

Андрій РОВЕНЧАК



# Екзотичні СТАТИСТИКИ

Міністерство освіти і науки України  
Львівський національний університет імені Івана Франка

*Андрій Ровенчак*

# ЕКЗОТИЧНІ СТАТИСТИКИ

Навчальний посібник

Львів • 2018

УДК 530.145 + 531.19  
Р 58

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб. **А. А. Дувіряк**

(Інститут фізики конденсованих систем  
НАН України, м. Львів);

Dr. rer. nat. habil. **Я. М. Павлюх**

(Technische Universität Kaiserslautern, Німеччина);

д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. М. Гаврилик**

(Інститут теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова  
НАН України, м. Київ)

*Рекомендовано до друку Вченою радою  
Львівського національного університету імені Івана Франка  
(протокол №49/5 від 30.05.2018)*

**Ровенчак А. А.**

Р 58

Екзотичні статистики : навч. посібник / А. А. Ровенчак. —  
Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2018. — 144 с.

ISBN 978-617-10-0461-0

Подано низку узагальнень традиційних квантових статистик Бозе–Айнштайна та Фермі–Дірака. Проаналізовано підходи з боку статистичної фізики і квантової механіки. Розглянуто статистики Джентіле, Поліхронакоса, Голдейна–Ву, Цалліса та інші неекстенсивні узагальнення, парастатистику Гріна,  $q$ -деформації, а також еніонну статистику та квантовий ефект Голла. Окремі розділи присвячено встановленню відповідності між різними типами статистик та математичному апаратові теорії груп і алгебр.

Для студентів та аспірантів фізико-математичних спеціальностей і для самоосвіти.

УДК 530.145 + 531.19

© Ровенчак А. А., 2018

© Львівський національний університет  
імені Івана Франка, 2018

ISBN 978-617-10-0461-0

# Зміст

<b>Передмова</b>	<b>5</b>
<b>1. Вступ</b>	<b>7</b>
Література до розділу 1 . . . . .	12
<b>2. Статистика Джентіле</b>	<b>15</b>
2.1. Розподіл Джентіле . . . . .	15
2.2. Комбінаторний підхід до отримання функції розподілу . .	18
2.3. Ідеальний $D$ -вимірний газ зі статистикою Джентіле . . . .	20
2.4. Границя низьких температур . . . . .	23
2.5. Великі значення максимального заповнення станів . . . . .	26
2.6. Завдання для самостійної роботи . . . . .	28
Література до розділу 2 . . . . .	28
<b>3. Статистика Поліхронакоса</b>	<b>29</b>
3.1. Виведення виразів для чисел заповнення . . . . .	29
3.2. Ідеальний $D$ -вимірний газ зі статистикою Поліхронакоса .	30
3.3. Комплексний параметр статистики . . . . .	35
3.4. Критична температура. Термодинамічні функції . . . . .	38
3.5. Завдання для самостійної роботи . . . . .	43
Література до розділу 3 . . . . .	44
<b>4. Статистика Голдейна–Ву</b>	<b>45</b>
4.1. Виведення виразів для чисел заповнення . . . . .	45
4.2. Термодинамічні функції . . . . .	49
4.3. Стала густина станів . . . . .	51
4.4. Проблема від’ємних імовірностей . . . . .	53
4.5. Завдання для самостійної роботи . . . . .	55
Література до розділу 4 . . . . .	56

<b>5. Неекстенсивні статистики</b>	<b>57</b>
5.1. Вступ . . . . .	57
5.2. Статистика Цалліса . . . . .	59
5.3. Статистики Курадо–Цалліса і Цалліса–Мендеша–Пластіно . . . . .	63
5.4. Інші неекстенсивні узагальнення статистики . . . . .	66
5.5. Слабконеадитивна статистика Поліхронакоса . . . . .	70
5.6. Завдання для самостійної роботи . . . . .	73
Література до розділу 5 . . . . .	74
<b>6. Операторні реалізації дробових статистик</b>	<b>75</b>
6.1. Парабозони і параферміони . . . . .	76
6.2. $q$ -деформації . . . . .	77
6.3. Елементи $q$ -числення . . . . .	84
6.4. $q$ -деформована термодинаміка . . . . .	87
6.5. $\tilde{\mu}$ -деформована термодинаміка . . . . .	90
6.6. Завдання для самостійної роботи . . . . .	93
Література до розділу 6 . . . . .	95
<b>7. Квантовий ефект Голла. Еніонна статистика</b>	<b>97</b>
7.1. Класичний ефект Голла . . . . .	97
7.2. Квантовий ефект Голла . . . . .	99
7.3. Електронний газ у магнітному полі. Рівні Ландау . . . . .	101
7.4. Квантування голлівської провідності . . . . .	102
7.5. Дробовий квантовий ефект Голла . . . . .	105
7.6. Поняття про еніони . . . . .	109
7.7. Квантовомеханічна задача двох еніонів . . . . .	114
7.8. Завдання для самостійної роботи . . . . .	116
Література до розділу 7 . . . . .	117
<b>8. Зв'язок між параметрами дробових статистик</b>	<b>119</b>
8.1. Віріальне і кластерне розвинення . . . . .	119
8.2. Приклади віріальних розвинень . . . . .	121
8.3. Віріальне розвинення для еніонів . . . . .	123
8.4. Встановлення відповідності між статистиками . . . . .	127
8.5. Завдання для самостійної роботи . . . . .	130
Література до розділу 8 . . . . .	130
<b>9. Додаток: Групи та алгебри</b>	<b>131</b>
9.1. Означення та приклади груп . . . . .	131
9.2. Група кіс . . . . .	133
9.3. Алгебри . . . . .	136
9.4. Завдання для самостійної роботи . . . . .	139
Література до розділу 9 . . . . .	140
<b>Предметний покажчик</b>	<b>141</b>
<b>Іменний покажчик</b>	<b>143</b>

## Передмова

Посібник укладено на основі курсу для магістрантів фізичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка, що спеціалізуються з теоретичної фізики. Його мета — ознайомити читачів із фізичними моделями, які можна описувати за допомогою квантових статистичних розподілів, відмінних від традиційних статистик Фермі–Дірака і Бозе–Айнштайна.

Різноманітні типи дробових статистик використовують у широкому спектрі фізичних задач, від фізики конденсованого стану до космології. Зокрема, за їх допомогою створюють ефективні моделі для опису квантових систем з різними типами взаємодій. Частинки з проміжною статистикою, відомі як еніони, є одними з об'єктів, на яких пропонують реалізовувати квантові обчислення. Вивчення неекстенсивних узагальнень статистики важливе у міждисциплінарних дослідженнях складних систем.

Частина викладеного матеріалу ґрунтується на оригінальних авторських дослідженнях. Цей перелік включає статистику Поліхронакоса з комплексним параметром, слабконеадитивну статистику Поліхронакоса, а також двопараметричні моделі функції розподілу еніонів.

Курс є значною мірою ознайомчим і вступним до широкого класу задач. Зважаючи на це, літературу подано для зручності наприкінці кожного розділу. Відповідні джерела сприятимуть самостійному вивченню розглянутих питань.

За обговорення, корисні зауваження і пропозиції під час роботи над посібником висловлюю подяку своїм колегам із кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка, а також рецензентам і редакторам.

*Львів, червень 2018*

## Позначення\*

$a^\dagger, a$	оператори породження і знищення
$b_\ell$	віріальні коефіцієнти
$B_\ell$	кластерні інтеграли
$C, C, C_V$	теплоємність
$D$	вимірність простору
$D_q$	похідна Джексона
$E, \mathcal{E}$	енергія системи
$e_q^x, \exp_q(x)$	$q$ -експонента (Цалліса)
$g$	параметр статистики Голдейна-Ву
$g(\varepsilon)$	густина станів
$G_j$	виродження $j$ -го рівня
$H$	гамільтоніан
$\text{Li}_s(x)$	полілогарифм (функція Бозе)
$\ln_q x$	$q$ -деформований логарифм
$m$	маса частинки
$M$	максимальне заповнення рівня у статистиці Джентіле
$N$	кількість частинок, оператор кількості частинок
$n_j, n(\varepsilon)$	числа заповнення (функція розподілу)
$p_j$	імовірність реалізації стану $j$
$q$	параметр неекстенсивності, параметр деформації в комутаторі
$S$	ентропія
$T$	температура
$V, V_2, \mathcal{V}_D$	об'єм, зокрема дво- і $D$ -вимірний
$W$	кількість мікростанів
$z$	активність
$Z, Z_N$	велика статистична сума
$\alpha$	параметр еніонної статистики
$\beta$	обернена температура, $\beta = 1/T$
$\gamma, \tilde{\gamma}$	параметр статистики Поліхронакоса
$\Gamma(x)$	гамма-функція Ейлера
$\varepsilon, \varepsilon_j$	енергія частинки, енергія $j$ -го стану
$\zeta(x), \zeta_q(x)$	дзета-функція Рімана та її $q$ -загальнення
$\lambda$	довжина теплової хвилі де Бройля
$\mu$	хімічний потенціал
$\tilde{\mu}$	параметр деформації
$\nu$	параметр статистики Поліхронакоса, $\gamma = e^{i\pi\nu}$ , фактор заповнення (у квантовому ефекті Голла)
$\Xi$	велика статистична сума
$\rho_D, \rho$	$D$ -вимірна концентрація (густина), $\rho_D = N/\mathcal{V}_D$ , $\rho = N/V$
$\sigma_j$	генератори групи кіс
$\omega$	частота осцилятора
$\Omega$	великий термодинамічний потенціал

\* Вказано найтипівіші використані позначення.

# Розділ 1

## Вступ

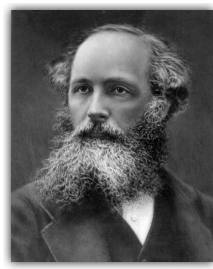
Становлення статистичної фізики як окремої дисципліни почалося у другій половині XIX ст. До її засновників належать Рудольф Клаузіус, який у 1850–1860-х рр. сформулював поняття ентропії, запропонувавши відповідний термін 1865 р. [1], Джеймс Клерк Максвелл, який вивів розподіл молекул за швидкостями в ідеальному газі наприкінці 60-х років XIX ст. [2, 3], Людвіг Больцман, який узагальнив результати Максвелла [4, 5], а також запропонував спосіб розрахунку кількості мікростанів [6]. Цікаво, що відомий вираз  $S = k \log W$ , який навіть викарбувано на могилі Больцмана, насправді вперше записав Макс Планк аж 1901 р. [7].



Рудольф Клаузіус  
(Rudolf Clausius,  
1822–1888)



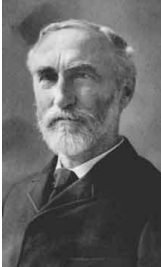
Людвіг Больцман  
(Ludwig Boltzmann,  
1844–1906)



Джеймс Клерк Максвелл  
(James Clerk Maxwell,  
1831–1879)



Джосая Віллард Гіббс, чийм іменем названо парадокс, пов'язаний із нерозрізнювальністю частинок (1874 р. [8]), запропонував поняття статистико-механічних ансамблів та отримав формулу для розподілу ймовірностей [9] — так сформувалася класична *статистика Больцмана–Гіббса*.



Джосая Віллард Гіббс  
(Josiah Willard Gibbs, 1839–1903)

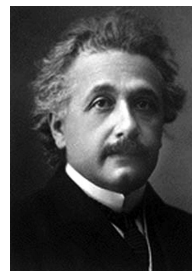


Макс Планк  
(Max Planck, 1858–1947)

На середину 20-х рр. ХХст. припадає початок вивчення квантових розподілів. Спочатку Сат'ендранат Бозе [10] скористався поняттям квантів світла й отримав за допомогою комбінаторних міркувань закон Планка. Альберт Айнштайн [11, 12] поширив цей підхід на випадок масивних частинок, унаслідок чого передбачив за низьких температур макроскопічне заповнення стану з нульовим імпульсом, яке зараз називають *конденсацією Бозе–Айнштейна*, а відповідні частинки підкоряються *статистиці Бозе–Айнштейна*.



Сат'ендранат Бозе  
(Satyendranath Bose, সত্যেন্দ্র নাথ বসু,  
1894–1974)

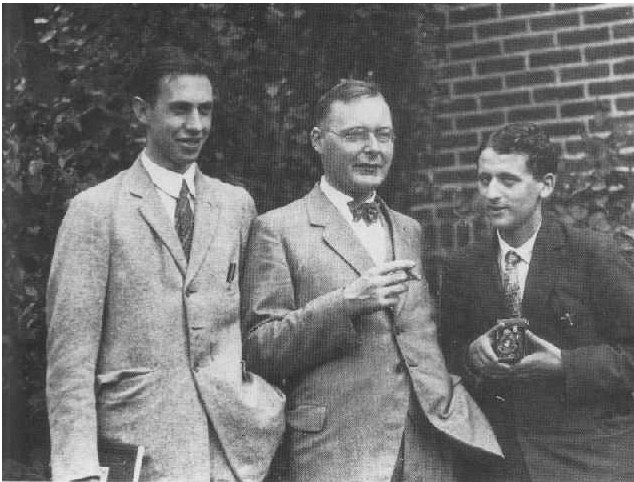


Альберт Айнштайн  
(Albert Einstein, 1879–1955)

Чимало питань статистичної фізики, зокрема в контексті її зв'язку з квантовою теорією, розглядав у своїх працях Пауль Еренфест: це й поняття адиабатичних інваріантів [13], і класифікація фазових переходів [14] та багато інших. Його учні, Семюел Гаудсміт та Джордж Уленбек, запропонували 1925 р. нове квантове число — *спін* [15, 16]. Воно дозволило обґрунтувати принципи заборони для електронів, який сформулював цього ж року Вольфганг Паулі [17].



Пауль Еренфест  
(Paul Ehrenfest;  
1880–1933)



Учні Пауля Еренфеста, зліва направо: Джордж Уленбек (George Eugene Uhlenbeck, 1900–1988), Гендрик Крамерс (Hendrik Anthony Kramers, 1894–1952) та Семюел Гаудсміт (Samuel Abraham Goudschmidt, 1902–1978)

Енріко Фермі [18] та Поль Дірак [19] 1926 р. вивели функцію розподілу для частинок, на які поширюється принцип заборони Паулі, започаткувавши *статистику Фермі–Дірака*.

Якщо хвильова функція системи тотожних частинок є симетричною щодо їх перестановок, то такі частинки підкоряються статистиці Бозе–Айнштайна (або просто *статистиці Бозе*) — їх називають *бозонами*. Вони мають цілий спін і в одному квантовому стані їх може перебувати як завгодно. У випадку антисиметричної хвильової функції будемо мати справу зі статистикою

Фермі–Дірака (або *статистикою Фермі*), а самі частинки називають *ферміонами*. Їх спин — півцілий, а в одному квантовому стані може перебувати не більше одного ферміона (це і є вже згадуваний принцип заборони Паулі).



Енріко Фермі  
(Enrico Fermi, 1901–1954)



Поль Дірак  
(Paul Adrien Maurice Dirac, 1902–1984)

Фактично, наведене твердження становить зміст *теорему про зв'язок спіну зі статистикою*. Її сформулював у 1939 р. Маркус Фірц [20], а згодом детальніше опрацювали Вольфганг Паулі [21] та Юліан Швінгер [22].



Вольфганг Паулі  
(Wolfgang Ernst Pauli,  
1900–1958)



Маркус Фірц  
(Markus Eduard Fierz,  
1912–2006)



Юліан Швінгер  
(Julian Seymour  
Schwinger, 1918–1994)

Сучасна наукова картина світу каже, що реальні частинки можуть бути або ферміонами, або бозонами. Різноманітні узагальнення, відомі як «проміжні», «дробові», «нестандартні», «інтерполяційні», «модифіковані» чи «екзотичні» статистики, виникають лише як ефективний наслідок, наприклад, через урахування взаємодій чи перехід у двовимірний простір. У багатьох задачах використання таких нових статистик також пов'язане зі спрощенням математичного формулювання.

Способи побудови дробових статистик можна розділити на дві групи. До першої належать ті, що ґрунтуються переважно на поняттях статистичної фізики, наприклад, вираз для кількості мікростанів або означення ентропії. Друга група пов'язана з квантовомеханічними підходами і включає, зокрема, узагальнення симетричних властивостей хвильової функції та деформації стандартних комутаційних співвідношень. У деяких випадках між способами побудови з різних груп можна встановити простий зв'язок.

У розділах 2–4 проаналізовано статистико-механічні підходи до введення проміжної статистики, починаючи від першого відомого способу, який запропонував Джованні Джентіле (мол.) 1940 р. [23]. У статистиці Джентіле максимальне заповнення стану обмежене скінченним числом між одиницею (статистика Фермі) та безмежністю (статистика Бозе). Наступні узагальнення пов'язані з різними підходами до підрахунку кількості мікростанів. Для статистик Бозе (BE) та Фермі (FD) відповідні вирази мають вигляд:

$$W_j^{\text{BE}} = \frac{(G_j + N_j - 1)!}{N_j!(G_j - 1)!}, \quad W_j^{\text{FD}} = \frac{G_j!}{N_j!(G_j - N_j)!}, \quad (1.1)$$

де  $G_j$  — ступінь виродження  $j$ -го стану, а  $N_j$  — кількість частинок у ньому. Середні значення чисел заповнення  $n_j = N_j/G_j$  стану з енергією  $\varepsilon_j$  у великому канонічному ансамблі будуть

$$n_j^{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)} - 1}, \quad n_j^{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)} + 1}, \quad (1.2)$$

де  $\beta = 1/T$  — обернена температура, а  $\mu$  — хімічний потенціал. Надалі температуру й енергію вимірюватимемо в однакових одиницях, тому стала Больцмана  $k_B = 1$ .

Алексіос Поліхронакос 1996 р. дав інтерпретацію способу заповнення станів [24], з якої випливає такий вираз для  $n_j$ :

$$n_j^{\text{P}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)} - \gamma}.$$

Так звана **дробова виключна статистика** (англ. *fractional exclusion statistics*) пов'язана з працями Данкана Голдейна, який увів узагальнення принципу заборони Паулі (1991 р. [25]), та Йон-Ші Ву (1994 р. [26]), який отримав відповідну функцію розподілу.

Окремо в розділі 5 виділено підходи, пов'язані з неадитивними та неекстенсивними узагальненнями ентропії, які запропонував 1988 р. Константіно Цалліс [27], а згодом розвинули його колеги та вчені з інших наукових груп.

У розділі 6 згруповано квантовомеханічні узагальнення квантових статистик, що ґрунтуються на модифікаціях комутаційних співвідношень між операторами породження–знищення. Герберт Сидні Грін запропонував 1953 р. так звану *парастатистику*, розглядаючи комбінації комутаторів трьох і більше операторів [28]. Ще один спосіб пов'язаний із так званими  $q$ -деформованими комутаторами або  *$q$ -мутаторами*  $[a, a^\dagger]_q = aa^\dagger - qa^\dagger a$ . Послідовна побудова термодинаміки для таких систем дещо відрізняється і від звичайної термодинаміки, і від її неекстенсивних узагальнень.

Розділ 7 присвячено таким макроскопічним квантовим явищам, як цілочисельний та дробовий квантові ефекти Голла — квантування за низьких температур у двовимірному електронному газі голлівської провідності  $\sigma_H = \nu e^2/h$ , де  $\nu$  — ціле число або раціональний дріб, відповідно. Для опису дробового квантового ефекту Голла, відкритого 1982 р. [29], можна скористатися поняттям *еніонів* (англ. *anyon*, від *any* — ‘будь-який’) [30]. Цим терміном називають частинки, для яких фаза хвильової функції при перестановці двох частинок може набувати довільних значень. Як показали 1977 р. Йон Манне Лайнос і Ян Міргайм, це може відбуватися у двовимірних системах, на відміну від тривимірного випадку [31].

У розділі 8 обговорено способи встановлення зв'язку між різними типами дробових статистик. Особливу увагу тут зосереджено на формалізмі віріального і кластерного розвинення, яке дає змогу пов'язати статистико-механічні підходи з еніонною статистикою.

Завершальний розділ 9 містить інформацію переважно довідкового характеру про групи та алгебри.

## Література до розділу 1

- [1] R. Clausius. Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie. *Ann. Phys. Chem.*, 125(7): 353–400, 1865.
- [2] J. C. Maxwell. On the dynamical theory of gases. *Phil. Trans. R. Soc. London*, 157: 49–88, 1867.

- [3] J. C. Maxwell. On the dynamical theory of gases. *Phil. Mag. Ser. 4*, 35: 129–145; 185–217, 1868.
- [4] L. Boltzmann. Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen. *Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Cl. (Abt. 2)*, 63: 397–418, 1871.
- [5] L. Boltzmann. Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht. *Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Cl. (Abt. 2)*, 63: 679–711, 1871.
- [6] L. Boltzmann. Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den Sätzen über das Wärmegleichgewicht. *Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Cl. (Abt. 2)*, 76: 373–435, 1877.
- [7] M. Planck. Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum. *Ann. Phys.*, 309(3): 553–563, 1901.
- [8] J. W. Gibbs. On the equilibrium of heterogeneous substances. *Trans. Connecticut Acad. Arts Sci.*, 3: 108–248; 343–520, 1874–1878.
- [9] J. W. Gibbs. *Elementary Principles in Statistical Mechanics*. C. Scribner, New York, 1902.
- [10] Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Zs. Phys.*, 26(1): 178–181, 1924.
- [11] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. *Sitzungsber. Preuss. Konigl. Akad. Wiss.: phys.-math. Klasse*, 261–267, 1924.
- [12] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung. *Sitzungsber. Preuss. Konigl. Akad. Wiss.: phys.-math. Klasse*, 3–14, 1925.
- [13] P. Ehrenfest. Adiabatic invariants and the theory of quanta. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 33(198): 500–513, 1917.
- [14] P. Ehrenfest. Phasenumwandlungen im ueblichen und erweiterten Sinn, classificiert nach den entsprechenden Singularitaeten des thermodynamischen Potentiales. *Verh. Kon. Akad. Weten., Communications from the Physical Laboratory of the University of Leiden, Supplement No. 75b*, 36: 153–157, 1933.
- [15] G. E. Uhlenbeck and S. Goudsmit. Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons. *Naturwiss.*, 13(47): 953–952, 1925.

- 
- [16] G. E. Uhlenbeck and S. Goudsmit. Spinning electrons and the structure of spectra. *Nature*, 117:264–265, 1926.
- [17] W. Pauli jr. Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren. *Zs. Phys.*, 31(1):765–783, 1925.
- [18] E. Fermi. Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases. *Zs. Phys.*, 36(11–12):902–912, 1926.
- [19] P. A. M. Dirac. On the theory of quantum mechanics. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 112(762):661–677, 1926.
- [20] M. Fierz. Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin. *Helvetica Physica Acta*, 12:3–37, 1939.
- [21] W. Pauli. The connection between spin and statistics. *Phys. Rev.*, 58(8):716–722, 1940.
- [22] J. Schwinger. The theory of quantized fields. I. *Phys. Rev.*, 82(6):914–927, 1951.
- [23] G. Gentile. Osservazioni sopra le statistiche intermedie. *Nuovo Cim.*, 17:493–497, 1940.
- [24] A. P. Polychronakos. Probabilities and path-integral realization of exclusion statistics. *Phys. Lett. B*, 365(1–4):202–206, 1996.
- [25] F. D. M. Haldane. “Fractional statistics” in arbitrary dimension: A generalization of the Pauli principle. *Phys. Rev. Lett.*, 67(8):937–940, 1991.
- [26] Y.-S. Wu. Statistical distribution for generalized ideal gas of fractional-statistics particles. *Phys. Rev. Lett.*, 73(7):922–925, 1994.
- [27] C. Tsallis. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *J. Stat. Phys.*, 52(1–2):479–486, 1988.
- [28] H. S. Green. A generalized method of field quantization. *Phys. Rev.*, 90(2):270–273, 1953.
- [29] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Phys. Rev. Lett.*, 48(22):1559–1562, 1982.
- [30] B. I. Halperin. Statistics of quasiparticles and the hierarchy of fractional quantized Hall states. *Phys. Rev. Lett.*, 52(18):1583–1586, 1984.
- [31] J. M. Leinaas and J. Myrheim. On the theory of identical particles. *Nuovo Cim.*, 37B(1):1–23, 1977.

## Розділ 2

# Статистика Джентіле

### 2.1. Розподіл Джентіле

У цьому розділі розглядатимемо одне з найпростіших узагальнень добре відомих двох квантових статистичних розподілів Бозе–Айнштайна і Фермі–Дірака. У першому з них в одному стані може перебувати довільна кількість частинок, зокрема й макроскопічно велика. У розподілі Фермі в одному стані може перебувати лише одна частинка.

Можна постулювати певний проміжний розподіл, у якому максимальна заповненість стану буде обмежена якимось скінченним числом  $M$ . Відповідна статистика має назву статистики Джентіле (Gentile, 1940) [1]. Зрозуміло, що при  $M = 1$  матимемо граничний випадок розподілу Фермі, а  $M = \infty$  відповідає розподілу Бозе.

Одним зі способів отримання функції розподілу є використання формалізму



Джованні Джентіле (мол.)  
(Giovanni Gentile Jr;  
1906–1942)



великого канонічного ансамблю. Розглядатимемо систему  $N$  частинок, у якій в  $i$ -му стані з енергією  $\varepsilon_i$  перебуває  $n_i$  частинок. Повна кількість частинок буде

$$N = \sum_i n_i, \quad (2.1)$$

а повна енергія

$$E = \sum_i n_i \varepsilon_i. \quad (2.2)$$

Треба зазначити, що  $n_i$  можуть набувати значень від 0 до максимального заповнення стану  $M$ .

Статистична сума системи з  $N$  частинок дорівнює

$$Z_N = \sum_{\{n_i\}} \exp\left(-\frac{1}{T} \sum_i n_i \varepsilon_i\right), \quad (2.3)$$

де  $T$  — температура, а сукупність  $\{n_i\}$  характеризує стани цілої системи  $N$  частинок. Зауважмо, що при цьому виконується умова (2.1).

Велика статсума записується так:

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N. \quad (2.4)$$

де  $z = e^{\mu/T}$  — активність,  $\mu$  — хімічний потенціал.

Можна показати, що цей вираз зводиться до вигляду

$$\Xi = \prod_i \sum_{n_i} \left[ z \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right) \right]^{n_i}. \quad (2.5)$$

Знайдемо суму за  $n_i$  як суму скінченної геометричної прогресії:

$$\sum_{n_i=0}^M \left[ z \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right) \right]^{n_i} = \frac{z^{M+1} \exp\left(-\frac{(M+1)\varepsilon_i}{T}\right) - 1}{z \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right) - 1}. \quad (2.6)$$

Отже, велика статистична сума набуде вигляду:

$$\Xi = \prod_i \frac{z^{M+1} \exp\left(-\frac{(M+1)\varepsilon_i}{T}\right) - 1}{z \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right) - 1}. \quad (2.7)$$

Звідси, враховуючи вираз для термодинамічного потенціалу

$$\Omega = -T \ln \Xi, \quad (2.8)$$

знаходимо кількість частинок:

$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \ln z}\right)_{T,V} = \\ &= \sum_i \left[ \frac{1}{z^{-1} e^{\varepsilon_i/T} - 1} - \frac{M+1}{z^{-(M+1)} e^{(M+1)\varepsilon_i/T} - 1} \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Отже, для чисел заповнення можна записати вираз

$$n_i = \frac{1}{z^{-1} e^{\varepsilon_i/T} - 1} - \frac{M+1}{z^{-(M+1)} e^{(M+1)\varepsilon_i/T} - 1}, \quad (2.10)$$

який і є функцією розподілу у статистиці Дженгіле:

$$n^G(\varepsilon) = \frac{1}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - 1} - \frac{M+1}{z^{-(M+1)} e^{(M+1)\varepsilon/T} - 1}. \quad (2.11)$$

Легко перекоонатися, що граничні випадки  $M = 1$  і  $M = \infty$  приводять до функцій розподілу статистики Фермі–Дірака й Бозе–Айнштайна, відповідно:

$$n^G(\varepsilon) \Big|_{M=1} = n^{\text{FD}}(\varepsilon) = \frac{1}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} + 1}, \quad (2.12)$$

$$n^G(\varepsilon) \Big|_{M=\infty} = n^{\text{BE}}(\varepsilon) = \frac{1}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - 1}. \quad (2.13)$$

## 2.2. Комбінаторний підхід до отримання функції розподілу

Функцію розподілу у статистиці Джентіле можна отримати з комбінаторних міркувань, керуючись виразом для кількості способів розподілу частинок за всіма можливими станами

$$W = \prod_i \frac{G_i!}{p_i(0)!p_i(1)! \dots p_i(M)!}, \quad (2.14)$$

де повна кількість частинок в  $i$ -му стані  $N_i = \sum_{j=0}^M jp_i(j)$ , тобто  $p_i(j)$  визначає в  $i$ -му стані кількість «комірок», де перебуває рівно  $j$  частинок, а  $G_i = \sum_{j=0}^M p_i(j)$  — ваговий множник  $i$ -го стану (повна кількість «комірок»). Для цього шукатимемо екстремум функції

$$\ln W = \ln \prod_i \frac{G_i!}{p_i(0)!p_i(1)! \dots p_i(M)!}$$

за умов

$$\delta G_i = \delta \sum_{j=0}^M p_i(j) = 0, \quad \delta N = \delta \sum_i \sum_{j=0}^M jp_i(j) = 0,$$

$$\delta E = \delta \sum_i \sum_{j=0}^M \varepsilon_i jp_i(j) = 0,$$

що фіксують зокрема кількість частинок  $N$  та енергію  $E$ .

Варіація, з урахуванням формули Стірлінга, буде

$$\begin{aligned} \delta \ln W &= \sum_i \left\{ \underbrace{\delta \ln G_i!}_{=0} - \delta \ln p_i(0)! - \delta \ln p_i(1)! - \dots - \delta \ln p_i(M)! \right\} = \\ &= - \sum_i \delta \left\{ p_i(0) \ln p_i(0) - p_i(0) + \dots + p_i(M) \ln p_i(M) - p_i(M) \right\} = \\ &= - \sum_i \left\{ \ln p_i(0) \delta p_i(0) + \dots + \ln p_i(M) \delta p_i(M) \right\}. \end{aligned}$$

Скористаємось методом множників Лагранжа:

$$\delta \ln W - \beta \delta E + \nu \delta N + \sum_i \gamma_i \delta G_i = 0.$$

Розписуючи відповідні варіації, матимемо:

$$\begin{aligned} \sum_i \left\{ -\ln p_i(0) \delta p_i(0) - \dots - \ln p_i(M) \delta p_i(M) - \right. \\ \left. - \beta \varepsilon_i 0 \delta p_i(0) - \dots - \beta \varepsilon_i M \delta p_i(M) + \right. \\ \left. + \nu 0 \delta p_i(0) + \dots + \nu M \delta p_i(M) + \right. \\ \left. + \gamma_i \delta p_i(0) + \dots + \gamma_i \delta p_i(M) \right\} = 0. \end{aligned}$$

У результаті

$$p_i(j) = e^{\gamma_i + \nu j - \beta j \varepsilon_i}.$$

Множники  $\gamma_i$  визначаємо з умови

$$G_i = \sum_{j=0}^M p_i(j) = e^{\gamma_i} \sum_{j=0}^M e^{\nu j - \beta j \varepsilon_i} = e^{\gamma_i} \frac{1 - e^{(M+1)(\nu - \beta \varepsilon_i)}}{1 - e^{(\nu - \beta \varepsilon_i)}}.$$

Отже,

$$p_i(j) = G_i \frac{1 - e^{(\nu - \beta \varepsilon_i)}}{1 - e^{(M+1)(\nu - \beta \varepsilon_i)}} e^{(\nu - \beta \varepsilon_i)j}.$$

Вираз для чисел заповнення  $N_i$  можна знайти, розглянувши запис для кількості частинок

$$N = \sum_i N_i = \sum_i \sum_{j=0}^M j p_i(j).$$

Тобто

$$N_i = G_i \frac{1 - e^{(\nu - \beta \varepsilon_i)}}{1 - e^{(M+1)(\nu - \beta \varepsilon_i)}} \sum_{j=0}^M j e^{(\nu - \beta \varepsilon_i)j}.$$

Функція розподілу для  $i$ -го стану

$$\begin{aligned}
 n^G(\varepsilon_i) &= \frac{N_i}{G_i} = \frac{1 - e^{(\nu - \beta\varepsilon_i)}}{1 - e^{(M+1)(\nu - \beta\varepsilon_i)}} \frac{\partial}{\partial(\nu - \beta\varepsilon_i)} \sum_{j=0}^M e^{(\nu - \beta\varepsilon_i)j} = \\
 &= \frac{1 - e^{(\nu - \beta\varepsilon_i)}}{1 - e^{(M+1)(\nu - \beta\varepsilon_i)}} \frac{\partial}{\partial(\nu - \beta\varepsilon_i)} \frac{1 - e^{(M+1)(\nu - \beta\varepsilon_i)}}{1 - e^{(\nu - \beta\varepsilon_i)}} = \\
 &= \frac{1 - e^{(\nu - \beta\varepsilon_i)}}{1 - e^{(M+1)(\nu - \beta\varepsilon_i)}} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{e^{(\nu - \beta\varepsilon_i)} [1 - e^{(M+1)(\nu - \beta\varepsilon_i)}]}{[1 - e^{(\nu - \beta\varepsilon_i)}]^2} - \frac{(M+1)e^{(M+1)(\nu - \beta\varepsilon_i)}}{1 - e^{(\nu - \beta\varepsilon_i)}} \right\} = \\
 &= \frac{1}{e^{(\beta\varepsilon_i - \nu)} - 1} - \frac{(M+1)}{e^{(M+1)(\beta\varepsilon_i - \nu)} - 1}.
 \end{aligned}$$

Залишилося проідентифікувати множники  $\beta = 1/T$  і  $e^\nu = z$  стандартним способом.

### 2.3. Ідеальний $D$ -вимірний газ зі статистикою Джентіле

Розрахунок термодинамічних функцій зробимо за такою загальною схемою [2]. З виразу для кількості частинок,

$$N = \sum_i G_i n_i = \int d\varepsilon g(\varepsilon) n^G(\varepsilon), \quad (2.15)$$

де густина станів  $D$ -вимірного ідеального газу частинок (з квадратичним законом дисперсії) масою  $m$  в об'ємі  $\mathcal{V}_D$

$$g(\varepsilon) = \frac{\mathcal{V}_D}{\Gamma(D/2)} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{D/2} \varepsilon^{D/2-1} = A\varepsilon^{D/2-1}, \quad (2.16)$$

визначаємо хімічний потенціал або активність як функцію змінних  $N$  і  $T$ . Цю функцію підставляємо у вираз для енергії

$$E = \sum_i \varepsilon_i G_i n_i = \int d\varepsilon \varepsilon g(\varepsilon) n^G(\varepsilon), \quad (2.17)$$

звідки потім можна розрахувати, наприклад, теплоємність.

