Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

А. Р. Кузьмак

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ: ТЕОРІЯ І ПРАКТИКА

Методичні вказівки

Львів
2022

УДК [531](075.8)
К 89

Рекомендувала до друку кафедра теоретичної фізики імені професора Івана Вакарчука, протокол № 9 від 07.02.2022

Кузьмак А. Р.
К 89 Деякі задачі теоретичної механіки: теорія і практика : методичні вказівки / А. Р. Кузьмак. — Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2022. — 72 с.

Методичні вказівки з курсу "Теоретична механіка" складаються зі шести розділів. У вступному розділі подано основні поняття, які стосуються математичного апарату криволінійних координат. Решта п'ять розділів складаються з теоретичного вступу, що містить основні поняття, і методики розв'язування вибраних задач теоретичної механіки. Задачі супроводжуються повним розв'язком, а деякі з них містять теоретичні виведення рівнянь, на яких ґрунтується їх дослідження.

Для студентів та аспірантів фізико-математичних спеціальностей університетів.

УДК [531](075.8)

Перелік позначень

$x^1,\ x^2, \ldots, x^i, \ldots, x^N$ — набір координат, який задає N-вимірну декартову систему координат;

$\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_i, \ldots, \mathbf{k}_N$ — набір напрямних одиничних векторів (орт), які задають координатні напрямки в декартовій системі координат;

$x,\ y,\ z$ — координати, які задають тривимірну декартову систему координат;

$\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ — орти тривимірної декартової системи координат;

$\xi^1,\ \xi^2, \ldots, \xi^i, \ldots, x_N$ — набір координат, який задає N-вимірну криволінійну систему координат;

$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_i, \ldots, \mathbf{e}_N$ — набір локальних орт N-вимірної криволінійної системи координат;

$\mathbf{r}$ — радіус-вектор (вектор, проведений з початку координат);

$r = |\mathbf{r}|$ — модуль радіус-вектора.

Диференціальні операції в декартовій системі координат:

- оператор "набла"

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z};$$

- ґрадієнт

$$\mathrm{grad}\ u = \boldsymbol{\nabla} u = \mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial u}{\partial z};$$

- диверґенція

$$\mathrm{div}\ \mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

- ротор

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix};$$

- оператор Лапласа

$$\Delta = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

1. Криволінійні координати

Нехай ортогональна криволінійна система координат ξ^i взаємно однозначно пов'язана з декартовою системою x^j такими співвідношеннями:

$$x^j = x^j(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^i, \ldots).$$

Розв'язок цих рівнянь відносно ξ^i виражає криволінійні координати через декартові

$$\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, \ldots, x^j, \ldots).$$

Нехай декартова система координат задається одиничними ортами $\mathbf{k}_j$, а локальні орти криволінійної системи координат мають вигляд $\mathbf{e}_i$. Координати довільної точки в просторі можна представити радіус-вектором, який має такі координати

$$\mathbf{r} = \sum_j x^j \mathbf{k}_j.$$

Вектор відстані між двома нескінченно близькими точками визначається так:

$$d\mathbf{r} = \sum_j dx^j \mathbf{k}_j.$$

Перепишемо цей вектор через криволінійні координати ξ^i

$$d\mathbf{r} = \sum_j \sum_i \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} d\xi^i \mathbf{k}_j = \sum_i d\xi^i \mathbf{e}_i,$$

де локальний орт у криволінійній системі координат визначається як

$$\mathbf{e}_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} \mathbf{k}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i}.$$

Тут ми врахували факт, що декартові координати є функціями криволінійних координат. Тому диференціал dx^j можна переписати у вигляді

$$dx^j = \sum_i \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} d\xi^i.$$

Варто зауважити, що скалярний добуток двох векторів $\mathbf{e}_i$ визначає коваріантні компоненти метричного тензора

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j.$$

Метричний тензор задає локальні властивості многовиду. У випадку, коли орти є ортогональними, метричний тензор — діагональний. За допомогою метричного тензора можна представити квадрат відстані між двома нескінченно близькими точками

$$dr^2 = \sum_{i,j} g_{ij} d\xi^i d\xi^j.$$

Абсолютне значення відстані між двома нескінченно близькими точками є таким:

$$dr = |d\mathbf{r}| = \sqrt{\sum_j {dx^j}^2} = \sqrt{\sum_i H_i^2 {d\xi^i}^2},$$

де

$$H_i = \sqrt{\sum_j \left(\frac{\partial x^j}{\partial \xi^i}\right)^2}$$

називають масштабними множниками Ламе. Легко бачити, що довжина проєкції елемента відстані на координатну вісь ξ^i рівна $H_i d\xi^i$. Таким чином, елемент об'єму в криволінійних координатах можна зобразити у вигляді

$$dV = \prod_i dx^i = \prod_i H_i d\xi^i = J \prod_i d\xi^i,$$

де $J = \prod_i H_i$ — якобіан переходу від декартових координат до криволінійних. Також вводять дуальний набір орт у криволінійній системі координат

$$\mathbf{e}^i = \boldsymbol{\nabla}\xi^i,$$

який визначає контраваріантні складові метричного тензора

$$g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j.$$

Причому, дуальні орти визначені таким чином, що задовольняють співвідношення

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j, \qquad \mathbf{e}^i = \sum_j g^{ij}\mathbf{e}_j, \qquad \mathbf{e}_i = \sum_j g_{ij}\mathbf{e}^j,$$

де δ^i_j — символ Кронекера. Також існує такий зв'язок між коваріантними і контраваріантними складовими метричного тензора

$$\sum_k g_{ik}g^{kj} = \delta^i_j.$$

Будь-який вектор у криволінійній системі координат визначається так:

$$\mathbf{A} = \sum_i A_i\mathbf{e}^i = \sum_i A^i\mathbf{e}_i,$$

де A_i — коваріантні компоненти, а A^i — контраваріантні компоненти вектора $\mathbf{A}$. Перехід від коваріантної до контраваріантної складової вектора і навпаки здійснюється за допомогою метричного тензора у такий спосіб

$$A^j = \sum_i g^{ji}A_i, \qquad A_j = \sum_i g_{ji}A^i.$$

Так само піднімаються і опускаються індекси компонент тензорів.

Запишемо операції диференціювання у криволінійних координатах. Якщо $u(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^i, \ldots)$ — деяке скалярне поле, то його *ґрадієнт* визначається так:

$$\operatorname{grad} u(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^i, \ldots) = \sum_i \frac{1}{H_i} \frac{\partial u(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^j, \ldots)}{\partial \xi^i} \mathbf{e}_i.$$

Диверґенція від векторного поля $\mathbf{A}(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^i, \ldots)$ визначається як

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^i, \ldots) = \\ = \frac{1}{\prod_j H_j} \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(A_i(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^i, \ldots) \prod_{j \neq i} H_j \right),$$

де $A_i(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^i, \ldots)$ — компоненти векторного поля. *Ротор* від векторного поля визначений лише для тривимірного випадку

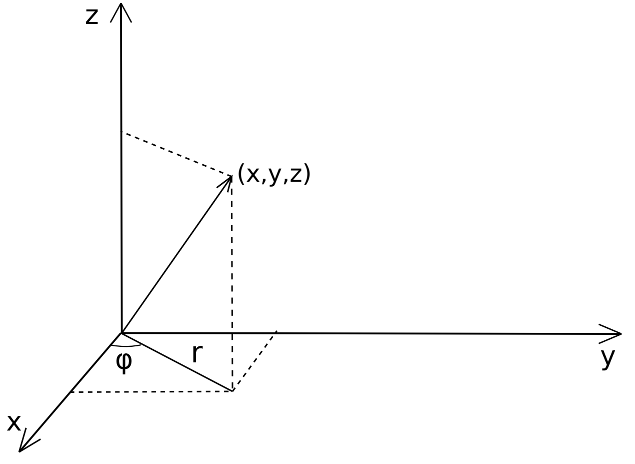
$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i,j,k} \mathbf{e}_i \epsilon_{ijk} H_i \frac{\partial \left(H_k A_k(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \right)}{\partial \xi^j},$$

де ϵ_{ijk} — символ Леві-Чивіти. *Оператор Лапласа (лапласіан)* від скалярного поля записують у вигляді

$$\Delta u(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^i, \ldots) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^i, \ldots) = \\ = \frac{1}{\prod_j H_j} \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{\prod_j H_j}{H_i^2} \frac{\partial u(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^i, \ldots)}{\partial \xi^i} \right).$$

Запишемо ці оператори у випадку циліндричних і сферичних систем координат.

Циліндричні координати.



Зв'язок циліндричних координат $(r,\ \varphi,\ z)$ із декартовими $(x,\ y,\ z)$ задається такими співвідношеннями:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi,\\
y &= r\sin\varphi,\\
z &= z.
\end{aligned}
$$

Кут φ відраховується від осі x у площині xy і змінюється в межах $[0, 2\pi]$. Орти циліндричної системи координат пов'язані з ортами декартової системи так:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi,\\
\mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{i}r\sin\varphi + \mathbf{j}r\cos\varphi,\\
\mathbf{e}_z &= \mathbf{k}.
\end{aligned}
$$

За допомогою цих орт можна побудувати метричний тензор, компоненти якого є такими:

$$
\begin{aligned}
&g_{rr} = 1, \qquad g_{\varphi\varphi} = r^2, \qquad g_{zz} = 1\\
&g_{r\varphi} = g_{rz} = g_{\varphi z} = 0.
\end{aligned}
$$

Масштабні множники Ламе у циліндричній системі координат мають вигляд

$$H_r = 1, \qquad H_\varphi = r, \qquad H_z = 1.$$

Вони дозволяють записати елемент об'єму у цій системі координат

$$dV = r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

Диференціальні операції у циліндричних координатах визначені так:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{e}_z,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\varphi + \\ + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\,(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_z,$$

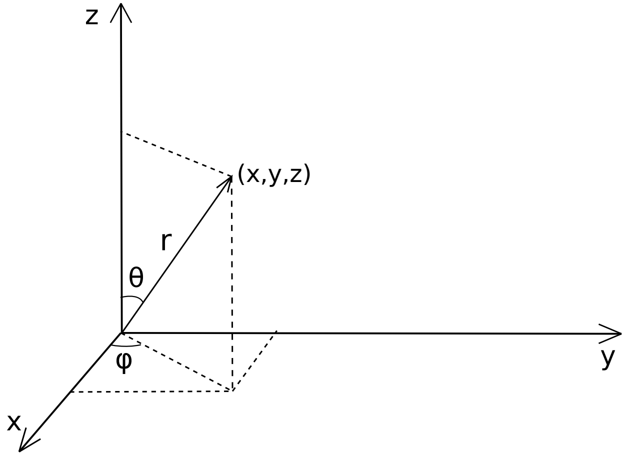
$$\Delta\, u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Варто зауважити, що у випадку фіксованого z, маємо полярну систему координат.

Сферичні координати.

