісферичної систем координат.

7.4 Записати кінетичну енергію точкової частинки масою m у наступних криволінійних системах координат:

a) циліндричній;

b) сферичній;

c) гіперболічній.

7.5 Знайти вектори локального базису, відповідного дуального базису, ко- та контраваріантні складові метричного тензора для

a) сферичної системи координат;

b) циліндричної системи координат;

c) параболічної системи координат;

d) еліптично-циліндричної системи координат.

7.6. Використовуючи найбільш зручну криволінійну систему координат, обчислити криволінійний інтеграл:

$$\oint\limits_{C:\, x^2+y^2=R^2} \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}.$$

7.7. Використовуючи найбільш зручну криволінійну систему координат, знайти потік векторного поля $A = \mathbf{r}/r^3$ через верхню половину еліпсоїда: $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 25$, $z \geq 0$.

Список літератури

1. М. Т. Сеньків, Векторний і тензорний аналіз. — Львів: видавництво Львівського університету, 1990 — 148 с.

2. М. А. Разумова, В. М. Хотяїнцев, Основи векторного і тензорного аналізу. — Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2011. — 216 с.

3. С.М. Гребенюк, Ю.М. Стреляєв, М. І. Клименко. Тензорний аналіз. — Запоріжжя: ЗНУ, 2015. — 90с.

4. Зіненко С.М. Векторний і тензорний аналіз.— Скалярні й векторні поля. Навчальний посібник. — Харків: ХНУ, 2014. — 136с.

5. Лиман Ф.М. Основи векторного та тензорного аналізу. – Суми: СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2005. – 84 с.

6. Валь О.Д. Основи векторного та тензорного аналізу. – Чернівці: Книги-XXI, 2006. – 228 с.

Навчальне видання

Григорчак *Орест Іванович*
Самар *Микола Іванович*

ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО І ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ В ЗАДАЧАХ І ПРИКЛАДАХ

Методичні вказівки

Текст надруковано в авторській редакції