Розрахунки у цьому випадку технічно мало відрізняються від статистики Бозе.

$$\begin{aligned}
 N &= \int_0^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) n^G(\varepsilon) = \\
 &= A \int_0^{\infty} d\varepsilon \left[ \frac{\varepsilon^{D/2-1}}{z^{-1}e^{\varepsilon/T} - 1} - \frac{(M+1)\varepsilon^{D/2-1}}{z^{-(M+1)}e^{(M+1)\varepsilon/T} - 1} \right] = \\
 &= AT^{D/2}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \left[ \text{Li}_{D/2}(z) - (M+1)^{1-D/2} \text{Li}_{D/2}(z^{M+1}) \right]. \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Тут полілогарифм або функція Бозе

$$\text{Li}_s(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell}}{\ell^s}. \quad (2.19)$$

Розписуючи множник  $A$  в рівнянні (2.18), отримаємо

$$\rho_D \lambda^D = \text{Li}_{D/2}(z) - (M+1)^{1-D/2} \text{Li}_{D/2}(z^{M+1}), \quad (2.20)$$

де введено позначення для  $D$ -вимірної густини та довжини теплової хвилі де Бройля, відповідно:

$$\rho_D = \frac{N}{\mathcal{V}_D}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mT}}. \quad (2.21)$$

Тут потрібно мати на увазі, що усі результати правильні лише в термодинамічній границі, коли  $N \rightarrow \infty$  і  $\mathcal{V}_D \rightarrow \infty$ , а густина  $\rho_D$  залишається сталою.

Розв'язком рівняння (2.20) буде  $z$  як функція густини  $\rho_D$  і тем-

ператури  $T$ . Енергію розраховуємо подібним способом:

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon g(\varepsilon) n^G(\varepsilon) = \\
 &= A \int_0^{\infty} d\varepsilon \left[ \frac{\varepsilon^{D/2}}{z^{-1}e^{\varepsilon/T} - 1} - \frac{(M+1)\varepsilon^{D/2}}{z^{-(M+1)}e^{(M+1)\varepsilon/T} - 1} \right] = \\
 &= AT^{D/2+1} \Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right) \left[ \text{Li}_{D/2+1}(z) - (M+1)^{D/2} \text{Li}_{D/2+1}(z^{M+1}) \right].
 \end{aligned}$$

Енергія на одну частинку буде

$$\frac{E}{N} = \frac{D}{2} \frac{T}{\rho_D \lambda^D} \left[ \text{Li}_{D/2+1}(z) - (M+1)^{-D/2} \text{Li}_{D/2+1}(z^{M+1}) \right]. \quad (2.22)$$

Ураховуючи означення полілогарифма, бачимо, що в границі високих температур  $T \rightarrow \infty$  величина  $z \rightarrow 0$  за законом

$$z = \rho_D \lambda^D \sim T^{-D/2}, \quad (2.23)$$

а отже, енергія

$$\frac{E}{N} = \frac{D}{2} T, \quad (2.24)$$

що відповідає класичній границі, як і варто було очікувати. Також зрозуміло, що для  $M > 1$  першу поправку до класичної границі визначатиме виключно «бозонний доданок»

$$\rho_D \lambda^D = \text{Li}_{D/2}(z) = z + 2^{-D/2} z^2 + \dots \quad (2.25)$$

Отже, й поведінка термодинамічних функцій системи зі статистикою Джентіле у цьому випадку буде нагадувати термодинаміку бозе-системи. Зокрема, нескладно показати, що теплоємність  $C_V$  прямуватиме до класичної границі  $D/2$  зверху.

## 2.4. Границя низьких температур

Окремо звернемо увагу на низькотемпературну границю функції розподілу  $n^G(\varepsilon)$ . При  $T \rightarrow 0$  існує певна енергія  $\mu_0$ , така, що

$$n^G(\varepsilon) = \begin{cases} M, & \varepsilon < \mu_0 \\ 0, & \varepsilon > \mu_0. \end{cases} \quad (2.26)$$

Тобто поведінка функції розподілу збігається зі «сходиною» розподілу Фермі, хоч і з іншою (неодиночною) висотою. Енергія ж  $\mu_0$  виконує роль аналога рівня Фермі.

Розрахуємо значення  $\mu_0$  для  $D$ -вимірної ідеальної газу. Кількість частинок при  $T = 0$

$$N = A \int_0^{\mu_0} d\varepsilon \varepsilon^{D/2-1} M = AM \frac{2}{D} \mu_0^{D/2}. \quad (2.27)$$

Отже,

$$\mu_0 = \left( \frac{D}{2} \frac{N}{AM} \right)^{2/D} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left[ \Gamma \left( \frac{D}{2} + 1 \right) \frac{\rho_D}{M} \right]^{2/D} > 0. \quad (2.28)$$

Це означає, що в границі  $T \rightarrow 0$

$$z = e^{\mu_0/T} = \exp \left\{ \left[ \Gamma \left( \frac{D}{2} + 1 \right) \frac{\rho_D \lambda^D}{M} \right]^{2/D} \right\} \rightarrow +\infty. \quad (2.29)$$

Тут ми натрапляємо на таку математичну проблему: означення полілогарифма через ряд (2.19) можна застосовувати лише для  $|z| \leq 1$  (нас цікавлять дійсні значення, тому просто  $z \leq 1$  або еквівалентно  $\mu \leq 0$ ). Інакше знаменник  $(z^{-1}e^{\varepsilon/T} - 1)$  в підінтегральних виразах матиме нулі. Зауважимо, однак, що сама функція розподілу не буде розбіжною, оскільки особливості від різниці двох дробів компенсуються. Можна показати, що в границі  $(\varepsilon - \mu)/T \rightarrow 0$

$$n^G(\varepsilon) = \frac{M}{2}. \quad (2.30)$$



Замість означення (2.19) для полілогарифмів потрібно використовувати аналітичне продовження. Для нашого аналізу зручним буде такий асимптотичний ряд Кацури *та ін.* [3]:

$$\begin{aligned} \text{Li}_s(z) = & -\frac{(\ln z)^s}{\Gamma(s+1)} + \Gamma(1-s)(-\ln z)^{s-1} + \\ & + \sum_{n=1}^m \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{\Gamma(s+1-2n)(2n)!} (\ln z)^{s-2n} + \mathcal{O}((\ln z)^{s-2m-2}), \end{aligned} \quad (2.31)$$

де  $B_n$  — числа Бернуллі,  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_4 = -\frac{1}{30}$ ,  $\dots$ .

Використовуючи перший доданок у розкладі (2.31), перепишемо у границі малих температур рівняння (2.20) для  $z$  у такому вигляді:

$$\rho_D \lambda^D = -\frac{(\ln z)^{D/2}}{\Gamma(D/2+1)} + (M+1)^{1-D/2} \frac{(\ln z^{M+1})^{D/2}}{\Gamma(D/2+1)} = \frac{M(\ln z)^{D/2}}{\Gamma(D/2+1)},$$

звідки

$$z = \exp \left\{ \left[ \Gamma \left( \frac{D}{2} + 1 \right) \frac{\rho_D \lambda^D}{M} \right]^{2/D} \right\},$$

що збігається з отриманим раніше виразом (2.29).

Для енергії в цьому ж наближенні матимемо

$$\begin{aligned} \frac{E}{N} &= \frac{D}{2} \frac{T}{\rho_D \lambda^D} \left[ -\frac{(\ln z)^{D/2+1}}{\Gamma(D/2+2)} + (M+1)^{-D/2} \frac{(\ln z^{M+1})^{D/2+1}}{\Gamma(D/2+2)} \right] = \\ &= \frac{D}{2} \frac{T}{\rho_D \lambda^D} \frac{\ln z}{D/2+1} \frac{M(\ln z)^{D/2}}{\Gamma(D/2+1)}. \end{aligned}$$

Остаточню після нескладних перетворень отримаємо середню енергію частинок при  $T = 0$ , тобто в основному стані:

$$\frac{E}{N} = \frac{D}{D+2} \frac{\hbar^2}{2m} 4\pi \left[ \Gamma \left( \frac{D}{2} + 1 \right) \frac{\rho_D}{M} \right]^{2/D}. \quad (2.32)$$

Подібно як у фермі-системі, ми отримали ненульове значення енергії — на відміну від системи зі статистикою Бозе. Це пояснюється характером заповнення станів, коли лише  $M$  частинок мають нульову енергію, а решта поступово заповнюють наступні стани з вищими енергіями.

Можна показати, що у границі малих температур теплоємність лінійно залежатиме від  $T$ . Відповідний вираз буде таким:

$$\begin{aligned} \frac{C_V}{N} &= \frac{D}{3} \frac{\pi^2}{M+1} \frac{1}{\ln z} = \\ &= \frac{D}{3} \frac{\pi^2}{M+1} \left( \frac{M}{\Gamma(D/2+1)} \frac{1}{\rho_D} \right)^{2/D} \frac{mT}{2\pi\hbar^2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Результати розрахунку активності для різних значень максимального заповнення станів продемонстровано на рис. 2.1, а теплоємність — на рис. 2.2.

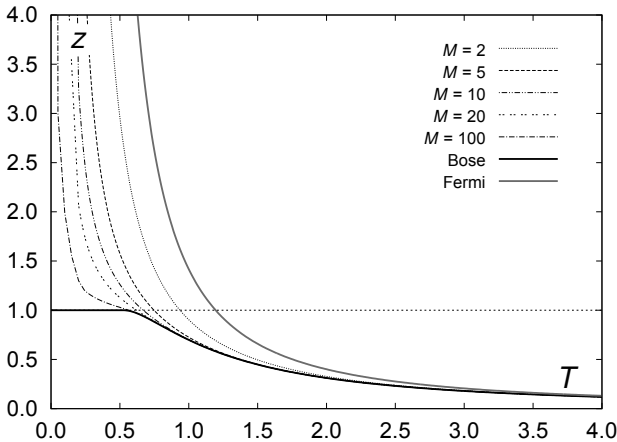


Рис. 2.1. Активність  $z$  тривимірного ідеального газу зі статистикою Джентіле порівняно з результатами для статистик Бозе і Фермі. Одиниці вимірювання температури зафіксовано значенням  $\rho_D (2\pi\hbar^2/m)^{D/2} = 1$

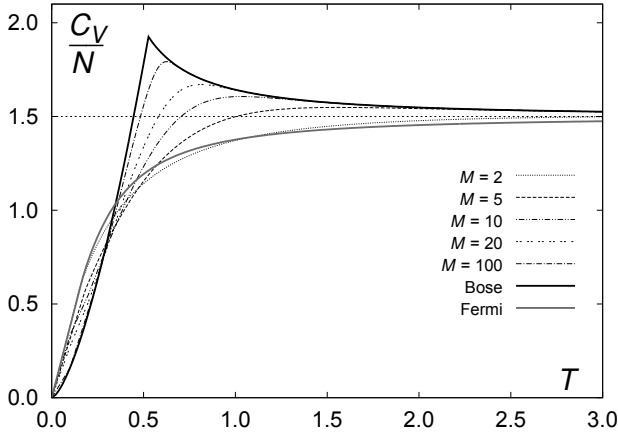


Рис. 2.2. Питома теплоємність тривимірного ідеального газу зі статистикою Джентіле порівняно з результатами для статистик Бозе і Фермі. Одиниці вимірювання температури зафіксовано значенням  $\rho_D (2\pi\hbar^2/m)^{D/2} = 1$

## 2.5. Великі значення максимального заповнення станів

Окремої уваги потребує випадок, коли максимальне заповнення  $M$  стану є великим (макроскопічним) числом. За постановкою задачі зрозуміло, що в системі  $N$  частинок прямування  $M \rightarrow N$  відповідає границі статистики Бозе. Однак, як показали Дай і Се [4], це твердження не можна приймати беззастеречно.

Розгляньмо кількість частинок в основному стані  $\varepsilon = 0$ :

$$N_0 = \frac{1}{z^{-1} - 1} - \frac{M+1}{z^{-(M+1)} - 1} = M + \frac{1}{1-z} - \frac{(M+1)}{1-z^{(M+1)}}. \quad (2.34)$$

Якщо  $z < 1$  (як у випадку бозонів), то границя великих  $M \rightarrow N$  з урахуванням того, що  $N \rightarrow \infty$ , дає відомий у статистиці Бозе вираз для числа заповнення основного стану, тобто кількості частинок у бозе-конденсаті:

$$N_0^{\text{Bose}} = \frac{z}{1-z}. \quad (2.35)$$

Однак, як показує формула (2.29), за низьких температур  $z$  може набувати як завгодно великих значень. Тобто в такій ситуації

$$N_0 = M + \frac{1}{1-z} \simeq M, \quad (2.36)$$

оскільки у статистиці Джентіле в основному стані не може перебувати більше, ніж  $M$  частинок. Якщо ж  $M$  є макроскопічним,

$$M \sim \eta N, \quad \text{де } \eta \lesssim 1, \quad (2.37)$$

то внеском від основного стану не можна нехтувати в розрахунках термодинамічних функцій. А це означає, що відповідний доданок потрібно виписувати явно у виразі (2.18) для кількості частинок, якщо розмірність простору  $D > 2$ , коли густина станів

$$g(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Отже, для густини матимемо:

$$\frac{N}{\mathcal{V}_D} = \frac{1}{\lambda^D} \left[ \text{Li}_{D/2}(z) - (M+1)^{1-D/2} \text{Li}_{D/2}(z^{M+1}) \right] + \frac{N_0}{\mathcal{V}_D}$$

або

$$\rho_D \lambda^D \left( 1 - \frac{N_0}{N} \right) = \text{Li}_{D/2}(z) - (M+1)^{1-D/2} \text{Li}_{D/2}(z^{M+1}). \quad (2.38)$$

Для макроскопічних значень максимального заповнення станів у границі малих температур (великих  $z$ ) вплив множника

$$1 - \frac{N_0}{N} \simeq 1 - \eta$$

стає особливо відчутним і приводить до відповідного зменшення термодинамічних величин порівняно з результатами, отриманими без урахування внеску основного стану.

## 2.6. Завдання для самостійної роботи

1. Покажіть, як виконати перехід від виразу (2.4) до (2.7), застосовуючи інтегральну формулу Коші, див. [5, Гл. 3, 4].
2. Цікавим граничним випадком розподілу Джентіле є  $\frac{\varepsilon-\mu}{T} \rightarrow 0$ . Покажіть, що в цій границі функція

$$n^G(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1} - \frac{M+1}{e^{(M+1)(\varepsilon-\mu)/T} - 1}$$

дорівнює

$$n^G(\varepsilon) = \frac{M}{2}.$$

3. Визначте поведінку теплоємності ідеального газу зі статистикою Джентіле у границі  $T \rightarrow 0$ .

### Література до розділу 2

- [1] G. Gentile. Osservazioni sopra le statistiche intermedie. *Nuovo Cim.*, 17: 493–497, 1940.
- [2] А. А. Ровенчак. *Фізика бозе-систем*. ЛНУ імені Івана Франка, Львів, 2015.
- [3] Sh. Katsura, K. Kaminishi, and S. Inawashiro. Intermediate statistics. *J. Math. Phys.*, 11(9): 2691–2697, 1970.
- [4] Wu-Sheng Dai and Mi Xie. Gentile statistics with a large maximum occupation number. *Ann. Phys. (N. Y.)*, 309(2): 295–305, 2004.
- [5] А. Исихара. *Статистическая физика*. Мир, Москва, 1973.

## Розділ 3

# Статистика Поліхронакоса

### 3.1. Виведення виразів для чисел заповнення

У статистиці Поліхронакоса вираз для чисел заповнення  $j$ -го стану з енергією  $\varepsilon_j$  має вигляд [1]

$$n_j = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_j/T} + \bar{\gamma}}, \quad (3.1)$$

де  $z$  — активність, а  $T$  — температура системи. Така форма виглядає однією з найпростіших інтерполяцій між статистиками Бозе і Фермі. Однак фізичну інтерпретацію того, як заповнюються стани в системі, що відповідає цьому виразу, дав Алексіос Поліхронакос лише 1996 р. [2], запропонувавши таку реалізацію дробової статистики: нехай перша частинка в системі може зайняти один із  $G$  станів, друга вже має на вибір  $(G - \bar{\gamma})$  станів, третя —  $(G - 2\bar{\gamma})$  станів і т. д. Повну кількість мікростанів, що комбінаторно відповідає кількості способів розміщення  $N_j$  частинок за  $G_j$  станами, можна записати так:

$$W = \prod_j \frac{G_j(G_j - \bar{\gamma})(G_j - 2\bar{\gamma}) \dots (G_j - (N_j - 1)\bar{\gamma})}{N_j!}. \quad (3.2)$$



Алексіос Поліхронакос  
(Alexios P. Polychronakos,  
Αλέξιος Π. Πολυχρονάκος;  
нар. 1959)

Легко бачити, що граничні значення  $\bar{\gamma} = \pm 1$  виразу для кількості мікростанів (3.2) відповідають розподілам Фермі та Бозе (1.1).

Переписавши кількість мікростанів у вигляді

$$W = \prod_j \bar{\gamma}^{N_j} \frac{(G_j/\bar{\gamma})!}{N_j!(G_j/\bar{\gamma} - N_j)!}, \quad (3.3)$$

де під факторіалом нецілого числа мають на увазі узагальнення через гамма-функцію  $x! = \Gamma(x + 1)$ , можна стандартним способом отримати вираз для чисел заповнення. Це вимагатиме розв'язування варіаційної задачі на умовний екстремум

$$\delta \ln W - \beta \delta E + \nu \delta N = 0, \quad (3.4)$$

де множники Лагранжа біля варіації енергії  $\delta E = \delta \sum_j \varepsilon_j N_j = 0$  та кількості частинок  $\delta N = \delta \sum_j N_j = 0$  пов'язані з оберненою температурою  $\beta = 1/T$  та хімічним потенціалом  $\nu = \mu/T$ , відповідно. Після нескладних перетворень матимемо:

$$\left[ \ln \bar{\gamma} - \ln N_j + \ln \left( \frac{G_j}{\bar{\gamma}} - N_j \right) - \beta \varepsilon_j + \nu \right] \delta N_j = 0,$$

звідки відразу можна показати, що середні числа заповнення  $n_j = N_j/G_j$  у цій статистиці виражаються простим співвідношенням:

$$n_j^P = \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \mu)/T} - \gamma}, \quad (3.5)$$

де для зручності подальшої роботи введено позначення  $\gamma = -\bar{\gamma}$ .

## 3.2. Ідеальний $D$ -вимірний газ зі статистикою Поліхронакоса

Термодинамічні функції розраховуватимемо за тією ж схемою, що й у попередньому розділі. Кількість частинок

$$N = \sum_j G_j n_j = \int d\varepsilon g(\varepsilon) n^P(\varepsilon), \quad (3.6)$$

де густину станів  $D$ -вимірною ідеального газу задано виразом (2.16). Це рівняння неявно задає хімічний потенціал або активність як функцію змінних  $N$  і  $T$ . Вираз для енергії буде

$$E = \sum_j \varepsilon_j G_j n_j = \int d\varepsilon \varepsilon g(\varepsilon) n^P(\varepsilon). \quad (3.7)$$

Знову ж таки, розрахунки для статистики Поліхронакоса технічно мало відрізняються від статистики Бозе, і відповідні інтеграли можна виразити через полілогарифми. Для кількості частинок маємо

$$\begin{aligned} N &= \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) n^P(\varepsilon) = A \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{D/2-1} d\varepsilon}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - \gamma} = \\ &= AT^{D/2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \frac{1}{\gamma} \text{Li}_{D/2}(\gamma z), \end{aligned} \quad (3.8)$$

а для енергії —

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon g(\varepsilon) n^P(\varepsilon) = A \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{D/2} d\varepsilon}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - \gamma} = \\ &= AT^{D/2+1} \Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right) \frac{1}{\gamma} \text{Li}_{D/2+1}(\gamma z). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Через довжину теплової хвилі де Бройля  $\lambda$  та  $D$ -вимірну густину  $\rho_D$  перше рівняння перепишемо як

$$\rho_D \lambda^D = \frac{1}{\gamma} \text{Li}_{D/2}(\gamma z), \quad (3.10)$$

а для енергії на одну частинку отримаємо

$$\frac{E}{N} = \frac{D}{2} \frac{T}{\rho_D \lambda^D} \frac{1}{\gamma} \text{Li}_{D/2+1}(\gamma z). \quad (3.11)$$

Як і треба було очікувати, у границі  $\gamma = 1$  ці вирази переходять у відомі результати для ідеального  $D$ -вимірною бозе-газу.



Варто звернути увагу на те, що полілогарифм від від'ємного аргумента не становить труднощів, графіки функції  $\text{Li}_s(x)$  наведено на рис. 3.1 для різних значень  $s$ . Особливості виникають лише за умови  $x > 1$ , коли полілогарифм стає комплекснозначною функцією.

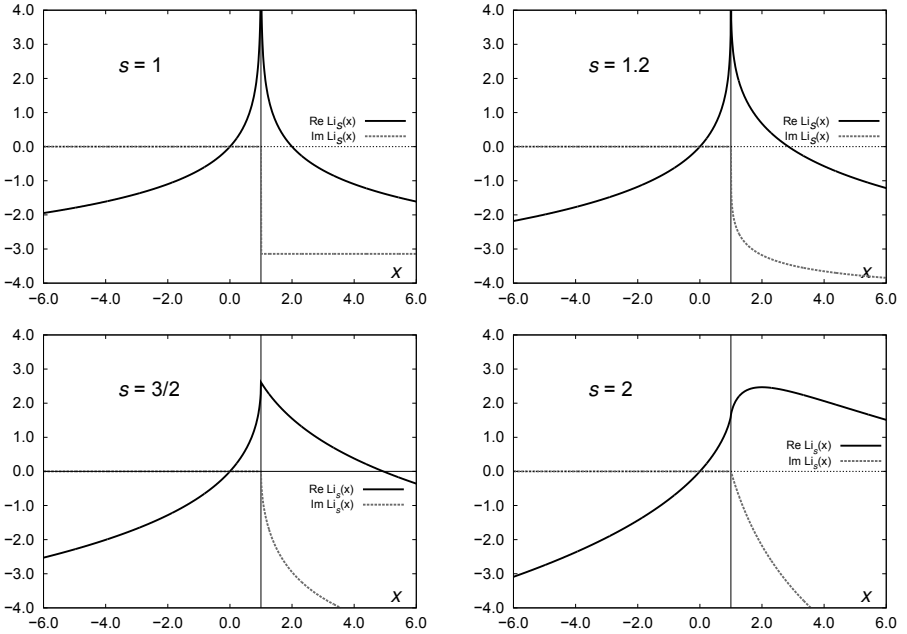


Рис. 3.1. Дійсна й уявна частини функції  $\text{Li}_s(x)$

Отже, особливості в розрахунках термодинамічних функцій виникатимуть, якщо  $\gamma z > 1$ . Це означає, що для  $\gamma > 0$  в системі зі статистикою Поліхронакоса відбувається фазовий перехід, аналогічний до бозе-конденсації, коли активність  $z = 1/\gamma$ . Критичну температуру  $T_c$  визначає рівняння

$$\rho_D \lambda_c^D = \frac{1}{\gamma} \zeta\left(\frac{D}{2}\right), \quad \text{де } \lambda_c = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mT_c}}, \quad (3.12)$$

оскільки дзета-функція Рімана пов'язана з полілогарифмом простим співвідношенням:  $\text{Li}_s(1) = \zeta(s)$ .

За температур  $T \leq T_c$  макроскопічна кількість частинок  $n_0$  починає займати основний стан з  $\varepsilon = 0$ , як при бозе-конденсації. Якщо ж вимірність простору  $D > 2$ , то в густині станів  $g(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D/2-1}$  вплив основного стану нівелюється внаслідок переходу від підсумовування за станами до інтеграла за енергіями, тому цей внесок треба враховувати явно:

$$N = n_0 + \int_0^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) n^P(\varepsilon) = n_0 + AT^{D/2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \frac{1}{\gamma} \zeta\left(\frac{D}{2}\right)$$

або

$$1 - \frac{n_0}{N} = \frac{1}{\rho_D \lambda^D} \frac{1}{\gamma} \zeta\left(\frac{D}{2}\right) \sim T^{D/2}, \quad (3.13)$$

що якісно збігається з поведінкою конденсатної фракції в бозе-конденсаті, причому кількісно різниця визначається параметром  $\gamma$ . У виразі для енергії внесок від основного стану буде нульовим, тому

$$\left. \frac{E}{N} \right|_{T \leq T_c} = \frac{D}{2} \frac{T}{\rho_D \lambda^D} \frac{1}{\gamma} \zeta\left(\frac{D}{2} + 1\right) \sim T^{D/2+1}, \quad (3.14)$$

а отже, теплоємність  $C_V \sim T^{D/2}$ . Результати розрахунків питомої теплоємності за різних значень параметра  $\gamma$  наведено на рис. 3.2.

Ферміоноподібну поведінку термодинамічних функцій очікувано спостерігатимемо за від'ємних значень параметра  $\gamma$ . У цьому випадку немає ніяких особливостей. Аналогічно до границі низьких температур у статистиці Джентіле можна показати, що енергія прямує до сталої величини, а теплоємність лінійна за температурою, якщо  $T \rightarrow 0$ .

Окремим випадком є значення параметра статистики  $\gamma = 0$ . Вираз для чисел заповнення тоді збігається зі статистикою Больцмана:

$$n_j = z e^{-\varepsilon_j/T}. \quad (3.15)$$

Термодинамічні функції можна розрахувати як безпосередньо, так і з використанням отриманих вище виразів з урахуванням границі

$$\left. \frac{1}{\gamma} \text{Li}_s(\gamma z) \right|_{\gamma \rightarrow 0} = z.$$

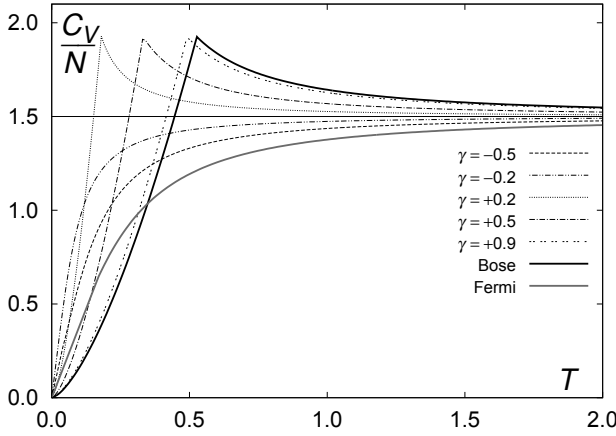


Рис. 3.2. Питома теплоємність тривимірного ідеального газу зі статистикою Поліхронакоса порівняно з результатами для статистик Бозе і Фермі. Горизонтальна пряма  $C_V/N = 3/2$  відповідає класичному тривимірному ідеальному газу. Одиниці вимірювання температури зафіксовано значенням  $\rho_D (2\pi\hbar^2/m)^{D/2} = 1$

Отже, матимемо активність

$$z = \rho_D \lambda^D \quad (3.16)$$

та енергію на одну частинку

$$\frac{E}{N} = \frac{D}{2} \frac{T}{\rho_D \lambda^D} \frac{1}{\gamma} \text{Li}_{D/2+1}(\gamma z) = \frac{D}{2} T. \quad (3.17)$$

Звідси бачимо, що питома теплоємність буде сталою величиною,

$$\frac{C_V}{N} = \frac{D}{2}, \quad (3.18)$$

як і має бути для класичного ідеального газу.

### 3.3. Комплексний параметр статистики

Як ми бачили в попередньому підрозділі, зміна параметра статистики  $\gamma$  в діапазоні  $[-1; +1]$  забезпечує перехід між ферміонами і бозонами, однак він включає також значення  $\gamma = 0$ , що відповідає класичній статистиці Больцмана — а в ній поведінка термодинамічних функцій суперечить третьому началові термодинаміки:  $C_V(T = 0) = \text{const} \neq 0$ .

Уникнути такої класичної границі можна, вважаючи параметр статистики комплексним числом. Для спрощення розглядатимемо його зміну на одиничному колі:  $\gamma = e^{i\pi\nu} = \gamma' + i\gamma''$ , див. рис. 3.3. У такому разі перехід між бозонною і ферміонною границями, тобто  $\nu = 0 \div 1$ , буде гладким.

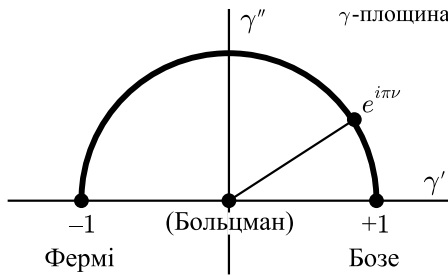


Рис. 3.3. Ілюстрація значень комплексного параметра статистики

Можна показати, що малі відхилення параметра  $\gamma$  від  $\pm 1$  у комплексну область ефективно відповідають бозонам чи ферміонам з малою дисипативною частиною спектра. Проілюструвати фізичні наслідки запропонованої моделі найзручніше на системі одновимірних гармонічних осциляторів, де результати вдається отримати аналітично [3]. Фізично такі системи реалізують за допомогою сильно анізотропних гармонічних пасток або оптичних ґраток.

Нехай осцилятори мають частоту  $\omega$ . Виродження  $j$ -го рівня дорівнює одиниці,  $g_j = 1$ , а спектр елементарних збуджень запишемо у вигляді

$$\varepsilon_j = \hbar\omega j, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.19)$$

відраховуючи енергію від основного рівня  $\hbar\omega/2$ .

Для одновимірної системи гармонічних осциляторів з частотою  $\omega$  густина станів

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{\hbar\omega} = \text{const.} \quad (3.20)$$

Кількість частинок дорівнює

$$N = \frac{1}{\hbar\omega} \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{z^{-1}e^{\varepsilon/T} - \gamma} = -\frac{T}{\hbar\omega\gamma} \ln(1 - z\gamma), \quad (3.21)$$

звідки активність можна отримати явно:

$$z = \frac{1}{\gamma} \left( 1 - e^{-\hbar\omega N\gamma/T} \right). \quad (3.22)$$

Енергія дорівнює

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{\hbar\omega} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon d\varepsilon}{z^{-1}e^{\varepsilon/T} - \gamma} = \frac{T^2}{\hbar\omega\gamma} \text{Li}_2(z\gamma) = \\ &= \frac{T^2}{\hbar\omega\gamma} \text{Li}_2\left(1 - e^{-\hbar\omega N\gamma/T}\right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Зауважмо, що фізична інтерпретація уявної частини енергії пов'язана з процесами її розсіяння.

З ряду для полілогарифма  $\text{Li}_s(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{x^\ell}{\ell^s}$  маємо очевидну властивість

$$\frac{d\text{Li}_s(x)}{dx} = \frac{1}{x} \text{Li}_{s-1}(x),$$

а також  $\text{Li}_1(x) = -\ln(1-x)$ . Теплоємність запишемо у вигляді суми дійсної й уявної частин:

$$\begin{aligned} C &= C + i\Theta = \frac{dE}{dT} = \\ &= N \frac{\hbar\omega N\gamma/T}{1 - e^{\hbar\omega N\gamma/T}} + N \frac{2T}{\hbar\omega N\gamma} \text{Li}_2\left(1 - e^{-\hbar\omega N\gamma/T}\right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Тут звернемо увагу на означення термодинамічної границі для системи одновимірних гармонічних осциляторів. У цій задачі не фігурує об'єм, а роль умови  $\rho_D = N/\mathcal{V}_D = \text{const}$  виконує

$$\omega N = \text{const}, \quad \text{коли } N \rightarrow \infty, \omega \rightarrow 0. \quad (3.25)$$

Найпростішою є така фізична інтерпретація цієї умови: характерний розмір  $r$  певної  $D$ -вимірної системи в зовнішньому гармонічному потенціалі з частотою  $\omega$  буде  $r \sim 1/\omega$ , тому середня концентрація  $N/r^D$  залишатиметься сталою, якщо  $N\omega^D = \text{const}$ .

У виразах для енергії та теплоємності трапляються відношення

$$\frac{T}{\hbar\omega} = \frac{NT}{\hbar\omega N} = \frac{NT}{\text{const}} \quad \text{та} \quad \frac{\hbar\omega N}{T} = \frac{\text{const}}{T},$$

звідки бачимо, що  $\mathcal{E} \sim N$  і  $\mathcal{C} \sim N$ , — тобто ці величини є екстенсивними, як і повинно бути.

Результати розрахунку теплоємності для значення параметра статистики  $\nu = 1/4$  наведено на рис. 3.4. Особливості поведінки термодинамічних функцій обговоримо в наступному підрозділі.

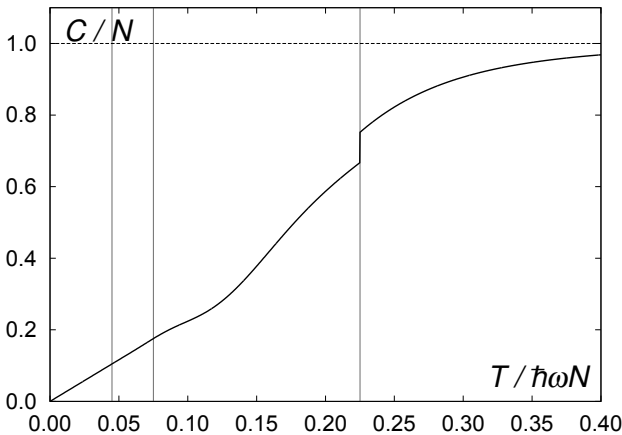


Рис. 3.4. Дійсна частина питомої теплоємності  $C/N$  при  $\nu = 0.25$ . Вертикальними лініями показано критичні температури (3.27). Крайня права лінія відповідає  $k = 0$

### 3.4. Критична температура. Термодинамічні функції

Поява розривів на розрахованих температурних залежностях енергії та теплоємності пов'язана з поведінкою  $\text{Li}_2(z\alpha)$ , коли уявна частина аргумента функції змінює знак. У відповідному підінтегральному виразі знаменник перетворюється в нуль,

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon/T} - z\gamma = 0 &= e^{\varepsilon/T} - 1 + e^{-\hbar\omega N\gamma/T} = \\ &= e^{\varepsilon/T} - 1 + e^{-\frac{\hbar\omega N}{T}\gamma'} \left( \cos \frac{\hbar\omega N}{T}\gamma'' - i \sin \frac{\hbar\omega N}{T}\gamma'' \right), \end{aligned} \quad (3.26)$$

якщо

$$\frac{\hbar\omega N}{T}\gamma'' = \pi n \quad \text{та} \quad \cos \pi n = (-1)^n < 0.$$

Звідси маємо цілу множину значень критичних температур:

$$T_c^{(k)} = \hbar\omega N \frac{\gamma''}{(2k+1)\pi}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.27)$$

що й ілюструє рис. 3.4. Як побачимо далі, розриви, що відповідають  $k > 0$ , є занадто малими, щоб їх можна було візуально помітити на графіку. Щоби спростити записи, далі у перетвореннях індексів “(k)” вживати не будемо.