Зв'язок сферичних координат $(r,\ \theta,\ \varphi)$ з декартовими $(x,\ y,\ z)$ задано такими співвідношеннями

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned}$$



Кут θ відраховують від осі z у межах $[0,\pi]$, кут φ відраховують від осі x у площині xy і в межах $[0,2\pi]$. Орти сферичної системи координат пов'язані з ортами декартової системи так:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \mathbf{i}\sin\theta\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\theta\sin\varphi + \mathbf{k}\cos\theta,\\
\mathbf{e}_\theta &= \mathbf{i}r\cos\theta\cos\varphi + \mathbf{j}r\cos\theta\sin\varphi - \mathbf{k}r\sin\theta,\\
\mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{i}r\sin\theta\sin\varphi + \mathbf{j}r\sin\theta\cos\varphi,
\end{aligned}$$

За допомогою цих орт можна побудувати метричний тензор, компоненти якого є такими

$$\begin{aligned}
&g_{rr} = 1, \qquad g_{\theta\theta} = r^2, \qquad g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta\\
&g_{r\varphi} = g_{rz} = g_{\varphi z} = 0.
\end{aligned}$$

Масштабні множники Ламе у сферичній системі координат мають вигляд

$$H_r = 1, \qquad H_\theta = r, \qquad H_\varphi = r\sin\theta.$$

На основі множників Ламе отримуємо елемент об'єму у сферичній системі координат

$$dV = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi.$$

Диференціальні операції у сферичній системі координат здійснюють таким способом:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 A_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(A_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(A_\varphi\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_r +$$

$$+\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \sin\theta\frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi,$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

2. Кінематика

Для опису кінематики механічної системи потрібно задати систему відліку, яка складається із системи координат і годинника. Положення матеріальної точки в просторі можна задати радіус-вектором. Початок радіус-вектора знаходиться в початку координат, а кінець збігається з положенням точки. Тому координати радіус-вектора збігаються з координатами положення точки

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

де $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — це одиничні вектори, які вказують напрямок і масштаб за відповідними координатними осями. Переміщення матеріальної точки з часом приводить до зміни її радіус-вектора. Закон, який задає зміну координат матеріальної точки з часом, називається законом руху. Таким чином, якщо в один момент часу t_1 положення точки задає радіус-вектор $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, а в інший момент часу t_2 — радіус-вектор $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, то кажуть, що точка за час $t_2 - t_1$ перемістилася на відстань, що задається вектором

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k},$$

а абсолютну величину переміщення визначає довжина цього вектора

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

У загальному пройдений шлях s не збігається з абсолютною величиною переміщення матеріальної точки. Проте для достатньо малих проміжків часу dt абсолютна величина переміщення dr збігається з величною пройденого шляху ds. Тут dr — відстань між двома безмежно близькими точками. Квадрат цієї відстані має такий вигляд

$$dr^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j,$$

де g_{ij} — компоненти метричного тензора, а x^i — набір декартових координат. У декартовій системі координат метричний тензор є одиничною матрицею.

Запишемо квадрат відстані у випадку криволінійних координат ξ^i. Зв'язок між декартовими і криволінійними координатами задається функціями $x = x(\xi^i)$, $y = y(\xi^i)$ s $z = z(\xi^i)$. Тоді для квадрату відстані отримаємо

$$dr^2 = \sum_{i,j} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j d\xi^i d\xi^j = \sum_{i,j} g_{ij} d\xi^i d\xi^j,$$

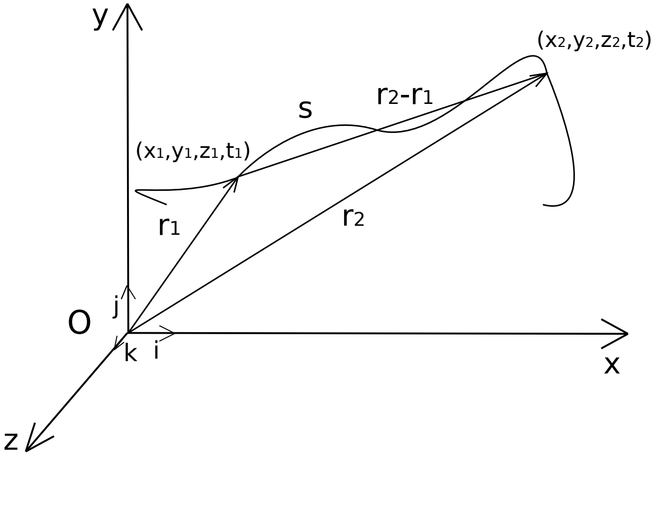
де

$$\mathbf{e_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i}$$

є локальними ортами, а

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$$

є компоненти метричного тензора у криволінійній системі координат.



Знаючи закон руху матеріальної точки, ми можемо знайти її швидкість

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

та прискорення

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}.$$

Швидкість і прискорення у криволінійній системі координат мають вигляд

$$\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{e}_i \dot{\xi}^i,$$
$$\mathbf{a} = \sum_k \left(\ddot{\xi}^k + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j \right) \mathbf{e}_k,$$

де

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_s \frac{g^{ks}}{2} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^s} \right)$$

є символами Крістоффеля другого роду, які пов'язані з символами Крістоффеля першого роду таким співвідношенням

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_s g^{ks} \Gamma_{ij,s}.$$

У випадку руху матеріальної точки по кривій траєкторії прискорення зручно розкласти за двома локальними одиничними векторами, тангенціальним $\boldsymbol{\tau}$ і нормальним $\mathbf{n}$, які є взаємноперпендикулярними. Вектор $\boldsymbol{\tau}$ — дотичний до траєкторії, а $\mathbf{n}$ — перпендикулярний до дотичної. Тоді прискорення набуде вигляду

$$\mathbf{a} = a_\tau \boldsymbol{\tau} + a_n \mathbf{n} = \dot{v} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R} \mathbf{n},$$

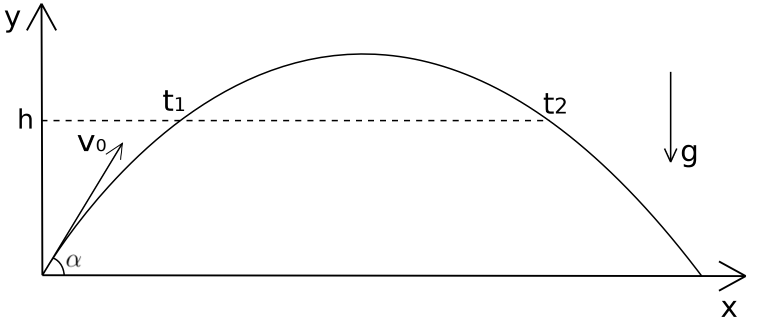
де

$$R = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}}$$

— радіус кривини траєкторії, а a — абсолютна величина прискорення.

Задача 2.1. Камінь, кинутий під кутом α до горизонту, двічі побував на одній і тій самій висоті h через проміжки часу t_1 і t_2 після початку руху. Визначити початкову швидкість v_0 і висоту h, якщо камінь рухається зі сталим прискоренням g, спрямованим вертикально вниз.

Розв'язок. Виберемо систему координат так щоб початок координат збігався з початком руху каменя, а вісь ординат спрямуємо догори.



Враховуючи, що прискорення спрямоване вздовж від'ємного напрямку осі y, рівняння руху для каменя набуде вигляду

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2},$$
$$x = v_{0x}t,$$

де

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha,$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

є проєкціями початкової швидкості на осі абсцис і ординат відповідно. В перше рівняння підставимо значення моментів часу t_1 і t_2, коли камінь перебував на висоті h. Отримаємо такі два вирази

$$h = v_{0y}t_1 - \frac{gt_1^2}{2},$$
$$h = v_{0y}t_2 - \frac{gt_2^2}{2}.$$

Прирівнявши перший вираз до другого і врахувавши, що $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, отримаємо вираз для початкової швидкості

$$v_0 = \frac{g}{2\sin\alpha}(t_1 + t_2).$$

Тепер, підставляючи це значення початкової швидкості в один із виразів для h, отримаємо

$$h = \frac{gt_1t_2}{2}.$$

Задача 2.2. Знайти нормальне a_n, тангенціальне a_τ прискорення та радіус кривини, якщо точка рухається за законом:

$$x = r\omega t - r\sin(\omega t),$$
$$y = r - r\cos(\omega t),$$
$$z = v_0 t,$$

де r, ω і v_0 — параметри, які не залежать від часу.

Розв'язок. Нормальне, тангенціальне прискорення і радіус кривини задаються формулами

$$a_\tau = \dot{v}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R},$$
$$R = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}}.$$

Щоб визначити ці величини, нам спочатку потрібно знайти абсолютні значення швидкості й повного прискорення точки. Ці величини визначаються такими формулами

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$
$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

З рівняння руху визначимо компоненти швидкості та повного прискорення

$$\dot{x} = r\omega - r\omega\cos(\omega t), \qquad \dot{y} = r\omega\sin(\omega t), \qquad \dot{z} = v_0,$$
$$\ddot{x} = r\omega^2\sin(\omega t), \qquad \ddot{y} = r\omega^2\cos(\omega t), \qquad \ddot{z} = 0.$$

Тепер, підставляючи ці компоненти в формули для швидкості та повного прискорення, отримаємо

$$v = \sqrt{(r\omega - r\omega\cos(\omega t))^2 + (r\omega\sin(\omega t))^2 + v_0^2} =$$
$$= r\omega\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \left(\frac{v_0}{r\omega}\right)^2},$$
$$a = \sqrt{(r\omega^2\sin(\omega t))^2 + (r\omega^2\cos(\omega t))^2} = r\omega^2.$$

Взявши похідну від швидкості за часом, знайдемо тангенціальне прискорення

$$a_\tau = \dot{v} = r\omega^2\frac{\sin(\omega t)}{\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \left(\frac{v_0}{r\omega}\right)^2}}.$$

Тепер запишемо нормальну складову прискорення

$$a_n = \sqrt{a^2 - \dot{v}^2} = r\omega^2\sqrt{\frac{4\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \left(\frac{v_0}{r\omega}\right)^2 - \sin^2(\omega t)}{4\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \left(\frac{v_0}{r\omega}\right)^2}}.$$

На закінчення запишемо вираз для радіуса кривини траєкторії

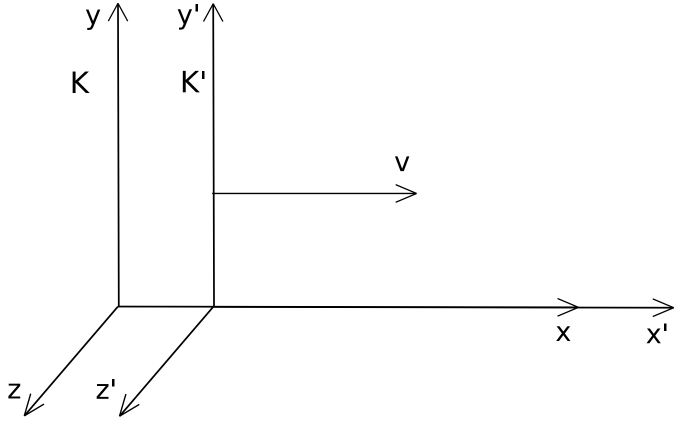
$$R = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}} = r\frac{\left(4\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \left(\frac{v_0}{r\omega}\right)^2\right)^{3/2}}{\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \left(\frac{v_0}{r\omega}\right)^2 - \sin^2(\omega t)}}.$$

3. Динаміка. Закони збереження

На відміну від кінематики, де вивчається рух, але не вивчаються сили, які спричинили цей рух, динаміка вивчає причину руху. Динаміка ґрунтується на трьох законах Ньютона.

Перший закон Ньютона ґрунтується на принципі Ґалілея, який стверджує, що закони механіки не залежать від вибору інерційної системи відліку. Інерційна система відліку — це така система, відносно якої тіло, на яке не діють сили, рухається рівномірно прямолінійно або перебуває у стані спокою.

Запишемо перетворення координат при переході від однієї інерційної системи відліку до іншої. Припустимо, що інерційна система відліку K' рухається відносно іншої інерційної системи K зі сталою швидкістю v, яка спрямована вздовж осі x (див. рисунок).



Нехай у початковий момент часу початки координат двох інерційних систем збігаються, і координати матеріальної точки в момент часу t в системі K' є такими: (x', y', z'). Тоді координати в системі відліку K визначаються так:

$$x = x' + vt, \qquad y = y', \qquad z = z'.$$

Це і є перетворення координат при переході від однієї інерційної системи відліку до іншої. Такі перетворення називаються *перетвореннями Галілея.*

Другий закон Ньютона дозволяє отримати рівняння руху точки, якщо відомі сили, які діють на цю точку. Математичний запис цього закону має вигляд

$$m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F},$$

де m і $\mathbf{r}$ — маса і радіус-вектор точки, $\mathbf{F}$ — рівнодійна сил, які діють на точку.

Третій закон Ньютона стверджує, що сила дії першої матеріальної точки на другу матеріальну точку — така сама за модулем і протилежна за напрямком, як сила дії другої матеріальної точки на першу. Математично його можна записати так:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21},$$

де $\mathbf{F}_{12}$ ($\mathbf{F}_{21}$) — сила, з якою діє перша матеріальна точка на другу (друга на першу).

