ФІЗИКА БОЗЕ-СИСТЕМ

Андрій РОВЕНЧАК

T<<Tc



1.0 mm

Міністерство освіти і науки України Львівський національний університет імені Івана Франка

Андрій Ровенчак

ФІЗИКА БОЗЕ-СИСТЕМ

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Львів • 2015

УДК 530.145 + 531.19 + 538.94 ББК В317 + В368 Р 58

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. С. С. Соколов (Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, м. Харків);

д-р фіз.-мат. наук, проф. С. Й. Вільчинський (Київський національний університет імені Тараса Шевченка);

д-р. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. **О. В. Держко** (Інститут фізики конденсованих систем НАН України, м. Львів)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів фізико-математичних спеціальностей вищих навчальних закладів (Лист №1/11–15962 від 22.10.2013)

Ровенчак А. А. Фізика бозе-систем : навч. посібник / А.А.Ровенчак. — Львів : Львівський національний університет імені Івана Франка, 2015. — 128 с.

ISBN 978-617-10-0085-8

Мета пропонованого посібника — ознайомити читачів із фізичними явищами, що відбуваються у квантових рідинах і газах, та з методами їх дослідження на математичному рівні. Матеріал умовно поділено на дві частини. Першу присвячено аналізові властивостей ідеального бозе-газу, а друга стосується взаємодіючих систем бозонів. Увагу зокрема звернено на процеси в рідкому гелії-4 та методику вивчення сильнорозріджених систем лазерно-охолоджених атомів лужних металів. Посібник також включає ориґінальні авторські дослідження. Відповідні питання є особливо актуальними з огляду на останні експериментальні успіхи в галузі фізики бозонних систем, яка зараз активно розвивається у провідних наукових центрах світу.

Для студентів та аспірантів фізико-математичних спеціальностей і для самоосвіти.

УДК 530.145 + 531.19 + 538.94 ББК В317 + В368

- © Ровенчак А. А., 2015
- © Львівський національний університет імені Івана Франка, 2015

ISBN 978-617-10-0085-8

Зміст

Пере	едмова		5
I.	Історія	а вивчення бозе-систем	7
II.	Розпод	ціли Бозе–Айнштайна та Фермі–Дірака	15
	II.1.	Комбінаторний підхід	15
	II.2.	Підхід великого канонічного ансамблю	18
III.	Термодинаміка ідеального бозе-газу		
	III.1.	Густина станів у D вимірах	21
	III.2.	Тривимірний випадок. Явище бозе-конденсації .	24
	III.3.	Дво- й одновимірні випадки	27
	III.4.	Енергія і теплоємність ідеального бозе-газу	29
	III.5.	Поняття про дробову вимірність	34
IV.	Ідеальний бозе-газ у зовнішньому полі		
	IV.1.	Урахування зовнішнього потенціалу	
		у квазікласичному наближенні	39
	IV.2.	Ізотропний зовнішній потенціал	40
	IV.3.	Двовимірна осциляторна пастка	43
	IV.4.	Анізотропний потенціал степеневого типу	44
V.	Рівняння Ґросса–Пітаєвського		
	V.1.	Виведення рівняння	47
	V.2.	Двовимірна задача розсіяння	51
	V.3.	Однорідна тривимірна система	54
	V.4.	Гауссівське наближення для осциляторної пастки	57
	V.5.	Наближення Томаса–Фермі	60
	V.6.	Гідродинамічний опис. Вихори в конденсаті	62

VI.	Метод	наближеного вторинного квантування Боголюбова	65
	VI.1.	Однорідна система	65
	VI.2.	Система в зовнішній гармонічній пастці	70
VII.	Сильн	а взаємодія	75
	VII.1.	Колективні змінні	75
	VII.2.	Хвильова функція основного стану	78
	VII.3.	Міжатомні потенціали	80
	VII.4.	Розрахунок термодинамічних функцій:	
		двочасові температурні функції Ґріна	84
	VII.5.	Енерґетичний спектр бозонної суміші	86
VIII.	Систем	ми зі скінченною кількістю частинок	89
	VIII.1.	Квазікласичне наближення	89
	VIII.2.	Скінченна кількість бозонів у просторі з $D>2$.	91
	VIII.3.	Одновимірний випадок	95
	VIII.4.	Мікроканонічний аналіз одновимірної системи	
		осциляторів	98
	VIII.5.	Двовимірна система осциляторів	01
IX.	Охоло,	дження й утримання атомів: фізичні основи	
VII.5. Енерґетичний спектр бозонної суміші 8 VIII. Системи зі скінченною кількістю частинок 8 VIII.1. Квазікласичне наближення 8 VIII.2. Скінченна кількість бозонів у просторі з D > 2 9 VIII.3. Одновимірний випадок 9 VIII.4. Мікроканонічний аналіз одновимірної системи осциляторів 9 VIII.5. Двовимірна система осциляторів 10 IX. Охолодження й утримання атомів: фізичні основи експериментальних методів 10 IX.1. Допплерівське охолодження 10 IX.2. Оптична меляса 10 IX.3. Зеєманівське охолодження 10 IX.4. Сізіфівське охолодження 10 IX.5. Магнітні пастки 11 IX.6. Магнітооптична пастка 11 IX.7. Випаровувальне охолодження 11 IX.7. Випаровувальне охолодження 11 IX.7. Випаровувальне охолодження 11 IX.7. Вигаровувальне охолодження 12 IX.7. Вигаровувальне охолодження 13			03
	IX.1.	Допплерівське охолодження	03
	IX.2.	Оптична меляса	05
	IX.3.	Зеєманівське охолодження	06
	IX.4.	Сізіфівське охолодження	08
	IX.5.	Магнітні пастки	11
	IX.6.	Магнітооптична пастка	14
	IX.7.	Випаровувальне охолодження	15
Дода	аток.	Стаття С. Бозе	17
Літе		22	
Пока	ажчик		27