Нехай сингулярність у підінтегральному виразі відповідає енергії  $\varepsilon_0$ , для якої  $e^{\varepsilon_0/T} = z\gamma$ . Тоді енергію  $E$  можна записати у такому вигляді, виокремивши малий окіл точки  $\varepsilon_0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{z}{\hbar\omega} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - z\gamma} = \frac{z}{\hbar\omega} \int_0^{\varepsilon_0-\Delta} \frac{\varepsilon d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - z\gamma} + \frac{z}{\hbar\omega} \int_{\varepsilon_0+\Delta}^{\infty} \frac{\varepsilon d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - z\gamma} + \\ &+ \frac{z}{\hbar\omega} \int_{\varepsilon_0-\Delta}^{\varepsilon_0+\Delta} \frac{\varepsilon d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - e^{\varepsilon_0/T}}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

де  $\Delta$  — мале додатне число. У границі  $\Delta \rightarrow 0$  перші два доданки не матимуть ніяких особливостей, цю частину енергії позначимо

$E_{\text{smooth}}(T)$ , зважаючи на те, що така функція буде гладкою. Останній доданок достатньо виписати в першому порядку за  $(\varepsilon - \varepsilon_0)$ , тому повна енергія буде:

$$\mathcal{E} = E_{\text{smooth}}(T) + \frac{zT}{\hbar\omega} e^{-\varepsilon_0/T} \int_{\varepsilon_0 - \Delta}^{\varepsilon_0 + \Delta} \frac{\varepsilon d\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0}. \quad (3.29)$$

Коли температура незначно зсувається від критичної точки  $T = T_c \pm 0$ , у знаменнику з'являється мала уявна частина  $\eta \rightarrow +0$ :

$$\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0} \rightarrow \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0 \mp i\eta},$$

причому, як бачимо з (3.26), знак біля  $\eta$  визначає вираз  $\sin \frac{N}{T} \gamma''$ . За формулами Сохоцького матимемо

$$\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0 \mp i\eta} = \text{v. p.} \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0} \pm i\pi \delta(\varepsilon - \varepsilon_0), \quad (3.30)$$

де “v. p.” — головне значення, а  $\delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$  — дельта-функція Дірака.

Тепер ми можемо записати енергію в околі критичних точок у вигляді:

$$\mathcal{E}(T_c \pm 0) = E_{\text{smooth}}(T_c) \pm i\pi \frac{T_c}{\hbar\omega} z(T_c) \varepsilon_0 e^{-\varepsilon_0/T_c}. \quad (3.31)$$

Дійсна частина  $E = \text{Re } \mathcal{E}$  у критичній точці має стрибок

$$\Delta E(T_c) = E(T_c + 0) - E(T_c - 0) = -2\pi \frac{T_c}{\hbar\omega} z''(T_c) \varepsilon_0 e^{-\varepsilon_0/T_c}, \quad (3.32)$$

де  $z''$  — уявна частина активності. Підставляючи в цей вираз означення критичної температури (3.27) і записуючи параметр статистики у вигляді  $\gamma = \cos \pi\nu + i \sin \pi\nu$ , отримаємо такі результати для стрибків значень дійсних частин енергії та теплоємності:

$$\frac{1}{N} \frac{\Delta E(T_c)}{\hbar\omega N} = \frac{2 \sin^3 \pi\nu}{(2k+1)^2 \pi} \ln \left( 1 + e^{-(2k+1)\pi \cot \pi\nu} \right), \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{N} \Delta C(T_c) = \frac{4 \sin^2 \pi\nu}{(2k+1)} \ln \left( 1 + e^{-(2k+1)\pi \cot \pi\nu} \right). \quad (3.34)$$



У бозонній границі, що відповідає  $\nu \rightarrow 0$ , ці стрибки швидко прямують до нуля за законами:

$$\frac{1}{N} \left. \frac{\Delta E(T_c)}{\hbar\omega N} \right|_{\nu \rightarrow 0} = \frac{2\pi^2\nu^3}{(2k+1)^2} e^{-(2k+1)/\nu}, \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{N} \left. \Delta C(T_c) \right|_{\nu \rightarrow 0} = \frac{4\pi^2\nu^2}{(2k+1)} e^{-(2k+1)/\nu}. \quad (3.36)$$

Однак для всіх  $\nu > 0$  у критичних точках енергія і теплоємність мають скінченні стрибки, причому найвиразніший відповідає  $k = 0$ , а далі вони дуже швидко спадають при  $k > 0$ , як можна побачити в табл. 3.1. Така поведінка енергії дає підстави стверджувати, що за температур  $T_c^{(k)}$  відбуватимуться фазові переходи.

Табл. 3.1. Стрибки дійсної частини питомої теплоємності  $C/N$  за критичних температур. Значення  $10^{-14}$  і менші, які, очевидно, не можна спостерігати експериментально, наведено для ілюстрації того, наскільки швидко спадає  $\Delta C$ , коли  $\nu \rightarrow 0$  і/або  $k$  зростає

$\nu$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
0.01	$1.5 \times 10^{-46}$	$7.5 \times 10^{-134}$	$6.6 \times 10^{-221}$
0.05	$2.4 \times 10^{-10}$	$4.7 \times 10^{-28}$	$1.7 \times 10^{-45}$
0.10	$2.4 \times 10^{-5}$	$3.2 \times 10^{-14}$	$7.7 \times 10^{-23}$
0.15	$1.7 \times 10^{-3}$	$2.6 \times 10^{-9}$	$6.7 \times 10^{-15}$
0.20	$1.8 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-6}$	$1.1 \times 10^{-10}$
0.25	$8.5 \times 10^{-2}$	$5.4 \times 10^{-5}$	$6.0 \times 10^{-8}$
0.30	$2.5 \times 10^{-1}$	$9.3 \times 10^{-4}$	$5.8 \times 10^{-6}$
0.34	$5.0 \times 10^{-1}$	$5.7 \times 10^{-3}$	$1.1 \times 10^{-4}$

На рис. 3.5–3.6 показано температурні залежності дійсної й уявної частин теплоємності. Вже для параметра статистики  $\nu \gtrsim 0.35$  осциляції функції  $C(T)$  в низькотемпературній області стають настільки значними, що спричиняють нефізичні від'ємні значення теплоємності.

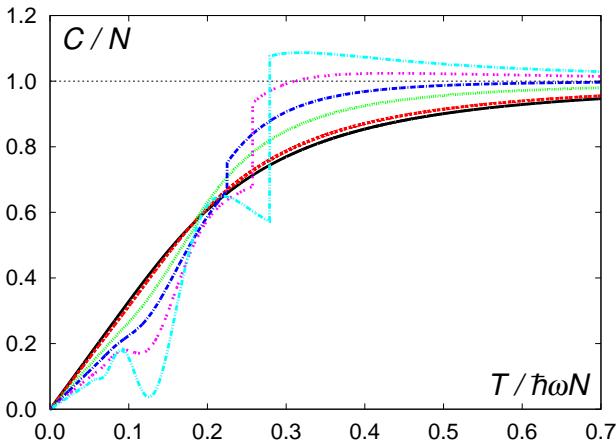


Рис. 3.5. Дійсна частина питомої теплоємності  $C/N$  для різних значень параметра статистики:  $\nu = 0.0$  (чорна, —);  $0.1$  (червона, ---);  $0.2$  (зелена,  $\cdots$ );  $0.25$  (синя, — · —);  $0.3$  (бузкова, - - -);  $0.34$  блакитна, - · · -)

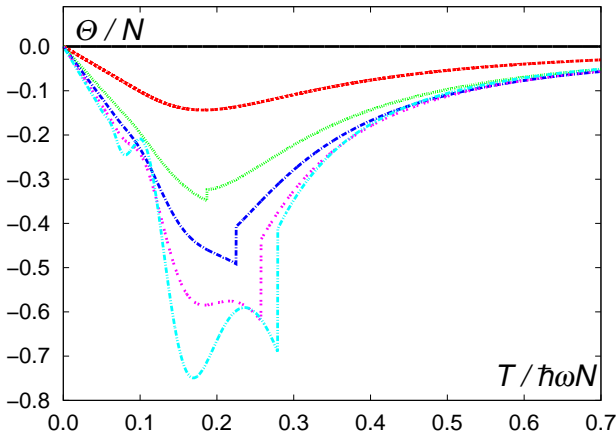


Рис. 3.6. Уявна частина питомої теплоємності  $C/N$  для різних значень параметра статистики:  $\nu = 0.0$  (чорна, —);  $0.1$  (червона, ---);  $0.2$  (зелена,  $\cdots$ );  $0.25$  (синя, — · —);  $0.3$  (бузкова, - - -);  $0.34$  (блакитна, - · · -)

Подібну поведінку термодинамічних функцій спостерігаємо й у випадку розмірності простору  $D > 1$ , однак полілогарифми  $\text{Li}_s(x)$  вже не виражаються через елементарні функції, коли  $s > 1$ , тому оцінки можна робити лише чисельно.

Результати розрахунків для двовимірної системи гармонічних осциляторів показано на рис. 3.7. Характерною рисою у випадку  $D > 1$  є існування певного критичного значення параметра статистики  $\nu_c$ , нижче від якого у системі не спостерігаємо фазового переходу [4]. Тут однак треба взяти до уваги, що в термодинамічній границі  $N \rightarrow \infty$  за таких вимірностей простору існує ще один механізм критичної поведінки, пов'язаний з бозе-конденсацією.

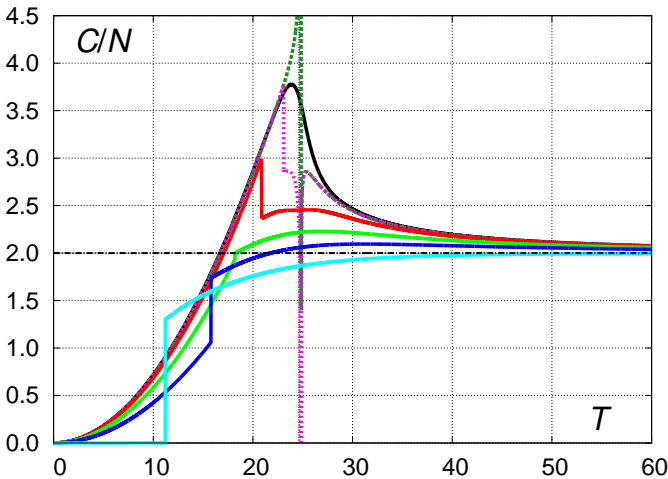


Рис. 3.7. Дійсна частина питомої теплоємності  $C/N$  двовимірної системи гармонічних осциляторів,  $N = 1000$ , для різних значень параметра статистики. Чорна лінія —  $\nu = 0.0$ ; червона —  $\nu = 0.1$ ; світло-зелена —  $\nu = 0.2$ ; синя —  $\nu = 0.3$ ; блакитна —  $\nu = 0.5$ . Пунктирні лінії відповідають значенням, близьким до  $\nu_c$ :  $\nu = 0.03591 < \nu_c$  (темно-зелена) і  $\nu = 0.03592 > \nu_c$  (бузкова)

### 3.5. Завдання для самостійної роботи

Для системи одновимірних гармонічних осциляторів у статистиці Поліхронакоса з комплексним параметром:

1. Покажіть, що в області низьких температур теплоємність залежить від температури лінійно за законом:

$$\frac{C + i\Theta}{N} = \frac{2T}{\hbar\omega N\alpha} \text{Li}_2(1) = \frac{T}{\hbar\omega N} \frac{\pi^2}{3} (\cos \pi\nu - i \sin \pi\nu),$$

де враховано, що  $\text{Li}_2(1) = \zeta(2) = \pi^2/6$ .

2. Покажіть, що у границі високих температур теплоємність прямує до асимптотичного значення  $C/N \rightarrow 1$  (знизу при  $\nu < 1/4$  і згори при  $\nu > 1/4$ ) за законом:

$$\frac{C + i\Theta}{N} = 1 - \frac{\cos 2\pi\nu}{36} \left(\frac{\hbar\omega N}{T}\right)^2 - i \frac{\sin 2\pi\nu}{36} \left(\frac{\hbar\omega N}{T}\right)^2,$$

де залежний від температури доданок у дійсній частині змінює знак у точці  $\nu = 1/4$ , а уявна частина залишається від'ємною для всіх  $\nu$ . При  $\nu = 1/4$  відхилення дійсної частини теплоємності від асимптотичного значення має вигляд:

$$\frac{C}{N} = 1 - \frac{1}{1200} \left(\frac{\hbar\omega N}{T}\right)^4.$$

3. Оцініть можливості експериментальної перевірки передбаченої критичної поведінки системи, враховуючи, що параметр статистики є  $\nu$  малим, тобто  $\nu \ll 1$ , та припускаючи, що точність експериментального вимірювання теплоємності становить 0.01%. За типові параметри можна взяти частоту зовнішнього гармонічного потенціалу-пастки  $\omega = 1$  кГц та кількість частинок  $N = 10^4$ .

**Коментар:** Вказана точність вимірювання теплоємності відповідає  $\nu = 0.10 \div 0.15$  (див. табл. 3.1). При цьому потрібно розглядати лише найбільшу критичну температуру, що відповідає  $k = 0$ ,

$$T_c = \hbar\omega N \frac{\sin \pi\nu}{\pi},$$

оскільки стрибки теплоємності стають експериментально неспостережуваними, якщо  $k > 1$ , див. табл. 3.1.

Відтворюючи сталу Больцмана  $k_B$ , щоб отримати значення  $T_c$  в кельвінах,

$$k_B T_c = \hbar \omega N \frac{\sin \pi \nu}{\pi}.$$

За вказаних параметрів отримуємо критичну температуру  $T_c \sim 10^{-5}$  К. Це означає, що відповідний ефект у принципі можна буде спостерігати експериментально, щойно вдасться приготувати відповідну фізичну систему.

### Література до розділу 3

- [1] B. Mirza and H. Mohammadzadeh. Thermodynamic geometry of fractional statistics. *Phys. Rev. E*, 82(3):031137, 2010.
- [2] A. P. Polychronakos. Probabilities and path-integral realization of exclusion statistics. *Phys. Lett. B*, 365(1–4):202–206, 1996.
- [3] A. Rovenchak. Phase transition in a system of 1D harmonic oscillators obeying Polychronakos statistics with a complex parameter. *Low Temp. Phys.*, 39(10):888–892, 2013.
- [4] A. Rovenchak. Complex-valued fractional statistics for  $D$ -dimensional harmonic oscillators. *Phys. Lett. A*, 378(3):100–108, 2014.

## Розділ 4

# Статистика Голдейна–Ву

### 4.1. Виведення виразів для чисел заповнення

У 1991 р. Данкан Голдейн запропонував увести новий тип дробової статистики шляхом узагальнення принципу Паулі. Воно ґрунтується на понятті параметра *статистичної взаємодії*

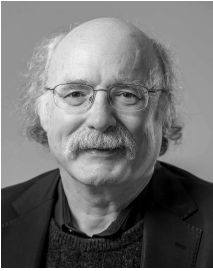
$$g = -\frac{d_{N+\Delta N} - d_N}{\Delta N}, \quad (4.1)$$

де  $d_N$  — розмірність простору одночастинкових станів системи  $N$  частинок за умови, що координати решти  $(N - 1)$  частинок фіксовані. У системі ферміонів додавання однієї частинки відповідно до принципу Паулі зменшує кількість доступних станів на 1, отже, в цьому випадку  $g = 1$ . У системі бозонів обмежень на заповнення станів не існує, тому можна вважати, що в такій границі  $g = 0$ . Проміжні значення  $g \in [0; 1]$  якраз відповідають узагальненому принципіві Паулі, який вже стосується декількох станів, а не одного, як для ферміонів. Як ми побачимо далі, формально можна розглядати також значення параметра  $g > 1$ .

З метою отримання виразу для функції розподілу в цій статистиці Йон-Ші Ву 1994 р. запропонував таку інтерполяційну формулу для кількості мікростанів  $W_j$ , у яких можуть перебувати  $N_j$  ідентичних частинок з урахуванням виродження рівня  $G_j$ :

$$W_j = \frac{[G_j + (N_j - 1)(1 - g)]!}{N_j! [G_j - gN_j - (1 - g)]!}. \quad (4.2)$$

У границях  $g = 0$  і  $g = 1$  звідси отримуємо відомі вирази для бозонів і ферміонів, відповідно (1.1). Саму статистику Голдейна–Ву називають також **дробовою виключною статистикою** (англ. *fractional exclusion statistics*), а для (квазі-)частинок, які їй підкоряються, використовують терміни **ексклюзон** (англ. *excluson*) або ***g-он***.



Данкан Голдейн<sup>1</sup>  
(F. Duncan M. Haldane; нар. 1951)



Йон-Ши Ву (Yong-Shi Wu;  
吳詠時 або 吴咏时; нар. 1942)

Щоб отримати вираз для чисел заповнення  $n_j = N_j/G_j$ , скористаємося стандартною процедурою знаходження екстремуму ентропії

$$S = \ln \prod_j W_j = \sum_j \ln W_j \quad (4.3)$$

за умов, що фіксують кількість частинок та енергію, відповідно:

$$N = \sum_j N_j, \quad E = \sum_j \varepsilon_j N_j. \quad (4.4)$$

Увівши множники Лагранжа ( $\beta\mu$  біля кількості частинок і  $(-\beta)$  біля енергії), отримаємо варіаційну задачу для

$$\tilde{S} = S + \beta\mu N - \beta E \quad (4.5)$$

<sup>1</sup>Лауреатами Нобелівської премії з фізики за 2016 рік стали Девід Таулесс (David J. Thouless), Джон Костерліц (J. Michael Kosterlitz) і Данкан Голдейн «за теоретичне відкриття топологічних фазових переходів та топологічних фаз матерії». Ці дослідження відрізняються від описаних у цьому розділі, однак у певному сенсі є пов'язаними з тематикою посібника.

у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{S} &= \delta \sum_j \left\{ [G_j + (N_j - 1)(1 - g)] \ln[G_j + (N_j - 1)(1 - g)] - \right. \\ &\quad - N_j \ln N_j - [G_j - gN_j - (1 - g)] \ln[G_j - gN_j - (1 - g)] + \\ &\quad \left. + \beta \mu N_j - \beta \varepsilon_j N_j \right\} = \\ &= \sum_i \left\{ (1 - g) \ln[G_j + (N_j - 1)(1 - g)] + (1 - g) - \ln N_j - 1 + \right. \\ &\quad \left. + g \ln[G_j - gN_j - (1 - g)] + g - \beta(\varepsilon_j - \mu) \right\} \delta N_i = 0. \end{aligned}$$

Взявши до уваги в аргументах логарифмів, що  $N_j \gg 1$ , матимемо

$$(1 - g) \ln[G_j + (1 - g)N_j] - \ln N_j + g \ln[G_j - gN_j] - \beta(\varepsilon_j - \mu) = 0$$

або

$$\ln \left\{ \frac{1}{N_j} [G_j + (1 - g)N_j]^{(1-g)} [G_j - gN_j]^g \right\} - \beta(\varepsilon_j - \mu) = 0.$$

Тобто для чисел заповнення  $n_j = N_j/G_j$

$$[1 + (1 - g)n_j]^{(1-g)} [1 - gn_j]^g = n_j e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)}. \quad (4.6)$$

Середні числа заповнення  $n_j$  у результаті виражатимуться так:

$$n_j^{\text{HW}} = \frac{1}{w(e^{(\varepsilon_j - \mu)/T}) + g}, \quad (4.7)$$

де функція  $w(x)$  задовольняє трансцендентне рівняння

$$w^g(x) [1 + w(x)]^{1-g} = x \equiv e^{(\varepsilon_i - \mu)/T}. \quad (4.8)$$

Легко переконатися, що розв'язком цього рівняння для  $g = 0$  буде  $w(x) = x - 1$  — розподіл Бозе, а для  $g = 1$  отримаємо  $w(x) = x - 1$  розподіл Фермі.

Класичний результат — розподіл Больцмана — з рівняння (4.8) можна отримати, розглядаючи границю  $x \rightarrow \infty$ . Розв'язком буде  $w(x) \simeq x$  або

$$n_j = e^{-(\varepsilon_j - \mu)/T}. \quad (4.9)$$



У цьому виразі зникла залежність від параметра статистики  $g$ , як і мало би бути у класичній границі.

З того, що  $x$  у рівнянні (4.8) завжди додатне, випливає, що також  $w > 0$ , отже,  $n_j \leq 1/g$ . Значення функції у границі  $T = 0$  визначає знак показника експоненти: якщо  $(\varepsilon_j - \mu)/T > 0$ , то  $w(x) = +\infty$ , якщо ж  $(\varepsilon_j - \mu)/T < 0$ , то  $w(x) = +0$ . Отже, поведінка чисел заповнення у цій границі нагадуватиме статистику Фермі:

$$n_j \Big|_{T=0} = \begin{cases} 1/g, & \text{якщо } \varepsilon_i < \mu_0, \\ 0, & \text{якщо } \varepsilon_i > \mu_0, \end{cases} \quad (4.10)$$

де  $\mu_0$  — аналог енергії Фермі. Якщо  $0 \leq g \leq 1$ , то не виникає жодних проблем з фізичною інтерпретацією цього результату: в кожному стані з енергією, меншою за  $\mu_0$ , може перебувати одна або більше частинок (залежно від значення параметра  $g$ ).

З рівняння (4.8) можна отримати таку **властивість дуальності** функції розподілу з параметрами  $g$  та  $1/g$ :

$$1 - gn_g(x) = \frac{1}{g} n_{1/g}(-x/g). \quad (4.11)$$

Оскільки загальний розв'язок у радикалах можна записати лише для алгебраїчного рівняння не вище четвертого степеня, то зрозуміло, що для рівняння (4.8) це відповідає лише деяким значенням параметра  $g$  (крім тривіальних результатів для границь бозонів і ферміонів):  $g = \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}$ . Зрозуміло, що відповідні вирази будуть досить громіздкими, за винятком  $g = 1/2$ , коли

$$n_j^{(g=1/2)} = \frac{1}{\sqrt{1/4 + e^{2(\varepsilon_j - \mu)/T}}}, \quad (4.12)$$

— такі частинки називають **семіонами** (англ. *semion*), та  $g = 2$ :

$$n_j^{(g=2)} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-(\varepsilon_j - \mu)/T}}} \right). \quad (4.13)$$

Загальний розв'язок для параметра  $g = 1/m$ , де  $m > 1$  — натуральне число, можна подати через гіпергеометричну функцію [3]

$$w(g, x) = \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left[ {}_{m-1}F_{m-2} \left( \frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{m-2}{m}; \frac{1}{m-1}, \frac{2}{m-1}, \dots, \frac{m-2}{m-1}; \frac{-mx^m}{(m-1)^{m-1}} \right) - 1 \right]. \quad (4.14)$$

За великих значень аргумента функцію  $w(x)$  можна розкласти в ряд

$$w^g(1+w)^{1-g} = w \left(1 + \frac{1}{w}\right)^{1-g} \simeq w \left(1 + \frac{1-g}{w}\right) = w + 1 - g,$$

тобто

$$w(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} = x + g - 1, \quad (4.15)$$

а отже, вираз для чисел заповнення буде в такій границі

$$n_j^{\text{HW}} = \frac{1}{w(x) + g} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \mu)/T} + (2g - 1)}. \quad (4.16)$$

Іншими словами, поведінка системи у границі малих температур, яким відповідають великі  $x$ , буде аналогічною до статистики Поліхронакоса з параметром  $\gamma = 1 - 2g$ .

## 4.2. Термодинамічні функції

Запишемо загальний вигляд великого термодинамічного потенціалу  $\Omega = -p\mathcal{V}_D$  через густину станів  $g(\varepsilon)$ :

$$\Omega = - \int_{-\infty}^{\mu} d\mu' N = - \int_{-\infty}^{\mu} d\mu' \int_0^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon, \mu', T). \quad (4.17)$$

Нескладно показати, що для степеневого спектра  $\varepsilon(p) = ap^b$  у  $D$ -вимірному просторі густина станів дорівнює

$$g(\varepsilon) = \frac{a^{-D/b} \mathcal{V}_D}{(4\pi\hbar^2)^{D/2} \Gamma(D/2 + 1)} \varepsilon^{D/b-1} = A \mathcal{V}_D \varepsilon^{D/b-1}. \quad (4.18)$$

У виразі для  $\Omega$  змінимо порядок інтегрування і візьмемо інтеграл за  $\varepsilon$  частинами:

$$\begin{aligned} \Omega &= - \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) \int_{-\infty}^\mu d\mu' n(\varepsilon, \mu', T) = \left[ \begin{array}{l} u = \int_{-\infty}^\mu d\mu' n(\varepsilon, \mu', T), \\ dv = g(\varepsilon)d\varepsilon = A \varepsilon^{D/b-1} d\varepsilon, \end{array} \right] = \\ &= - \frac{Ab}{D} \varepsilon^{D/b} \int_{-\infty}^\mu d\mu' n(\varepsilon, \mu', T) \Big|_0^\infty + \frac{Ab}{D} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{D/b} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{-\infty}^\mu d\mu' n(\varepsilon, \mu', T) = \\ &= - \frac{b}{D} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon, \mu, T), \end{aligned}$$

де позаінтегральний доданок занулюється, а зміна знака перед другим доданком пов'язана з тим, що  $\mu$  й  $\varepsilon$  в означення функції розподілу  $n(\varepsilon, \mu, T)$  входять лінійно з протилежними знаками.

Останній інтеграл — це, очевидно, повна енергія системи:

$$E = \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon, \mu, T), \quad (4.19)$$

тому отримуємо зв'язок

$$p\mathcal{V}_D = \frac{b}{D} E. \quad (4.20)$$

Результати розрахунків питомої теплоємності тривимірного ідеального газу зі статистикою Голдейна–Ву за різних значень параметра  $g$  наведено на рис. 4.1.

Як вже згадувалося раніше, фізичний зміст мають значення параметра  $0 \leq g \leq 1$ , але формально можна розглядати й інші. Наведений на рис. 4.1 результат для  $g = 2$  є ілюстрацією в певному сенсі суб-ферміонної поведінки, оскільки він відповідає максимальному половинному заповненню рівня.

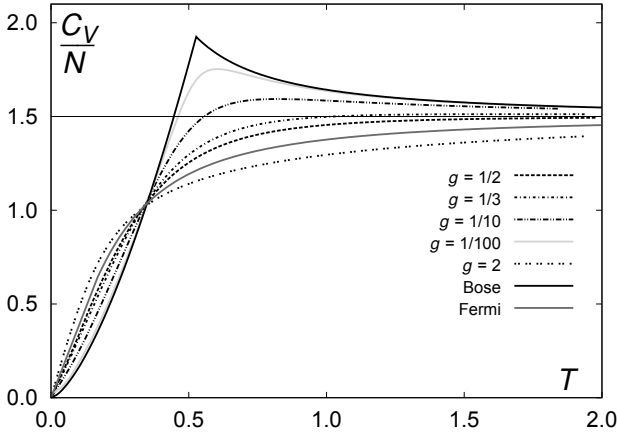


Рис. 4.1. Питома теплоємність тривимірного ідеального газу зі статистикою Голдстейна–Ву порівняно з результатами для статистик Бозе і Фермі. Горизонтальна пряма  $C_V/N = 3/2$  відповідає класичному тривимірному ідеальному газу. Одиниці вимірювання температури зафіксовано значенням  $\rho_D (2\pi\hbar^2/m)^{D/2} = 1$

### 4.3. Стала густина станів

Цікавим є випадок  $b = D$ , коли густина станів — стала, див. (4.18). Він відповідає, зокрема, задачі про гармонічний осцилятор в одновимірному просторі або вільній частинці у двовимірному.

Концентрація  $\rho = N/V$  визначатиметься рівнянням

$$\rho = \frac{N}{V} = A \int_0^{\infty} d\varepsilon n(\varepsilon, \mu, T) = A \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{w (e^{(\varepsilon-\mu)/T}) + g}. \quad (4.21)$$

Оскільки

$$\frac{1}{T}(\varepsilon - \mu) = g \ln w + (1 - g) \ln(1 + w), \quad (4.22)$$

то

$$d\varepsilon = T \left( \frac{g}{w} + \frac{1-g}{1+w} \right) dw = T \frac{g+w}{w(1+w)} dw. \quad (4.23)$$

Отже,

$$\rho = AT \int_{w_0}^{\infty} \frac{dw}{w(1+w)} = AT \ln \left( 1 + \frac{1}{w_0} \right), \quad (4.24)$$

де

$$w_0^g (1+w_0)^{1-g} = e^{-\mu/T}. \quad (4.25)$$

Тобто хімічний потенціал буде

$$\mu = \frac{1}{A} g \rho + T \ln \left( 1 - e^{-\rho/AT} \right). \quad (4.26)$$

Далі можна розрахувати енергію

$$E = AV \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon n(\varepsilon, \mu, T) = AV \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon d\varepsilon}{w (e^{(\varepsilon-\mu)/T}) + g}. \quad (4.27)$$

Після тих самих перетворень, що й для розрахунку концентрації, матимемо для енергії на одну частинку:

$$\frac{E}{N} = \frac{A}{\rho} T \int_{w_0}^{\infty} \frac{dw}{w(1+w)} \left\{ \mu + T [g \ln w + (1-g) \ln(1+w)] \right\}. \quad (4.28)$$

Беручи до уваги (4.24) і (4.26), отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{E}{N} &= \mu \frac{AT}{\rho} \int_{w_0}^{\infty} \frac{dw}{w(1+w)} + \frac{AT^2}{\rho} \int_{w_0}^{\infty} \frac{[g \ln w + (1-g) \ln(1+w)] dw}{w(1+w)} = \\ &= \mu + \frac{AT^2}{\rho} \int_{w_0}^{\infty} \frac{[g \ln w + (1-g) \ln(1+w)] dw}{w(1+w)}. \end{aligned}$$

Після заміни змінних

$$w = \frac{1}{e^{\rho'/AT} - 1}, \quad dw = -\frac{1}{AT} d\rho',$$

нижня межа інтегрування за змінною  $\rho'$  буде просто  $\rho$ , оскільки

$$w_0 = \frac{1}{e^{\rho/AT} - 1},$$

а верхня дорівнюватиме нулеві. Нескладні перетворення дають

$$\begin{aligned} \frac{E}{N} &= \mu - \frac{AT^2}{\rho} \int_0^{\rho} \frac{d\rho'}{AT} \left[ \frac{g}{AT} \rho' + \ln \left( 1 - e^{-\rho'/AT} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{A} g\rho + T \ln \left( 1 - e^{-\rho/AT} \right) - \frac{1}{A} \frac{g\rho}{2} - \frac{T}{\rho} \int_0^{\rho} d\rho' \ln \left( 1 - e^{-\rho'/AT} \right). \end{aligned}$$

Беручи останній інтеграл частинами, матимемо

$$\frac{E}{N} = \frac{g\rho}{2A} + \frac{1}{\rho A} \int_0^{\rho} \frac{\rho' d\rho'}{e^{\rho'/AT} - 1}. \quad (4.29)$$

Легко зауважити, що від параметра статистики тут залежить лише перший доданок, який є константою, а температурна залежність повністю зосереджена під інтегралом у другому доданку. Це означає, що теплоємність  $C_V$  не буде залежати від параметра статистики — це цікавий результат, який є наслідком сталої густини станів у нашій задачі.

## 4.4. Проблема від'ємних імовірностей

Перепишемо вираз (4.2) для кількості мікростанів через гамма-функцію замість факторіалів:

$$W = \frac{[G + (N - 1)(1 - g)]!}{N! [G - gN - (1 - g)]!} = \frac{\Gamma[G + 1 + (N - 1)(1 - g)]}{\Gamma(N + 1) \Gamma[G - g(N - 1)]}. \quad (4.30)$$

Зауважмо, що гамма-функція має полюси в нулі та при цілих від'ємних значеннях аргумента, а також може ставати від'ємною, якщо аргумент лежить у діапазоні  $(-2n - 1; -2n)$ , де  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , див. рис. 4.2. Отже, завдяки другій гамма-функції у знаменнику

величина  $W$  може набувати від’ємних значень, коли  $gN > G$ . Для ферміонів ( $g = 1$ ) ця ж гамма-функція забезпечує рівність нулеві величини  $W$ , коли  $N > G$ , — про що й говорить принцип Паулі (пам’ятаймо, що тут ідеться про цілі  $N$  і  $G$ ).

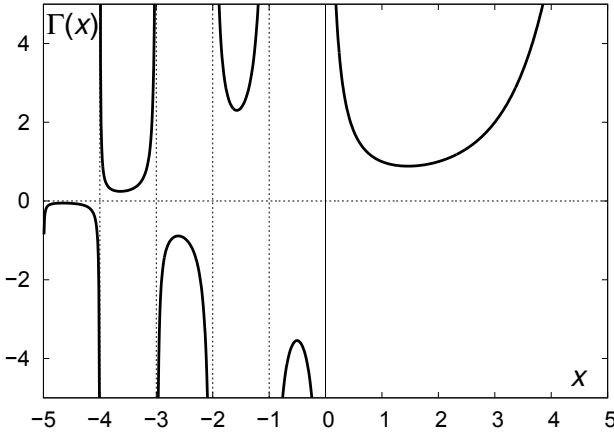


Рис. 4.2. Гамма-функція

Виявляється, що поява від’ємних імовірностей пов’язана з принципом підрахунку кількості станів у дробовій виключній статистиці Голдейна–Ву.