Дуже часто для знаходження рівняння руху механічної системи можна скористатися законами збереження певних фізичних величин, таких, як імпульс, момент імпульсу і повна енергія системи. Отже, другий закон Ньютона можна переписати через імпульс. Імпульс системи матеріальних точок

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

задовольняє рівняння

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}},$$

$\mathbf{F}_{\text{ext}}$ — рівнодійна зовнішніх сил, які діють на систему матеріальних точок. Такий запис є загальнішим записом другого закону

Ньютона. Якщо на систему матеріальних точок не діють ніякі зовнішні сили, то імпульс не змінюється (зберігається):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0, \qquad \mathbf{p} = \text{const}.$$

Це є *закон збереження імпульсу.*

Також рух механічних систем характеризують такі величини, як момент імпульсу

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

та момент сил

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i,$$

які задовольняють рівність

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}_{\text{ext}}.$$

Момент імпульсу зберігається, коли момент зовнішніх сил рівний нулеві. Це співвідношення виконується, коли на систему не діють ніякі зовнішні сили, або коли радіус-вектори матеріальних точок є колінеарними до векторів зовнішніх сил, які діють на ці матеріальні точки. Як приклад, момент кількості руху зберігається для тіла, яке рухається в полі центральних сил. Тоді радіус-вектор тіла колінеарний до вектора центральної сили.

У випадку, коли механічна система перебуває в полі потенціальних сил, тобто коли на i-ту частинку діє сила

$$\mathbf{F}_i = -\boldsymbol{\nabla}_i U,$$

і коли U не залежить від часу, то виконується закон збереження повної енергії системи

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0, \qquad E = T + U = \text{const},$$

де

$$E = T + U$$

— повна енергія,

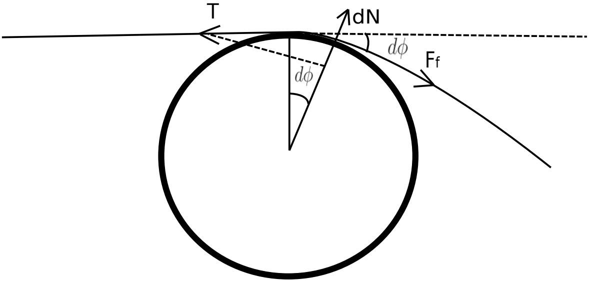
$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

є кінетичною енергією, а U — потенціальною енергією. У випадку, якщо U залежить від часу, будемо мати

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Задача 3.1. Знайти максимальну силу, яку може стримувати за рахунок сили тертя намотаний на закріплений циліндр невагомий і нерозтяжний шнурок.

Розв'язок. Розглянемо взаємодію шнурка з нескінченно малим елементом поверхні циліндра, який видно із його осі під кутом $d\varphi$.



Нас буде цікавити рівнодійна сили тертя шнурка об цей елемент поверхні циліндра $d\mathbf{F}_f$ і сили натягу шнурка $d\mathbf{T}$. Рівняння, яке задає цю рівнодійну, має вигляд

$$dT = dF_f.$$

При проєкції сил на горизонтальну вісь ми врахували, що $\cos d\varphi \approx 1$. З іншого боку, сила тертя пропорційна силі реакції опори цього елемента поверхні $d\mathbf{N}$

$$dF_f = k\,dN,$$

де k — коефіцієнт тертя. Сила реакції опори рівна за значення і протилежна за напрямком силі тиску на поверхню. У нашому випадку сила тиску на поверхню є проєкцією сили натягу на вісь, вздовж якої спрямована сила реакції опори. Тому можна записати, що

$$dN = T\,d\varphi,$$

Тут ми врахували, що $\sin d\varphi \approx d\varphi$. Тепер наше рівняння набуде вигляду

$$dT = kT\,d\varphi.$$

Розділяємо в ньому змінні й інтеґруємо його. У результаті отримаємо

$$\ln T = k\varphi + \ln T_0,$$

де T_0 — це константа інтеґрування. Таким чином, значення порогової сили, яку потрібно прикласти до намотаного на нерухомий циліндр шнурка, щоб його розмотати, експоненційно зростає зі зростанням кута намотування:

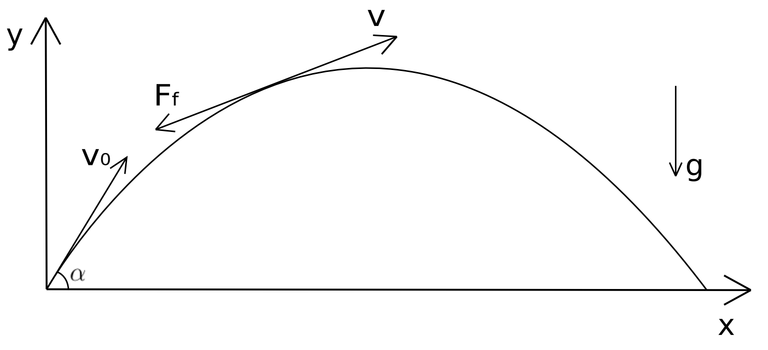
$$T = T_0 e^{k\varphi}.$$

Звідси видно, що T_0 — це сила натягу шнурка, яка зрівноважує силу тертя, коли шнурок торкається до циліндра тільки в одній точці.

Задача 3.2. Камінь масою m кинуто під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Знайти швидкість руху і рівняння руху каменя, якщо повітря чинить йому опір зі силою, пропорційною його швидкості $\mathbf{F}_f = -k\mathbf{v}$, де k — коефіцієнт, який характеризує силу тертя.

Розв'язок. Задамо систему координат так щоб початок руху каменя збігався з початком координат. Запишемо другий закон Ньютона для руху каменя. У векторній формі він набуде вигляду

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_f.$$



Вектори, які входять в це рівняння, є такими:

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}, \qquad \mathbf{g} = -g\mathbf{j}, \qquad \mathbf{F}_f = -k\dot{x}\mathbf{i} - k\dot{y}\mathbf{j}.$$

Підставляючи ці вирази у другий закон Ньютона і прирівнюючи величини при однакових ортах, отримаємо два скалярних рівняння

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + g = 0.$$

Оскільки ці рівняння є незалежними між собою, розв'яжемо їх почергово. Спочатку отримаємо розв'язок для рівняння, яке задає рух каменя відносно напрямку x. З урахуванням того, що проєкція швидкості на вісь x має вигляд $v_x = \dot{x}$, це рівняння набуде форми

$$\dot{v}_x + \frac{k}{m} v_x = 0.$$

Це — лінійне однорідне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо методом розділення змінних

$$\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} dt.$$

Після інтеґрування отримаємо

$$\ln v_x = -\frac{k}{m} t + \ln C_{x1},$$

або

$$v_x = C_{x1} e^{-\frac{k}{m} t},$$

де C_{x1} — константа інтеґрування, яка шукається з умови, що в початковий момент часу проєкція швидкості на вісь x рівна

$$v_x(t = 0) = v_0 \cos\alpha.$$

Тоді

$$C_{x1} = v_0 \cos\alpha,$$

і швидкість руху вздовж осі x набуде вигляду

$$v_x = v_0 \cos\alpha \, e^{-\frac{k}{m} t}.$$

Тепер замість v_x поставимо $\dot{x}$ і знайдемо рівняння руху відносно осі x. Отримаємо

$$x = v_0 \cos\alpha \int e^{-\frac{k}{m} t} \, dt + C_{x2} = -v_0 \frac{m}{k} \cos\alpha \, e^{-\frac{k}{m} t} + C_{x2},$$

де C_{x2} — друга константа інтеґрування, яка шукається з умови, що тіло починає рух із початку координат

$$x(t=0)=0.$$

Підставляючи цю умову в рівняння руху відносно осі x, отримаємо, що

$$C_{x2}=v_0\frac{m}{k}\cos\alpha.$$

Остаточно матимемо рівняння руху у вигляді

$$x=v_0\frac{m}{k}\cos\alpha\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

У такий самий спосіб шукаємо рівняння руху відносно осі y. Запишемо його з урахуванням того, що $v_y=\dot{y}$. Отримаємо

$$\dot{v}_y+\frac{k}{m}v_y=-g.$$

Це — лінійне неоднорідне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо методом варіації сталої. Спочатку розв'яжемо лінійне однорідне рівняння

$$\dot{v}_y+\frac{k}{m}v_y=0.$$

Його розв'язок має такий самий вигляд, як і у випадку руху відносно осі x, тільки тут будемо вважати, що стала інтеґрування залежить від часу

$$v_y=C_{y1}(t)e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Тепер підставляємо цей розв'язок у лінійне неоднорідне рівняння. У результаті будемо мати

$$\dot{C}_{y1}(t)e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{k}{m}C_{y1}(t)e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{k}{m}C_{y1}(t)e^{-\frac{k}{m}t}=-g.$$

Це — диференційне рівняння для $C_{y1}(t)$. Після розділення змінних отримаємо

$$C_{y1}(t) = -g\int e^{\frac{k}{m}t}\,dt + C'_{y1} = -g\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t} + C'_{y1}.$$

Таким чином, швидкість відносно осі y набуде вигляду

$$v_y = -g\frac{m}{k} + C'_{y1}e^{-\frac{k}{m}t},$$

де константа інтеґрування C'_{y1} шукається з умови, що

$$v_y(t=0) = v_0\sin\alpha.$$

Підставляючи цю умову в рівняння для швидкості відносно осі y, отримаємо

$$C'_{y1} = v_0\sin\alpha + g\frac{m}{k}.$$

Остаточно будемо мати вираз для швидкості відносно осі y

$$v_y = v_0\sin\alpha e^{-\frac{k}{m}t} + g\frac{m}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right).$$

Тепер підставляємо в це рівняння $v_y = \dot{y}$ і після розділення змінних та інтеґрування отримаємо

$$y = -v_0\frac{m}{k}\sin\alpha e^{-\frac{k}{m}t} - g\frac{m}{k}\left(\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} - t\right) + C_{y2}.$$

З умови, що рух каменя починається з початку координат

$$y(t=0) = 0,$$

знайдемо константу інтеґрування C_{y2}. Вона рівна

$$C_{y2} = g\left(\frac{m}{k}\right)^2 + v_0\frac{m}{k}\sin\alpha.$$

Остаточно рівняння руху відносно осі y набуде вигляду

$$y = \frac{m}{k}\left(v_0 \sin\alpha + g\frac{m}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - g\frac{m}{k}t.$$

На кінець покажемо, як із отриманих рівнянь випливають рівняння за відсутності опору повітря. Для цього у відповідних виразах для швидкості й рівняннях руху розкладемо в ряд таку експоненту:

$$e^{-\frac{k}{m}t} = 1 - \frac{k}{m}t + \left(\frac{k}{m}t\right)^2 + \ldots$$

Після простих алгебраїчних спрощень, скорочуючи k у знаменниках і покладаючи остаточно $k = 0$, отримаємо рівняння, які описують рух каменя за відсутності опору повітря

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \qquad x = v_0 t \cos\alpha,$$

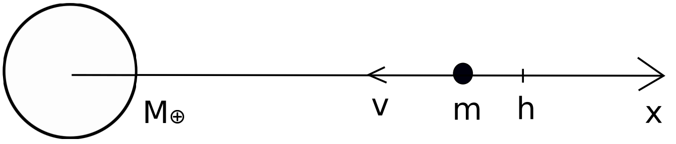
$$v_y = v_o \sin\alpha - gt, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Задача 3.3. Тіло без початкової швидкості під дією сили тяжіння падає на Землю з висоти $h \gg R_\oplus$ ($R_\oplus$ — радіус Землі). Знайти закон руху тіла.

Розв'язок. Сила ґравітаційного тяжіння створює поле потенціальних сил

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U,$$

де U — потенціальна енергія. Для опису такого падіння достатньо однієї координати. Спрямуємо вісь x від центру Землі вздовж руху тіла.



Тоді другий закон Ньютона запишеться у вигляді

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dU}{dx},$$

де v — швидкість падіння тіла. Помножимо ліву і праву сторону цього рівняння на швидкість v

$$mv\frac{dv}{dt} = -v\frac{dU}{dx}.$$

З урахуванням того, що

$$v = \frac{dx}{dt}, \qquad v\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{v^2}{2},$$

а також того факту, що маса з часом не змінюється, це рівняння набуде вигляду

$$\frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2} = -\frac{dx}{dt}\frac{dU}{dx}.$$

Праву сторону перепишемо у вигляді

$$\frac{dx}{dt}\frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dt}$$

і перенесемо все в одну сторону. Отримаємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + U\right) = 0.$$

Вираз під похідною є повною енергією системи

$$E = \frac{mv^2}{2} + U.$$

Повна енергія при такому русі з часом зберігається. Тобто $E = \text{const}$ є інтеґралом руху. Це — закон збереження енергії для тіла масою m, яке перебуває в полі потенціальних сил і рухається вздовж напряму x. Враховуючи, що $v = \frac{dx}{dt}$, із закону збереження енергії отримаємо рівняння руху цього тіла у вигляді

$$t = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E-U}} + C,$$

де C — константа інтеґрування; тут мінус означає, що рух відбувається у від'ємному напрямку координати x. Сила, яка діє з боку Землі на тіло, має вигляд

$$F = -G\frac{M_\oplus m}{x^2},$$

де G — ґравітаційна стала, а $M_\oplus$ — маса Землі. Знайдемо потенціальну енергію поля тяжіння Землі

$$U = -\int F dx + U_\infty = GM_\oplus m \int \frac{dx}{x^2} + U_\infty =$$

$$= -G\frac{M_\oplus m}{x} + U_\infty,$$

де U_∞ – це константа інтеґрування, яка характеризує потенціал на безмежності. Покладаючи його рівним $U(x \to \infty) = 0$, отримаємо, що $U_\infty = 0$. У початковий момент часу тіло перебуває у стані спокою, тому потенціальна енергія тіла рівна його повній енергії

$$E = -G\frac{M_\oplus m}{h}.$$

Тепер запишемо рівняння руху

$$t = -\sqrt{\frac{h}{2GM_\oplus}} \int \sqrt{\frac{x}{h-x}} dx + C.$$

Для того, щоб взяти цей інтеґрал, зробимо таку заміну змінних:

$$x = h\cos^2\alpha, \qquad dx = -2h\cos\alpha\sin\alpha\, d\alpha.$$

Тоді отримаємо

$$t = 2\sqrt{\frac{h^3}{2GM_\oplus}}\int\cos^2\alpha\, dx + C =$$

$$= \sqrt{\frac{h^3}{2GM_\oplus}}\,(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) + C.$$

Враховуючи, що $\alpha = \arccos\sqrt{\frac{x}{h}}$, отримаємо

$$t = \sqrt{\frac{h^3}{2GM_\oplus}}\left(\arccos\sqrt{\frac{x}{h}} + \sqrt{\frac{x}{h}\left(1 - \frac{x}{h}\right)}\right).$$

Ми тут врахували початкову умову, що в момент часу $t = 0$ частинка перебувала на висоті h, тому $C = 0$.

Задача 3.4. Використовуючи закон збереження енергії, знайти закон руху частинки маси m у потенцільному полі $U(x) = -\frac{\alpha}{x}$.

Розв'язок. Із закону збереження енергії маємо

$$\pm t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E-U}} + C,$$

де E — повна енергія, C — константа інтеґрування. Підставляємо сюди потенціальну енергію U, отримаємо

$$\pm t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E + \frac{\alpha}{x}}} + C =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2}}\int\sqrt{\frac{x}{Ex+\alpha}}dx + C.$$

Візьмемо цей інтеґрал. Для цього зробимо таку заміну змінних

$$y=\sqrt{\frac{x}{Ex+\alpha}},\qquad x=\frac{\alpha y^2}{1-Ey^2},\qquad dx=\frac{2\alpha y}{\left(1-Ey^2\right)^2}.$$

Тоді отримаємо

$$\pm t=\sqrt{\frac{m}{2}}2\alpha\int\frac{y^2}{\left(1-Ey^2\right)^2}\,dy+C.$$

Тепер зробимо процедури занесення під диференціал

$$\begin{aligned}\pm t&=\sqrt{\frac{m}{2}}\alpha\int\frac{y}{\left(1-Ey^2\right)^2}\,d\left(y^2\right)+C=\\&=-\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{\alpha}{E}\int\frac{y}{\left(1-Ey^2\right)^2}\,d\left(1-Ey^2\right)+C=\\&=\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{\alpha}{E}\int y\,d\left(\frac{1}{1-Ey^2}\right)+C.\end{aligned}$$

Беремо цей інтеґрал частинами з такою підстановкою

$$\begin{aligned}&u=y, && du=dy,\\&dv=d\left(\frac{1}{1-Ey^2}\right), && v=\frac{1}{1-Ey^2},\end{aligned}$$

отримаємо

$$\pm t=\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{\alpha}{E}\left[\frac{y}{1-Ey^2}-\int\frac{dy}{1-Ey^2}\right]+C.$$

Тепер підінтеґральний вираз розіб'ємо на прості дроби і проінтеґруємо

$$\pm t = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{\alpha}{E}\left[\frac{y}{1-Ey^2} - \frac{1}{2}\int\frac{dy}{1-\sqrt{E}y} - \frac{1}{2}\int\frac{dy}{1+\sqrt{E}y}\right] + C =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{\alpha}{E}\left[\frac{y}{1-Ey^2} + \frac{1}{2\sqrt{E}}\ln|1-\sqrt{E}y| - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\sqrt{E}}\ln|1+\sqrt{E}y|\right] + C =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{\alpha}{E}\left[\frac{y}{1-Ey^2} + \frac{1}{2\sqrt{E}}\ln\left|\frac{1-\sqrt{E}y}{1-\sqrt{E}y}\right|\right] + C.$$

За допомогою співвідношення $y = \sqrt{\frac{x}{Ex+\alpha}}$ вернемося до початкової змінної x. У результаті отримаємо рівняння руху

$$\pm t = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{E^{3/2}}\left[\sqrt{Ex(Ex+\alpha)} + \frac{\alpha}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{Ex+\alpha}-\sqrt{Ex}}{\sqrt{Ex+\alpha}+\sqrt{Ex}}\right|\right] + C.$$

4. Лаґранжевий формалізм механіки

Якщо на систему, що складається з N матеріальних точок, накладено s в'язей, які задаються рівняннями

$$f_a\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, t\right) = 0, \qquad a = 1, 2, \ldots, s,$$

то така система буде мати $n = 3N - s$ ступенів вільності. В'язі, які описуються рівняннями такого типу, називаються голономними. Ці зв'язки задають обмеження на координати матеріальних точок $\mathbf{r}_i$. За таких умов зручно перейти до набору координат $q_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$, які відповідають кількості ступенів вільності механічної системи. Такі координати називають *узагальненими координатами*, а похідні від них за часом $\dot{q}_\alpha$ — *узагальненими швидкостями*. Існує зв'язок між декартовими й узагальненими координатами:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, t\right).$$

Як приклад голономного зв'язку розглянемо сферу, яка обмежує рух матеріальної точки. Нехай матеріальна точка може рухатися по сфері радіуса l, тоді рівняння на в'язі має вигляд

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0.$$

Така система має два ступені вільності, а для опису її руху можна вибрати узагальненими координатами кути сферичної системи координат θ й φ, які пов'язані з декартовими координатами таким чином

$$x = l\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = l\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = l\cos\theta.$$

Якщо накласти ще один зв'язок, який буде задаватися рівнянням

$$z = 0,$$

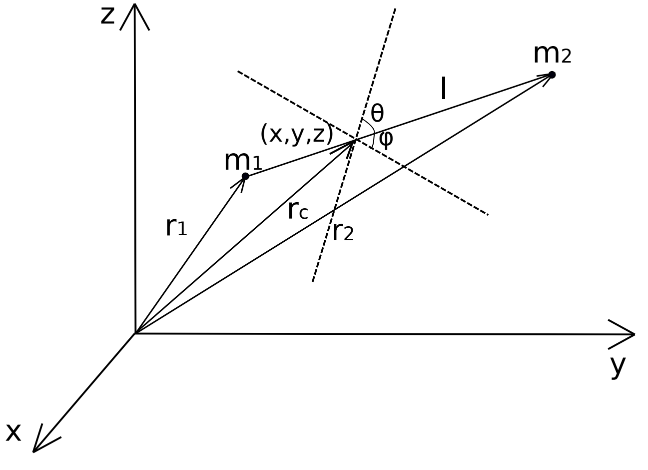
то матеріальна точка зможе рухатися тільки по колу радіуса l, і для опису її руху достатньо буде однієї узагальненої координати

φ. Подальше накладання зв'язків призведе до повної фіксації матеріальної точки.

Інший приклад системи матеріальних точок, на які накладено в'язі, це дві частинки, які рухаються з фіксованою відстанню одна відносно іншої. Рівняння на зв'язки має вигляд

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0.$$

Така система має $n = 6-1 = 5$ ступенів вільності: три поступальних ступені вільності центра мас, які можна задати декартовими координатами x, y, z, і два обертальних ступені вільності, які можна задати полярним θ і азимутальним φ кутами сферичної системи координат. Таким чином, така система описується п'ятьма узагальненими координатами x, y, z, θ і φ (див. рисунок).



Ще одним цікавим прикладом є система, що складається з чотирьох матеріальних точок, відстань між кожною парою з яких є фіксованою. У такому випадку будемо мати шість зв'язків, які задаються рівняннями

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - l_{ij}^2 = 0,$$

де $j < i = 1, 2, 3, 4$. Тут маємо $n = 12 - 6 = 6$ ступенів вільності, які задаються трьома поступальними координатами центра мас системи x, y, z і кутами повороту навколо трьох осей θ, φ і ψ.

В'язі іншого виду, рівняння яких містять зв'язок між координатами і швидкостями, називаються *неголономними* або *кінематичними*. Їх рівняння записується у вигляді

$$f_a\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_N, t\right) = 0, \qquad a = 1, 2, \ldots, s.$$

Механічні системи, на які накладено зв'язки, зручно досліджувати за допомогою рівнянь Лаґранжа. Рівняння Лаґранжа першого роду ґрунтуються на принципі д'Аламбера. Запишемо другий закон Ньютона для системи матеріальних точок, на які накладено зв'язки

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i,$$

де окремо виділено сили реакцій зв'язків $\mathbf{R}_i$. Тепер цей вираз скалярно помножимо на вектор віртуального переміщення матеріальної точки $\delta\mathbf{r}_i$ і просумуємо за всіма матеріальними точками системи:

$$\sum_i \left(\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i - \mathbf{R}_i\right) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0.$$

Зауважимо, що для стаціонарного голономного зв'язку

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N) = 0$$

віртуальні переміщення задовольняють умову

$$\sum_i \boldsymbol{\nabla}_i f \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0.$$

Враховуючи, що для ідеальних зв'язків виконується рівність

$$\mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0,$$

отримаємо принцип д'Аламбера

$$\sum_i (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Користуючись методом множників Лаґранжа, із принципу д'Аламбера отримуємо рівняння Лаґранжа I роду

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{a=1}^{s} \lambda_a \boldsymbol{\nabla}_i f_a (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N),$$

$$f_a (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N) = 0,$$

де

$$\mathbf{R}_i = \sum_{a=1}^{s} \lambda_a \boldsymbol{\nabla}_i f_a (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N)$$

є силою реакції в'язі, λ_a — множники Лаґранжа (їх є стільки, скільки на систему накладено в'язей) ($a = 1 \ldots s$). Таким чином, маємо $3N + s$ рівнянь і $3N + s$ невідомих.

Ми знаємо, що якщо на систему з N матеріальних точок накладено s в'язей, то існує набір узагальнених координат q_α ($3N - s$ штук), які описують поведінку такої системи. Рівняння Лаґранжа II роду, записані на мові узагальнених координат:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha,$$

де T — кінетична енергія системи, $\dot{q}_\alpha$ — узагальнені швидкості, а

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

узагальнені сили. Кількість рівнянь, які описують еволюцію системи, відповідає кількості узагальнених координат. Якщо система перебуває в полі потенціальних сил, то рівняння Лаґранжа

II роду набувають вигляду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0,$$

де

$$L\left(q_1, q_2, \ldots q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_n, t\right) = T - U$$

— *функція Лаґранжа (лаґранжіан)*. Функція Лаґранжа є різницею кінетичної і потенціальної енергій системи і залежить від узагальнених координат, узагальнених швидкостей і часу. Якщо крім потенціальної сили в системі присутня сила тертя, яка пропорційна до швидкості руху кожної частинки $\mathbf{F}_{fi} = -k_i \mathbf{v}_i$, то рівняння Лаґранжа II роду запишуться у вигляді

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_\alpha},$$

де k_i — коефіцієнт тертя, величина $D = \sum\limits_{i=1}^{N} k_i \frac{v_i^2}{2}$ називається *дисипативною функцією Релея*, яка рівна половині роботи за одиницю часу, що виконують сили тертя над системою.