Дещо несподівано розв’язок цієї задачі пов’язаний із розглядом рівняння

$$aqx^p - x^q + 1 = 0, \quad (4.31)$$

який запропонував Рамануджан<sup>2</sup> [4, Sec. 5.4]. Можна показати, що для довільного комплексного  $a$  і додатних  $p, q$  загальним розв’язком буде

$$x^d = \sum_{N=0}^{\infty} C_N(p, q, d) a^N, \quad (4.32)$$

<sup>2</sup>Срїніваса Айенгар Рамануджан (Srīnivāsa Aiyangār Rāmānujan; тамільською சீனிவாச இராமானுஜன்; 1887–1920), індійський математик.

$$C_0(p, q, d) = 1, \quad C_1(p, q, d) = d,$$

$$C_N(p, q, d) = \frac{d}{N!} \prod_{j=1}^{N-1} (d + Np - jq) \quad \text{для } N \geq 2. \quad (4.33)$$

Якщо взяти  $p = (1 - g)$  і  $q = 1$ , то

$$C_N(1 - g, 1, G) = \frac{G [G + (1 - g)N - 1]!}{N! (G - gN)!}. \quad (4.34)$$

Такий вираз, як зазначає Поліхронакос [5], відповідає кількості способів розмістити  $N$  частинок на  $G$  вузлах одновимірної періодичної ґратки так, щоб між будь-якими двома частинками було не менше  $g$  вузлів. Якщо ґратка буде неперіодичною (відкритою), то відповідний вираз збігатиметься з формулою Голдейна

$$W = \frac{[G + (N - 1)(1 - g)]!}{N! [G - gN - (1 - g)]!}. \quad (4.35)$$

Обидві формули відтворюють результати для бозонів і ферміонів, коли  $g = 0$  або  $1$ , а в границі великих  $G$  (4.34) і (4.35) збігаються.

## 4.5. Завдання для самостійної роботи

1. Знайдіть перших кілька членів розкладу виразу для чисел заповнення у статистиці Голдейна–Ву при малих  $z$  і переконайтеся, що вони відповідають загальній формулі

$$\begin{aligned} n_j^{\text{HW}} &= \frac{1}{w(X) + g} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma[g(m + 1)]}{m! \Gamma[g(m + 1) - m]} \frac{z^{m+1}}{X^{m+1}} = \\ &= \frac{1}{X} z - \frac{(2g - 1)}{X^2} z^2 + \frac{(3g - 2)(3g - 1)}{2! X^3} z^3 \mp \dots \end{aligned} \quad (4.36)$$

2. Проаналізуйте термодинаміку одновимірних гармонічних осциляторів зі спектром  $\varepsilon_j = \hbar\omega j$ , які є семіонами.
3. Знайдіть різницю між виразами для кількості мікростанів за Голдейном (4.35) і Поліхронакосом (4.34) у границі великих  $G$ .



**Література до розділу 4**

- [1] F. D. M. Haldane. “Fractional statistics” in arbitrary dimension: A generalization of the Pauli principle. *Phys. Rev. Lett.*, 67(8):937–940, 1991.
- [2] Y.-S. Wu. Statistical distribution for generalized ideal gas of fractional-statistics particles. *Phys. Rev. Lett.*, 73(7):922–925, 1994.
- [3] T. Aoyama. Specific heat of the ideal gas obeying the generalized exclusion statistics. *Eur. Phys. J. B*, 20(1):123–131, 2001.
- [4] A. Khare. *Fractional Statistics and Quantum Theory*. World Scientific, Singapore, 2nd edition, 2005.
- [5] A. P. Polychronakos. Probabilities and path-integral realization of exclusion statistics. *Phys. Lett. B*, 365(1–4):202–206, 1996.

## Розділ 5

# Неекстенсивні статистики

### 5.1. Вступ

У працях Альфреда Рейні та Золтана Дароці, що стосувалися поняття інформаційної ентропії, було запропоновано узагальнити означення цієї величини. Ці ідеї підхопив Константіно Цалліс, увівши 1988 р. *неекстенсивну статистику* [1], яку можна було би застосувати для опису систем із неадитивною ентропією. Зокрема, це можуть бути фрактальні структури та системи, в яких присутня далекодіюча взаємодія (у більшості «традиційних» об'єктів у взаємодіях беруть безпосередню участь лише близькі сусіди). Іншим прикладом є суттєво немарківські процеси (системи з «пам'яттю»).



Альфред Рейні  
(Rényi Alfréd; 1921–1970)



Золтан Дароці  
(Daróczy Zoltán Bálint;  
нар. 1938)



Константіно Цалліс  
(Constantino Tsallis,  
Κωνσταντίνος Τσάλλης;  
нар. 1943)

Крім суто фізичних явищ, пропоновані підходи можна застосовувати й у суспільних дисциплінах (моделі фінансових ринків, лінгвістичні закони тощо).

Нагадаємо, як вводять поняття ентропії в класичній статистичній фізиці. Нехай стан із енергією  $E$  реалізується з імовірністю  $P(E)$ , при цьому очевидно

$$\int P(E)dE = 1.$$

Позначивши через  $\Gamma(E)$  кількість мікростанів з енергіями  $\leq E$ , перепишемо  $P(E)$  через функцію розподілу  $p(E)$  так:

$$P(E) = \frac{d\Gamma(E)}{dE}p(E),$$

і розглянемо випадок, коли всі допустимі енергії зосереджені на проміжку  $\Delta E$  навколо енергії  $\bar{E}$ :

$$P(\bar{E})\Delta E = 1 \Rightarrow p(\bar{E})\Delta\Gamma = 1, \quad \text{де} \quad \Delta\Gamma = \frac{d\Gamma}{dE}\Delta E.$$

Ентропію вводять як логарифм кількості мікростанів:

$$S = \ln \Delta\Gamma \tag{5.1}$$

Очевидно, що

$$S = \ln \Delta\Gamma = -\ln p(\bar{E}). \tag{5.2}$$

Врахуємо, що за Гіббсом  $\ln p(E_j) = C + \beta E_j$ , де  $E_j$  — енергія, яка відповідає певному станові  $j$ . Тоді легко показати, що

$$\ln p(\bar{E}) = C + \beta\bar{E},$$

а отже,

$$S = \ln \Delta\Gamma = -\ln p(\bar{E}) = -\langle \ln p(E_j) \rangle = -\sum_j p_j \ln p_j,$$

де  $p_j \equiv p(E_j)$ . Надалі саме таке означення,

$$S = -\sum_j p_j \ln p_j, \tag{5.3}$$

використовуватимемо як базове для “класичної” ентропії.

Принагідно зауважимо, що з (5.2) майже автоматично випливає адитивність ентропії:

$$S(A + B) = S(A) + S(B). \quad (5.4)$$

Тут  $A$  і  $B$  позначають підсистеми, а логарифм добутку кількості мікростанів, що відповідає системі  $(A + B)$ , зводиться до суми логарифмів.

## 5.2. Статистика Цалліса

Як вже було сказано на початку цього розділу, адитивність ентропії, що є майже інтуїтивною, може порушуватися для різноманітних систем, що мають певні особливості. Відповідні ефекти можуть виникати внаслідок суттєвої далекодії, процесів із «пам'яттю» чи суттєво немарківських та ін. [2].

Узагалі кажучи, існує щонайменше зо два десятки способів узагальнити означення ентропії Больцмана–Гіббса (5.3). Один із них детальніше викладено у цьому підрозділі. Його автором є бразильський фізик Константіно Цалліс.

Можна ввести узагальнену ентропію співвідношенням

$$S_q = \frac{1}{q-1} \left( 1 - \sum_{j=1}^W p_j^q \right), \quad \sum_{j=1}^W p_j = 1, \quad q \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

Нескладно переконатися, що в границі  $q \rightarrow 1$  отримаємо звичну ентропію Больцмана–Гіббса (5.3). Справді,

$$p_j^{q-1} = e^{(q-1) \ln p_j} \simeq 1 + (q-1) \ln p_j$$

й ентропія набуває вигляду

$$S_q = \frac{1}{q-1} \left( 1 - \sum_{j=1}^W p_j^q \right) = \dots = - \sum_{j=1}^W p_j \ln p_j,$$

що збігається з очікуваним виразом.

Замість умови адитивності (або ще — екстенсивності), заданої формулою (5.4), ентропія (5.5) задовольняє співвідношення

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B), \quad (5.6)$$

тобто є неекстенсивною величиною. При цьому індекс  $q$  є фактично мірою неекстенсивності.

Легко довести таке твердження:

$$-\left(\frac{d}{d\alpha}\sum_{j=1}^W p_j^\alpha\right)\Bigg|_{\alpha=1} = -\sum_{j=1}^W p_j \ln p_j \equiv S. \quad (5.7)$$

Виявляється, що аналог цього співвідношення для ентропії  $S_q$  можна записати через так звану *похідну Джексона*<sup>1</sup> [2, р. 9]

$$D_q^{(x)} f(x) \equiv \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} \quad (5.8)$$

у вигляді

$$-\left(D_q^{(\alpha)}\sum_{j=1}^W p_j^\alpha\right)\Bigg|_{\alpha=1} = \frac{1}{q-1}\left(1 - \sum_{j=1}^W p_j^q\right) \equiv S_q \quad (5.9)$$

(тут  $q$ -похідна  $D_q$  стосується показника  $\alpha$ ). Отримати це співвідношення просто — потрібно лише пам'ятати умову нормування ймовірностей

$$\sum_{j=1}^W p_j = 1. \quad (5.10)$$

Як і звичайна ентропія,  $S_q$  досягає максимуму за умови рівних імовірностей  $p_j = 1/W$  для всіх станів  $j$ :

$$S_q = \frac{W^{1-q} - 1}{1 - q}. \quad (5.11)$$

У границі  $q \rightarrow 1$  звідси отримуємо відоме співвідношення Больцмана  $S = \ln W$ .

Уводячи  *$q$ -логарифм*

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad \text{причому} \quad \ln_1 x = \ln x, \quad (5.12)$$

---

<sup>1</sup>Френк Джексон (Frank Hilton Jackson; 1870–1960), англійський священик і математик. Таку похідну він увів 1909 р.

зможемо записати ентропію Цалліса у бoльцманоподібній формі

$$S_q = \ln_q W. \quad (5.13)$$

Оберненою до  $q$ -логарифма є  $q$ -експонента Цалліса:

$$e_q^x = \begin{cases} \exp(x), & \text{якщо } q = 1, \\ [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}, & \text{якщо } q \neq 1 \text{ й } 1 + (1 - q)x > 0, \\ 0^{1/(1-q)}, & \text{якщо } q \neq 1 \text{ й } 1 + (1 - q)x \leq 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

Також для цієї функції використовують позначення  $\exp_q(x)$ . Її графіки показано на рис. 5.1.

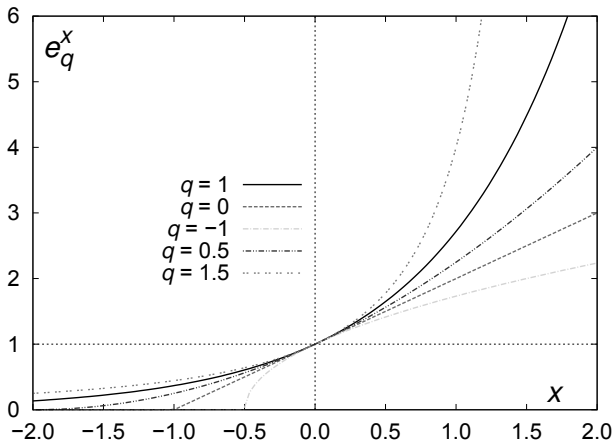


Рис. 5.1.  $q$ -експонента Цалліса  $e_q^x$  для різних значень параметра  $q$

Для знаходження ймовірностей  $p_j$  скористаємося стандартним методом множників Лагранжа [3]. Шукатимемо екстремум ентропії  $S_q$  за умов

$$\sum_{j=1}^W p_j = 1, \quad \sum_{j=1}^W \varepsilon_j p_j = E,$$

де  $E$  — енергія. Це відповідає варіаційній задачі

$$\delta \left\{ \frac{1}{q-1} \sum_{j=1}^W (p_j - p_j^q) - \alpha \sum_{j=1}^W p_j - \beta \sum_{j=1}^W \varepsilon_j p_j \right\} = 0,$$

де для подальшої зручності одиницю в означенні  $S_q$  розписано як  $1 = \sum_{j=1}^W p_j$ . Беручи варіацію, отримаємо

$$\frac{1}{q-1} \left( 1 - qp_j^{q-1} \right) - \alpha - \beta \varepsilon_j = 0,$$

звідки остаточно

$$p_j = \left\{ \frac{1 - (q-1)(\alpha + \beta \varepsilon_j)}{q} \right\}^{\frac{1}{q-1}}. \quad (5.15)$$

Пригадаємо, що в термодинаміці Больцмана-Гіббса ймовірність записують у вигляді

$$p_j^{\text{BG}} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \varepsilon_j}, \quad (5.16)$$

де  $\beta = \frac{1}{T}$ , а статистична сума  $Z = \sum_j e^{-\beta \varepsilon_j}$ .

Щоб у такій формі подати вираз (5.15), означимо узагальнену статистичну суму

$$Z_q^{-1} = \left\{ \frac{1 - (q-1)\alpha}{q} \right\}^{\frac{1}{q-1}}, \quad (5.17)$$

що дає змогу виокремити множник Лагранжа  $\beta$ :

$$p_j = Z_q^{-1} \left\{ 1 + (1-q) \frac{\beta}{1 - (q-1)\alpha} \varepsilon_j \right\}^{-\frac{1}{1-q}}.$$

Далі можемо означити температуру як

$$T_q = \frac{1 - (q-1)\alpha}{\beta} = \frac{q}{Z_q^{q-1}} \frac{1}{\beta}, \quad (5.18)$$

внаслідок чого ймовірність  $p_j$  набуває звичного вигляду, лише замість звичайної експоненти буде фігурувати  $q$ -експонента Цалліса:

$$p_j = \frac{1}{Z_q} \left[ \exp_q \left( \frac{\varepsilon_j}{T_q} \right) \right]^{-1}. \quad (5.19)$$

Варто звернути увагу, що, на відміну від звичайних експонент, тут

$$[e_q^x]^{-1} \neq e_q^{-x}$$

(насправді,  $[e_q^x]^{-1} = e_{2-q}^{-x}$ , див. завдання наприкінці цього розділу).

Зрозуміло, що в границі  $q \rightarrow 1$  відтворюються співвідношення термодинаміки Больцмана–Гіббса. Проте додатковий коефіцієнт пропорційності між  $T_q$  та  $1/\beta$  у (5.18) насправді ускладнює опис систем за допомогою ентропії Цалліса. З метою уникнення відповідних проблем було запропоновано низку модифікацій описаного підходу, відомих як статистики (Цалліса–)Мендеша–Пластіно, Курадо(–Цалліса), Башкірова та ін.

### 5.3. Статистики Курадо–Цалліса і Цалліса–Мендеша–Пластіно<sup>2</sup>

Однією з модифікацій статистики Цалліса є підхід, запропонований у праці [4]. Екстремум ентропії  $S_q$  шукають за умови нормування ймовірностей

$$\sum_{j=1}^W p_j = 1, \quad (5.20)$$

як це було зроблено раніше, а також уводячи узагальнену енергію

$$\sum_{j=1}^W p_j^q \varepsilon_j = U_q \quad (5.21)$$

замість звичайної  $\sum_{j=1}^W p_j \varepsilon_j = E$ .

Відповідна варіаційна задача зводиться до розв'язування рівняння

$$\frac{q}{q-1} p_j^{q-1} + \beta q \varepsilon_j p_j^{q-1} + \alpha = 0, \quad (5.22)$$

<sup>2</sup>Евальдо Курадо (Evaldo Mendonça Fleury Curado) та Реніо душ Сантуш Мендеш (Renio dos Santos Mendes), бразильські фізики; Анхель Рікардо Пластіно (Ángel Ricardo Plastino), аргентинський фізик.



де, як і раніше,  $\alpha$  та  $\beta$  — множники Лагранжа, що стосуються умови нормування ймовірностей та означення (узагальненої) енергії, відповідно. Можна показати, що  $p_j$  запишеться у вигляді:

$$p_j = \frac{1}{Z_q} [1 - (1 - q)\beta\varepsilon_j]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (5.23)$$

де

$$Z_q = \sum_{j=1}^W [1 - (1 - q)\beta\varepsilon_j]^{\frac{1}{1-q}}. \quad (5.24)$$

За допомогою  $q$ -експоненти Цалліса отримаємо:

$$p_j = \frac{1}{Z_q} e_q^{-\beta\varepsilon_j}, \quad Z_q = \sum_{j=1}^W e_q^{-\beta\varepsilon_j}. \quad (5.25)$$

Звертаючи увагу, що

$$\frac{\partial Z_q}{\partial \beta} = - \sum_{j=1}^W [1 - (1 - q)\beta\varepsilon_j]^{\frac{q}{1-q}} \varepsilon_j = -Z_q^q \sum_{j=1}^W p_j^q \varepsilon_j = -Z_q^q U_q,$$

прийдемо до такого співвідношення:

$$-\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{Z_q^{1-q} - 1}{1 - q} = U_q \quad \text{або} \quad -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln_q Z_q = U_q, \quad (5.26)$$

що у границі  $q \rightarrow 1$  збігається з очікуваним зв'язком між статистичною сумою та внутрішньою енергією  $-\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = U$ .

Далі переконуємося у правильності  $q$ -узагальнення співвідношення  $\ln Z + \beta U = S$ :

$$\ln_q Z + \beta U_q = S_q \quad \text{або} \quad \frac{Z_q^{1-q} - 1}{1 - q} + \beta U_q = S_q. \quad (5.27)$$

Розпишемо за означеннями:

$$\frac{Z_q^{1-q}}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} + \sum_{j=1}^W \beta \varepsilon_j p_j^q = \frac{1}{q - 1} \left( 1 - \sum_{j=1}^W p_j^q \right)$$

або

$$Z_q^{1-q} = \sum_{j=1}^W p_j^q [1 - \beta(1 - q)\varepsilon_j],$$

звідки

$$Z_q^{1-q} = \frac{1}{Z_q^q} \sum_{j=1}^W [1 - \beta(1 - q)\varepsilon_j]^{\frac{q}{1-q}+1} = \frac{1}{Z_q^q} Z_q,$$

*quod erat demonstrandum.*

Із виразу (5.27) також бачимо, що температуру можна означити відомим у термодинаміці способом:

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{\partial S_q}{\partial U_q}. \quad (5.28)$$

Можна також розглянути трохи інший спосіб знаходження функції розподілу  $p_j$ , із ширшим застосуванням  $q$ -формалізму [3, 5]. Для обчислення середніх деякої величини  $A$  вводять ненормоване  $q$ -середнє

$$\langle A \rangle_q = \sum_{j=1}^W p_j^q A_j \quad (5.29)$$

і нормоване

$$\langle\langle A \rangle\rangle_q = \left( \sum_{j=1}^W p_j^q \right)^{-1} \sum_{j=1}^W p_j^q A_j = \frac{\langle A \rangle_q}{\langle 1 \rangle_q}. \quad (5.30)$$

Зрозуміло, що

$$\langle A \rangle_1 = \langle\langle A \rangle\rangle_1 = \langle A \rangle, \quad (5.31)$$

де  $\langle A \rangle$  позначає звичайне середнє. Зауважимо також, що  $\langle\langle 1 \rangle\rangle_q = 1$ , тоді як, узагалі кажучи,  $\langle 1 \rangle_q \neq 1$ .

Ентропію Цалліса можна записати як таке середнє:

$$S_q = -\langle \ln_q p_j \rangle_q. \quad (5.32)$$

Цікаво розглянути знаходження екстремуму ентропії  $S_q$ , застосовуючи канонічний ансамбль. Нехай для визначеності система має енергетичний спектр  $\varepsilon_j$ , а температура термостата дорівнює  $T$ . Екстремум  $S_q$  шукатимемо за умов

$$\sum_{j=1}^W p_j = 1 \quad (5.33)$$

— нормування ймовірності, та

$$\langle\langle \varepsilon_j \rangle\rangle_q \equiv \left( \sum_{j=1}^W p_j^q \right)^{-1} \sum_{j=1}^W p_j^q \varepsilon_j = U_q \quad (5.34)$$

— умова на енергію.

Діючи стандартним способом, вдається показати, що

$$p_j = \frac{1}{\bar{Z}_q(\beta)} \left( 1 - (1 - q) \frac{\beta(\varepsilon_j - U_q)}{\langle 1 \rangle_q} \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad (5.35)$$

де

$$\bar{Z}_q(\beta) = \sum_{j=1}^W \left( 1 - (1 - q) \frac{\beta(\varepsilon_j - U_q)}{\langle 1 \rangle_q} \right)^{\frac{1}{1-q}}. \quad (5.36)$$

При цьому температура  $T = 1/\beta$ :

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S_q}{\partial U_q}. \quad (5.37)$$

## 5.4. Інші неекстенсивні узагальнення статистики

Підходи, що ґрунтуються на ентропії Цалліса, є лише одними з варіантів неекстенсивних узагальнень ентропії Больцмана–Гіббса. Щоб сформулювати ширше уявлення про цю ділянку науки, нижче наведено ще кілька таких способів.

Ентропія Рейні

$$S_q^R = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{j=1}^W p_j^q = \frac{1}{1-q} \ln[1 + (1-q)S_q]. \quad (5.38)$$

Ентропія Курадо

$$S_b = \sum_{j=1}^W \left(1 - e^{-bp_j}\right) + e^{-b} - 1, \quad \text{причому } b \in \mathbb{R}, b > 0. \quad (5.39)$$

Ентропія Каніадакіса<sup>3</sup> або  $\varkappa$ -ентропія

$$S_{\varkappa}^K = - \sum_{j=1}^W p_j \ln_{\varkappa}^K p_j, \quad (5.40)$$

де  $\ln_{\varkappa}^K x \equiv \frac{x^{\varkappa} - x^{-\varkappa}}{2\varkappa} \quad (\ln_0^K x = \ln x).$

Відзначимо, що ентропія Рейні є адитивною величиною, як і ентропія Больцмана–Гіббса, тобто

$$S_q^R(A + B) = S_q^R(A) + S_q^R(B), \quad (5.41)$$

на відміну від ентропії Цалліса (5.6).

Існують також  $q$ -узагальнення розподілів Фермі–Дірака й Бозе–Айнштайна, які полягають у заміні звичайної експоненти у виразах для чисел заповнення на  $q$ -експоненту Цалліса,  $e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \rightarrow e_q^{\beta(\varepsilon-\mu)}$ , або інші подібні модифікації. Причому, зважаючи на те, що  $q$ -експонента суми не факторизується на  $q$ -експоненти,  $e_q^{x+y} \neq e_q^x e_q^y$ , у таких розподілах вже не можна ввести активність за простою аналогією як  $z = e_q^{\beta\mu}$ .

Для спрощення продемонструємо результати обчислення теплоємності тривимірних систем вільних частинок, які відповідають  $q$ -узагальненням бозонного розподілу в такому вигляді:

$$n_j = \frac{1}{z^{-1} e_q^{\varepsilon_j/T} - 1}. \quad (5.42)$$

<sup>3</sup>Джорджо Каніадакіс (Giorgio Kaniadakis; нар. 1957), італійський фізик грецького походження.

Усі розрахунки зроблено за тими самими принципами, що й у попередніх розділах: активність визначаємо з умови

$$N = \int_0^{\infty} \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{z^{-1} e_q^{\varepsilon/T} - 1}, \quad (5.43)$$

а енергію обчислюємо як

$$E = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon}{z^{-1} e_q^{\varepsilon/T} - 1}. \quad (5.44)$$

Для  $D$ -вимірного ідеального газу  $g(\varepsilon) = A\varepsilon^{D/2-1}$ .

У такій системі спостерігатиметься аналог явища бозе-конденсації за температур, нижчих від певної критичної  $T_c$ , що визначається з умови:

$$N = A \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{D/2-1} d\varepsilon}{e_q^{\varepsilon/T_c} - 1}. \quad (5.45)$$

Простою заміною змінних  $x = \varepsilon/T_c$  перетворимо цю умову до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{N}{A} &= T_c^{D/2} \int_0^{\infty} \frac{x^{D/2-1} dx}{e_q^x - 1} = T_c^{D/2} \int_0^{\infty} dx x^{D/2-1} \frac{(e_q^x)^{-1}}{1 - (e_q^x)^{-1}} = \\ &= T_c^{D/2} \int_0^{\infty} dx x^{D/2-1} \sum_{k=1}^{\infty} (e_q^x)^{-k}. \end{aligned}$$

Для  $q = 1$  матимемо вираз через добуток дзета- і гамма-функцій:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{D/2-1} dx}{e^x - 1} = \zeta\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right).$$

Випадки  $q < 1$  та  $q > 1$  потрібно проаналізувати окремо, зважаючи на означення  $q$ -експоненти (5.14). Якщо  $q < 1$ , то аргумент

$1 + (1 - q)x$  додатний для всіх  $x \geq 0$ , тому

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{D/2-1} dx}{e_q^x - 1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dx x^{D/2-1} [1 + (1 - q)x]^{-\frac{k}{1-q}} = \\ &= \frac{1}{(1 - q)^{D/2}} \sum_{k=1}^{\infty} B\left(\frac{D}{2}, \frac{k}{1 - q} - \frac{D}{2}\right), \end{aligned} \quad (5.46)$$

де бета-функція  $B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u + v)}$ .

Якщо ж  $q > 1$ , то верхньою межею інтегрування буде точка  $x_0 = 1/(q - 1)$ , де  $1 + (1 - q)x$  стає від'ємним, тому

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{D/2-1} dx}{e_q^x - 1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{x_0} dx x^{D/2-1} [1 + (1 - q)x]^{-\frac{k}{1-q}} = \\ &= \frac{1}{(q - 1)^{D/2}} \sum_{k=1}^{\infty} B\left(\frac{D}{2}, \frac{k}{q - 1} + 1\right). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Ці результати можна переписати за допомогою  $q$ -узагальненої дзета-функції [6]:

$$\zeta_q(s) = \begin{cases} \zeta(s) & \text{для } q = 1, \\ \frac{1}{(1-q)^s \Gamma(s)} \sum_{k=1}^{\infty} B\left(s, \frac{k}{1-q} - s\right) & \text{для } q < 1, \\ \frac{1}{(q-1)^s \Gamma(s)} \sum_{k=1}^{\infty} B\left(s, \frac{k}{q-1} + 1\right) & \text{для } q > 1, \end{cases} \quad (5.48)$$

а саме:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{e_q^x - 1} = \zeta_q(s) \Gamma(s). \quad (5.49)$$

Означення критичної температури набуде вигляду:

$$\frac{N}{A} = T_c^{D/2} \zeta_q\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right). \quad (5.50)$$

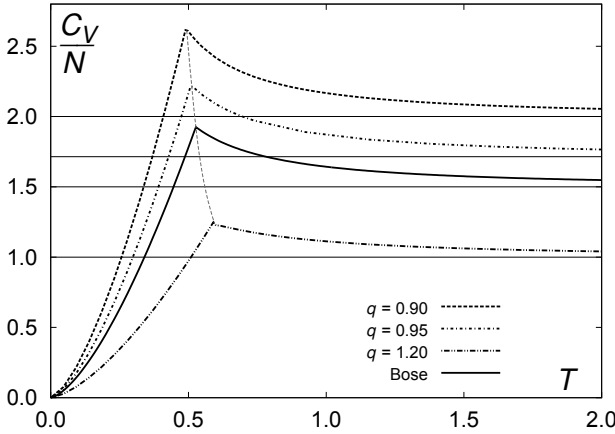


Рис. 5.2. Питова теплоємність тривимірного ідеального газу з неекстенсивною статистикою порівняно з результатами для статистики Бозе. Штрихова лінія проходить через максимуми, що відповідають критичним температурам. Одиниці вимірювання температури зафіксовано значенням  $\rho_D (2\pi\hbar^2/m)^{D/2} = 1$

Як нескладно показати, температурна залежність теплоємності зліва від критичної точки буде такою ж, як і в звичайному бозе-газі, тобто  $C_V \sim T^{D/2}$ . Високотемпературну асимптотику після низки перетворень отримаємо як

$$\left. \frac{C_V}{N} \right|_{T \rightarrow \infty} = \frac{D}{q(2+D) - D}. \quad (5.51)$$

## 5.5. Слабконеадитивна статистика Поліхронакоса

У цьому підрозділі розглядатимемо одну з можливих модифікацій статистики Бозе, в якій одночасно використано підходи Поліхронакоса і Цалліса. Вираз для чисел заповнення подамо у вигляді

$$n_j = \frac{1}{z^{-1} e_q^{\varepsilon_j/T} - \gamma}, \quad (5.52)$$

де  $T$  та  $z$  позначають звичайні температуру й активність, а  $e_q^x$  —  $q$ -експоненту Цалліса (5.14). Маючи на меті проаналізувати малі відхилення від розподілу Бозе, подамо параметри  $q$  та  $\gamma$  як відхилення від одиничних значень:

$$q = 1 - b; \quad \gamma = 1 + a. \quad (5.53)$$

Тут  $a$  та  $b$  — малі поправки. Зважаючи на принцип конструювання виразу для чисел заповнення, називатимемо таку статистику **слабконеадитивною статистикою Поліхронакоса**.

Щоб оцінити значення параметрів статистики, використаємо її для моделювання ефектів, пов'язаних зі слабкою взаємодією та скінченністю кількості частинок у системі бозонів. Прикладом може бути бозе-газ в ізотропній гармонічній пастці, що відповідає системі тривимірних гармонічних осциляторів із частотою  $\omega$ . Густина станів дорівнює

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{(\hbar\omega)^3} \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (5.54)$$

Означення критичної температури  $T_c$ , що відповідає аналогові температури бозе-конденсації, є таким:

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{z_c^{-1} e_{1-b}^{\varepsilon/T_c} - (1+a)} \quad (5.55)$$

або

$$N = \left( \frac{T_c}{\hbar\omega} \right)^3 \int_0^\infty \frac{\xi^2/2}{(1+a)e_{1-b}^\xi - (1+a)} d\xi. \quad (5.56)$$

Тут ураховано критичне значення активності у статистиці Поліхронакоса  $z_c = 1/\gamma$ , тобто  $z_c^{-1} = 1 + a$ , порівн. стор. 32.

Нескладно показати, що з точністю до лінійного за  $b$  доданка  $q$ -експонента Цалліса розкладається в такий ряд:

$$e_{1-b}^x = (1 + bx)^{1/b} \Big|_{b \rightarrow 0} = e^x - \frac{b}{2} x^2 e^x + \mathcal{O}(b^2). \quad (5.57)$$



Як наслідок, матимемо у виразі для  $N$  інтеграли, що зводяться до дзета-функцій, і з точністю до лінійних поправок із (5.56) отримаємо:

$$N = \left( \frac{T_c}{\hbar\omega} \right)^3 \zeta(3) \left[ 1 - a + b \frac{6\zeta(4)}{\zeta(3)} \right], \quad (5.58)$$

де  $\zeta(s)$  — дзета-функція Рімана, причому  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ . Оскільки критична температура ідеального бозе-газу гармонічних осциляторів дорівнює

$$T_c^B = \hbar\omega \left( \frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3}, \quad (5.59)$$

то поправки мають вигляд:

$$\frac{T_c}{T_c^B} = 1 + \frac{a}{3} - b \frac{2\zeta(4)}{\zeta(3)}. \quad (5.60)$$

Отриманий результат можна порівняти зі зсувом критичної температури внаслідок скінченності кількості частинок  $N$  [7]:

$$\frac{\Delta T_c^{\text{fin}}}{T_c^B} = -\frac{1}{2} \frac{\zeta(2)}{[\zeta(3)]^{2/3}} N^{-1/3} \quad (5.61)$$

та міжчастинкових взаємодій [7]:

$$\frac{\Delta T_c^{\text{int}}}{T_c^B} = -1.33 \frac{a_s}{a_{\text{ho}}} N^{1/6}, \quad (5.62)$$

де так звана *довжина гармонічного осцилятора*  $a_{\text{ho}} = \sqrt{\hbar/m\omega}$ , а  $a_s$  — довжина розсіяння  $s$ -хвилі.

Цікаво, що в термодинамічній границі, яка в задачі про тривимірні гармонічні осцилятори є умовою  $\omega N^{1/3} = \text{const}$ , другу поправку можна переписати як

$$\frac{a_s}{a_{\text{ho}}} N^{1/6} \propto \left( \omega N^{1/3} \right)^{1/2} = \text{const}, \quad (5.63)$$

тобто вона насправді не залежить від кількості частинок  $N$ .

Для спрощення оцінимо значення параметрів статистики на підставі таких феноменологічних міркувань: оскільки неадитивність може бути пов'язана з міжчастинковими взаємодіями, то вважатимемо саме величину  $b$  відповідальною за зсув критичної температури  $\Delta T_c^{\text{int}}$ , а з поправкою  $a$  пов'яжемо зсув  $\Delta T_c^{\text{fin}}$ . Звідси отримуємо пару простих рівнянь:

$$\frac{a}{3} = -\frac{1}{2} \frac{\zeta(2)}{[\zeta(3)]^{2/3}} N^{-1/3}; \quad b \frac{2\zeta(4)}{\zeta(3)} = 1.33 \frac{a_s}{a_{\text{ho}}} N^{1/6}. \quad (5.64)$$

Числові значення візьмемо для системи  $N = 5000$  атомів Rb-87 [7] в гармонічній пастці, що характеризується відношенням  $a_s/a_{\text{ho}} \simeq 2.6 \cdot 10^{-3}$ . У результаті отримуємо значення поправок:

$$a = -0.13, \quad b = 0.022. \quad (5.65)$$

Як бачимо, відхилення від одиниці є доволі суттєвим.

## 5.6. Завдання для самостійної роботи

1. Доведіть такі співвідношення для  $q$ -експоненти Цалліса [8]:

$$(a) [e_q^x]^p = e_{1-(1-q)/p}^{px}; \quad (b) [e_q^{f(x)}]^q = \frac{1}{f'(x)} \frac{de_q^{f(x)}}{dx};$$

$$(c) (e_q^x e_q^y)^{1-q} = (e_q^{x+y})^{1-q} + (1-q)^2 xy.$$

2. Доведіть такі співвідношення для  $q$ -логарифма [8]:

$$(a) q \ln_{1-q} x^a = a \ln_{1-a} x^q;$$

$$(b) \ln_q xy = \ln_q x + \ln_q y + (1-q) \ln_q x \ln_q y;$$

$$(c) \ln_q x - \ln_1 x = (1-q) \left[ \frac{d}{dq} \ln_q x + \ln_q x \ln_1 x \right].$$

3. Проаналізуйте отримання основних співвідношень (виразів для ентропії, її зв'язку з температурою та енергією) у статистиці Цалліса–Мендеша–Пластіно.

4. Використовуючи підхід до розрахунку критичної температури в підрозділі 5.4, покажіть, що при  $T \leq T_c$  теплоємність  $D$ -вимірного ідеального газу з  $q$ -узагальненим розподілом Бозе (5.42) буде

$$C_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \frac{D}{2} \left( \frac{D}{2} + 1 \right) \frac{\zeta_q(D/2 + 1)}{\zeta_q(D/2)} N \left( \frac{T}{T_c} \right)^{D/2},$$

та отримайте високотемпературну асимптотику теплоємності, враховуючи, що в цій границі

$$N = zA \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{D/2-1} \left( e^{\varepsilon/T} \right)^{-1}, \quad E = zA \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{D/2} \left( e^{\varepsilon/T} \right)^{-1}.$$

## Література до розділу 5

- [1] C. Tsallis. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *J. Stat. Phys.*, 52(1-2): 479-486, 1988.
- [2] S. Abe and Y. Okamoto, editors. *Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications*. Springer, Berlin, 2001.
- [3] А. И. Олемской, А. С. Вайленко и И. А. Шуда. *Различные формулировки статистической теории сложных систем*. Изд-во СумГУ, Сумы, 2008.
- [4] E. M. F. Curado and C. Tsallis. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 24(2): L69-L72, 1991.
- [5] C. Tsallis, R. S. Mendes, and A. R. Plastino. The role of constraints within generalized nonextensive statistics. *Physica A*, 261(3-4): 534-554, 1998.
- [6] Jincan Chen, Zhipeng Zhang, Guozhen Su, Lixuan Chen, and Yaogen Shu.  $q$ -generalized Bose-Einstein condensation based on Tsallis entropy. *Phys. Lett. A*, 300(1): 65-70, 2002.
- [7] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari. Condensate fraction and critical temperature of a trapped interacting Bose gas. *Phys. Rev. A.*, 54(6): R4633-R4636, 1996.
- [8] T. Yamano. Some properties of  $q$ -logarithm and  $q$ -exponential functions in Tsallis statistics. *Physica A*, 305(3-4): 486-496, 2002.

## Розділ 6

# Операторні реалізації дробових статистик

У статистиках Бозе–Айнштайна і Фермі–Дірака оператори породження–знищення  $\hat{a}_m^\dagger, \hat{a}_m$  задовольняють такі комутаційні співвідношення:

бозони	ферміони
$[\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger] \equiv [\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger]_- = \delta_{mn},$	$\{\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger\} \equiv [\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger]_+ = \delta_{mn},$
$[\hat{a}_m, \hat{a}_n] = 0,$	$\{\hat{a}_m, \hat{a}_n\} = 0,$
$[\hat{a}_m^\dagger, \hat{a}_n^\dagger] = 0.$	$\{\hat{a}_m^\dagger, \hat{a}_n^\dagger\} = 0.$

Тут  $\{A, B\} = AB + BA$  — *антикомутатор*, для якого з міркувань зручності введено позначення  $[\cdot, \cdot]_+$ , а звичайний комутатор, відповідно, можна записати як  $[\cdot, \cdot]_-$ .

Реальні частинки, як відомо, можуть бути лише бозонами або ферміонами. Далі ми розглядатимемо можливі узагальнення, які можуть описувати певні фізичні системи на ефективному рівні, подібно до статистико-механічних підходів. Простим прикладом таких задач є ґраткові моделі, де переставні співвідношення для операторів породження–знищення на вузлах мають такий вигляд:

$$\{b_i, b_i^\dagger\} = 1, \quad [b_i, b_j^\dagger] = [b_i, b_j] = [b_i^\dagger, b_j^\dagger] = 0, \quad (b_i^\dagger)^2 = b_i^2 = 0, \quad (6.1)$$

тобто оператори, що стосуються різних вузлів, діють як бозонні, а на одному вузлі — як ферміонні (див., наприклад, [1]). Подібний вигляд має також алгебра операторів спіну  $s = 1/2$ .

## 6.1. Парабозони і параферміони



Герберт Сидні Грін  
(Herbert Sydney Green;  
1920–1999)

У 1953 р. Герберт Сидні Грін запропонував розширення традиційних статистик [2]. Пов'язане воно з тим, що для операторів породження–знищення та оператора кількості частинок  $\hat{N}_m = \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m$  правильне співвідношення

$$[\hat{N}_m, \hat{a}_n^\dagger] = \delta_{mn} \hat{a}_m^\dagger \quad (6.2)$$

незалежно від того, розглядаємо ми бозони чи ферміони. У цьому легко переконалися. Справді, для бозонів маємо з урахуванням комутаційних співвідношень:

$$\begin{aligned} [\hat{N}_m, \hat{a}_n^\dagger] &= [\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger] = \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_n^\dagger - \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m = \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_n^\dagger - \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m = \\ &= \hat{a}_m^\dagger (\hat{a}_m \hat{a}_n^\dagger - \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m) = \hat{a}_m^\dagger [\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger] = \delta_{mn} \hat{a}_m^\dagger. \end{aligned}$$

Аналогічно для ферміонів:

$$\begin{aligned} [\hat{N}_m, \hat{a}_n^\dagger] &= [\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger] = \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_n^\dagger - \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m = \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_n^\dagger + \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m = \\ &= \hat{a}_m^\dagger (\hat{a}_m \hat{a}_n^\dagger + \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m) = \hat{a}_m^\dagger \{\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger\} = \delta_{mn} \hat{a}_m^\dagger. \end{aligned}$$

Оператор кількості частинок можна подати у вигляді

$$\hat{N}_m = \frac{1}{2} [\hat{a}_m^\dagger, \hat{a}_m]_{\pm} \mp \frac{1}{2}, \quad (6.3)$$

де верхній знак (антикомутатор) відповідає бозонам, а нижній (комутатор) — ферміонам. Підставивши цей вираз у рівняння (6.2), отримаємо такі **трилінійні** комутаційні співвідношення:

$$[[\hat{a}_m^\dagger, \hat{a}_m]_{\pm}, \hat{a}_n^\dagger] = 2\delta_{mn} \hat{a}_m^\dagger. \quad (6.4)$$

Узагальнивши їх на три різні індекси, матимемо:

$$[[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_m]_{\pm}, \hat{a}_n^\dagger] = 2\delta_{mn} \hat{a}_k^\dagger, \quad (6.5)$$

причому вакуумний та одночастинковий стани визначаються співвідношеннями  $\hat{a}_k|0\rangle = 0$  та  $\hat{a}_k\hat{a}_m^\dagger|0\rangle = p\delta_{km}|0\rangle$ , відповідно [3]. Величину  $p$  називають **порядком парастатистики**.

Оператори, які би задовольняли такі комутаційні співвідношення, Грін запропонував шукати у вигляді

$$\hat{a}_m = \sum_{j=1}^p \hat{b}_m^{(j)}, \quad \hat{a}_m^\dagger = \sum_{j=1}^p \hat{b}_m^{(j)\dagger}. \quad (6.6)$$

При цьому оператори з однаковими індексами  $j$  є бозонними (ферміонними), проте антикомутують (комутують) у випадку різних індексів. Верхня межа  $p$  в сумах збігається з порядком парастатистики. Хвильові функції  $p > 1$  парабозонів є антисиметричними при перестановці не більше  $p$  частинок, і, відповідно,  $p$  параферміонів залишаються симетричними за таких перестановок. Зрозуміло, що випадок  $p = 1$  відповідає традиційним статистикам Бозе та Фермі.

Тут цікаво відзначити, що замість **кольорового заряду**, який у квантовій хромодинаміці приписують кваркам та квантам сильної взаємодії — глюонам, — ці частинки можна еквівалентно описати за допомогою парастатистики. Кварки можна трактувати як параферміони третього порядку [4], оскільки вони є ферміонами й характеризуються одним із трьох кольорів. Вісім різних глюонів, що переносять кольорову взаємодію, будуть, відповідно, парабозонами восьмого порядку.

## 6.2. $q$ -деформації

### Осцилятор Арика–Куна<sup>1</sup>

Розглянемо алгебру операторів породження–знищення  $a^\dagger, a$ , які задовольняють таке комутаційне співвідношення [5], записане через  $q$ -деформований комутатор або  $q$ -мутатор:

$$[a, a^\dagger]_q \equiv aa^\dagger - qa^\dagger a = 1. \quad (6.7)$$

<sup>1</sup>Метін Арик (Metin Arık) (нар. 1948), турецький фізик. Його науковий керівник — Деррил Кун (Darryl Douglas Coon), американський фізик.

Алгебра операторів визначається також такими (звичайними) комутаторами (тут і далі для визначеності оперуватимемо з так званими  $q$ -бозонами):

$$[a^\dagger, a^\dagger] = [a, a] = 0, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [N, a] = -a, \quad (6.8)$$

де  $N$  — оператор кількості частинок, який у  $q$ -деформованому випадку вже не зводиться до  $a^\dagger a$ ,

$$N|n\rangle = n|n\rangle. \quad (6.9)$$

Діючи на вакуумний стан  $|0\rangle$  (причому  $\langle 0|0\rangle = 1$ ) вектором породження, отримаємо простір векторів  $|n\rangle$ :

$$(a^\dagger)^n|0\rangle = \text{const}|n\rangle, \quad \text{водночас} \quad a|0\rangle = 0. \quad (6.10)$$

Щоби встановити правила роботи з операторами  $a^\dagger, a$  докладніше, розглянемо їх дію на ненормовані стани  $|n\rangle^{(u)}$  в такому вигляді:

$$\begin{aligned} a^\dagger|n\rangle^{(u)} &= |n+1\rangle^{(u)}, & a|n\rangle^{(u)} &= A_n|n-1\rangle^{(u)}, \\ (a^\dagger)^n|0\rangle &= |n\rangle^{(u)}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

де  $A_n$  — множник, який визначатимемо далі. Зрозуміло, що

$$aa^\dagger|n\rangle^{(u)} = a|n+1\rangle^{(u)} = A_{n+1}|n\rangle^{(u)}.$$

З іншого боку, враховуючи (6.7),

$$\begin{aligned} aa^\dagger|n\rangle^{(u)} &= (1 + qa^\dagger a)|n\rangle^{(u)} = |n\rangle^{(u)} + qa^\dagger A_n|n-1\rangle^{(u)} = \\ &= (1 + qA_n)|n\rangle^{(u)}. \end{aligned}$$

Тобто ми отримали рекурентне співвідношення:

$$A_{n+1} = 1 + qA_n. \quad (6.12)$$

З означення вакуумного стану  $a|0\rangle = 0$  випливає, що  $A_0 = 0$ . Тому:

$$A_1 = 1; \quad A_2 = 1 + q; \quad A_3 = 1 + q(1 + q) = 1 + q + q^2 \quad \text{і т. д.}$$

або в загальному вигляді:

$$A_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Цей результат записують через так звані  $q$ -числа<sup>2</sup>:

$$[n]_q \equiv \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad (6.13)$$

тобто матимемо просто

$$A_n = [n]_q. \quad (6.14)$$

Знайдемо тепер квадрат норми за допомогою таких послідовних перетворень:

$$\begin{aligned} \langle n|n \rangle^{(u)} &= \langle n-1|aa^\dagger|n-1 \rangle^{(u)} = A_n \langle n-1|n-1 \rangle^{(u)} = \\ &= A_n \langle n-2|aa^\dagger|n-2 \rangle^{(u)} = A_n A_{n-1} \langle n-2|n-2 \rangle^{(u)} = \\ &= \dots = A_n A_{n-1} \dots A_1 \langle 0|0 \rangle = A_n A_{n-1} \dots A_1 1. \end{aligned}$$

Уводячи  $q$ -факторіал:

$$\begin{aligned} [n]_q! &= [n]_q [n-1]_q \dots [1]_q = \\ &= (q^{n-1} + \dots q + 1)(q^{n-2} + \dots q + 1) \dots (q^2 + q + 1)(q + 1)1; \\ [0]_q! &= 1, \end{aligned} \quad (6.15)$$

запишемо

$$\langle n|n \rangle^{(u)} = [n]_q! \quad (6.16)$$

Тепер нормовані стани можемо подати як

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]_q!}} (a^\dagger)^n |0\rangle, \quad (6.17)$$

---

<sup>2</sup>Їх ще називають базовими (англ. *basic*)  $q$ -числами, на відміну від інших узагальнень, деякі з яких наведено на сторінці 82.



звідки, враховуючи (6.11), нескладно показати, що справджуються такі співвідношення:

$$\begin{aligned} a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{[n+1]_q} |n+1\rangle, \\ a |n\rangle &= \sqrt{[n]_q} |n-1\rangle. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Попарні добутки операторів породження–знищення записуються у вигляді:

$$a^\dagger a = [N]_q, \quad aa^\dagger = [N+1]_q, \quad (6.19)$$

а для оператора  $N$  можна формально отримати такий вираз:

$$N = \frac{1}{\ln q} \ln \left( 1 + (q-1)a^\dagger a \right). \quad (6.20)$$

У цьому легко переконатися звичайним розкладом у ряд.

Автори оригінальної праці [5], де було запропоновано такий осцилятор, вважали параметр  $0 < q < 1$  дійсним. Натомість досить цікавою є ситуація, коли  $q$  — комплексна величина, яка є  $(s+1)$ -ий корінь із одиниці,  $q = e^{2\pi i/(s+1)}$ . Легко показати, що  $[s+1]_q = 0$ , тобто ці оператори володіють такою властивістю нільпотентності [6]:

$$(a_q)^n = (a_q^\dagger)^n = 0, \quad \text{якщо } n \geq s+1. \quad (6.21)$$

Отже, така алгебра відповідає обмеженню на заповнення одного квантового стану не більше за  $s$ , тобто статистиці Дженгіле, описану в розділі 2.

Деформація комутаційних співвідношень у вигляді (6.7) є лише однією з багатьох можливих. Її можна трактувати як однопараметричний випадок загальнішого підходу, який розглянемо наступним.

### **$(p, q)$ -деформований осцилятор**

У цій моделі трійка операторів  $a, a^\dagger, N$  пов'язана так [7]:

$$\begin{aligned} aa^\dagger - qa^\dagger a &= p^{-N}, & aa^\dagger - p^{-1}a^\dagger a &= q^N, \\ [N, a^\dagger] &= a^\dagger, & [N, a] &= -a. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Дію операторів породження–знищення можна подати як

$$\begin{aligned} a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{[n+1]_{p,q}} |n+1\rangle, \\ a |n\rangle &= \sqrt{[n]_{p,q}} |n-1\rangle, \quad \text{де } [x]_{p,q} = \frac{q^x - p^{-x}}{q - p^{-1}}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

а для оператора кількості частинок матимемо, як і раніше,

$$N |n\rangle = n |n\rangle. \quad (6.24)$$

Можливі також і багатопараметричні узагальнення подібного типу [8]. З іншого боку, зрозуміло, що осцилятор Арика–Куна відповідає однопараметричному частковому випадкові з  $p = 1$ . Дві інші однопараметричні деформації, які використовують найчастіше, розглянемо нижче.

**Осцилятор Біденгарна–Макфарлейна**<sup>3</sup> відповідає виборові  $p = q$  [9, 10, 11], тобто

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger]_q &\equiv aa^\dagger - qa^\dagger a = q^{-N}, \\ [a, a^\dagger]_{q^{-1}} &= aa^\dagger - q^{-1}a^\dagger a = q^N, \\ [N, a^\dagger] &= a^\dagger, \quad [N, a] = -a. \end{aligned} \quad (6.25)$$

**Осцилятор Тамма–Данкова**<sup>4</sup> є частковим випадком  $(p, q)$ -деформованого осцилятора, коли  $p = q^{-1}$  [12]. Алгебру операторів породження–знищення та кількості частинок визначають співвідношення:

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger]_q &\equiv aa^\dagger - qa^\dagger a = q^N, \\ [N, a^\dagger] &= a^\dagger, \quad [N, a] = -a. \end{aligned} \quad (6.26)$$

<sup>3</sup>Лоренс Крістіан Біденгарн (Lawrence Christian Biedenharn, Jr.; 1922–1996), американський фізик. Алан Дж. Макфарлейн (Alan J. Macfarlane), британський фізик.

<sup>4</sup>Ігор Євгенович Тамм (Игорь Евгеньевич Тамм, Igor Tamm; 1895–1971), радянський фізик, лауреат Нобелівської премії з фізики 1958 р. (разом із П. Черенковим та І. Франком). Сідні Данков (Sidney Michael Dancoff; 1913–1951), американський фізик.

Деформовані комутатори операторів породження–знищення можна також еквівалентно переписати за допомогою *структурної функції*  $\varphi(N)$ :

$$\begin{aligned} aa^\dagger &= \varphi(N+1), & a^\dagger a &= \varphi(N), \\ [a, a^\dagger] &\equiv aa^\dagger - a^\dagger a = \varphi(N+1) - \varphi(N). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Із загального рекурентного співвідношення

$$\varphi(N+1) - F(N)\varphi(N) = G(N) \quad (6.28)$$

можна отримати [13]

$$\varphi(n) = F(1) \dots F(n-1) \left[ G(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{G(k)}{F(1) \dots F(k)} \right]. \quad (6.29)$$

Як легко переконатися, в описаних моделях деформованих осциляторів структурні функції будуть такими:

осцилятор Арика–Куна:  $\varphi(N) = [N]_q = \frac{q^N - 1}{q - 1},$

$p, q$ -деформований осцилятор:  $\varphi(N) = [N]_{p,q} = \frac{q^N - p^{-N}}{q - p^{-1}},$

осцилятор Біденгарна–Макфарлейна:  $\varphi(N) = [N]_{q,q} = \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}},$

осцилятор Тамма–Данкова:  $\varphi(N) = Nq^{N-1}.$

Зважаючи на те, що в  $q$ -деформованому випадку вже немає простого зв'язку між оператором кількості частинок і операторами породження–знищення ( $N \neq a^\dagger a$ ), не існує однозначного рецепту, як записати гамільтоніан системи. Зокрема, гамільтоніан гармонічного осцилятора з частотою  $\omega$  подають як

$$H = \hbar\omega a^\dagger a \quad (6.30)$$

або в симетризованій формі

$$H = \frac{1}{2} \hbar\omega (a^\dagger a + aa^\dagger). \quad (6.31)$$

Ми надалі зосередимося на іншому простому зображенні через оператор кількості частинок:

$$H = \hbar\omega N, \quad (6.32)$$

який застосуємо, аналізуючи термодинаміку.

Для вивчення багаточастинкових систем інтерес становлять багатомодові узагальнення алгебри операторів породження–знищення. Дослідження такої *куонної алгебри* (англ. ‘quon’) пов’язане насамперед з іменем американського фізика Оскара Грінберга, який на початку 90-х років XX ст. опублікував низку праць з цієї тематики (у 60-х роках він також вивчав парастатистику). У статті [14] проаналізовано таке деформоване комутаційне співвідношення:

$$[a_k, a_j^\dagger]_q \equiv a_k a_j^\dagger - q a_j^\dagger a_k = \delta_{kj} \quad (6.33)$$

для  $-1 \leq q \leq +1$ . При цьому вакуумний стан визначається звично:

$$a_k |0\rangle = 0, \quad (6.34)$$

а оператор кількості частинок  $N_j \neq a_j^\dagger a_j$  і пов’язаний з оператором знищення через звичайний комутатор

$$[N_j, a_k] = -\delta_{jk} a_k. \quad (6.35)$$

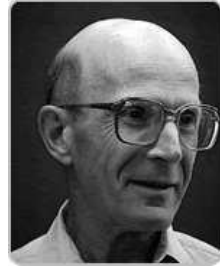
Зазначмо, що для пар операторів  $a_j, a_k$  чи  $a_j^\dagger, a_k^\dagger$  ніяких додаткових комутаційних співвідношень не задають.

Автори статті [15] показали, що комплексний параметр  $q = e^{i\theta}$  у рівнянні (6.33) може бути пов’язаний з еніонами, про які йтиметься в наступному розділі, а в [16] куонну алгебру узагальнено як

$$a_k a_j^\dagger - q_{kj} a_j^\dagger a_k = \delta_{kj}, \quad \text{причому} \quad q_{kj}^* = q_{jk}. \quad (6.36)$$

Алгебру ж із незалежними модами, коли оператори породження–знищення з різними індексами комутують, а з однаковими —  $q$ -мутують, можна подати у такому вигляді [17]:

$$[a_k, a_j^\dagger] \equiv a_k a_j^\dagger - a_j^\dagger a_k = \delta_{kj} + (q^{\delta_{kj}} - 1) a_j^\dagger a_k. \quad (6.37)$$



Оскар Грінберг  
(Oscar Wallace Greenberg;  
нар. 1932)

### 6.3. Елементи $q$ -числення

У розділі 5 нам вже траплялася похідна Джексона (5.8):

$$D_q f(x) \equiv \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}.$$

Простими перетвореннями можна показати, що її дія на функцію  $x^n$  дає

$$D_q x^n = [n]_q x^{n-1}, \quad (6.38)$$

де введений раніше  $q$ -аналог числа  $n$

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + \dots + q + 1.$$

Операцією, оберненою до похідної  $D_q$ , є *інтеграл Джексона*. Його можна ввести таким способом [18, § 19]. Нехай виконується рівність

$$D_q F(x) = \frac{F(qx) - F(x)}{(q-1)x} = f(x), \quad (6.39)$$

яку за допомогою оператора масштабування  $\hat{M}_q F(x) = F(qx)$  перепишемо у вигляді

$$D_q F(x) = \frac{F(qx) - F(x)}{(q-1)x} = \frac{1}{(q-1)x} \left( \hat{M}_q - 1 \right) F(x) = f(x).$$

Звідси після формальних перетворень, зберігаючи порядок операторів, матимемо:

$$F(x) = \frac{1}{1 - \hat{M}_q} \left( (1 - q)x f(x) \right) = (1 - q) \sum_{j=0}^{\infty} \hat{M}_q^j x f(x),$$

де вираз із оператором масштабування переписано як суму геометричної прогресії. Остаточно отримаємо інтеграл Джексона:

$$F(x) \equiv \int f(x) d_q x = (1 - q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) \quad (6.40)$$

або відповідний означений інтеграл у позначеннях [5]:

$$\int_0^b f(x) Dq x = (1 - q)b \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j b), \quad (6.41)$$

за допомогою якого, наприклад, записують скалярний добуток у формалізмі осцилятора Арика–Куна.

Розділ математики, який вивчає описані та подібні до них узагальнення похідних, інтегралів, пов'язаних із цим аналогів звичайних чисел та функцій, називають  **$q$ -численням** або **квантовим аналізом**. Відповідні методи застосовують у різних галузях математики та фізики [18].

З довідковою метою розглянемо приклади узагальнень деяких функцій [18]. Так,  $q$ -аналогом многочлена  $(x - a)^n$  є

$$\begin{aligned} (x - a)_q^n &= (x - a)(x - qa) \dots (x - q^{n-1}a) \quad \text{при } n \geq 1; \\ (x - a)_q^0 &= 1. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Узагальнення для від'ємних показників

$$(x - a)_q^{-n} = \frac{1}{(x - q^{-n}a)_q^n} \quad (6.43)$$

можна отримати з правила множення  $q$ -многочленів:

$$(x - a)_q^{m+n} = (x - a)_q^m (x - q^m a)_q^n. \quad (6.44)$$

Для них справедливі такі правила  $q$ -диференціювання:

$$D_q(x - a)_q^n = [n]_q (x - a)_q^{n-1}, \quad (6.45)$$

$$D_q(a - x)_q^n = -[n]_q (a - qx)_q^{n-1}, \quad (6.46)$$

$$D_q \frac{1}{(x - a)_q^n} = [-n]_q (x - q^n a)_q^{-n-1}, \quad (6.47)$$

$$D_q \frac{1}{(a - x)_q^n} = \frac{[n]_q}{(a - x)_q^{n+1}}. \quad (6.48)$$

Уводячи  $q$ -біноміальний коефіцієнт:

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[j]_q! [n-j]_q!}, \quad (6.49)$$

де  $q$ -факторіал задано формулою (6.15), запишемо формулу бінома Гаусса:

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{j(j-1)/2} \alpha^j x^{n-j}. \quad (6.50)$$

Також уводять  $q$ -експоненти (**NB**: вони відрізняються від  $q$ -експонент Цалліса!). З метою уникнення плутанини тут використовуємо інші позначення, а саме:

$$\text{Exp}_q \equiv E_q^x \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]_q!}, \quad (6.51)$$

$$\mathcal{E}xp_q \equiv \mathcal{E}_q^x \equiv \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{[j]_q!}, \quad (6.52)$$

$$\text{причому } E_1^x = \mathcal{E}_1^x = e^x.$$

Інші зображення цих функцій:

$$E_q^x = \frac{1}{(1 - (1-q)x)_q^{\infty}} \quad (6.53)$$

$$\mathcal{E}_q^x = (1 - (1-q)x)_q^{\infty}. \quad (6.54)$$

Як і  $q$ -експоненту Цалліса, їх можна застосовувати для модифікацій гіббсівського фактора у моделях чисел заповнення в дробових статистиках [19].

## 6.4. $q$ -деформована термодинаміка

Проаналізуємо один зі способів побудови термодинаміки в системі, яка відповідає деформації Арика–Куна [20]. У підході великого канонічного ансамблю запишемо гамільтоніан

$$H = \sum_j (\varepsilon_j - \mu) N_j, \quad (6.55)$$

де  $\varepsilon_j$  — енергія,  $N_j$  — оператор кількості частинок, що відповідають станіві  $j$ , а  $\mu$  — хімічний потенціал. Велика статистична сума буде

$$\Xi = \text{Sp } e^{-\beta H}, \quad (6.56)$$

$\beta = 1/T$  — обернена температура. Використовуючи стандартне означення термодинамічного середнього оператора  $\mathcal{O}$

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\Xi} \text{Sp} \left( \mathcal{O} e^{-\beta H} \right) \quad (6.57)$$

і зважаючи на зв'язок (6.19) між оператором кількості частинок та операторами породження–знищення, для середнього числа заповнення  $n_j$  в  $j$ -му стані матимемо

$$[n_j]_q = \frac{1}{\Xi} \text{Sp} \left( e^{-\beta H} a_j^\dagger a_j \right). \quad (6.58)$$

Зауважимо, що з комутаційного співвідношення  $[a_j, N_j] = a_j$  випливає [21] така властивість будь-якого полінома  $f(N_j)$  від  $N_j$ :

$$a_j f(N_j) = f(N_j + 1) a_j. \quad (6.59)$$

Тому, переставляючи циклічно оператори під шпуром, матимемо

$$\begin{aligned} [n_j]_q &= \frac{1}{\Xi} \text{Sp} \left( e^{-\beta H} a_j^\dagger a_j \right) = \frac{1}{\Xi} \text{Sp} \left( a_j e^{-\beta H} a_j^\dagger \right) = \\ &= \frac{1}{\Xi} e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)} \text{Sp} \left( e^{-\beta H} a_j a_j^\dagger \right) = e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)} [n_j + 1]_q. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Оскільки  $n_j$  є власним значенням оператора  $N_j$ , то з формули (6.20) відразу отримаємо

$$n_j = \frac{1}{\ln q} \ln \left( \frac{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_j} - 1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_j} - q} \right), \quad (6.61)$$

де  $z = e^{\beta \mu}$  — активність.



За послідовної побудови термодинаміки замість звичайної похідної виникає похідна Джексона. Це можна зауважити, розглянувши логарифм великої статсуми

$$\ln \Xi = - \sum_j \ln \left( 1 - z e^{-\beta \varepsilon_j} \right) \quad (6.62)$$

і повну кількість частинок  $N = \sum_j n_j$ , унаслідок чого бачимо порушення стандартного співвідношення

$$N \neq z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi. \quad (6.63)$$

Однак, замінивши  $\frac{\partial}{\partial z}$  на  $D_q^{(z)}$ , матимемо

$$N = z D_q^{(z)} \ln \Xi = \frac{1}{q-1} \ln \left( \frac{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_j} - 1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_j} - q} \right) = \frac{\ln q}{q-1} \sum_j n_j. \quad (6.64)$$

Отже, незначно модифікуючи похідну Джексона

$$\tilde{D}_q^{(z)} = \frac{q-1}{\ln q} D_q^{(z)}, \quad (6.65)$$

яка також зводиться до звичайної похідної у границі  $q \rightarrow 1$ , матимемо аналог стандартного термодинамічного співвідношення

$$N = z \tilde{D}_q^{(z)} \ln \Xi = \sum_j n_j. \quad (6.66)$$

Цікаво, що така заміна похідних стосується змінних в експоненціальній формі, наприклад,  $z = e^{\beta \mu}$  або  $y_j = e^{-\beta \varepsilon_j}$ . Відповідно, за переходу до  $q$ -деформованої термодинаміки всі похідні потрібно переписати через  $z$  чи  $y_j$  і потім ввести похідну Джексона. Прикладом може бути вираз для внутрішньої енергії

$$U = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi = \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_j \ln (1 - z y_j) = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial y_j} \ln (1 - z y_j), \quad (6.67)$$

який у деформованому випадку набуде вигляду

$$U = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial \beta} \tilde{D}_q^{(y_j)} \ln(1 - zy_j) = \sum_j \varepsilon_j n_j, \quad (6.68)$$

тобто збігатиметься з очікуванням.

Ентропія  $S$  пов'язана з великим термодинамічним потенціалом  $\Omega = -T \ln \Xi$  подібним способом:

$$\begin{aligned} S &= - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{\mu, V} = \frac{\partial}{\partial T} \sum_j T \ln(1 - zy_j) = \\ &= \ln \Xi - T \sum_j \frac{\partial(zy_j)}{\partial T} \frac{\partial}{\partial(zy_j)} \ln(1 - zy_j), \end{aligned}$$

що в деформованому випадку перейде у вираз

$$S = \ln \Xi - \frac{1}{T} \sum_j zy_j \varepsilon_j \tilde{D}_q^{(zy_j)} \ln(1 - zy_j) = \ln \Xi + \beta U - \beta \mu N, \quad (6.69)$$

який формально збігається з означенням великого термодинамічного потенціалу  $\Omega = U - TS - \mu N$ .

Ураховуючи зв'язок (6.60), звідки

$$zy_j \equiv e^{\beta(\mu - \varepsilon_j)} = \frac{[n_j]_q}{[n_j + 1]_q} \quad \text{або} \quad \beta(\mu - \varepsilon_j) = \ln \frac{[n_j]_q}{[n_j + 1]_q},$$

отриманий вираз для ентропії можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} S &= - \sum_j \ln(1 - zy_j) + \beta \sum_j (\varepsilon_j - \mu) n_j = \\ &= \sum_j \left\{ - \ln \left( 1 - \frac{[n_j]_q}{[n_j + 1]_q} \right) + n_j \ln \frac{[n_j]_q}{[n_j + 1]_q} \right\}. \end{aligned}$$

Після елементарних перетворень матимемо вираз

$$\begin{aligned} S &= \sum_j \left\{ - n_j \ln [n_j]_q + (n_j + 1) \ln [n_j + 1]_q - \right. \\ &\quad \left. - \ln ([n_j + 1]_q - [n_j]_q) \right\}. \quad (6.70) \end{aligned}$$

Зважаючи на те, що в границі  $q \rightarrow 1$  всі  $q$ -числа переходять у звичайні числа, тобто  $[n_j]_q$  потрібно замінити на розподіл Бозе  $n_j$ , бачимо, що такий вираз для ентропії містить стандартний бозонний внесок

$$S_{\text{Bose}} = \sum_j \left\{ -n_j \ln n_j + (n_j + 1) \ln(n_j + 1) \right\} \quad (6.71)$$

з точністю до заміни  $n_j$  на  $[n_j]_q$  у перших двох доданках, а також поправку, спричинену неадитивністю  $q$ -чисел,

$$\Delta S = - \sum_j \ln ([n_j + 1]_q - [n_j]_q), \quad (6.72)$$

що зникає в границі  $q \rightarrow 1$ .

## 6.5. $\tilde{\mu}$ -деформована термодинаміка

Деякий інший спосіб побудови деформованої термодинаміки було запропоновано в контексті досліджень  $\tilde{\mu}$ -деформованого осцилятора [22], для якого структурна функція

$$\varphi(N) = \frac{N}{1 + \tilde{\mu}N}. \quad (6.73)$$

Звичайний гармонічний осцилятор отримуємо у границі  $\tilde{\mu} \rightarrow 0$ .

Відповідно до [23], змодифікуємо формулу, що пов'язує кількість частинок  $N$  і велику статистичну суму  $\Xi$

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi \quad (6.74)$$

(для спрощення не виписуватимемо явно умови сталості температури й об'єму). Нехай деформований аналог кількості частинок буде

$$N^{(\tilde{\mu})} = z D_z^{(\tilde{\mu})} \ln \Xi, \quad (6.75)$$

де деформована похідна

$$D_x^{(\tilde{\mu})} x^n = [n]_{\tilde{\mu}} x^{n-1}, \quad \text{причому} \quad [n]_{\tilde{\mu}} = \frac{n}{1 + \tilde{\mu}n}. \quad (6.76)$$

Підставивши в (6.75) велику статистичну суму ідеального бозе-газу зі спектром  $\varepsilon_j$ , матимемо

$$N^{(\tilde{\mu})} = z D_z^{(\tilde{\mu})} \ln \Xi = -z D_z^{(\tilde{\mu})} \sum_j \ln \left( 1 - z e^{-\varepsilon_j/T} \right). \quad (6.77)$$

Після розкладу логарифма в ряд і почленного застосування похідної (6.76) до змінної  $z$  отримаємо

$$N^{(\tilde{\mu})} = z \sum_j \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{e^{-\ell\varepsilon_j/T}}{\ell} [\ell]_{\tilde{\mu}} z^{\ell-1} = \sum_j \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{e^{-\ell\varepsilon_j/T}}{\ell} [\ell]_{\tilde{\mu}} z^{\ell}. \quad (6.78)$$

Зрозуміло, що для існування розкладу в ряд має виконуватись умова  $|z e^{-\varepsilon_j/T}| < 1$ .