Задача 4.1. Записати рівняння Лаґранжа першого роду і знайти силу реакції в'язі для кульки масою m, що ковзає по дротині, яка має форму параболи $y = kx^2$.

Розв'язок. Запишемо рівняння Лаґранжа I роду з урахуванням того, що сила земного тяжіння спрямована у від'ємному напрямку осі y

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \lambda \boldsymbol{\nabla} f,$$

де $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$ — прискорення земного тяжіння. Рівняння на в'язі має вигляд

$$f = y - x^2.$$

Ґрадієнт від f дорівнює

$$\boldsymbol{\nabla} f = -2kx\mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

У результаті отримаємо рівняння Лаґранжа I роду у вигляді

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -2\lambda kx, \\ m\ddot{y} &= -mg + \lambda, \\ y - kx^2 &= 0. \end{aligned}$$

Знайдемо λ. Від третього рівняння візьмемо другу похідну за часом

$$\ddot{y} = 2k(\dot{x}^2 + x\ddot{x}).$$

З першого рівняння підставимо сюди $\ddot{x}$ й отримаємо

$$\ddot{y} = 2k\left(\dot{x}^2 - \frac{2k\lambda}{m}x^2\right).$$

Тепер $\ddot{y}$ підставимо в друге рівняння. У результаті будемо мати

$$2mk\dot{x}^2 - 4k^2\lambda x^2 = -mg + \lambda.$$

Звідси отримуємо λ

$$\lambda = m\frac{2k\dot{x}^2 + g}{1 + 4k^2x^2} = m\frac{2k\dot{x}^2 + g}{1 + 4ky}.$$

У результаті сила реакції в’язі запишеться

$$\mathbf{R} = \lambda\boldsymbol{\nabla} f = m\frac{2k\dot{x}^2 + g}{1 + 4ky}\left(-2kx\mathbf{i} + \mathbf{j}\right).$$

Задача 4.2. Записати лаґранжіан та відповідні рівняння Лаґранжа II роду для математичного маятника маси m, довжини l, якщо точка підвісу здійснює

1. рівномірний рух по колу радіуса a з частотою ω;
2. горизонтальні коливання за законом $x = a\cos\omega t$;
3. вертикальні коливання за законом $y = a\cos\omega t$.

Розв'язок.

1. Виберемо систему координат так, щоб початок координат знаходився в центрі кола, по якому точка підвісу маятника здійснює рух, а вісь ординат спрямуємо донизу. На маятник накладено в'язь, тому достатньо однієї узагальненої координати φ (кут відхилення маятника від вертикалі), щоб описати його рух. Будемо вважати, що в початковий момент часу точка підвісу мала координати $(a, 0)$, тоді в довільний момент часу координати маятника описуються такими формулами

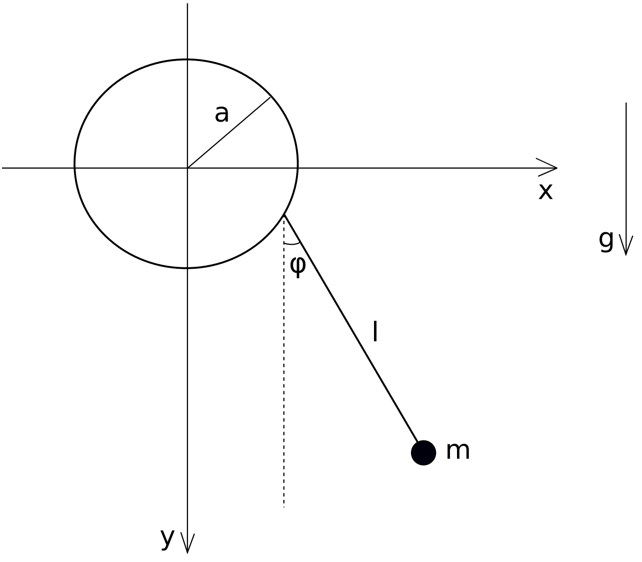
$$x = a\cos\omega t + l\sin\varphi, \qquad y = -a\sin\omega t + l\cos\varphi.$$

Кінетична і потенціальна енергії набудуть вигляду

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \\ &= \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{ma^2\omega^2}{2} + ma\omega l\dot{\varphi}\sin\left(\varphi - \omega t\right), \\ U &= mg(a+l) - mgy = \\ &= mg(a+l) - mg(l\cos\varphi - a\sin\omega t). \end{aligned}$$

Тут ми врахували, що похідні від координат маятника за часом дорівнюють

$$\dot{x} = -a\omega\sin\omega t + l\dot{\varphi}\cos\varphi, \qquad \dot{y} = -a\omega\cos\omega t - l\dot{\varphi}\sin\varphi.$$



Таким чином, лаґранжіан системи має вигляд

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{ma^2\omega^2}{2} + ma\omega l\dot{\varphi}\sin(\varphi - \omega t) +$$
$$+ mg(l\cos\varphi - a\sin\omega t) - mg(a + l).$$

Звідси

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\ddot{\varphi} + ma\omega l\,(\dot{\varphi} - \omega)\cos(\varphi - \omega t)$$
$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = ma\omega l\dot{\varphi}\cos(\varphi - \omega t) - mgl\sin\varphi.$$

Рівняння Лаґранжа II роду набуде вигляду

$$\ddot{\varphi} - \frac{a}{l}\omega^2\cos(\varphi - \omega t) + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

2. У цьому випадку координати маятника є такими

$$x = a\cos\omega t + l\sin\varphi, \qquad y = l\cos\varphi.$$

Тоді лаґранжіан такого маятника дорівнює

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{ma^2\omega^2}{2}\sin^2\omega t -$$

$$- ma\omega l\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\omega t - mgl\left(1-\cos\varphi\right).$$

Рівняння Лаґранжа II роду набуде вигляду

$$\ddot{\varphi} - \frac{a}{l}\omega^2\cos\varphi\cos\omega t + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

3. Тут координати маятника є такими

$$x = l\sin\varphi, \qquad y = a\cos\omega t + l\cos\varphi.$$

Тоді лаґранжіан такого маятника дорівнює

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{ma^2\omega^2}{2}\sin^2\omega t + ma\omega l\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\omega t +$$

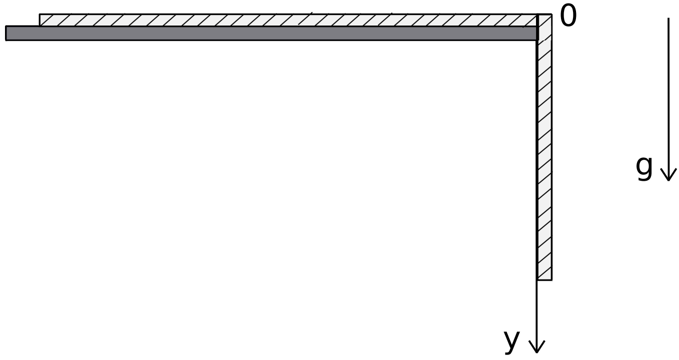
$$+ mg(l\cos\varphi + a\cos\omega t) - mg(a+l).$$

Рівняння Лаґранжа II роду набуде вигляду

$$\ddot{\varphi} + \frac{a}{l}\omega^2\sin\varphi\cos\omega t + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Задача 4.3. Використовуючи рівняння Лаґранжа II роду, записати рівняння руху шнурка довжиною l, який під дією сили тяжіння g і без тертя зісковзує з горизонтального стола. Вважати, що в початковий момент часу частина шнурка довжиною $l_0 < l$ звисає зі столу і є у стані спокою.

Розв'язок. Спрямуємо вісь ординат від краю столу донизу.



Така система має один ступінь вільності — напрямок зісковзування шнурка, який задається узагальненою координатою y. Нас буде цікавити, за яким законом зісковзує кінець шнурка. Його кінетична і потенціальна енергії мають вигляд

$$T = \frac{m\dot{y}^2}{2}, \qquad U = mg\left(l - \frac{y^2}{l}\right).$$

Тут враховано, що внесок у зміну потенціальної енергії шнурка дає лише та частина, яка звисає. Лаґранжіан такої системи буде

$$L = \frac{m\dot{y}^2}{2} - mg\left(l - \frac{y^2}{l}\right).$$

Запишемо рівняння Лаґранжа II роду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 2mg\frac{y}{l},$$

отримаємо рівняння руху шнурка

$$\ddot{y} - 2g\frac{y}{l} = 0.$$

Отримане рівняння є лінійним однорідним диференційним рівнянням другого порядку. Його характеристичне рівняння має вигляд

$$\beta^2 = \frac{2g}{l}.$$

Корені цього рівняня

$$\beta_\pm = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}$$

дозволяють записати загальний роз'язок

$$y = C_+ \exp\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}t\right) + C_- \exp\left(-\sqrt{\frac{2g}{l}}t\right),$$

де $C_\pm$ — константи інтеґрування, які знаходяться з початкових умов. Враховуючи, що в початковий момент часу швидкість шнурка була рівна нулю, $\dot{y}(t=0) = 0$, отримаємо

$$C_+ - C_- = 0.$$

Інша початкова умова, яка задає довжину частини шнурка, що звисає зі столу в початковий момент часу $y(t = 0) = l_0$, дасть друге рівняння для констант

$$C_+ + C_- = l_0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, отримаємо, що

$$C_+ = C_- = \frac{l_0}{2}.$$

Остаточно закон руху шнурка набуде вигляду

$$y = \frac{l_0}{2}\left[\exp\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}t\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{2g}{l}}t\right)\right] = l_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}t\right).$$

5. Гамільтоновий формалізм механіки

Гамільтоновий формалізм оперує такими незалежними змінними, як узагальнені координати q_α і узагальнені імпульси p_α. Перехід до гамільтонового формалізму здійснюється перетворенням Лежандра функції Лаґранжа L:

$$d\left(\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L\right) = \sum_\alpha \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \sum_\alpha \dot{p}_\alpha dq_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t}dt,$$

де

$$H = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$$

— *функція Гамільтона (гамільтоніан)*, що залежить від змінних q_α, p_α і визначає повну енергію системи. Перехід від узагальнених швидкостей до узагальнених імпульсів здійснюють за допомогою співвідношення

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}.$$

З перетворення Лежандра функції Лаґранжа випливає набір рівнянь руху

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}.$$

Ці рівняння називають *канонічними рівняннями Гамільтона*. Їх є $2n$ рівнянь, де n — кількість ступенів вільності системи.

За допомогою канонічних рівнянь Гамільтона легко отримати рівняння руху для функції $f(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, q_n, t)$, яка характеризує певну механічну систему, що описується гамільтоніаном H. Отже, скориставшись канонічними рівняннями Гамільтона, отримаємо рівняння, яке описує зміну з часом функції f, у вигляді

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\},$$

де $\{f, H\}$ — *дужки Пуассона*, які означаються так:

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right).$$

Зауважимо, якщо величина f явним чином не залежить від часу і дужка Пуассона $\{f, H\} = 0$, то f є інтеґралом руху.

Дужки Пуассона задовольняють такі властивості:

1. $\{f, g\} = -\{g, f\}$;
2. $\{f, c\} = 0$, де c — константа;
3. $\{c_1 f + c_2 g, h\} = c_1 \{f, h\} + c_2 \{g, h\}$, де c_1 і c_2 — константи;
4. $\{f, gh\} = g\{f, h\} + h\{f, g\}$;
5. $\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}$;
6. $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ — тотожність Якобі.