Якщо енергія основного стану  $\varepsilon_0 = 0$ , то у границі  $z \rightarrow 1$  доданок з  $j = 0$  буде розбіжним. Виділимо його окремо:

$$N^{(\tilde{\mu})} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{[\ell]_{\tilde{\mu}}}{\ell} z^{\ell} + \sum_{j>0} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{[\ell]_{\tilde{\mu}}}{\ell} e^{-\ell\varepsilon_j/T} z^{\ell}. \quad (6.79)$$

Фактично, перший доданок відповідає заповненню основного стану, тобто описує кількість частинок в  $\tilde{\mu}$ -деформованому аналозі бозе-конденсату:

$$n_0^{(\tilde{\mu})} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{[\ell]_{\tilde{\mu}}}{\ell} z^{\ell}. \quad (6.80)$$

Для визначеності розглянемо далі ідеальний  $D$ -вимірний бозе-газ і перейдемо від підсумовування за станами до інтегрування за енергіями з густиною станів (2.16):

$$\begin{aligned} N^{(\tilde{\mu})} &= n_0^{(\tilde{\mu})} + \frac{\mathcal{V}_D}{\Gamma(D/2)} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{D/2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{[\ell]_{\tilde{\mu}}}{\ell} z^{\ell} \int_0^{\infty} \varepsilon^{D/2-1} e^{-\ell\varepsilon/T} d\varepsilon = \\ &= n_0^{(\tilde{\mu})} + \frac{\mathcal{V}_D}{\lambda^D} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{[\ell]_{\tilde{\mu}}}{\ell^{D/2+1}} z^{\ell}. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Для побудови  $\tilde{\mu}$ -деформованої термодинаміки введемо деформовану велику статистичну суму співвідношенням  $\Xi(\tilde{\mu})$ :

$$N(\tilde{\mu}) = z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi(\tilde{\mu}). \quad (6.82)$$

Формально можна записати

$$\ln \Xi(\tilde{\mu}) = \left( z \frac{\partial}{\partial z} \right)^{-1} N(\tilde{\mu}), \quad (6.83)$$

де дія оберненого оператора зводиться до інтегрування

$$\left( z \frac{\partial}{\partial z} \right)^{-1} f(z) = \int_0^z dz' \frac{f(z')}{z'}, \quad \text{тому} \quad \left( z \frac{\partial}{\partial z} \right)^{-1} z^n = \frac{z^n}{n}. \quad (6.84)$$

У результаті для  $\ln \Xi(\tilde{\mu})$  матимемо ряд

$$\ln \Xi(\tilde{\mu}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{[\ell]_{\tilde{\mu}}}{\ell^2} z^{\ell} + \frac{\mathcal{Y}_D}{\lambda^D} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{[\ell]_{\tilde{\mu}}}{\ell^{D/2+2}} z^{\ell}. \quad (6.85)$$

Щоб побачити аналогію зі звичайним бозе-газом, зручно ввести такі  $\tilde{\mu}$ -узагальнення полілогарифмів:

$$\text{Li}_s^{(\tilde{\mu})}(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{[\ell]_{\tilde{\mu}}}{\ell^{s+1}} z^{\ell}, \quad (6.86)$$

які переходять у звичайні, коли  $[\ell]_{\tilde{\mu}} \rightarrow \ell$ . Отже,

$$\ln \Xi(\tilde{\mu}) = \text{Li}_1^{(\tilde{\mu})}(z) + \frac{\mathcal{Y}_D}{\lambda^D} \text{Li}_{D/2+1}^{(\tilde{\mu})}(z). \quad (6.87)$$

Звідси отримуємо рівняння стану:

$$\frac{p\mathcal{Y}_D}{T} = \ln \Xi(\tilde{\mu}) = \text{Li}_1^{(\tilde{\mu})}(z) + \frac{\mathcal{Y}_D}{\lambda^D} \text{Li}_{D/2+1}^{(\tilde{\mu})}(z) \quad (6.88)$$

та термодинамічні функції, наприклад, внутрішню енергію як похідну за оберненою температурою

$$U(\tilde{\mu}) = - \left( \frac{\partial \ln \Xi(\tilde{\mu})}{\partial \beta} \right)_{z, \mathcal{Y}_D}. \quad (6.89)$$

Як легко зауважити, ми жодного разу не апелювали до явно-го вигляду чисел  $[n]_{\bar{\mu}}$  (6.76). Тому зрозуміло, що описаний підхід можна застосовувати й до інших типів деформованих осциляторів. Конкретизація залежності від параметра деформації потрібна для розрахунків у межах певної моделі.

## 6.6. Завдання для самостійної роботи

1. В квантній алгебрі Грінберга (6.33) знайдіть комутатор *опера-тора переходу*  $N_{ij} = a_i^\dagger a_j$ , який знищує частинку в стані  $j$  і породжує частинку в стані  $i$ , з операторами  $a_k$  та  $a_k^\dagger$ . Також покажіть, що  $q$ -мутатор між операторами знищення дорівнює нулеві,

$$[a_k, a_j]_q \equiv a_k a_j - q a_j a_k = 0,$$

лише у випадку  $q = \pm 1$ . Деталі див. у статті [14].

2. Покажіть, що для похідної Джексона правильна границя

$$D_1 \equiv \lim_{q \rightarrow 1} D_q = \frac{d}{dx},$$

і доведіть правило  $q$ -диференціювання добутку двох функцій:

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)D_q g(x) + g(qx)D_q f(x).$$

3. Покажіть, що

$$E_{1/q}^x = \mathcal{E}_q^x,$$

та знайдіть  $q$ -похідні функцій  $E_q^x$  і  $\mathcal{E}_q^x$ .

4. Знайдіть перші кілька членів розкладу функцій  $E_q^x$  та  $\mathcal{E}_q^x$  в ряд за степенями  $(q - 1)$ .

5. Формально можна ввести також  $q$ -аналоги тригонометричних функцій:

$$\begin{aligned}\sin_q x &= \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i}, & \text{Sin}_q x &= \frac{\mathcal{E}_q^{ix} - \mathcal{E}_q^{-ix}}{2i}, \\ \cos_q x &= \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2}, & \text{Cos}_q x &= \frac{\mathcal{E}_q^{ix} + \mathcal{E}_q^{-ix}}{2}.\end{aligned}$$

Знайдіть  $q$ -похідні цих функцій та доведіть рівність

$$\cos_q x \text{Cos}_q x + \sin_q x \text{Sin}_q x = 1.$$

6.  $q$ -числення безпосередньо пов'язане з  $q$ -деформованим комутатором  $[x, y]_q = xy - qyx$ . Покажіть, що

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q x^j y^{n-j},$$

якщо  $[x, y]_q = 0$ . Див. [18, § 5].

7. Коректність описаного способу побудови  $q$ -деформованої термодинаміки можна перевірити, розрахувавши на підставі ентропії вираз для чисел заповнення. Відповідна варіаційна задача матиме вигляд

$$\delta(S - \beta U + \beta \mu N) = \tilde{D}_q^{(y_j)}(S - \beta U + \beta \mu N) \delta y_j = 0. \quad (6.90)$$

Знайдіть цим способом числа заповнення  $n_j$  і порівняйте їх із (6.61).

8. Знайдіть внутрішню енергію  $\frac{U(\tilde{\mu})}{N(\tilde{\mu})}$  та питому теплоємність  $\frac{C_V(\tilde{\mu})}{N(\tilde{\mu})}$  ідеального  $D$ -вимірного  $\tilde{\mu}$ -деформованого бозе-газу (див. [23]).

## Література до розділу 6

- [1] I. P. Стасюк та I. В. Дулепа. Одночастинковий спектр та фазовий перехід у йонному провіднику Паулі. *Журн. фіз. дослідж.*, 13(2): 2701, 2009.
- [2] H. S. Green. A generalized method of field quantization. *Phys. Rev.*, 90(2): 270–273, 1953.
- [3] O. W. Greenberg and A. M. L. Messiah. Selection rules for parafields and the absence of para particles in nature. *Phys. Rev.*, 138(5B): B1155–B1167, 1965.
- [4] O. W. Greenberg. Spin and unitary-spin independence in a paraquark model of baryons and mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 13(20): 598–602, 1964.
- [5] M. Arik and D. D. Coon. Hilbert spaces of analytic functions and generalized coherent states. *J. Math. Phys.*, 17(4): 524–527, 1976.
- [6] Y. Yang, S. Xie, W. Feng, and X. Wu. Statistics for  $q$ -commutator in the case of  $q^{s+1} = 1$ . *Mod. Phys. Lett. A*, 13(11): 879–886, 1998.
- [7] R. Chakrabarti and R. Jagannathan. A  $(p, q)$ -oscillator realization of two-parameter quantum algebras. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 24(13): L711–L718, 1991.
- [8] I. M. Burban. On  $(p, q; \alpha, \beta, l)$ -deformed oscillator and its generalized quantum Heisenberg–Weyl algebra. *Phys. Lett. A*, 366(4–5): 308–314, 2007.
- [9] L. C. Biedenharn. The quantum group  $SU_q(2)$  and a  $q$ -analogue of the boson operators. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 22(18): L873–L878, 1989.
- [10] A. Macfarlane. On  $q$ -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group  $SU(2)_q$ . *J. Phys. A: Math. Gen.*, 22(21): 4581–4588, 1989.
- [11] I. M. Burban. Two-parameter deformation of the oscillator algebra. *Phys. Lett. B*, 319(4): 485–489, 1993.
- [12] K. Odaka, T. Kishi, and S. Kamefuchi. On quantization of simple harmonic oscillators. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 24(11): L591–L596, 1991.
- [13] S. Meljanac, M. Mileković, and S. Pallua. Unified view of deformed single-mode oscillator algebras. *Phys. Lett. B*, 328(1–2): 55–59, 1994.
- [14] O. W. Greenberg. Particles with small violations of Fermi or Bose statistics. *Phys. Rev. D*, 43(12): 4111–4120, 1991.
- [15] A. K. Mishra and G. Rajasekaran. Complex  $q$ -mutator algebra and fractional statistics. *Mod. Phys. Lett. A*, 9(5): 419–426, 1994.



- [16] S. Meljanac and A. Perica. Generalized quon statistics. *Mod. Phys. Lett. A*, 9(35):3293–3299, 1994.
- [17] О. М. Гаврилик, І. І. Качурик та Ю. А. Міщенко. Квазібозони, складені з двох ферміонів, та деформовані осцилятори. *Укр. фіз. журн.*, 56(9):953–959, 2011.
- [18] В. Г. Кац и П. Чен. *Квантовый анализ*. Изд-во МЦНМО, Москва, 2005.
- [19] М. Я. Горнецька та А. А. Ровенчак. Двопараметричні модифікації статистик еніонів. *Укр. фіз. журн.*, 61(2):174–183, 2016.
- [20] A. Lavagno and P. Narayana Swamy. Thermostatistics of a  $q$ -deformed boson gas. *Phys. Rev. E*, 61(2):1218–1226, 2000.
- [21] P. Narayana Swamy.  $q$ -deformed fermions. *Eur. Phys. J. B.*, 50(1–2):291–294, 2006.
- [22] A. Jannussis. New deformed Heisenberg oscillator. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26(5):L233–237, 1993.
- [23] A. P. Rebesh, I. I. Kachurik, A. M. Gavrilik. Elements of  $\mu$ -calculus and thermodynamics of  $\mu$ -Bose gas model. *Ukr. J. Phys.*, 58(12):1182–1191, 2013.

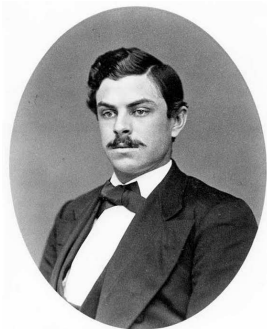
## Розділ 7

# Квантовий ефект Голла. Еніонна статистика

### 7.1. Класичний ефект Голла

У 1879 р. Едвін Голл, працюючи над дисертацією, виявив виникнення різниці потенціалів між сторонами провідника, вздовж якого протікає сталий електричний струм, коли цей провідник перебуває в магнітному полі. Це явище називають *ефектом Голла*.

Його можна досить просто пояснити в межах класичної електродинаміки. Для цього розглянемо найпростішу ситуацію, схематично зображену на рис. 7.1. Плоский провідник розміщено у площині  $xy$ , а магнітне поле  $\mathbf{B}$  спрямоване вздовж осі  $z$ . Струм густиною  $\mathbf{j}$  протікає вздовж осі  $x$ , у напрямку, протилежному до руху від'ємних зарядів (за домовленістю). Під дією сили Лоренца заряди почнуть відхилятися до краю провідника, внаслідок чого й виникне поперечна різниця потенціалів  $U_H$  — *голлівська напруга*.



Едвін Герберт Голл  
(Edwin Herbert Hall;  
1855–1938)

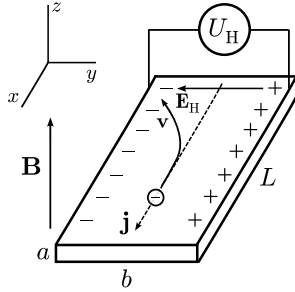


Рис. 7.1. Схематичне пояснення класичного ефекту Голла

Коли в системі встановиться рівновага, заряди  $-e$  будуть рухатися зі швидкістю  $\mathbf{v}$ , що визначається взаємною компенсацією сили Лоренца під дією магнітного поля  $\mathbf{B}$  і поперечного поля  $\mathbf{E}_H$ :

$$-e\mathbf{E}_H - \frac{e}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}] = 0. \quad (7.1)$$

У проекції на вісь  $y$  матимемо:

$$eE_H = \frac{e}{c}v_x B. \quad (7.2)$$

Домноживши цю рівність на концентрацію зарядів  $n$ , виділимо в отриманому виразі густину струму  $j = -env_x$ :

$$enE_H = -\frac{1}{c}jB \quad \text{або} \quad E_H = C_H jB, \quad (7.3)$$

де *коефіцієнт Голла*

$$C_H = -\frac{1}{cen}. \quad (7.4)$$

Напруженість електричного поля в (7.3) домножимо на площу перерізу провідника  $ab$  і для голлівської напруги  $U_H = bE_H$  матимемо:

$$abE_H = -\frac{1}{cen}jabB \quad \text{або} \quad aU_H = -\frac{1}{cen}IB, \quad (7.5)$$

де  $I$  — сила струму. Отриманий вираз зручно переписати у формі

закону Ома, використовуючи *поверхневу концентрацію зарядів*  $n_2 = an$ :

$$\frac{U_H}{I} = -\frac{B}{cen_2} = R_H, \quad (7.6)$$

де  $R_H$  — *голлівський опір*.

Ефект Голла спостерігають не лише в металах, а й у напівпровідниках. За його допомогою можна встановити, наприклад, концентрацію носіїв заряду та їх знак, а на підставі добре проміряних коефіцієнтів Голла різних матеріалів — вимірювати магнітне поле. Водночас зауважимо, що в сильних магнітних полях суттєву роль починають відігравати квантові ефекти, роль яких обговорюватимемо в наступних розділах.

## 7.2. Квантовий ефект Голла

У 1980 р. Клаус фон Клітцінг у співавторстві з Гергардом Дордою і Майклом Пеппером опублікував статтю [1] про спосіб визначення сталої тонкої структури, який ґрунтувався на нововідкритому явищі квантування голлівської провідності. Цей експеримент фон Клітцінг проводив на зразках, які приготували його співавтори. Вимірювання, зроблені за гелієвих температур у сильних магнітних полях  $\sim 15$  Тл, показали надзвичайно точне квантування голлівської провідності в одиницях  $e^2/h$ , де  $e$  — елементарний заряд, а  $h$  — стала Планка. За відкриття квантового ефекту Голла фон Клітцінг отримав 1985 р. Нобелівську премію.



Клаус фон Клітцінг  
(Klaus von Klitzing;  
нар. 1943)

Цікаво, що подібні особливості поведінки голлівської провідності теоретично передбачили ще 1975 р. японські вчені Цунея Андо, Юкіо Мацумота та Ясутада Уемура [2], а згодом низка японських експериментальних груп підтвердила появу особливих точок,

передбачених у цій праці, однак точність експериментів була невисокою<sup>1</sup>.

Спостережувані залежності для квантового ефекту Голла показано на рис. 7.2. Для одержання цих результатів важливим є вивчення саме двовимірного електронного газу, що забезпечують, наприклад, контактні поверхні напівпровідникових гетероструктур типу GaAs — Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As [3].

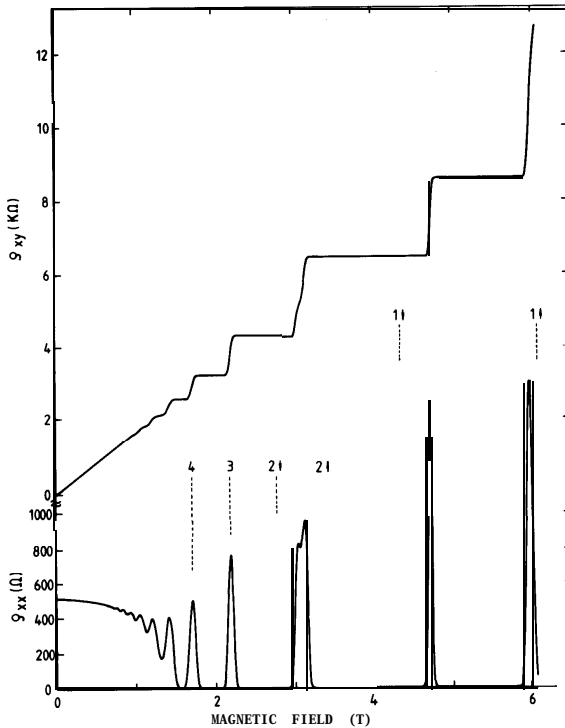


Рис. 7.2. Експериментальні залежності голлівського опору ( $\rho_{xy}$ ) та поздовжнього опору ( $\rho_{xx}$ ) від магнітного поля, рисунок взято з тексту нобелівської лекції Клауса фон Клітцинга [[http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1985/klitzing.pdf](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1985/klitzing.pdf)]

<sup>1</sup>[https://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1985/press.html](https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1985/press.html)

### 7.3. Електронний газ у магнітному полі. Рівні Ландау

Для пояснення квантового ефекту Голла важливо зрозуміти поведінку двовимірної системи електронів у зовнішньому магнітному полі. Відповідну задачу розглядатимемо в цьому підрозділі.

Рівняння Шрьодінгера для електрона в магнітному полі з векторним потенціалом  $\mathbf{A}$  запишемо так:

$$\frac{1}{2m} \left( \hat{\mathbf{p}} - \frac{(-e)}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi_n(\mathbf{r}) = E_n \Psi_n(\mathbf{r}), \quad (7.7)$$

де  $m$  та  $(-e)$  — маса та заряд електрона, відповідно. У випадку сталого магнітного поля величиною  $B$  можна скористатися калібруванням Ландау, вибравши векторний потенціал  $\mathbf{A}$  у вигляді

$$\mathbf{A} = Bx\mathbf{e}_y, \quad (7.8)$$

де вектор  $\mathbf{e}_y$  — орт уздовж осі  $y$ . Магнітне поле буде спрямоване вздовж осі  $z$ :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = B\mathbf{e}_z. \quad (7.9)$$

Рівняння (7.7) явно запишемо так:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \frac{eB}{c} x \right)^2 \right] \Psi_n(x, y, z) = E_n \Psi_n(x, y, z). \quad (7.10)$$

За змінними  $y$  та  $z$  маємо рівняння для вільної частинки, тобто хвильова функція факторизується

$$\Psi_n(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{L_y}} e^{ik_y y} \frac{1}{\sqrt{L_z}} e^{ik_z z} \psi(x). \quad (7.11)$$

Тут  $L_y, L_z$  — розміри системи (чи, точніше, об'єму періодичності) у відповідних напрямках, а  $k_y, k_z$  — хвильові числа. За змінною  $x$  залишається рівняння

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega_0^2}{2} (x + k_y \ell_0^2)^2 \right] \psi_n(x) = \varepsilon_n \psi_n(x), \quad (7.12)$$

де

$$\omega_0 = \frac{eB}{mc}, \quad \ell_0 = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}, \quad E_n = \varepsilon_n + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}, \quad (7.13)$$

яке є рівнянням гармонічного осцилятора зі зміщеним положенням рівноваги. Величину  $\omega_0$  називають *циклотронною частотою*. Власні значення, таким чином, отримуємо у вигляді:

$$\varepsilon_n = \hbar\omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (7.14)$$

Ці енергетичні рівні називають *рівнями Ландау*. Легко зауважити, що вони є виродженими (за хвильовим вектором  $k_y$ ). У наступному підрозділі оцінимо кратність цього виродження та покажемо, як це впливає на поведінку провідності.

## 7.4. Квантування голлівської провідності

У випадку скінченної ширини  $b$  зразка (як на рис. 7.1) хвильовий вектор  $k_y$  буде дискретним з кроком  $2\pi/b$ . Водночас координата  $x_0 = k_y \ell_0^2$  повинна бути в межах  $[0; L]$ . Отже,

$$k_y \frac{\hbar c}{eB} \leq L. \quad (7.15)$$

Ця умова дає обмеження на максимальне значення хвильового вектора

$$k_y^{\max} = \frac{2\pi N}{b} \leq \frac{eBL}{\hbar c} \quad (7.16)$$

або

$$N \leq \frac{eBbL}{2\pi\hbar c}. \quad (7.17)$$

Отже, максимальне виродження  $N_L$  дорівнюватиме

$$N_L = \frac{BbL}{hc/e}, \quad (7.18)$$

де  $h = 2\pi\hbar$ . Це число дорівнює відношенню магнітного потоку через поверхню зразка  $\Phi = B bL = BS$  до кванта магнітного потоку  $\Phi_0 = hc/e$ . Зауважмо, що виродження рівня не залежить від його номера  $n$ .

Отже, якщо кількість електронів  $N$  буде кратна  $N_L$ , тобто

$$N = \nu N_L, \quad \text{де } \nu = 1, 2, 3 \dots, \quad (7.19)$$

що відповідає повністю заповненим кільком рівням Ландау, то у зразку не буде вільних електронів для перенесення струму. Підставимо ці значення у вираз для голлівської провідності, враховуючи зв'язок  $N = n_2 S$ , й отримаємо умову її квантування:

$$\sigma_H = \frac{1}{R_H} = \frac{cen_2}{B} = \frac{cen_2 S}{N_L} \frac{e}{hc} = \frac{N}{N_L} \frac{e^2}{h} = \nu \frac{e^2}{h}. \quad (7.20)$$

На практиці внаслідок неоднорідностей поверхні, впливу домішок, ефектів взаємодії, скінченності температури та низки інших чинників рівні Ландау розмиваються і перетворюються у вузькі енергетичні зони [4]. Якісно розподіл електронів під дією магнітного поля продемонстровано на рис. 7.3.

Значенням магнітного поля, за яких рівень Фермі  $E_F$  потрапляє у проміжок між краями зон, відповідають плато голлівської провідності: у зразку немає вільних електронів для перенесення струму. Якщо ж рівень Фермі проходить через одну з енергетичних зон, то поява вільних носіїв заряду спричиняє стрибкоподібну зміну провідності. Скінченність ширини енергетичної зони забезпечує відхилення форми «сходинок» на рис. 7.2 від строго вертикальних, яке відповідає нерозмитим дельтаподібним рівням Ландау.

Якщо температури достатньо низькі, в межах кількох кельвінів, то розвиття рівнів Ландау виявляється незначним, навіть коли експериментальні зразки не дуже «чисті», і квантування голлівської провідності спостерігають з великою точністю незалежно від матеріалу зразків, їх геометрії тощо. Це дає підстави застосовувати квантовий ефект Голла в метрології.



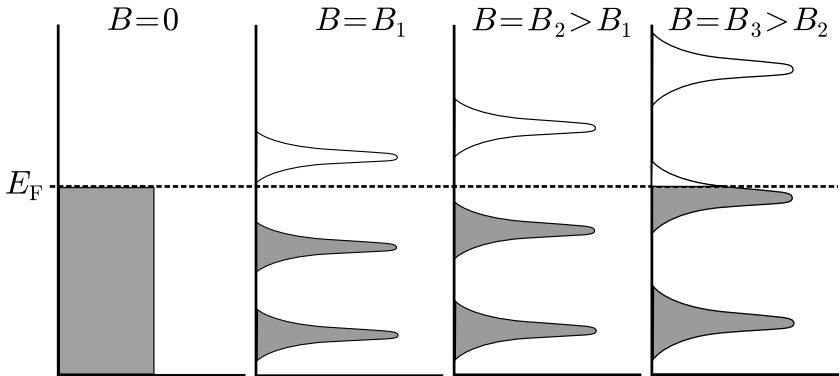


Рис. 7.3. Якісна картина розподілу електронів за енергіями, що відповідає квантовому ефекту Голла. По горизонтальній осі відкладено густину станів, по вертикальній — енергію ( $E_F$  — це рівень Фермі). Після увімкнення магнітного поля  $\mathbf{B}$  виникають дискретні рівні Ландау, які переміщуються догори зі зростанням величини  $\mathbf{B}$

Комбінацію універсальних констант — сталої Планка та заряду електрона, — яка визначає голлівський опір, називають **сталю фон Клітцинґа**. Її значення в системі SI (у шкалі 1990 р.),

$$\frac{h}{e^2} \equiv R_K = 25\,812.807 \text{ Ом}, \quad (7.21)$$

прийнято за стандарт опору. Потрібно відзначити, що недавно Міжнародний комітет мір і ваг запропонував переозначити основні одиниці SI (кілограм, метр, секунду, ампер, кельвін, канделу, моль), відмовившись зокрема від еталона кілограма і зафіксувавши значення кількох фундаментальних констант [5]:

стала Планка:  $h = 6.626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с};$

елементарний заряд:  $e = 1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ Кл};$

стала Больцмана:  $k_B = 1.380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1};$

стала Авоґадро:  $N_A = 6.022\,140\,76 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$

додатково до прийнятого раніше значення швидкості світла  $c = 299\,792\,458 \text{ м/с}$ . За цих домовленостей стала фон Клітцинґа

$R_K = 25\,812.807\,4593\dots$  Ом, а рекомендоване з 2014 р. значення  $R_K = 25\,812.807\,4555(59)$  Ом — із похибкою в двох останніх виписаних цифрах.

Квант голлівської провідності також безпосередньо стосується визначення *сталой тонкої структури*  $\alpha = 1/137.035\,999\,139(31)$ ,

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad \text{в одиницях CGS,}$$

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \quad \text{в одиницях SI}$$

— безрозмірної фундаментальної константи, яка характеризує силу електромагнітної взаємодії. Її значення важливе для розрахунків за теорією збурень у квантовій електродинаміці. Бачимо, що за фіксованих значень швидкості світла, сталої Планка й елементарного заряду похибка сталої тонкої структури повністю визначаються неточностями визначення електричної сталої  $\epsilon_0$ , якщо йдеться про систему SI. У системі CGS неможливо зафіксувати одночасно  $c$ ,  $h$  та  $e$  — за похибку  $\alpha$  відповідатиме елементарний заряд  $e$ .

## 7.5. Дробовий квантовий ефект Голла

У 1982 р. Цуї, Штьормер і Госсард виявили [6] квантування голлівської провідності

$$\sigma_H = \nu \frac{e^2}{h} \quad (7.22)$$

за дробового значення  $\nu = 1/3$ , а згодом подібне явище спостерігали й за інших нецілих  $\nu = p/q$  — воно отримало назву **дробовий квантовий ефект Голла**. Такі експерименти проводили за дуже низьких температур (частки кельвіна) і значно сильніших магнітних полів, ніж у випадку цілочисельного квантового ефекту Голла (15 Тл в оригінальному дослідженні [6]).

Залежності опору від величини магнітного поля, які відповідають дробовому квантовому ефектові Голла, показано на рис. 7.4.

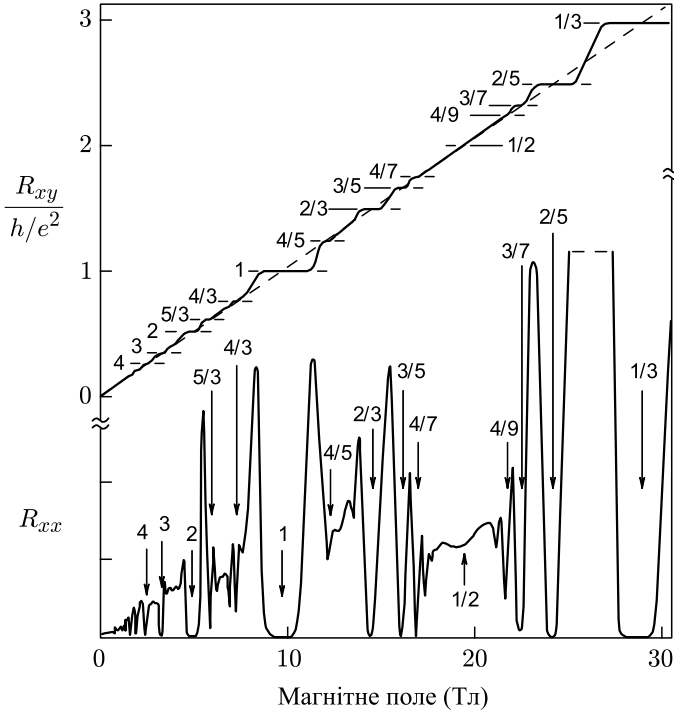


Рис. 7.4. Ілюстрація поведінки опору при дробовому квантовому ефекті Голла. Верхня частина графіка показує відношення голлівського опору  $R_{xy}$  до кванта  $R_H = h/e^2$ . У нижній частині зображено залежність поздовжнього опору  $R_{xx}$ . Зображення адаптовано з [7]

Дробовий квантовий ефект Голла є суттєво багаточастинковим явищем, і його пояснення не можна звести до одноелектронної задачі, як це вдається зробити для цілочисельного аналога. Врахування міжелектронних взаємодій та впливу магнітного поля можна проілюструвати за допомогою моделі *комполитних частинок* [7], яку коротко розглянемо далі.

Електрон на площині, перпендикулярно до якої прикладено магнітне поле, захоплює квант магнітного потоку  $\Phi_0 = hc/e$ , внаслідок чого замість аналізу вихідної задачі можна розглядати рух таких об'єктів, що є поєднаннями електрона й кванта магнітного потоку. При цьому магнітний потік екранує міжелектронну взаємодію, й ефективно виникає система композитних частинок (еле-

ктрон плюс квант магнітного потоку), яка до того ж не відчуває зовнішнього магнітного поля. Важливо зазначити, що внаслідок захоплення кванта потоку електрон, який є ферміоном, перетворюється на частинку, яка є бозоном. Отже, можна очікувати, що в такій системі виникатимуть ефекти, пов'язані з бозе-конденсацією.

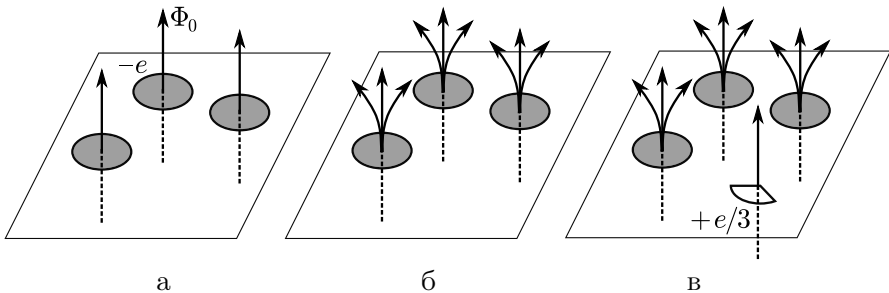


Рис. 7.5. Схема утворення композитних частинок. У цілочисельному квантовому ефекті Голла з  $\nu = 1$  відбувається захоплення зарядом одного кванта потоку (а). Якщо магнітне поле значно збільшується, то кожен заряд захоплює кілька квантів потоку (б). За трохи більшого магнітного поля виникають некомпенсовані потоки, що ефективно проявляються як додатно заряджені частинки з дробовим зарядом (в). Зображення адаптовано з [7]

Найнижче плато голлівської провідності з  $\nu = 1$  відповідає ситуації, коли кожен електрон захоплює рівно один квант  $\Phi_0$  (див. рис. 7.5 а). Збільшення магнітного поля призводить до виникнення надлишку квантів потоку. Для перетворення на композитну частинку-бозон електрони повинні захопити непарну кількість квантів  $p = 2k + 1$ , тому після  $\nu = 1$  наступну особливість спостерігають при  $p = 3$  (рис. 7.5 б). За подальшого зростання магнітного поля виникатимуть незв'язані з електронами кванти потоку, в кожному з яких бракуватиме заряду величиною  $e/p$  — ефективно додатно заряджені квазічастинки (рис. 7.5 в). З іншого боку, для трохи менших полів такі квазічастинки матимуть від'ємний заряд ( $-e/p$ ).

Описана картина дає можливість пояснити дробовий квантовий ефект Голла з заповненням  $\nu = n \pm 1/(2k + 1)$ , де  $n$  — ціле. Існує також модель **комполитних ферміонів** (електрон плюс парна кількість квантів магнітного потоку), що описує випадки з  $\nu = k/(2k \pm 1)$ , де  $k = 2, 3, 4, \dots$  як цілочисельний квантовий ефект Голла саме комполитних ферміонів замість електронів. Експериментально також спостерігають і більш екзотичні значення заповнення  $\nu$ , на зразок  $5/2$ ,  $13/5$  чи  $2 + 3/8$ .

Виявляється, що поведінку системи, де спостерігають квантування голлівської провідності за дробового значення заповнення виду  $\nu = 1/(2k + 1)$ , можна описувати за допомогою **хвильової функції Лафліна** [8]:

$$\psi_{\nu, N}^L(z_1, \dots, z_N) = \left[ \prod_{1 \leq j < k \leq N} (z_j - z_k)^{1/\nu} \right] \prod_{\ell=1}^N \exp\left(-\frac{|z_\ell|^2}{4l_B^2}\right), \quad (7.23)$$

де двовимірні координати  $\ell$ -тої частинки зображено комплексною змінною  $z_\ell = x_\ell + iy_\ell$ , а

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}. \quad (7.24)$$

Роберт Лафлін, Горст Штюрмер і Даніел Цуї отримали Нобелівську премію з фізики 1998 р. «за відкриття нової форми квантової рідини з дробово-зарядженими збудженнями».



Роберт Лафлін (Robert Laughlin, нар. 1950)



Горст Штюрмер (Horst Störmer, нар. 1949)



Даніел Цуї (Daniel Chee Tsui, 崔琦; нар. 1939)

Можна показати, що теорія Лафліна [8] описує збудження, які мають ефективний дробовий заряд  $e/(2k + 1)$ , див. зокрема завдання 2 на стор. 116. Цікаво, що такі квазічастинки навіть виявили

експериментально [10, 11]. Також вдається встановити іншу можливу інтерпретацію збуджень, з якою пов'язане дробове квантування голлівської провідності, а саме нетривіальну статистику, відмінну від бозонної та ферміонної [12, 9], про що йтиметься в наступному підрозділі.

## 7.6. Поняття про еніони

Одним зі способів пояснити дробовий квантовий ефект Голла є застосування концепції *еніонів* (англ. *anyon* від *any* — ‘будь-який’) [13]. Вони є узагальненням понять ферміонів і бозонів на випадок двовимірних систем.

Симетрійні властивості хвильових функцій щодо перестановки частинок мають вигляд:

- $P|12\rangle \equiv |21\rangle = -|12\rangle$  для ферміонів;
- $P|12\rangle \equiv |21\rangle = +|12\rangle$  для бозонів;
- $P|12\rangle \equiv |21\rangle = e^{i\theta}|12\rangle$  для еніонів (фаза  $\theta$  може набувати довільних значень, звідки й походить назва).

Існування еніонів неможливе у просторі з вимірністю 3, однак допускається у двовимірному просторі, що пов'язано з топологією руху частинок на площині. На це 1977 р. звернули увагу норвезькі фізики Йон Манне Лайнос та Ян Міргайм [14].

Справді, умова на симетричність–антисиметричність хвильової функції бозонів чи ферміонів пов'язана з тим, що подвійна перестановка зводиться до тотожної (одиночної) операції:

$$P^2|12\rangle = P(P|12\rangle) = P|21\rangle = |12\rangle, \quad (7.25)$$

звідки фазовий множник  $e^{i\theta}$ , що виникає після однієї перестановки,

$$P|12\rangle \equiv |21\rangle = e^{i\theta}|12\rangle, \quad (7.26)$$

повинен задовольняти умову  $e^{2i\theta} = 1$ , що відповідає двом розв'язкам:  $\theta = 0$  (хвильова функція симетрична) — випадок бозонів, і  $\theta = \pi$  (хвильова функція змінює знак) — випадок ферміонів.



Йон Лайнос  
(Jon Magne Leinaas,  
нар. 1946)



Ян Міргайм  
(Jan Myrheim,  
нар. 1948)



Френк Вілчек<sup>2</sup>  
(Frank Anthony Wilczek;  
нар. 1951)

Однак у двовимірному просторі ситуація дещо інша. Перестановку двох частинок можна уявити як обхід однієї частинки навколо іншої, як показано на рис. 7.6. Якщо тепер урахувати, що реальні частинки мають тверду серцевину, то бачимо, що траєкторію обходу не можна стягнути в точку, як це вдається зробити у тривимірному просторі, отже, подвійна перестановка вже не зведеться до тотожної (одиничної) операції:

$$P^2|12\rangle \neq |12\rangle. \quad (7.27)$$

Отже, у двовимірному просторі не існує обмеження на значення фазового множника  $|21\rangle = e^{i\theta}|12\rangle$  — значення  $\theta$  може бути будь-яким, а не лише 0 чи  $\pi$ , як у тривимірному просторі.

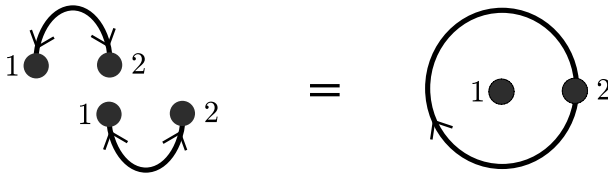


Рис. 7.6. Еквівалентність подвійної перестановки двох частинок у двовимірному просторі обертанню однієї навколо іншої

<sup>2</sup>Лауреатами Нобелівської премії з фізики за 2004 рік стали Девід Гросс (David J. Gross), Девід Політцер (H. David Politzer) і Френк Вілчек «за відкриття асимптотичної свободи в теорії сильної взаємодії».

Ці частинки можна описувати за допомогою квантового числа, яке є аналогом спіну у випадку ферміонів чи бозонів. Спін еніона  $s$  пов'язаний з фазою  $\theta$  простим співвідношенням:  $\theta = 2\pi s$ .

Переставні властивості еніонів описує *група кіс*, на відміну від звичної групи перестановок, яку застосовують до частинок у тривимірному просторі. Докладніше про цю математичну модель написано в розділі 9.

Систему еніонів можна розглядати як бозони або ферміони з певною міжчастинковою взаємодією, що має квантовомеханічну природу (пов'язана зі статистикою частинок) і не може бути проінтерпретована з погляду класичної фізики [17, Чап. 2]. Лагранжіан двох еніонів масою  $m$  з координатами  $\mathbf{r}_{1,2}$  зручно подати у вигляді:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \dot{\mathbf{r}}_2^2) + \hbar\alpha \frac{d\varphi}{dt}, \quad (7.28)$$

де  $0 \leq \alpha \leq 1$  — параметр еніонної статистики, такий що фазовий множник за перестановки двох еніонів  $e^{i\theta} = e^{i\pi\alpha}$ , а  $\varphi$  — відносний кут між двома частинками. Останній доданок справді спричинятиме появу фази, як видно у формалізмі інтегралів за траєкторіями:

$$\exp \left( \frac{i}{\hbar} \int_{(1)}^{(2)} \hbar\alpha \frac{d\varphi}{dt} dt \right) = \exp [i\alpha(\varphi_2 - \varphi_1)]. \quad (7.29)$$

З іншого боку, у класичній механіці така повна похідна за часом не впливатиме на рівняння руху. Зауважмо, що фейнманівське формулювання теорії тотожних частинок вимагає явної симетризації (для бозонів) чи антисиметризації (для ферміонів) хвильових функцій, чого можна досягти зазначеним у формулі (7.28) способом.

Розділивши рух центра мас і відносний рух, уведемо відповідні координати й імпульси:

$$\mathbf{r}_{\text{c.m.}} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{p}_{\text{c.m.}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad (7.30)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{p} = \frac{1}{2} (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2), \quad (7.31)$$



зможемо записати лагранжیان як суму  $L = L_{\text{c.m.}} + L_r$ , де

$$\mathcal{L}_{\text{c.m.}} = m\dot{\mathbf{R}}_{\text{c.m.}}^2, \quad (7.32)$$

$$\mathcal{L}_{\text{rel}} = \frac{m}{4}\dot{\mathbf{r}}^2 + \hbar\alpha\dot{\varphi} = \frac{m}{4}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \hbar\alpha\dot{\varphi} \quad (7.33)$$

з урахуванням двовимірності задачі і переходу до полярних координат. Очевидно, задача центра мас відповідатиме вільному рухові й не міститиме параметра  $\alpha$ , а для відносного руху матимемо гамільтоніан:

$$H_{\text{rel}} = \frac{p_r^2}{m} + \frac{(p_\varphi - \hbar\alpha)^2}{mr^2}. \quad (7.34)$$

Цей підхід можна застосувати й до системи  $N$  еніонів, подавши лагранжیان як [17]

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^N \dot{\mathbf{r}}_j^2 + \hbar\alpha \sum_{j \neq k} \frac{d\varphi_{jk}}{dt}, \quad \text{де} \quad \text{tg } \varphi_{jk} = \frac{y_j - y_k}{x_j - x_k}. \quad (7.35)$$

Фізична модель еніонів, яку запропонував Вілчек [15, 16], пов'язана з поняттям композитної частинки: заряд величиною  $q$  обертається навколо безмежного тонкого соленоїда, спрямованого вздовж осі  $z$ . З погляду двовимірного «світу» площини  $xy$  така частинка буде точковим об'єктом, якщо радіус соленоїда спрямувати до нуля.

Якщо через соленоїд протікає струм, то внаслідок зміни магнітного потоку виникає електричне поле

$$\mathbf{E} = -\frac{\dot{\Phi}}{2\pi cr} \mathbf{e}_\varphi, \quad (7.36)$$

з яким пов'язана зміна моменту імпульсу через момент сили

$$\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{r}, q\mathbf{E}] = -\frac{q\dot{\Phi}}{2\pi c} \mathbf{e}_z. \quad (7.37)$$

Отже, матимемо додатковий внесок у момент імпульсу

$$\Delta L_z = -\frac{q\Phi}{2\pi c}, \quad (7.38)$$

а умова квантування  $L_z = n\hbar$ , де  $n$  — ціле, набуде вигляду

$$L_z = n\hbar - \frac{q\Phi}{2\pi c}. \quad (7.39)$$

Якщо початково частинка була безспінова, то величину  $q\Phi/2\pi\hbar c$  можна ототожнити зі спіном, який, очевидно, набуватиме довільних (цілих і дробових) значень.

Такого ж результату досягнемо, враховуючи, що безмежному тонкому соленоїдові відповідає векторний потенціал

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]}{r^2}, \quad (7.40)$$

або в координатах

$$\text{декартових:} \quad a_x(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad a_y(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{(-x)}{x^2 + y^2},$$

$$\text{полярних:} \quad a_r(\mathbf{r}) = 0, \quad a_\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi r}.$$

Відповідне магнітне поле повністю зосереджене в соленоїді.

Гамільтоніан системи двох таких частинок можна подати як

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p}_1 - \frac{q}{c} \mathbf{a}_1 \right)^2 + \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p}_2 - \frac{q}{c} \mathbf{a}_2 \right)^2, \quad (7.41)$$

де

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}. \quad (7.42)$$

Виділяючи рух центра мас, матимемо [18]:

$$H = \frac{\mathbf{p}_{\text{c.m.}}^2}{4m} + \frac{1}{m} \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{a} \right)^2, \quad \text{де} \quad \mathbf{a} = \frac{\Phi}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi. \quad (7.43)$$

Отже, гамільтоніан, що відповідає відносному рухові, має вигляд:

$$H_{\text{rel}} = \frac{p_r^2}{m} + \frac{1}{mr^2} \left( p_\varphi - \frac{q\Phi}{2\pi c} \right)^2. \quad (7.44)$$

Порівнюючи з (7.34), бачимо, що параметр  $\alpha$  пов'язаний з  $q$  та  $\Phi$ :

$$\alpha = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar c}. \quad (7.45)$$

При цьому за кутовою змінною хвильова функція задовольняє звичайну граничну умову  $\psi(r, \varphi + 2\pi) = \psi(r, \varphi)$ .

Як легко перекоонатися, градієнтне перетворення

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \nabla f, \quad \text{де } f = \frac{\Phi\varphi}{2\pi}, \quad (7.46)$$

приводить до гамільтоніана відносного руху у вигляді вільної частинки з масою  $m/2$ :

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{m} = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2}. \quad (7.47)$$

Однак унаслідок градієнтного перетворення змінюється хвильова функція,  $\psi'(r, \varphi) = e^{-iqf/\hbar c}\psi(r, \varphi)$ , тому гранична умова набуває вигляду:

$$\psi'(r, \varphi + 2\pi) = e^{-i\frac{q\Phi}{\hbar c}}\psi'(r, \varphi). \quad (7.48)$$

Отже, систему еніонів можна трактувати або як частинки зі звичайною статистикою (бозони чи ферміони), між якими є взаємодія (7.34), або як вільні частинки з нетривіальною граничною умовою на хвильові функції (7.48).

## 7.7. Квантовомеханічна задача двох еніонів

Розглянемо гамільтоніан (7.34), що відповідає відносному рухові. У полярних координатах можемо записати рівняння Шрьодінгера [17, Chap. 3]:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2}{mr^2} \left( i \frac{\partial}{\partial \varphi} + \alpha \right)^2 \right] \psi(r, \varphi) = E\psi(r, \varphi). \quad (7.49)$$

Розділивши змінні  $r$  та  $\varphi$ ,

$$\psi(r, \varphi) = R(r)F(\varphi),$$

для кутової частини матимемо

$$\left(i\frac{\partial}{\partial\varphi} + \alpha\right)^2 F(\varphi) = \lambda F(\varphi). \quad (7.50)$$

Розглядаючи еніони як взаємодіючі бозони, вимагатимемо виконання такої граничної умови:

$$F(\varphi + \pi) = F(\varphi), \quad (7.51)$$

тому для кутової частини матимемо остаточно

$$F_\ell(\varphi) = e^{i\ell\varphi}, \quad \text{де } \ell = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \quad (7.52)$$

а власне значення

$$\lambda = (\ell - \alpha)^2. \quad (7.53)$$

Отже, отримаємо таке радіальне рівняння Шрьодінгера

$$\left[-\frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\hbar^2(\ell - \alpha)^2}{mr^2}\right] R(r) = ER(r). \quad (7.54)$$

Також зрозуміло, що додавання у вихідну задачу центрального потенціалу  $V(r)$  не внесе ніяких змін у кутовій частині рівняння, тобто достатньо буде замінити  $(p_\varphi - \alpha)^2$  на  $\hbar^2(\ell - \alpha)^2$ .

Задачу двох еніонів можна розглянути в зовнішньому осциляторному потенціалі з частотою  $\omega$ , записавши його через координату центра мас  $\mathbf{r}_{\text{c.m.}}$  і відносну  $\mathbf{r}$ :

$$\frac{m\omega^2}{2} (\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2) = m\omega^2 \mathbf{r}_{\text{c.m.}}^2 + \frac{m\omega^2}{4} \mathbf{r}^2. \quad (7.55)$$

Очевидно, що рівняння для центра мас відповідатиме квантовомеханічній задачі про гармонічний осцилятор масою  $2m$ , а для відносного руху матимемо радіальне рівняння Шрьодінгера:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{m\omega^2 r^2}{4} + \frac{\hbar^2(\ell - \alpha)^2}{mr^2}\right] R(r) = ER(r). \quad (7.56)$$

Можна показати, що його розв'язки виражаються через приєднані поліноми Лаґерра, а повна хвильова функція має вигляд:

$$\psi_{n_r, \ell}(r, \varphi, \alpha) = C e^{i\ell\varphi} r^{|\ell-\alpha|} e^{-\frac{m\omega r^2}{4\hbar}} L_{n_r}^{|\ell-\alpha|} \left( \frac{m\omega r^2}{2\hbar} \right), \quad (7.57)$$

де  $C$  — стала нормування, а власні значення енергії

$$E_{n_r, \ell}(\alpha) = \hbar\omega (2n_r + |\ell - \alpha| + 1), \quad \text{де } \ell = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \quad (7.58)$$

Увівши квантове число  $n = n_r + \frac{\ell}{2} = 0, 1, 2, \dots$ , можемо переписати енергетичний спектр у вигляді таких двох гілок:

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= (2n + 1 + \alpha)\hbar\omega && \text{з виродженням } n + 1 \text{ для } \ell \leq 0, \\ E_n^{(2)} &= (2n + 1 - \alpha)\hbar\omega && \text{з виродженням } n \text{ для } \ell > 0, \end{aligned} \quad (7.59)$$

де  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Варто звернути увагу на таке: наявність у хвильовій функції (7.57) множника  $r^{|\ell-\alpha|} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^{|\ell-\alpha|}$  вказує на те, що двочастинкові стани не факторизуються на одностинкові, якщо  $\alpha \neq 0; 1$ . Тому багаточастинкова задача навіть вільних еніонів уже не має простого розв'язку.

## 7.8. Завдання для самостійної роботи

1. Проаналізуйте хвильову функцію Лафліна (7.23) з погляду аналогії в теорії класичної двовимірної плазми [9, 18].
2. Хвильову функцію додатно зарядженого елементарного збудження в теорії Лафліна можна подати як

$$\psi = \psi_{\nu, N}^L(z_1, \dots, z_N) \prod_{j=1}^N (z_j - \zeta),$$

де  $\zeta$  — координата такої квазідірки, а  $\psi_{\nu, N}^L$  задано виразом (7.23). Проаналізуйте такі міркування [19], з яких випливає можливість існування ефективного дробового заряду. Нехай

квазідірка здійснює обхід за замкненим контуром, усередині якого перебуває  $n$  електронів. Унаслідок цього набіжить фаза  $(-2\pi n)$  хвильової функції  $\psi$ . З іншого боку, зміна фази дорівнює  $(e^*/\hbar c)\Phi$ , де  $\Phi$  — магнітний потік через цей контур, а  $e^*$  — заряд квазідірки. Якщо фактор заповнення  $\nu = 1/p$ , то на кожен електрон припадає  $p$  квантів потоку  $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/e$ . Прирівнюючи ці дві зміни фази, матимемо:

$$-2\pi n = \frac{e^*}{\hbar c} n p \frac{2\pi\hbar c}{e} \Rightarrow |e^*| = \frac{e}{p}.$$

3. Знайдіть статистичну суму, що відповідає двом еніонам в осциляторному потенціалі з рівнями енергії (7.59).
4. Розгляньте задачу двох еніонів у сталому магнітному полі  $\mathbf{B}$ , використовуючи симетричне калібрування векторного потенціалу  $\mathbf{A}_j = \frac{1}{2}[\mathbf{B}, \mathbf{r}_j]$ , див. [17, Чап. 3].

## Література до розділу 7

- [1] K. v. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance. *Phys. Rev. Lett.*, 45(6):494–497, 1980.
- [2] T. Ando, Y. Matsumoto, and Y. Uemura. Theory of Hall effect in a two-dimensional electron system. *J. Phys. Soc. Jpn*, 39(2):279–288, 1975.
- [3] К. фон Клитцинг. Квантованный эффект Холла. *Усп. физ. наук*, 150(1):107–126, 1986.
- [4] Е. Н. Бормонтов. Квантовый эффект Холла. *Соросовский образовательный журнал*, (9):81–88, 1999.
- [5] D. B. Newell, F. Cabiati, J. Fischer, K. Fujii, S. G. Karshenboim, H. S. Margolis, E. de Mirandés, P. J. Mohr, F. Nez, K. Pachucki, T. J. Quinn, B. N. Taylor, M. Wang, B. Wood, and Z. Zhang. The CODATA 2017 values of  $h$ ,  $e$ ,  $k$ , and  $N_A$  for the revision of the SI. *Metrologia*, 55(1): L13–L16, 2018.
- [6] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Phys. Rev. Lett.*, 48(22):1559–1562, 1982.

- [7] X. Штёрмер. Дробный квантованный эффект Холла. *Усп. физ. наук*, 170(3):304–319, 2000.
- [8] R. B. Laughlin. Anomalous quantum Hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations. *Phys. Rev. Lett.*, 50(18):1395–1398, 1983.
- [9] P. B. Лафлин. Дробное квантование. *Усп. физ. наук*, 170(3):292–303, 2000.
- [10] V. J. Goldman and B. Su. Resonant tunneling in the quantum Hall regime: Measurement of fractional charge. *Science*, 267(5200):1010–1012, 1995.
- [11] Eun-Ah Kim, M. J. Lawler, S. Vishveshwara, and E. Fradkin. Measuring fractional charge and statistics in fractional quantum Hall fluids through noise experiments. *Phys. Rev. B*, 74(15):155324, 2006.
- [12] И. В. Криве и А. С. Рожавский. Дробный заряд в квантовой теории поля и физике твердого тела. *Усп. физ. наук*, 152(1):33–74, 1987.
- [13] F. Wilczek. Quantum mechanics of fractional-spin particles. *Phys. Rev. Lett.*, 49(14):957–959, 1982.
- [14] J. M. Leinaas and J. Myrheim. On the theory of identical particles. *Nuovo Cim.*, 37B(1):1–23, 1977.
- [15] F. Wilczek. Magnetic flux, angular momentum, and statistics. *Phys. Rev. Lett.*, 48(17):1144–1146, 1982.
- [16] F. Wilczek. *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*. World Scientific, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong, 1990.
- [17] A. Khare. *Fractional Statistics and Quantum Theory*. World Scientific, Singapore, 2nd edition, 2005.
- [18] S. Rao. An anyon primer. *arXiv:hep-th/9209066v3*, 2001.
- [19] В. Л. Покровский и А. Л. Талапов. Как обнаружить дробный заряд квазичастиц? *Письма ЖЭТФ*, 42(9):372–374, 1985.

## Розділ 8

# Зв'язок між параметрами дробових статистик

### 8.1. Віріальне і кластерне розвинення

Одним із ефективних способів знаходження зв'язку між різними дробовими статистиками є зіставлення їх термодинамічних функцій, яке найзручніше робити на підставі *віріального розвинення* для рівняння стану [1, Чап. 4]. Зважаючи на те, що еніони виникають у двовимірних задачах, саме такий випадок розглянемо докладніше. У границі малих густин і високих температур рівняння стану двовимірної системи записують так:

$$\frac{p}{T} = \rho_2 [1 + b_2 \rho_2 \lambda^2 + b_3 (\rho_2 \lambda^2)^2 + \dots], \quad (8.1)$$

де  $p$  — тиск,  $T$  — температура,  $\rho_2 = N/V_2$  — двовимірна густина (концентрація), що дорівнює відношенню кількості частинок  $N$  до двовимірного аналога об'єму — площі  $V_2$ . Тут також використано позначення

$$\lambda = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mT} \right)^{1/2}$$

для *довжини теплової хвилі де Бройля* частинки з масою  $m$ . Множники  $b_j$  — це знерозмірені  $j$ -ті *віріальні коефіцієнти*.



Велику статистичну суму  $\Xi$  записують у вигляді розкладу в ряд за активністю  $z = e^{\mu/T}$ , який називають **кластерним розв'инням**:

$$\frac{1}{V_2} \ln \Xi = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{B}_\ell z^\ell. \quad (8.2)$$

Коефіцієнти розкладу  $\mathcal{B}_\ell$  — це **кластерні інтеграли**. Враховуючи термодинамічні співвідношення

$$\frac{p}{T} = \frac{1}{V_2} \ln \Xi(z, V_2, T) \quad (8.3)$$

і

$$\rho_2 = \frac{N}{V_2} = z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{V_2} \ln \Xi \right)_{V_2, T}, \quad (8.4)$$

матимемо рівність:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{B}_\ell z^\ell = \left( \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \mathcal{B}_\ell z^\ell \right) \left[ 1 + b_2 \lambda^2 \left( \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \mathcal{B}_\ell z^\ell \right) + \dots \right]. \quad (8.5)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $z$ , отримаємо вирази для віріальних коефіцієнтів через кластерні інтеграли [2]:

$$b_2 \lambda^2 = -\frac{\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_1^2}, \quad (8.6)$$

$$b_3 \lambda^4 = -2 \frac{\mathcal{B}_3}{\mathcal{B}_1^3} + 4 \frac{\mathcal{B}_2^2}{\mathcal{B}_1^4}, \quad (8.7)$$

$$b_4 \lambda^6 = -3 \frac{\mathcal{B}_4}{\mathcal{B}_1^4} + 18 \frac{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3}{\mathcal{B}_1^5} - 20 \frac{\mathcal{B}_2^3}{\mathcal{B}_1^6}, \quad (8.8)$$

...

Кластерні інтеграли можна знайти, знаючи вираз для функції розподілу (чисел заповнення)  $n_j$ . Справді,

$$\frac{N}{V_2} = \frac{1}{V_2} \sum_j G_j n_j = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \mathcal{B}_\ell z^\ell, \quad (8.9)$$

де  $G_j$  — виродження  $j$ -го енергетичного рівня  $\varepsilon_j$ .

## 8.2. Приклади віріальних розвинень

Продемонструємо розрахунок кластерних інтегралів у випадку двовимірного ідеального газу бозонів та ферміонів. Для зручності замінимо підсумовування за рівнями інтегралом з густиною станів  $g(\varepsilon) = mV_2/(2\pi\hbar^2) = \text{const}$ :

$$\frac{N}{V_2} = \frac{1}{V_2} \sum_j G_j n_j = \frac{1}{V_2} \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} \pm 1} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \mathcal{B}_\ell z^\ell.$$

Знерозміримо змінну інтегрування  $x = \varepsilon/T$ :

$$\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{z e^{-x} dx}{1 \pm z e^{-x}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \mathcal{B}_\ell z^\ell$$

або

$$\frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty \sum_{\ell=1}^{\infty} (\mp 1)^{\ell-1} (z e^{-x})^\ell dx = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \mathcal{B}_\ell z^\ell.$$

Тобто

$$\ell \mathcal{B}_\ell = \frac{(\mp 1)^{\ell-1}}{\lambda^2} \int_0^\infty e^{-\ell x} dx = \frac{(\mp 1)^{\ell-1}}{\lambda^2} \frac{1}{\ell}, \quad (8.10)$$

де верхній знак відповідає ферміонам, а нижній — бозонам. Отже, маємо перші два кластерні інтеграли:

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \mathcal{B}_2 = \mp \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{4}, \quad (8.11)$$

а тому другий віріальний коефіцієнт за формулою (8.6) буде

$$b_2 = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_1^2} = \pm \frac{1}{4} \quad (8.12)$$

чи наочніше

$$b_2^{\text{FD}} = +\frac{1}{4}, \quad b_2^{\text{BE}} = -\frac{1}{4}. \quad (8.13)$$

Зважаючи на математичну подібність виразу для чисел заповнення у статистиці Поліхронакоса (3.5)

$$n_j^P = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_j/T} - \gamma}$$

до функцій розподілу у статистиках Бозе–Айнштайна і Фермі–Дірака, нескладно отримати віріальні коефіцієнти ідеального двовимірного газу в цій статистиці:

$$\begin{aligned} b_j^P(\gamma) &= \gamma^{j-1} b_j^{\text{BE}}, & \text{якщо } \gamma > 0, \\ b_j^P(\gamma) &= |\gamma|^{j-1} b_j^{\text{FD}}, & \text{якщо } \gamma < 0, \end{aligned} \quad (8.14)$$

де  $b_j^{\text{BE,FD}}$  —  $j$ -й віріальний коефіцієнт бозе- або фермі-системи, відповідно.

Також зрозуміло, що у статистиці Дженгіле, де максимальне заповнення рівня обмежене числом  $M$  і функція розподілу дорівнює

$$n_j^G = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_j/T} - 1} - \frac{M+1}{z^{-(M+1)}e^{(M+1)\varepsilon_j/T} - 1},$$

віріальні коефіцієнти будуть пов'язані з бозонними, зокрема:

$$\begin{aligned} b_j^G &= b_j^{\text{BE}}, & \text{якщо } j \leq M, \\ b_{M+1}^G &= b_{M+1}^{\text{BE}} + \frac{M}{M+1}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Трохи складніше розрахувати віріальні коефіцієнти у статистиці Голдейна–Ву. З цією метою найзручніше скористатися розкладом (4.36) на стор. 55, який випишемо з точністю до  $z^2$ :

$$n_j^{\text{HW}} = z e^{-\varepsilon_j/T} - (2g-1)z^2 e^{-2\varepsilon_j/T} \pm \dots$$

Кластерні інтеграли у випадку двовимірного ідеального газу будуть:

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \mathcal{B}_2 = -\frac{(2g-1)}{\lambda^2} \frac{1}{4}, \quad (8.16)$$

а другий віріальний коефіцієнт

$$b_2^{\text{HW}} = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_1^2} = \frac{(2g-1)}{4}. \quad (8.17)$$

З цього результату також можемо зробити такий висновок: коли параметр статистики  $g < 1/2$ , то другий віріальний коефіцієнт — від'ємний, що ефективно означає певну статистичну притягальну взаємодію, і навпаки, коли  $g > 1/2$ , то така статистична взаємодія буде відштовхувальною. Така інтерпретація узгоджується з тим, що ми знаємо про бозони та ферміони, зокрема, принцип Паулі фактично відповідає такому ефективному статистичному відштовхуванню.

### 8.3. Віріальне розвинення для еніонів

Описаний у попередньому підрозділі метод не можна застосувати до еніонів, оскільки для них не є відомим функціональний вигляд чисел заповнення. Тому ми підійдемо до проблеми трохи з іншого боку, врахувавши розв'язок квантовомеханічної задачі двох еніонів.

Велику статистичну суму можна подати у вигляді ряду за степенями активності, коефіцієнтами якого будуть статистичні суми  $Z_N$  системи  $N$  частинок:

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N, \quad Z_0 \equiv 1, \quad (8.18)$$

Тоді перші члени кластерного розвинення будуть

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_2} \ln \Xi &= \frac{1}{V_2} \ln (1 + z Z_1 + z^2 Z_2 + z^3 Z_3 + \dots) = \\ &= \mathcal{B}_1 z + \mathcal{B}_2 z^2 + \mathcal{B}_3 z^3 + \dots \end{aligned}$$

Ураховуючи розклад логарифма в ряд,  $\ln(1+x) = x - x^2/2 \pm \dots$ , з точністю до  $z^2$  матимемо:

$$\frac{1}{V_2} \left[ z Z_1 + z^2 \left( Z_2 - \frac{Z_1^2}{2} \right) + \dots \right] = \mathcal{B}_1 z + \mathcal{B}_2 z^2 + \dots,$$

звідки

$$B_1 = \frac{Z_1}{V_2}, \quad B_2 = \frac{2Z_2 - Z_1^2}{2V_2}, \quad (8.19)$$

і другий віріальний коефіцієнт еніонів

$$b_2 = -\frac{V_2(2Z_2 - Z_1^2)}{\lambda^2 2Z_1^2}. \quad (8.20)$$

Зважаючи на те, що властивості одночастинкової системи не залежать від статистики, зручно записати цей віріальний коефіцієнт у вигляді, що передбачає трактування ідеального газу еніонів як бозе-газу зі взаємодією. Позначивши другий віріальний коефіцієнт ідеального бозе-газу через  $b_2(0)$ , а відповідну статистичну суму двочастинкової задачі — через  $Z_2(0)$ , матимемо:

$$b_2(\alpha) = b_2(0) - \frac{V_2 Z_2(\alpha) - Z_2(0)}{\lambda^2 Z_1^2}, \quad (8.21)$$

де еніонний параметр  $\alpha \in [0; 1]$ . Тут потрібно також пам'ятати, що всі вирази коректні лише в термодинамічній границі, тобто  $V_2 \rightarrow \infty$ .

Розрахунки в еніонній задачі зручніше робити, помістивши систему в зовнішній осциляторний потенціал із частотою  $\omega$ , причому тепер термодинамічній границі відповідатиме умова  $\omega \rightarrow 0$  чи точніше  $N\omega^2 = \text{const}$  для системи  $N$  частинок.

Двовимірний ізотропний гармонічний осцилятор із частотою  $\omega$  має спектр  $E_n = (n + 1)\hbar\omega$ , а виродження  $n$ -го рівня дорівнює  $(n + 1)$ . Тому одночастинкова статистична сума буде

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)e^{-(n+1)\beta\hbar\omega} = \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \frac{\beta\hbar\omega}{2}}. \quad (8.22)$$

Статистичну суму вільної частинки в об'ємі  $V_2$  легко розрахувати, вона дорівнюватиме  $Z_1 = V_2/\lambda^2$ . Отже, зв'язок між термодинамічними границями  $V_2 \rightarrow \infty$  та  $\omega \rightarrow 0$  буде таким:

$$Z_1 = \frac{V_2}{\lambda^2} = \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^2}. \quad (8.23)$$

Двочастинкову задачу розглядатимемо, перейшовши до системи центра мас, тобто зовнішній потенціал буде

$$\frac{\omega^2}{2}(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2) = \omega^2 \mathbf{R}^2 + \frac{\omega^2}{4} \mathbf{r}^2, \quad (8.24)$$

де  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$  — радіус-вектор центра мас, а  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  позначає відносну координату.

Рух центра мас відповідає, отже, одночастинковій задачі про гармонічний осцилятор із частотою  $\omega_{\text{с.м.}}^2 = 2\omega^2$ . Виділивши його, можемо записати статистичну суму

$$Z_2 = Z_1 \tilde{Z}_2, \quad (8.25)$$

причому у границі  $\omega \rightarrow 0$

$$\frac{V_2}{\lambda^2} = \frac{1}{\beta^2 \hbar^2 \omega^2} = \frac{2}{\beta^2 \hbar^2 (2\omega^2)} = 2Z_1. \quad (8.26)$$

Тому другий віріальний коефіцієнт (8.21) набуде вигляду

$$b_2(\alpha) = b_2(0) - 2[\tilde{Z}_2(\alpha) - \tilde{Z}_2(0)]. \quad (8.27)$$

Статистичну суму  $\tilde{Z}_2$  розрахуємо, взявши до уваги енергетичний спектр задачі двох еніонів (7.59), який має дві гілки:

$$E_n^{(1)} = (2n + 1 + \alpha)\hbar\omega \quad \text{з виродженням } n + 1,$$

$$E_n^{(2)} = (2n + 1 - \alpha)\hbar\omega \quad \text{з виродженням } n,$$

де  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Звідси отримаємо:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+1)e^{-(2n+1+\alpha)\beta\hbar\omega} + ne^{-(2n+1-\alpha)\beta\hbar\omega} \right] = \\ &= \frac{\text{ch}[(1-\alpha)\beta\hbar\omega]}{2 \text{sh}^2 \beta\hbar\omega}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Цікаво, що в термодинамічній границі  $\tilde{Z}_2(\alpha)$ , і  $\tilde{Z}_2(0)$  розбігаються як  $1/\omega^2$ , однак їх різниця, що входить у рівняння (8.27), залишається скінченною.

У цій же границі, враховуючи, що  $b_2(0) = -1/4$ , отримаємо:

$$b_2(\alpha) = -\frac{1}{4} - 2 \frac{\text{ch}[(1-\alpha)\beta\hbar\omega] - \text{ch}\beta\hbar\omega}{2 \text{sh}^2 \beta\hbar\omega} \Big|_{\omega \rightarrow 0} = -\frac{1}{4} - \frac{(1-\alpha)^2 - 1}{2}$$

або остаточно другий віріальний коефіцієнт ідеального еніонного газу

$$b_2^{\text{anyon}}(\alpha) = -\frac{1}{4}(1 - 4\alpha + 2\alpha^2). \quad (8.29)$$

Як бачимо, в цьому виразі зникла залежність від частоти гармонічного потенціалу, що відігравав роль регуляризатора. Важливо також, що  $\alpha = 1$  дає правильну ферміонну границю (8.13):  $b_2(1) = +1/4$ . Крім того, подібно до статистики Голдейна–Ву, другий віріальний коефіцієнт є від'ємним, коли  $0 \leq \alpha < 1/\sqrt{2}$  (що відповідає ефективній притягальній статистичній взаємодії), і додатним, коли  $1/\sqrt{2} < \alpha \leq 1$  (тоді статистична взаємодія — відштовхувальна).