Легко розрахувати дужки Пуассона для узагальнених координат та імпульсів

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = 0, \qquad \{p_\alpha, p_\beta\} = 0, \qquad \{q_\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Ці дужки Пуассона називаються *фундаментальними.*

Перетворення від набору одних узагальнених координат та імпульсів $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ до інших $(Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n)$, за яких канонічні рівняння Гамільтона і фундаментальні дужки Пуассона не змінюють своєї форми, називаються *канонічними.* Канонічні перетворення можна виразити через твірні функції F_i. Залежно від вигляду твірної функції будемо мати такі набори канонічних перетворень:

1. $p_\alpha = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_\alpha}, \qquad P_\alpha = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha}, \qquad H' = H + \dfrac{\partial F_1}{\partial t};$

2. $p_\alpha = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_\alpha}, \qquad Q_\alpha = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_\alpha}, \qquad H' = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t};$

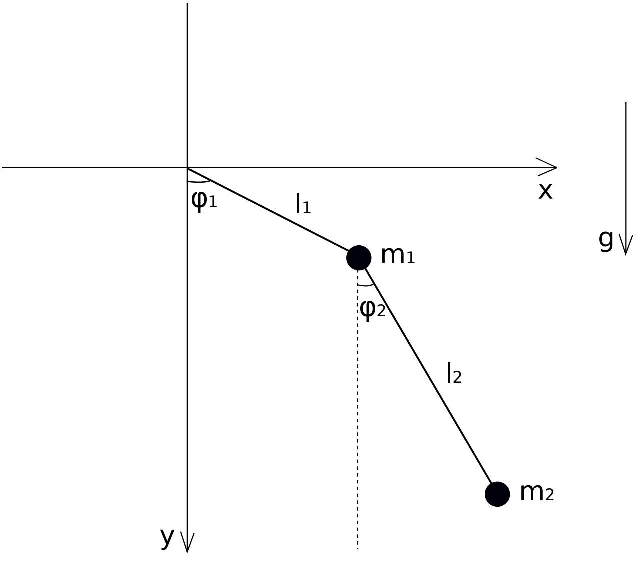
3. $q_\alpha = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_\alpha}, \qquad P_\alpha = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q_\alpha}, \qquad H' = H + \dfrac{\partial F_3}{\partial t};$

4. $q_\alpha = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_\alpha}, \qquad Q_\alpha = \dfrac{\partial F_4}{\partial P_\alpha}, \qquad H' = H + \dfrac{\partial F_4}{\partial t}.$

Тут H' — гамільтоніан, записаний у нових змінних. Варто зауважити, що перехід від набору одних канонічних перетворень до інших здійснюється за допомогою перетворень Лежандра.

Задача 5.1. Побудувати лаґранжіан, гамільтоніан та записати канонічні рівняння руху для подвійного математичного маятника.

Розв'язок. Такий маятник має два ступеня вільності, які позначимо φ_1, φ_2 – це кути відхилення однієї і другої ланок маятника від вертикалі.



Координати першої і другої кульки запишуться через ці кути таким чином

$$x_1 = l_1 \sin\varphi_1, \qquad y_1 = l_1 \cos\varphi_1,$$
$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2, \qquad y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2.$$

Кінетична і потенціальні енергії будуть мати вигляд

$$T = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$U = m_1 g(l_1 - y_1) + m_2 g(l_1 + l_2 - y_2) =$$
$$= (m_1 + m_2) g l_1 (1 - \cos\varphi_1) + m_2 g l_2 (1 - \cos\varphi_2).$$

Звідси отримуємо лаґранжіан

$$L = T - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) -$$
$$- (m_1 + m_2) g l_1 (1 - \cos\varphi_1) - m_2 g l_2 (1 - \cos\varphi_2).$$

Узагальнені імпульси набудуть такого вигляду:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right),$$
$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right).$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь відносно узагальнених швидкостей $\dot{\varphi}_1$ і $\dot{\varphi}_2$, отримаємо

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{m_1 + m_2\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}\frac{1}{l_1^2}\left(p_1 - p_2\frac{l_1}{l_2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right),$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{1}{m_1 + m_2\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}\frac{m_1 + m_2}{m_2 l_2^2}\times$$
$$\times\left(p_2 - p_1\frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{l_2}{l_1}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

Тепер запишемо гамільтоніан

$$H = p_1\dot{\varphi}_1 + p_2\dot{\varphi}_2 - L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 +$$
$$+\frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$$
$$+(m_1 + m_2)gl_1(1 - \cos\varphi_1) + m_2 g l_2(1 - \cos\varphi_2).$$

Підставляючи сюди узагальнені швидкості, виражені через узагальнені імпульси, отримаємо

$$H = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{2}\frac{p_1^2}{(m_1 + m_2)l_1^2} + \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{m_2 l_2^2} - \frac{p_1 p_2}{(m_1 + m_2)l_1 l_2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right] +$$
$$+(m_1 + m_2)gl_1(1 - \cos\varphi_1) + m_2 g l_2(1 - \cos\varphi_2).$$

Оскільки в нас є дві узагальнені координати, то матимемо чотири канонічних рівняння Гамільтона

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \qquad \dot{\varphi}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2},$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_1}, \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_2},$$

де похідні мають вигляд

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{1}{m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} \left(\frac{p_1}{l_1^2} - \frac{p_2}{l_1 l_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right),$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} \times$$

$$\times \left(\frac{p_2}{m_2 l_2^2} - \frac{p_1}{(m_1 + m_2) l_1 l_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right),$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi_1} = -\frac{\sin 2\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}{\left(m_1 + m_2 \sin^2\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right)^2} \times$$

$$\times \left[\frac{m_2 p_1^2}{2 l_1^2} + \frac{(m_1 + m_2) p_2 2}{2 l_2^2} - \frac{m_2 p_1 p_2}{l_1 l_2} \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \right] +$$

$$+ \frac{p_1 p_2 \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}{\left(m_1 + m_2 \sin^2\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right) l_1 l_2} + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi_2} = \frac{\sin 2\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}{\left(m_1 + m_2 \sin^2\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right)^2} \times$$

$$\times \left[\frac{m_2 p_1^2}{2 l_1^2} + \frac{(m_1 + m_2) p_2^2}{2 l_2^2} - \frac{m_2 p_1 p_2}{l_1 l_2} \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \right] -$$

$$- \frac{p_1 p_2 \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}{\left(m_1 + m_2 \sin^2\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right) l_1 l_2} + m_2 g l_2 \sin \varphi_2.$$

Задача 5.2. Переконатися, що дужка Пуассона від двох інтеґралів руху теж є інтеґралом руху.

Розв'язок. Нехай в нас є дві величини A і B, які є інтеґралами руху для системи, що описується гамільтоніаном H. Це означає, що дужки Пуассона цих величин із заданим гамільтоніаном рівні нулеві

$$\{A, H\} = 0, \qquad \{B, H\} = 0.$$

Переконаймося, що й дужка Пуасонна $\{A, B\}$ є інтеґралом руху, тобто, що виконується рівність

$$\{\{A, B\}, H\} = 0.$$

Для величин A, B й H запишемо тотожність Якобі:

$$\{\{A, B\}, H\} + \{\{H, A\}, B\} + \{\{B, H\}, A\} = 0.$$

Перепишемо її так:

$$\{\{A, B\}, H\} = -\{\{H, A\}, B\} - \{\{B, H\}, A\}.$$

У правій стороні цієї рівності є дужки Пуассона між величинами A, B і гамільтоніаном, які рівні нулеві. Тоді отримаємо рівність

$$\{\{A, B\}, H\} = 0,$$

яка означає, що дужка Пуассона від двох інтеґралів руху теж є інтеґралом руху.

Задача 5.3. Використовуючи дужки Пуассона, знайти рівняння руху для системи, що описується гамільтоніаном

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Вважати, що в початковий момент часу система мала координату $x(t = 0) = x_0$ і швидкість $v(t = 0) = v_0$.

Розв'язок. Беручи до уваги, що $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, рівняння руху для x запишемо у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H\}.$$

Використовуючи властивості дужок Пуассона і фундаментальні дужки Пуассона, розрахуємо праву сторону цього рівняння

$$\{x, H\} = \left\{x, \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right\} = \frac{1}{2m}\left\{x, p^2\right\} + \frac{m\omega^2}{2}\left\{x, x^2\right\} =$$

$$= \frac{p}{m}\{x, p\} + m\omega^2 x\{x, x\} = \frac{p}{m}.$$

Тепер рівняння руху перепишеться так

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}.$$

Проте в правій стороні цього рівняння міститься імпульс p, який також залежить від часу. Запишемо для нього рівняння руху

$$\frac{dp}{dt} = \{p, H\}.$$

Тут дужка Пуассона імпульсу з гамільтоніаном має вигляд

$$\{p, H\} = \left\{p, \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right\} = \frac{1}{2m}\left\{p, p^2\right\} + \frac{m\omega^2}{2}\left\{p, x^2\right\} =$$

$$= \frac{p}{m}\{p, p\} + m\omega^2 x\{p, x\} = -m\omega^2 x.$$

Таким чином, маємо систему із двох диференційних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \qquad \frac{dp}{dt} = -m\omega^2 x.$$

Візьмемо похідну за часом від першого рівняння й отримаємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{m}\frac{dp}{dt} = 0.$$

Тепер, підставивши сюди друге рівняння, будемо мати

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

Його розв'язок запишемо у вигляді

$$x = A\sin(\omega t + \varphi),$$

де A і φ — константи інтеґрування, які шукаються з початкових умов. Враховуючи, що в початковий момент часу $x(t=0) = x_0$ і швидкість $v(t=0) = v_0$, отримаємо два таких рівняння

$$A\sin\varphi = x_0, \qquad A\omega\cos\varphi = v_0.$$

Звідси знаходимо A і φ:

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2}, \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right).$$

Задача 5.4. До гамільтоніана

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

застосовують канонічне перетворення, що описується твірною функцією

$$F_1(q, Q) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot Q.$$

Знайти:

1. $H(P, Q)$;
2. твірну функцію $F_2(q, P)$, яка веде до того самого канонічного перетворення.

Розв'язок.

1. Нам потрібно перейти від набору змінних $\{q, p\}$ до змінних $\{Q, P\}$. З цією метою скористаємося такими канонічними перетвореннями:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \qquad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}, \qquad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Використовуючи вираз для $F_1(q, Q)$, легко отримати співвідношення

$$p = m\omega q \cot Q, \qquad P = \frac{1}{2} m\omega q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}.$$

Із цих співвідношень знаходимо змінні q, p як функції від Q, P:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \qquad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q.$$

Підставляючи ці значення в гамільтоніан з урахуванням того, що $\dfrac{\partial F_1}{\partial t} = 0$, отримаємо

$$H(P, Q) = \omega P.$$

2. Щоб знайти вигляд твірної функції $F_2(q, P)$, скористаємося набором канонічних перетворень

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \qquad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}.$$

Твірна функція $F_2(q, P)$ залежить від змінних $\{q, P\}$, тому нам потрібно виразити змінні $\{p, Q\}$ через $\{q, P\}$. З цією метою використаємо співвідношення між наборами змінних, які ми отримали в попередньому пункті для твірної функції $F_1(q, Q)$. У результаті матимемо

$$p = \sqrt{m\omega}\sqrt{2P - m\omega q^2}, \qquad Q = \arcsin \sqrt{\frac{m\omega q^2}{2P}}.$$

Таким чином, маємо систему рівнянь

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = \sqrt{m\omega}\sqrt{2P - m\omega q^2},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P} = \arcsin \sqrt{\frac{m\omega q^2}{2P}}.$$

Проінтеґруємо друге рівняння

$$F_2 = \int \arcsin\sqrt{\frac{m\omega q^2}{2P}}\, dP + C(q),$$

де $C(q)$ — функція, яка може залежати від q. Візьмемо цей інтеґрал частинами. Введемо таку заміну змінних

$$u = \arcsin\sqrt{\frac{m\omega q^2}{2P}}, \quad du = -\frac{1}{2P}\sqrt{\frac{m\omega q^2}{2P - m\omega q^2}}\, dP,$$
$$dv = dP, \qquad v = P.$$

Тоді

$$F_2 = \int \arcsin\sqrt{\frac{m\omega q^2}{2P}}\, dP + C(q) =$$
$$= P\arcsin\sqrt{\frac{m\omega q^2}{2P}} + \frac{\sqrt{m\omega q^2}}{2}\int\frac{dP}{\sqrt{2P - m\omega q^2}} + C(q) =$$
$$= P\arcsin\sqrt{\frac{m\omega q^2}{2P}} + \frac{1}{2}\sqrt{m\omega q^2}\sqrt{2P - m\omega q^2} + C(q).$$

Щоб знайти $C(q)$, отриманий вираз підставимо в перше рівняння. Після спрощень отримаємо, що

$$\frac{dC(q)}{dq} = 0.$$

Враховуючи, що твірна функція визначена з точністю до константи, покладаємо $C(q) = 0$. У результаті отримуємо

$$F_2 = P\arcsin\sqrt{\frac{m\omega q^2}{2P}} + \frac{1}{2}\sqrt{m\omega q^2}\sqrt{2P - m\omega q^2}.$$

6. Малі коливання

Розглянемо одновимірну систему, що здійснює вільні коливання. Нехай положення системи задає координата q. Коливання відбуваються навколо положення рівноваги з координатою q_0. Лаґранжіан такої системи має вигляд

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q).$$

Введемо координату $x = q - q_0$, яка задає відхилення системи від положення рівноваги, і будемо вважати, що такі відхилення є малими. Розкладемо вирази для кінетичної та потенціальної енергій в ряд Тейлора відносно x і обмежимося доданками, пропорційними x^2. Тоді кінетичну енергію перепишемо у вигляді

$$T = \frac{a(q_0 + x)}{2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}(a(q_0) + \ldots)\dot{x}^2 \approx \frac{m\dot{x}^2}{2},$$

де з розмірних міркувань $m = a(q_0)$ є масою системи. Потенціальна енергія має такий вигляд

$$U(q) = U(q + x) = U(q_0) + \left.\frac{dU(q)}{dq}\right|_{q=q_0} x + \left.\frac{d^2U(q)}{dq^2}\right|_{q=q_0} x^2 + \ldots \approx$$

$$\approx U(q_0) + \frac{kx^2}{2}.$$

Тут ми врахували умови, що в точці рівноваги потенціальна енергія має мінімум:

$$\left.\frac{dU(q)}{dq}\right|_{q=q_0} = 0, \qquad k = \left.\frac{d^2U(q)}{dq^2}\right|_{q=q_0} > 0.$$

Таким чином, лаґранжіан системи прийме вигляд

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}, \qquad k = \left.\frac{d^2U(q)}{dq^2}\right|_{q=q_0}.$$

Це лаґранжіан гармонічного осцилятора, рівняння руху якого задається виразом

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),$$

де $\omega = \sqrt{k/m}$ — частота коливань, A — амплітуда коливань і φ — початкова фаза коливань.

У випадку, коли система перебуває в полі зовнішніх сил $U_{\text{ext}}(q,t)$, лаґранжіан такої системи буде мати вигляд

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q) - U_{\text{ext}}(q,t).$$

Тоді у випадку малих відхилень

$$U_{\text{ext}}(q,t) \approx U_{\text{ext}}(q_0,t) + \left.\frac{dU_{\text{ext}}(q,t)}{dq}\right|_{q=q_0} x,$$

де

$$\left.\frac{dU_{\text{ext}}(q,t)}{dq}\right|_{q=q_0} \neq 0, \qquad \left.\frac{dU_{\text{ext}}(q,t)}{dq}\right|_{q=q_0} x \gg \left.\frac{d^2U(q,t)}{dq^2}\right|_{q=q_0} x^2.$$

У цьому випадку лаґранжіан і рівняння руху є такими

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + F_{\text{ext}}(t)x,$$

$$m\ddot{x} + kx = F_{\text{ext}}(t),$$

де

$$F_{\text{ext}}(t) = -\left.\frac{dU_{\text{ext}}(q,t)}{dq}\right|_{q=q_0}$$

має зміст зовнішньої сили. Для дослідження коливань такої системи зручно ввести нову змінну

$$\xi = \dot{x} + i\omega x,$$

з якою рівняння руху набуде вигляду

$$\dot{\xi} - i\omega\xi = \frac{F_{ex}(t)}{m}.$$

Розв'язок цього рівняння запишемо у вигляді

$$\xi = \frac{e^{i\omega t}}{m}\left(\int_0^t F_{\text{ext}}(t)e^{-i\omega t}\,dt + \xi_0\right).$$

Енергія осцилятора в змінні ξ запишеться наступним чином

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right) =$$
$$= \frac{m}{2}\left(\dot{x} + i\omega x\right)\left(\dot{x} - i\omega x\right) = \frac{m}{2}\xi\xi^* = \frac{m}{2}|\xi|^2.$$

У випадку, коли система має s ступенів вільності, то її лаґранжіан є таким

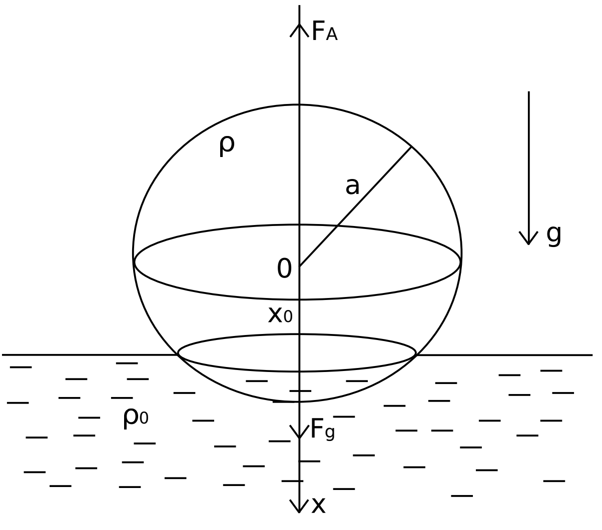
$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s}\left(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_i x_j\right),$$

де x_i — відхилення системи від положення рівноваги за однією з координат. Частоти малих коливань ω такої системи знаходяться з умови

$$\det\left|k_{ij} - \omega^2 m_{ij}\right| = 0.$$

Задача 6.1. Знайти частоту малих коливань однорідного поплавка густини ρ в рідині з густиною $\rho_0 > \rho$, якщо він має форму кулі радіуса a.

Розв'язок. Коливання поплавка на воді відбуваються вздовж одного напрямку, тому достатньо однієї координати, щоб описати такий рух. Спрямуємо вісь x згори донизу через центр поплавка і задамо початок координат в його центрі. На поплавок діє сила Архімеда, яка спрямована догори, і сила тяжіння, спрямована донизу. Коли поплавок знаходиться в стані спокою, тобто сила Архімеда зрівноважена силою тяжіння, то коливання не відбуваються. У цьому положенні частина поплавка буде занурена у воду. Позначимо відстань від початку координат до рівня занурення поплавка у воду x_0. Будемо досліджувати коливання навколо цього положення.



Визначимо положення рівноваги з умови рівності сили тяжіння і сили Архімеда

$$F_{\text{A}} = F_{\text{g}},$$

де

$$F_{\text{A}} = \rho_0 g V_0$$

— сила Архімеда, а

$$F_{\text{g}} = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho g$$

— сила тяжіння. Тут V_0 є об'ємом сегмента поплавка, що знаходиться під водою. Так як поплавок є кулею, то цей об'єм визначається таким виразом:

$$V_0 = \frac{\pi}{3}(a - x_0)^2(3a - (a - x_0)) = \frac{\pi}{3}(x_0^3 - 3a^2x_0 + 2a^3).$$

Підставляючи ці вирази в рівність для сил, отримаємо кубічне рівняння на x_0:

$$x_0^3 - 3a^2x_0 + 2a^3\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_0}\right) = 0.$$

Воно має такий фізичний розв'язок

$$x_0 = 2a\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right).$$

Тепер припустимо, що ми легко відтягнули поплавок вздовж осі x від положення рівноваги. Тоді він почне здійснювати малі коливання навколо точки x_0. Знайдемо частоту цих коливань. Для цього запишемо результуючу силу F, яка буде діяти на поплавок

$$F = F_{\mathrm{g}} - F_{\mathrm{A}}.$$

Врахуємо, що коли поплавок занурений у воду до рівня точки з координатою x, то сила Архімеда буде мати вигляд

$$F_{\mathrm{A}} = \rho_0 g\frac{\pi}{3}\left(x^3 - 3a^2x + 2a^3\right).$$

Тоді

$$F = -\rho_0 g\frac{\pi}{3}\left(x^3 - 3a^2x + 2a^3\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right).$$

Потенціальна енергія такої системи обчислюється так:

$$U = -\int F\,dx = \rho_0 g\frac{\pi}{3}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}a^2x^2 + 2a^3\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_0}\right)x\right).$$

Друга похідна від цього виразу в точні x_0 має такий вигляд

$$\left.\frac{d^2U(q)}{dx^2}\right|_{x=x_0} = \rho_0 g\pi\left(x_0^2 - a^2\right).$$

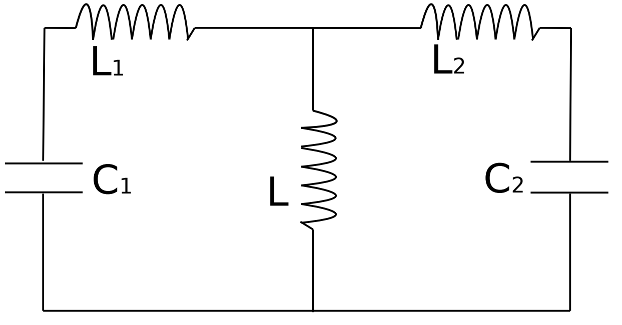
Отже, частота малих коливань поплавка задається виразом

$$\omega = \sqrt{\frac{\left.\frac{d^2U(q)}{dx^2}\right|_{x=x_0}}{\frac{4}{3}\pi a^3\rho}} = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{g}{a^3}\frac{\rho_0}{\rho}\left(x_0^2 - a^2\right)}.$$

Нагадаємо, що

$$x_0 = 2a\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right).$$

Задача 6.2. Знайти частоти малих коливань електричного контура, зображеного на рисунку.



Розв'язок. Врахувавши закон збереження заряду, а також енергії магнітного поля в котушках і енергії, які накопичуються в конденсаторах, запишемо лаґранжіан $\mathcal{L}$ такої системи

$$\mathcal{L} = \frac{L_1}{2}\dot{q}_1 + \frac{L_2}{2}\dot{q}_2 + \frac{L}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - \frac{q_1^2}{2C_1} - \frac{q_2^2}{2C_2} =$$

$$= \frac{L + L_1}{2}\dot{q}_1 + \frac{L + L_2}{2}\dot{q}_2 + L\dot{q}_1\dot{q}_2 - \frac{q_1^2}{2C_1} - \frac{q_2^2}{2C_2},$$

де q_1, q_2 — заряди, які в конкретний момент часу накопичуються у відповідних ділянках кола. Така система має два ступені вільності, q_1 і q_2. Запишемо рівняння для знаходження частот її малих коливань

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{C_1} - (L + L_1)\omega^2 & -L\omega^2 \\ -L\omega^2 & \frac{1}{C_2} - (L + L_2)\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи цей визначник, отримаємо рівняння

$$\left(AB - L^2 C_1 C_2\right) \omega^4 - (A + B)\, \omega^2 + 1 = 0,$$

де

$$A = (L + L_1)C_1, \qquad B = (L + L_2)C_2. \tag{6.1}$$

Розв'язуючи його відносно ω, отримаємо дві частоти малих коливань

$$\omega_{1,2} = \left[\frac{A + B \pm \sqrt{(A - B)^2 + 4L^2 C_1 C_2}}{2\,(AB - L^2 C_1 C_2)} \right]^{1/2}.$$

Задача 6.3. Знайти положення рівноваги для маятника Капіци, якщо точка підвісу здійснює вертикальні коливання за законом $y = a \cos \omega t$, де $\omega \gg \sqrt{g/l}$. Маса маятника m, довжина маятника l.

Розв'язок.