Точні результати для вищих віріальних коефіцієнтів отримати не вдається, оскільки відповідні квантові задачі  $N \geq 3$  еніонів не мають аналітичних розв'язків [3]. Для третього віріального коефіцієнта встановлено таке точне співвідношення симетрії [1, 4]:

$$b_3^{\text{anyon}}(\alpha) = b_3^{\text{anyon}}(1 - \alpha), \quad (8.30)$$

а також такий ряд [3]:

$$b_3^{\text{anyon}} = \frac{1}{36} + \frac{\sin^2 \alpha}{12\pi^2} + c_3 \sin^4 \pi\alpha, \\ c_3 = -(1.652 \pm 0.012) \times 10^{-5}. \quad (8.31)$$

Четвертий віріальний коефіцієнт дорівнює [5]:

$$b_4^{\text{anyon}} = \frac{\sin^2 \pi\alpha}{16\pi^2} \left( \frac{\ln(\sqrt{3} + 2)}{\sqrt{3}} + \cos \pi\alpha \right) + (c_4 + d_4 \cos \pi\alpha) \sin^4 \pi\alpha, \\ c_4 = -0.0053 \pm 0.0003, \quad d_4 = -0.0048 \pm 0.0009. \quad (8.32)$$

У бозонній границі, тобто коли  $\alpha \rightarrow 0$ , п'ятий віріальний коефіцієнт вільних еніонів задає такий розклад [6]:

$$b_5^{\text{anyon}} \simeq -\frac{1}{3600} + 0.0570337\alpha^2. \quad (8.33)$$

## 8.4. Встановлення відповідності між статистиками

За допомогою розрахованих виразів для віріальних коефіцієнтів можна встановити наближені відповідності між різними дробовими статистиками. Це потрібно розуміти в сенсі того, наскільки вдається узгодити рівняння стану, — а отже, й опис термодинаміки, — в різних моделях статистик. Для початку порівняємо другий віріальний коефіцієнт ідеального газу еніонів (8.29), який залежить від одного параметра  $\alpha$ , з деякими розрахованими в підрозділі 8.2.

В ідеальному двовимірному газі зі статистикою Поліхронакоса (8.14)

$$b_2^P(\gamma) = -\frac{\gamma}{4}. \quad (8.34)$$

Розв'язуючи рівняння  $b_2^{\text{anyon}}(\alpha) = b_2^P(\gamma)$ , отримаємо такий зв'язок між параметрами  $\gamma$  й  $\alpha$ :

$$\gamma = 1 - 4\alpha + 2\alpha^2. \quad (8.35)$$

Аналогічно, в ідеальному двовимірному газі зі статистикою Голдейна–Ву (8.17)

$$b_2^{\text{HW}}(g) = \frac{2g - 1}{4}. \quad (8.36)$$

Розв'язуючи рівняння  $b_2^{\text{anyon}}(\alpha) = b_2^{\text{HW}}(g)$ , матимемо зв'язок між параметрами  $g$  й  $\alpha$ :

$$g = 2\alpha - \alpha^2. \quad (8.37)$$

У статистиці Джентіле, де нетривіальні узагальнення відповідають максимальному заповненню рівня  $M \geq 2$ , другий віріальний коефіцієнт (8.15) збігається з бозонним (8.13):

$$b_2^G = b_2^{\text{BE}} = -\frac{1}{4}, \quad (8.38)$$

тому така дробова статистика взагалі не може описувати еніони, оскільки розв'язок рівняння  $b_2^{\text{anyon}}(\alpha) = b_2^G(M)$  існує лише в бозонній границі  $\alpha = 0$ .



Статистики ж Поліхронакоса й Голдейна–Ву дають лише наближену відповідність: можна легко перекоонатися, що третій віріальний коефіцієнт у них відрізнятиметься від еніонного [1, Chap. 5]. Одним зі способів просунутися в цьому питанні трохи далі є застосування моделей дробових статистик з більшою кількістю параметрів. Так, уже двопараметричні модифікації статистики дозволяють описати еніони з точністю до третього віріального коефіцієнта, що фактично відповідає межі сучасних експериментальних вимірювань [7].

Розглянемо далі варіанти двопараметричних дробових статистик, що ґрунтуються на статистиках Поліхронакоса та Голдейна–Ву, у кожній з яких є один параметр ( $\gamma$  та  $g$ , відповідно). З феноменологічних міркувань замінимо звичайні гіббсівські експоненти  $e^{\varepsilon_j/T}$  у виразах для чисел заповнення на експоненти Цалліса  $e_q^{\varepsilon_j/T}$ , додавши другий параметр  $q$ . Обґрунтувати таку заміну можна, наприклад, тим, що в системі еніонів присутня далекодійна статистична взаємодія, з якою пов'язують неадитивні формулювання термодинаміки. Новим неадитивним (NA) статистикам Поліхронакоса і Голдейна–Ву відповідатимуть такі функції розподілу:

$$n_j^{\text{NAP}} = \frac{1}{z^{-1}e_q^{\varepsilon_j/T} - \gamma}, \quad n_j^{\text{NAHW}} = \frac{1}{w(z^{-1}e_q^{\varepsilon_j/T}) + g}, \quad (8.39)$$

де  $w(x)$  — розв'язок рівняння (4.8).

Нескладно показати, що в **неадитивній статистиці Поліхронакоса** (NAP) кластерні інтеграли будуть

$$B_1\lambda^2 = \frac{1}{q}, \quad B_2\lambda^2 = \frac{\gamma}{2(1+q)}, \quad B_3\lambda^2 = \frac{\gamma^2}{3(2+q)}, \quad \dots$$

звідки другий і третій віріальні коефіцієнти

$$b_2^{\text{NAP}} = -\frac{\gamma q^2}{2(1+q)}, \quad b_3^{\text{NAP}} = \gamma^2 q^4 \left[ \frac{1}{(1+q)^2} - \frac{1}{3q(2+q)} \right]. \quad (8.40)$$

У **неадитивній статистиці Голдейна–Ву** (NAHW) кластерні інтеграли

$$B_1\lambda^2 = \frac{1}{q}, \quad B_2\lambda^2 = -\frac{(2g-1)}{2(1+q)}, \quad B_3\lambda^2 = \frac{(3g-2)(3g-1)}{6(2+q)}, \quad \dots$$

а другий і третій віріальні коефіцієнти дорівнюють

$$b_2^{\text{NAHW}} = \frac{2g-1}{2} \frac{q^2}{1+q}, \quad (8.41)$$

$$b_3^{\text{NAHW}} = q^4 \left[ \frac{(2g-1)^2}{(1+q)^2} - \frac{(3g-2)(3g-1)}{3q(2+q)} \right].$$

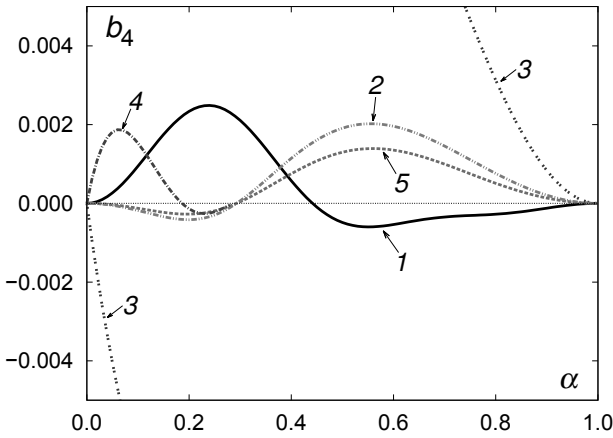


Рис. 8.1. Четвертий віріальний коефіцієнт у різних статистиках: 1 — еніони; 2 —  $\kappa$ -деформована статистика Голдейна–Ву; 3 —  $\kappa$ -деформована статистика Поліхронакоса; 4 — статистика Джентіле з  $M > 3$  (тут еквівалентно статистиці Бозе); 5 — статистика Голдейна–Ву, деформована експонентою Цалліса

Прирівнюючи другий і третій віріальні коефіцієнти у двопараметричних статистиках до  $b_2^{\text{anyon}}(\alpha)$  і  $b_3^{\text{anyon}}(\alpha)$ , відповідно, знайдемо зв'язок їх параметрів з еніонним параметром  $\alpha$ . Подібні розрахунки ми також зробили, використовуючи  $\kappa$ -експоненту Канадакіса замість  $q$ -експоненти Цалліса [8]. Для ілюстрації на рис. 8.1 показано значення четвертого віріального коефіцієнта, який уже не вдається змоделювати коректно. Найкращого опису досягнуто за допомогою модифікацій статистики Голдейна–Ву, а правильного знака в бозонній границі можна очікувати від модифікацій статистики Бозе.

## 8.5. Завдання для самостійної роботи

1. Знайдіть віріальне розвинення для двовимірного газу ферміонів і бозонів з точністю до третього віріального коефіцієнта.
2. Порівняйте поведінку термодинамічних функцій (енергії, теплоємності, хімічного потенціалу) та аналога рівня Фермі у статистиках Джентіле, Поліхронакоса і Голдейна–Ву. У границі низьких і високих температур це можна зробити аналітично, а проміжні значення потребуватимуть чисельних розрахунків.
3. Визначте, за яких значень еніонного параметра  $\alpha$  існують розв'язки рівнянь  $b_2^{\text{anyon}}(\alpha) = b_2^{\text{NAP}}(\gamma, q)$ ;  $b_3^{\text{anyon}}(\alpha) = b_3^{\text{NAP}}(\gamma, q)$  у неадитивній статистиці Поліхронакоса.

### Література до розділу 8

- [1] A. Khare. *Fractional Statistics and Quantum Theory*. World Scientific, Singapore, 2nd edition, 2005.
- [2] P. F. Borges, H. Boschi-Filho, and C. Farina. Generalized partition functions, interpolating statistics and higher virial coefficients. *Mod. Phys. Lett. A*, 14(18):1217–1226, 1999.
- [3] S. Mashkevich, J. Myrheim, and K. Olaussen. The third virial coefficient of anyons revisited. *Phys. Lett. B*, 382(1–2):124–130, 1996.
- [4] D. Sen. Spectrum of three anyons in a harmonic potential and the third virial coefficient. *Phys. Rev. Lett.*, 68(20):2977–2980, 1992.
- [5] A. Kristoffersen, S. Mashkevich, J. Myrheim, and K. Olaussen. The fourth virial coefficient of anyons. *Int. J. Mod. Phys. A*, 13(21):3723–3747, 1998.
- [6] A. Dasnières de Veigy and S. Ouvry. Perturbative equation of state for a gas of anyons. Second order. *Phys. Lett. B*, 291(1–2):130–136, 1992.
- [7] A. Rovenchak. Two-parametric fractional statistics models for anyons. *Eur. Phys. J. B*, 87(8):175, 2014.
- [8] М. Я. Горнецька та А. А. Ровенчак. Двопараметричні модифікації статистик еніонів. *Укр. фіз. журн.*, 61(2):174–183, 2016.

## Розділ 9

# Додаток: Групи та алгебри

Мета цього розділу — стисло подати інформацію, яка стосується теорії груп та споріднених розділів математики, що може бути корисним під час вивчення літератури на тему екзотичних статистик. По докладнішу інформацію варто звертатися до літератури, перелік якої подано наприкінці розділу.

### 9.1. Означення та приклади груп

Множина  $G$ , для елементів якої визначена бінарна операція  $*$ , називається *групою*, якщо виконуються такі властивості:

- *Замкненість*: для довільних  $a, b$  із множини  $G$  результат операції  $c = a * b$  також належить множині  $G$ .
- *Асоціативність*: для довільних  $a, b, c$  із множини  $G$  виконується  $a * (b * c) = (a * b) * c$ .
- *Існування нейтрального елемента*: у множині  $G$  існує елемент  $e$  такий, що для кожного елемента  $a$  з  $G$  виконується  $a * e = e * a = a$ .
- *Існування оберненого елемента*: для кожного елемента  $a$  з множини  $G$  існує елемент  $a^{-1}$ , який також належить  $G$ , так що виконується  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ .

Бінарна операція не мусить бути комутативною. Якщо  $a * b = b * a \quad \forall a, b \in G$ , то групу називають *комутативною* або *абелевою*.

Наприклад, множина цілих чисел  $\mathbb{Z}$  з операцією додавання утворює групу, тоді як натуральні числа  $\mathbb{N}$  — ні, оскільки немає можливості означити обернений (тут протилежний) і нейтральний елемент (нуль). А от цілі  $\mathbb{Z}$  чи дійсні числа  $\mathbb{R}$  з відніманням не є групою через неасоціативність операції.

**Групою Лі<sup>1</sup>** (дійсною чи комплексною) називають групу  $G$ , елементами якої є точки аналітичного многовиду (відповідно, дійсного чи комплексного), а групові операції множення  $\text{mul} : G \times G \rightarrow G$  та інверсії (взяття оберненого елемента)  $\text{inv} : G \rightarrow G$  є аналітичними відображеннями.

Приклади дійсних груп Лі:

- $\mathbb{R}^n$  — евклідовий простір з операцією додавання;
- $\mathbb{R}_+^*$  — додатні дійсні числа з операцією множення;
- $GL(n, \mathbb{R})$  — загальна лінійна група: дійсні оборотні матриці розмірності  $n \times n$ ;
- $SL(n, \mathbb{R})$  — спеціальна лінійна група: дійсні оборотні матриці розмірності  $n \times n$  з визначником 1;
- $O(n, \mathbb{R})$  — ортогональна група: ортогональні дійсні матриці розмірності  $n \times n$ .

Приклади комплексних груп Лі:

- $\mathbb{C}^n$  — евклідовий простір з операцією додавання;
- $\mathbb{C}^*$  — ненульові комплексні числа з операцією множення;
- $SO(n, \mathbb{C})$  — спеціальна ортогональна група: комплексні ортогональні матриці з визначником 1;
- $U(n)$  — унітарна група: унітарні комплексні матриці розмірності  $n \times n$ ;
- $SU(n)$  — спеціальна унітарна група: унітарні комплексні матриці розмірності  $n \times n$  з визначником 1.

---

<sup>1</sup>Софус Лі (Marius Sophus Lie; 1842–1899), норвезький математик.

**Гомоморфізмом** називають відображення  $f$  групи  $G$  в групу  $H$ , яке зберігає групову операцію:

$$f : G \rightarrow H : f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G,$$

$$f(e) = E,$$

де  $e$  — одиниця в  $G$ , а  $E$  — відповідно, одиниця в  $H$ . Зрозуміло також, що для обернених елементів справджується

$$f(g^{-1}) = f^{-1}(g) \quad \forall g \in G.$$

Якщо гомоморфізм є взаємнооднозначним відображенням, то його називають **ізоморфізмом**.

**Лінійне представлення** (або просто **представлення**) групи  $G$  в просторі  $V$  — це гомоморфізм групи  $G$  в групу  $GL(V)$ . Вимірність представлення дорівнює вимірності простору  $V$ .

Завдяки властивості визначника  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$  зрозуміло, наприклад, що відображення  $f(A) = \det(A)$  задає одновимірне представлення груп  $GL(n, \mathbb{R})$  в множину дійсних чисел, яка відповідає групі  $GL(1, \mathbb{R})$ .

## 9.2. Група кіс

Цікавим прикладом є так звана **група кіс** (англ. *braid group*), яка відіграє у двовимірному просторі ту ж роль, що й група перестановок у тривимірному [1, 2]. Її зручно проілюструвати за допомогою такого графічного зображення. Розглядатимемо набори по  $N$  впорядкованих точок, розташованих на двох прямих. Поставивши у відповідність  $i$ -тій частинці **струну**, що з'єднує  $i$ -ті точки, зобразимо дію оператора  $\sigma_i$ , як показано на рис. 9.1. Такий оператор відповідає перестановці частинок 1 і 2 (взагалі кажучи, у визначеному напрямку — наприклад, проти годинникової стрілки). Групу кіс  $B_N$  задають  $(N - 1)$  генераторів  $\sigma_i$ , які задовольняють такі властивості (**співвідношення Артіна**<sup>2</sup>) [1]:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad (9.1)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad \text{якщо } |i - j| \geq 2. \quad (9.2)$$

<sup>2</sup>Еміль Артін (Emil Artin; 1898–1962), австрійський математик.

Відповідні графічні зображення наведено на рис. 9.2 і 9.3 [1].

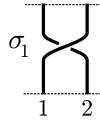


Рис. 9.1. Дія оператора  $\sigma_1$ . Струна, що виходить із точки, що відповідає частинці 1 на нижній прямій, до точки, що відповідає частинці 2 на верхній, пролягає *над* іншою [1]

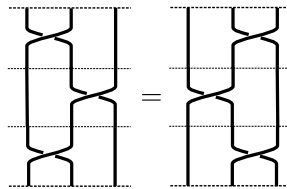


Рис. 9.2. Графічне зображення властивості  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$

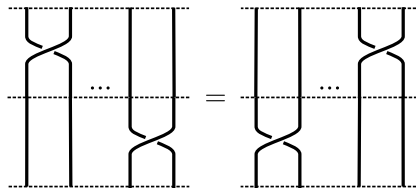


Рис. 9.3. Графічне зображення властивості  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ ,  $|i - j| \geq 2$

Елементами групи  $B_N$  є добутки генераторів  $\sigma_i$  та обернених  $\sigma_i^{-1}$ , які відповідають перестановці у протилежному напрямку і зображаються як дзеркальне відбиття рис. 9.1.

З рис. 9.4 легко бачити, що повторна дія  $\sigma_1$  не дає початкової конфігурації — коса «заплітається», тобто  $\sigma_1^2 \neq \sigma_1^{-1}\sigma_1 = I$ .

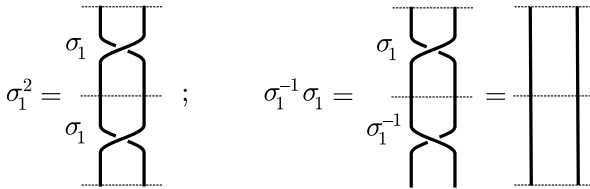


Рис. 9.4. Подвійна перестановка не зводиться до одиничної операції — дія оператора  $\sigma_1^2 \neq \sigma_1^{-1}\sigma_1 = I$

Відображення  $f$ , яке задає одновимірне представлення групи  $B_N$ , має, відповідно до (9.1), такі властивості:

$$f(\sigma_i)f(\sigma_{i+1})f(\sigma_i) = f(\sigma_{i+1})f(\sigma_i)f(\sigma_{i+1}), \tag{9.3}$$

$$f(\sigma_i)f(\sigma_j) = f(\sigma_j)f(\sigma_i), \quad \text{якщо } |i - j| \geq 2. \tag{9.4}$$

Це означає, що кожному генераторові  $\sigma_j$  ставиться у відповідність те саме комплексне число:

$$f(\sigma_j) = e^{i\theta}, \tag{9.5}$$

де  $\theta$  — довільне число з інтервалу  $\theta \in [0; 2\pi)$ , див., наприклад, [1, Чап. 2]. Для групи перестановок  $S_N$ , що є підгрупою  $B_N$  з додатковою умовою  $\sigma_j^2 = 1$ , маємо:

$$f(\sigma_i)^2 = e^{2i\theta} = 1, \quad \text{звідки } \theta = 0 \text{ або } \pi. \tag{9.6}$$

Справді, група перестановок має лише два одновимірні представлення: в першому будь-якій перестановці у відповідність ставлять число 1 (фізично це відповідає бозонам, хвильова функція яких симетрична), у другому непарним перестановкам зіставляють  $(-1)$ , а парним —  $(+1)$ , подібно до переставних властивостей хвильових функцій ферміонів [1, Чап. 2]. В загальному ж випадку, коли обмеження на  $\theta$  немає, група кіс відповідає еніонам.



### 9.3. Алгебри

Векторний простір називають *алгеброю*  $\mathcal{A}$  над полем  $K$  (дійсних або комплексних чисел), якщо, крім додавання і множення на число, для елементів простору визначено операцію множення  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , яка є білінійною, тобто додавання й обидва множення задовольняють такі рівності:

$$a(\alpha b + \beta c) = \alpha ab + \beta ac, \quad (\alpha b + \beta c)a = \alpha ba + \beta ca, \quad (9.7)$$

де елементи  $a, b, c \in \mathcal{A}$ , а числа  $\alpha, \beta \in K$ .

Якщо множення комутативне, тобто  $ab = ba$ , то алгебру називають *комутативною*. Якщо існує одиничний елемент  $e$  (*одиниця алгебри*), такий що  $ae = ea = a$ , то говорять про *алгебру з одиницею*. Коли для будь-яких трьох елементів  $a, b, c$  справджується  $(ab)c = a(bc)$ , то алгебра — *асоціативна*.

Зрозуміло, що множина комплексних чисел утворює асоціативну алгебру з одиницею над полем дійсних чисел, яка до того ж є комутативною. Прикладом асоціативної некомутативної алгебри можуть бути комплексні квадратні матриці  $n \times n$  щодо звичайного додавання і множення матриць.

**Базис** алгебри  $\mathcal{A}$  — це впорядкована сукупність її лінійно незалежних елементів  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , за допомогою яких будь-який елемент  $a \in \mathcal{A}$  можна подати у вигляді лінійної комбінації

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, \quad (9.8)$$

де  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — числа з поля  $K$ , а  $n$  називають *порядком алгебри*. Існують алгебри як скінченного, так і безмежного порядку.

В асоціативних алгебрах множення базисних елементів визначає формула

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k, \quad (9.9)$$

де числа  $c_{ij}^k$  — *структурні константи* алгебри  $\mathcal{A}$ . Вони разом із елементами базису повністю визначають алгебру.

Скінченновимірний векторний простір називають *алгеброю Лі*  $\mathfrak{g}$  над полем  $K$  (дійсних або комплексних чисел), якщо для елементів  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  задано білінійне відображення  $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$  (*дужки Лі* або *множення Лі*), що задовольняє такі аксіоми:

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z] \quad \text{для } \alpha, \beta \in K; \quad (9.10)$$

$$[X, Y] = -[Y, X]; \quad (9.11)$$

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0. \quad (9.12)$$

Остання рівність — це *тотожністю Якобі*. Якщо  $[X, Y] = 0$ , то алгебру Лі називають комутативною.

Подібно до асоціативних алгебр (9.9), структурні константи визначають співвідношення між елементами базису  $\{X_1, \dots, X_n\}$ :

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k. \quad (9.13)$$

З антисиметричності операції  $[X, Y] = -[Y, X]$  випливають умови:

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \quad c_{jj}^k = 0. \quad (9.14)$$

Звичайний комутатор  $[X, Y] = XY - YX$  є прикладом множення Лі. Увівши його в асоціативну алгебру, можемо перетворити її на алгебру Лі. Однак треба зауважити, що операція множення Лі не обмежується лише цим випадком. Наприклад, добре відомо, що тотожність Якобі задовольняють *класичні дужки Пуассона*:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right), \quad (9.15)$$

де  $f$  і  $g$  є функціями канонічних координат  $q_1, \dots, q_n$  та імпульсів  $p_1, \dots, p_n$ .

Кожній групі Лі  $G$  можна зіставити за певним правилом [6, 5] алгебру Лі  $\mathfrak{g}$ . Якщо йдеться про матричні групи, описані в підрозділі 9.1, то множення Лі буде комутатором матриць. Зазвичай такі алгебри позначають відповідними малими літерами, причому часто — готичними.

Наприклад:

- алгеброю Лі групи  $GL(n, \mathbb{C})$  буде  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  — комплексні матриці  $n \times n$ ;
- алгеброю Лі групи  $SL(n, \mathbb{C})$  буде  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  — комплексні матриці  $n \times n$  з нульовим слідом;
- алгеброю Лі групи  $U(n)$  буде  $\mathfrak{u}(n)$  — антиермітові комплексні матриці  $n \times n$ ;
- алгеброю Лі групи  $SU(n)$  буде  $\mathfrak{su}(n)$  — антиермітові комплексні матриці  $n \times n$  з нульовим слідом.

Елементи  $X$  групи  $G$  пов'язані з базисом  $u_1, \dots, u_n$  алгебри  $\mathfrak{g}$  через параметри  $\theta_1, \dots, \theta_n$  експоненційним відображенням:

$$X(\theta_1, \dots, \theta_n) = \exp\left(\sum_{j=1}^n \theta_j u_j\right), \quad \text{де} \quad \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (9.16)$$

Розгляньмо трохи докладніше алгебру  $\mathfrak{su}(2)$ , яка відіграє важливу роль у різних галузях фізики. Її базис можна подати у вигляді  $u_1 = i\sigma_1, u_2 = i\sigma_2, u_3 = i\sigma_3$ , де **матриці Паулі**

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9.17)$$

Пригадуючи співвідношення про  $\det e^A = e^{\text{Sp} A}$ , бачимо, що відображення (9.16) справді переводить безшпурові матриці алгебри  $\mathfrak{su}(2)$  в матриці з одиничним визначником, які утворюють групу  $SU(2)$ . Зауважмо, що у фізиці часто записують експоненційне відображення з додатковою уявною одиницею, зокрема в цьому випадку як  $X = \exp(i\theta\sigma)$ .

З урахуванням комутаційних співвідношень для  $\sigma_j$  отримаємо:

$$[u_1, u_2] = -2u_3, \quad [u_2, u_3] = -2u_1, \quad [u_3, u_1] = -2u_2. \quad (9.18)$$

За допомогою операторів, що з точністю до розмірного множника  $\hbar$  збігаються з моментом імпульсу,  $J^\pm = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$ ,  $J_z = \sigma_3/2$ , можемо переписати:

$$[J^+, J^-] = J_z, \quad [J_z, J^+] = J^+, \quad [J_z, J^-] = -J^-, \quad (9.19)$$

що можна розглядати як ще одне представлення алгебри  $\mathfrak{su}(2)$ .

Визначимо далі  $q$ -деформовану алгебру  $\mathfrak{su}_q(2)$  і, відповідно, пов'язану з нею групу  $SU_q(2)$ , за допомогою базисних елементів  $E^+, E^-, F$ , для яких

$$[E^+, E^-] = \frac{q^F - q^{-F}}{q - q^{-1}}, \quad [F, E^+] = E^+, \quad [F, E^-] = -E^-. \quad (9.20)$$

Права сторона першого комутатора є одним зі способів введення  $q$ -чисел, тому можемо записати  $[E^+, E^-] = [F]_q$ , після чого співвідношення між базисними елементами нагадуватимуть (9.19) і збігатимуться з ними у границі  $q \rightarrow 1$ .

Існують способи пов'язати між собою алгебри типу  $\mathfrak{su}_q(2)$  та  $q$ -осциляторні алгебри, що визначаються комутаційними співвідношеннями, про які йшлося в підрозділі 6.2, порівн. [4, Гл. 5]. Варто зазначити, що у випадку  $q$ -деформованих аналогів алгебри Лі, яким відповідають  $q$ -мутатори  $[A, B]_q = AB - qBA$ , розглядають також таке узагальнення [3] тотожності Якобі (9.12)

$$[X, [Y, Z]_{q_1}]_{q_2} + [Z, [X, Y]_{q_1 q_2}] + q_2 [Y, [Z, X]_{q_1}]_{q_2^{-1}} = 0, \quad (9.21)$$

яке називають *квантовою тотожністю Якобі*.

## 9.4. Завдання для самостійної роботи

1. Перевірте, чи утворюють вказані множини групу відносно заданої бінарної операції. Якщо так, то вкажіть нейтральний елемент  $e$  і правило отримання оберненого елемента.

(a)  $a, b \in \mathbb{R}_+$  :  $a * b = a^b$ .

(b)  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $a = \frac{p_a}{q_a}$ ,  $b = \frac{p_b}{q_b}$ ,  $p_a, p_b \in \mathbb{Z}$ ,  $q_a, q_b \in \mathbb{N}$

(тобто  $a, b$  — раціональні числа) :  $a * b = \frac{p_a + p_b}{q_a + q_b}$ .

(c)  $a, b \in \mathbb{R}$  :  $a * b = \min(a, b) \equiv \begin{cases} a, & \text{якщо } a \leq b \\ b, & \text{якщо } a > b. \end{cases}$

2. Покажіть, що верхні трикутні матриці виду

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{де } a, b, c \in \mathbb{R},$$

утворюють групу щодо операції матричного множення (це приклад так званої неперервної *групи Гайзенберґа*). Задайте правило отримання оберненого елемента.

3. Доведіть такі співвідношення для операторів групи кіс:

$$(a) \sigma_i^\gamma \sigma_j^\delta = \sigma_j^\delta \sigma_i^\gamma, \text{ якщо } |i - j| \geq 2 \text{ і } \gamma, \delta \in \{-1; 1\};$$

$$(b) \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} = \sigma_3 \sigma_1 \sigma_3^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2.$$

4. **Кватерніони** — це об'єкти виду  $q = a_0 + \mathbf{i}a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3$ , де  $a_0, a_1, a_2, a_3$  — дійсні числа, а **уявні (кватерніонні) одиниці** задовольняють співвідношення:

$$\mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1.$$

Покажіть, що алгебра кватерніонів є асоціативною, але некомутативною.

5. Доведіть, що векторний простір  $\mathbb{R}^3$  над полем дійсних чисел із векторним добутком утворює алгебру Лі.

## Література до розділу 9

- [1] A. Khare. *Fractional Statistics and Quantum Theory*. World Scientific, Singapore, 2nd edition, 2005.
- [2] В. В. Прасолов и А. Б. Сосинский. *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*. МЦНМО, Москва, 1997.
- [3] M. Chaichian, P. Kulish, and J. Lukierski.  $q$ -deformed Jacobi identity,  $q$ -oscillators and  $q$ -deformed infinite-dimensional algebras. *Phys. Lett. B*, 237(3): 401–406, 1990.
- [4] П. І. Голод та А. У. Клімик. *Математичні основи теорії симетрій*. Наукова думка, Київ, 1992.
- [5] А. А. Соколов, И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский, и А. В. Борисов. *Квантовая электродинамика*.
- [6] А. Барут и Р. Рончка. *Теория представлений групп и её приложения. Т. 1, 2*. Мир, Москва, 1983.

# ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- g*-он, 46
- q*-експонента Цалліса, 61
- q*-логарифм, 60
- q*-мутатор, 12, 77
- q*-факторіал, 79
- q*-числення, 85
- q*-число, 79
- алгебра, 136
  - асоціативна, 136
  - з одиницею, 136
  - комутативна, 136
  - куонна, 83
  - Лі, 137
- антикомутатор, 75
- базис, 136
- бозон, 9
- віріальні коефіцієнти, 119
- віріальне розвинення, 119
- властивість дуальності, 48
- голлівська напруга, 97
- голлівський опір, 99
- гомоморфізм, 133
- група, 131
  - абелева, 131
  - Гайзенберга, 140
  - кіс, 111, 133
  - комутативна, 131
  - Лі, 132
- довжина
  - гармонічного осцилятора, 72
  - теплової хвилі де Бройля, 119
- дужки
  - Лі, 137
  - Пуассона класичні, 137
- ексклюзон, 46
- експоненційне відображення, 138
- еніон, 12, 109
- ефект Голла, 97
  - квантовий, 99
  - квантовий дробовий, 105
- ізоморфізм, 133
- інтеграл Джексона, 84
- квантовий аналіз, 85
- кватерніон, 140
- кластерне розвинення, 120
- кластерні інтеграли, 120
- коефіцієнт Голла, 98
- кольоровий заряд, 77
- комполитна частинка, 106
- комполитний ферміон, 108
- конденсація Бозе–Айнштайна, 8
- лінійне представлення, 133

- матриці Паулі, 138  
множення Лі, 137
- одиниці SI, 104  
одиниця  
алгебри, 136  
кватерніонна (уявна), 140  
оператор переходу, 93
- парастатистика, 12  
поверхнева концентрація  
зарядів, 99  
порядок  
алгебри, 136  
парастатистики, 77  
похідна Джексона, 60  
представлення, 133
- рівні Ландау, 102
- семіон, 48  
співвідношення Артіна, 133  
спін, 9  
стала  
тонкої структури, 105  
фон Клітцинга, 104
- статистика  
Бозе(-Айнштайна), 8  
Больцмана-Гіббса, 8  
Голдейна-Ву, 46  
неадитивна, 128  
Джентіле, 15  
дробова виключна, 11, 46  
еніонна, 111  
неекстенсивна, 57  
Поліхронакоса, 29  
неадитивна, 128  
слабконеадитивна, 71  
Фермі(-Дірака), 9  
статистична взаємодія, 45  
структурна функція, 82  
структурні константи, 136  
струна, 133
- теорема про зв'язок спіну зі  
статистикою, 10  
тотожність Якобі, 137  
квантова, 139  
трилінійні комутаційні  
співвідношення, 76
- ферміон, 10
- хвильова функція Лафліна, 108
- циклотронна частота, 102

# ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК\*

Айнштайн А., 8

Арик М., 77

Артін Е., 133

Біденгарн Л. К., 81

Бозе С., 8

Больцман Л., 7

Вілчек Ф., 110

Ву Й.-Ш., 46

Голдейн Д., 46

Голл Е. Г., 97

Гаудсміт С., 9

Гіббс Дж. В., 8

Грін Г. С., 76

Грінберг О., 83

Данков С., 81

Дароці З., 57

Джексон Ф., 60

Джентіле Дж., 15

Дірак П. А. М., 10

Еренфест П., 9

Каніадакіс Дж., 67

Клаузіус Р., 7

Клітцінг К. фон, 99

Костерліц Дж., 46

Крамерс Г., 9

Кун Д., 77

Курадо Е., 63

Лайнос Й., 110

Лафлін Р., 108

Лі С., 132

Максвелл Дж. К., 7

Макфарлейн А. Дж., 81

Мендеш Р. д. С., 63

Міргайм Я., 110

Паулі В., 10

Планк М., 8

Пластіно А. Р., 63

Поліхронакос А., 29

Рамануджан С. А., 54

Рейні А., 57

Тамм І. Є., 81

Таулесс Д., 46

Уленбек Дж., 9

Фермі Е., 10

Фірц М., 10

Цалліс К., 57

Цуї Д., 108

Швінгер Ю., 10

Штьормер Г., 108

---

\*У Показчику вказано сторінки, де можна знайти короткі біографічні дані про відповідних науковців.



Навчальне видання

*Ровенчак Андрій Адамович*

## ЕКЗОТИЧНІ СТАТИСТИКИ

Навчальний посібник

---

Редактор	<b>Руслана Спринь</b>
Коректор	<b>Юліана Бурка</b>
Комп'ютерна верстка	<b>Андрій Ровенчак</b>
Технічний редактор	<b>Світлана Сенік</b>

Формат 60 × 90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>      Умовн. друк. арк. 9.0  
Наклад 100 прим.

---

Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів  
видавничої продукції  
Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Друк: ФОП Сорока Т. Б.  
вул. Володимира Великого, 2, м. Львів, 79026

<http://soroka.lviv.ua>