Перший спосіб. Рух такої системи відбувається під дією сталого поля U (в нашому випадку ґравітаційного поля) і сили $F(t)$, яка швидко осцилює з часом. У загальному випадку таку силу можна подати у вигляді

$$F(t) = F_1 \cos \omega t + F_2 \sin \omega t,$$

де F_1 і F_2 — функції, які залежать лише від координат. Будемо вважати, що система має тільки один ступінь вільності, і позначимо його координатою x. Рівняння руху такої системи має вигляд

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + F.$$

Розв'язок цього рівняння буде містити доданок $X(t)$, який повільно змінюється з часом, і доданок, який враховує осциляції $\xi(t)$:

$$x(t) = X(t) + \xi(t).$$

Підставимо $x(t)$ в рівняння руху. Тоді, з точністю до перших членів за $\xi(t)$, отримаємо

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dX} - \frac{d^2U}{dX^2}\xi + F + \frac{\partial F}{\partial X}\xi.$$

Це рівняння розбивається на два, з плавними коливаннями і зі швидкоосцилюючими. Для швидкоосцилюючих коливань рівняння набуде вигляду

$$m\ddot{\xi} = F.$$

Доданки, які містять множник ξ, — малі відносно решти осцилюючих членів, тому ми їх відкинули. Інтеґруючи це рівняння двічі за часом, отримаємо розв'язок для ξ:

$$\xi = -\frac{F}{m\omega^2}.$$

Тепер наше загальне рівняння руху усереднимо за часом. Оскільки перші степені F і ξ містять швидкоосцилюючі гармонічні функції, то середні значення цих величин за період $2\pi/\omega$ рівні нулеві. Таким чином, отримаємо рівняння

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} + \overline{\frac{\partial F}{\partial X}\xi}.$$

Підставимо розв'язок для ξ:

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2}\overline{F\frac{\partial F}{\partial X}}.$$

Це рівняння містить тільки змінну X. Занесемо F під похідну і перепишемо його у вигляді

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{\text{eff}}}{dX},$$

де

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{1}{2m\omega^2}\overline{F^2}.$$

Врахувавши, що

$$\overline{F^2} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\left(F_1^2\cos^2\omega t + F_2^2\sin^2\omega t + \frac{1}{2}F_1F_2\sin 2\omega t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(F_1^2 + F_2^2\right),$$

для U_{eff} матимемо

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{1}{4m\omega^2}\left(F_1^2 + F_2^2\right).$$

Легко перевірити, що

$$\frac{1}{4m\omega^2}\left(F_1^2 + F_2^2\right) = \frac{m}{2}\overline{\dot{\xi}^2}$$

є усередненою кінетичною енергією швидкоосцилюючого руху.

У нашому випадку сила F має вигляд [див. розв'язок задачі 4.2 (3) на стор. 42]

$$F = -ma\omega^2\sin\varphi\cos\omega t.$$

З урахуванням

$$F_1 = -ma\omega^2 \sin\varphi, \quad F_2 = 0,$$

U_{eff} набуде вигляду

$$U_{\text{eff}} = mg(l+a) - mgl\cos\varphi + \frac{ma^2\omega^2}{4}\sin^2\varphi.$$

Перший доданок не залежить від часу і не впливає на поведінку системи. Він визначає початок відліку для вимірювання потенціальної енергії, тому його можна відкинути. Тоді

$$U_{\text{eff}} = mgl\left(-\cos\varphi + \frac{a^2\omega^2}{4gl}\sin^2\varphi\right).$$

Положення рівноваги маятника відповідають мінімуму цієї функції. Дослідимо U_{eff} на екстремум. Візьмемо першу похідну за φ і прирівняємо її до нуля

$$\frac{dU_{\text{eff}}}{d\varphi} = mgl\left(\sin\varphi + \frac{a^2\omega^2}{2gl}\sin\varphi\cos\varphi\right) = 0.$$

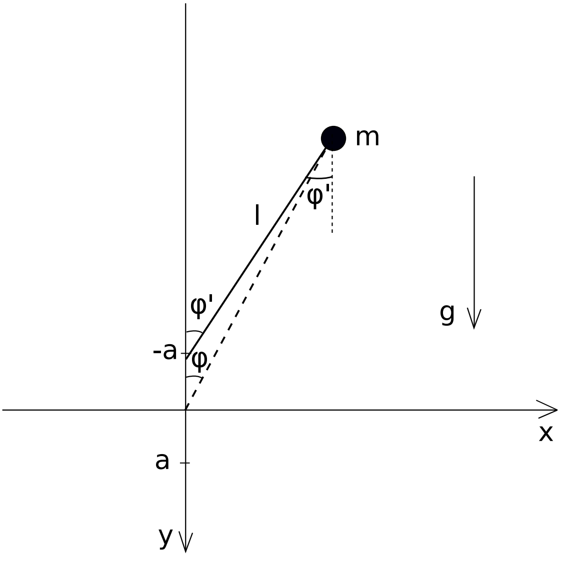
Звідси легко знайти дві точки екстремуму $\varphi = 0, \pi$. Тепер візьмемо другу похідну

$$\frac{d^2U_{\text{eff}}}{d\varphi^2} = mgl\left(\cos\varphi + \frac{a^2\omega^2}{2gl}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)\right)$$

й отримаємо, що в точці $\varphi = 0$ система має завжди положення рівноваги, а в точці $\varphi = \pi$ положення рівноваги виникає при умові, коли $a^2\omega^2 > 2gl$.

Другий спосіб. Тепер дослідимо проблему в той спосіб, яким її розв'язав П. Капіца в 1951 році. Він ґрунтується на аналізі моментів сил, які виникають у такій системі. Розглянемо поведінку маятника відносно системи відліку, яка рухається разом із точкою підвісу. Осі спрямуємо в тих самих напрямках, що й у випадку нерухомої системи відліку. За рахунок того, що точка підвісу рухається з прискоренням $\ddot{y} = -a\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 y$, на маятник уздовж осі ординат буде діяти сила інерції $F_{\rm in} = -m\ddot{y}$. На систему діють сила тяжіння $F_{\rm g} = mg$, сила реакції опори маятника і відцентрова сила. Дві останні будуть спрямовані вздовж від'ємного й додатного напрямків осі маятника. Проте вони нас не цікавлять, бо їх моменти рівні нулеві. Введемо кут φ', який задає абсолютне відхилення маятника від осі ординат у конкретний момент часу, й кут φ, який є усередненим за період осциляцій точки підвісу маятника. Легко переконатися (див. рис. нижче), що ці кути пов'язані таким співвідношенням:

$$\varphi' = \varphi - \frac{y}{l} \sin \varphi.$$



Тепер запишемо моменти сил тяжіння й інерції

$$M_{\rm g} = F_{\rm g} l \sin \varphi' = mgyl \sin \varphi',$$

$$M_{in} = F_{\rm in} l \sin \varphi' = -m\ddot{y} l \sin \varphi' = m\omega^2 yl \sin \varphi'.$$

Скориставшись співвідношенням між кутами φ' і φ, а також врахувавши, що $\frac{y}{l}\sin\varphi$ — мала величина, перепишемо $\sin\varphi'$ у такому вигляді

$$\begin{aligned}\sin\varphi' = \sin\left(\varphi - \frac{y}{l}\sin\varphi\right) = \\ = \sin\varphi\cos\left(\frac{y}{l}\sin\varphi\right) - \cos\varphi\sin\left(\frac{y}{l}\sin\varphi\right) \approx \\ \approx \sin\varphi - \frac{y}{2l}\sin 2\varphi.\end{aligned}$$

Тут ми врахували, що $\cos\left(\frac{y}{l}\sin\varphi\right) \approx 1$ і $\sin\left(\frac{y}{l}\sin\varphi\right) \approx \frac{y}{l}\sin\varphi$. Запишемо моменти сил із урахуванням цього співвідношення:

$$M_{\mathrm{g}} = mgl\sin\varphi - \frac{1}{2}mgy\sin 2\varphi,$$

$$M_{in} = m\omega^2 yl\sin\varphi - \frac{1}{2}m\omega^2 y^2\sin 2\varphi.$$

Ці вирази містять швидкоосцилюючі доданки з y і y^2. Усереднимо їх за періодом коливань точки підвісу

$$\overline{M_{\mathrm{g}}} = mgl\sin\varphi - \frac{1}{2}mg\overline{y}\sin 2\varphi,$$

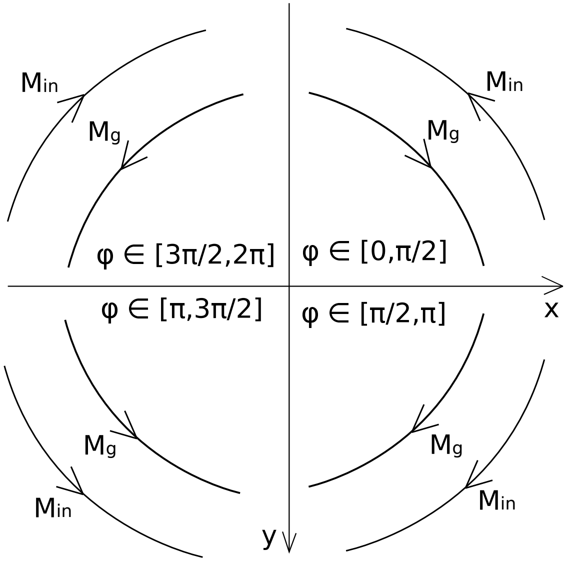
$$\overline{M_{in}} = m\omega^2\overline{y}l\sin\varphi - \frac{1}{2}m\omega^2\overline{y^2}\sin 2\varphi.$$

Нагадаємо, що $y = a\cos(\omega t)$, тоді $\overline{y} = 0$, а $y^2 = a^2\cos(\omega t)$, тому $\overline{y^2} = \frac{a^2}{2}$. Звідси отримаємо

$$\overline{M_{\mathrm{g}}} = mgl\sin\varphi,$$

$$\overline{M_{\mathrm{in}}} = -\frac{1}{4}m\omega^2 a^2\sin 2\varphi.$$

Отже, ми отримали усереднені моменти сил, які діють на маятник у процесі швидких осциляцій точки підвісу. Проаналізуємо напрямки цих моментів для різних значень кута φ. Видно, що момент сили тяжіння буде завжди тягнути маятник до нижньої точки рівноваги, а момент сил інерції буде діяти по-різному в різних півплощинах. А саме, в нижній півплощині момент сил інерції буде тягнути маятник донизу, а у верхній півплощині — догори (див. рисунок).



Таким чином, якщо маятник знаходиться у верхній півплощині й момент сил інерції переважає момент сил тяжіння ($\overline{M_{\text{in}}} > \overline{M_{\text{g}}}$), то виникає верхнє положення рівноваги. Знайдемо умову, за якої воно з'являється. Будемо вважати, що кут φ є малим, тоді можна записати, що

$$\frac{1}{4}m\omega^2 a^2 2\varphi > mgl\varphi.$$

Звідси випливає умова, яка дозволяє існування верхньої точки рівноваги маятника:

$$a^2\omega^2 > 2gl.$$

Список літератури

1. Бар'яхтар В. Г., Бар'яхтар І. В., Гермаш Л. П., Довгий С. О. *Механіка.* Київ : Наукова думка, 2011. 352 с.

2. Блажиєвська М. В., Ровенчак А. А., Сідлецька Н. А, Стецко М. М., Ткачук В. М., Фітьо Т. В. *Збірник задач з теоретичної механіки.* Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2011. 68 с.

3. Валь О., Королюк С., Мельничук С. *Основи векторного та тензорного аналізу.* Чернівці : Книги – XXI, 2006. 228 с.

4. Іро Г. *Класична Механіка.* Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 1999. 464 с.

5. Глауберман А. Ю., Сеньків М. Т. *Лекції з теоретичної фізики. Теоретична механіка.* Львів : Каф. теорет. фізики Львів. ун-ту, 1960. 220 с.

6. Голдстейн Г. *Классическая механика.* Москва : Наука, 1975. 415 с.

7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика: Т. 1. Механика.* Москва : Наука, 1988. 215 с.

8. Ольховский Н. Н. *Курс теоретической механики для физиков.* Москва : Наука, 1975. 574 с.

9. Ольховский Н. Н., Павленко Ю. Г., Кузьменков Л. С. *Задачи по теоретической механики для физиков.* Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1977. 395 с.

10. Сеньків М. Т. *Векторний і тензорний аналіз*. Львів : Львів. ун-т. ім. Івана Франка, 1991. 148 с.

11. Федорченко А. М. *Теоретична механіка*. Київ : Вища школа, 1975. 516 с.

12. тер Хаар Д. *Основы гамильтоновой механики*. Москва : Наука, 1974. 224 с.

Зміст

Навчальне видання

Кузьмак Андрій Романович

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ: ТЕОРІЯ І ПРАКТИКА

Методичні вказівки

Текст надруковано в авторській редакції