Передмова

Посібник укладено на основі курсу, що його слухають маґістранти фізичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка, що спеціалізуються з теоретичної фізики. Курс входить до програми підготовки майбутніх маґістрів-фізиків уже протягом десяти років. Його мета — ознайомити студентів із фізичними явищами, що відбуваються у квантових рідинах і газах, та з методами їх дослідження на математичному рівні.

Спрямованість курсу на різнобічне висвітлення питань за відносно невеликого обсягу часу, виділеного на його вивчення, визначає структуру посібника і стиль викладу.

Матеріал умовно поділено на дві частини. У першій проаналізовано властивості ідеального бозе-газу, а друга стосується взаємодіючих систем бозонів. Увагу зокрема звернено на процеси в рідкому гелії-4 та методику вивчення сильнорозріджених систем лазерноохолоджених атомів лужних металів. Відповідні питання є особливо актуальними з огляду на останні експериментальні успіхи у цій галузі, яка зараз активно розвивається у провідних наукових центрах світу.

Потреба компактної систематизації матеріалу пов'язана з тим, що переважна більшість розглянутих питань опублікована у вигляді наукових статей, а також монографій, які пересічному українському читачеві важкодоступні. Посібник також вміщує ориґінальні авторські дослідження. Перелік літературних джерел, згрупований за розділами, має на меті допомогти читачам у самостійному поглибленому вивченні окремих питань, відображених у курсі.

За обговорення, корисні зауваження і пропозиції під час роботи над посібником висловлюю подяку своїм колегам із кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка, студентам — майбутнім маґістрам-теоретикам, а також рецензентам і редакторам. Окрема подяка Вольфґанґові Кеттерле за дозвіл на використання в оформленні обкладинки зображення з трьома піками, яке засвідчує виникнення бозе-конденсату в атомній хмарі.

Львів, квітень 2013

I. Історія вивчення бозе-систем 1

Історія вивчення систем частинок із цілим спіном, що їх згодом назвали бозонами, починається у 20-х роках XX ст. Перші кроки зробили індійський учений Сат'єндранатг Бозе (Satyendranath Bose, षञ्यल्प्त नाभ वभू), який 1924 р. у праці "Закон Планка та гіпотеза світлових квантів" [8] запропонував виведення формули Планка на підставі простого статистико-механічного підрахунку, й Альберт Айнштайн (Albert Einstein), який використав цей метод для отримання розподілу квантового ідеального газу частинок з масою спокою, відмінною від нуля [10], а в наступній статті [11] вказав на явище нагромадження атомів на рівні з нульовим імпульсом, яке власне й назвав "конденсацією".

volumen. Es tritt eine Scheidung ein; ein Teil »kondensiert«, der Rest bleibt ein »gesättigtes ideales Gas« ($A = 0 \lambda = I$).

Daß die beiden Teile in der Tat ein thermodynamisches Gleichgewicht bilden, sieht man ein, indem man zeigt, daß die »kondensierte« Substanz und $\overline{E} = \pi V$

Рис. I.1. Фраґмент статті А. Айнштайна [11], де він вживає слово "конденсується" стосовно атомів ідеального газу в імпульсному просторі

¹Детальніший перелік оригінальних літературних джерел, що стосуються етапів розвитку досліджень бозе-систем, можна знайти у статті [7].



Сат'єндранатт Бозе (1.І.1894–4.ІІ.1974)



Альберт Айнштайн (14.III.1879–18.IV.1955)

У природі є загалом небагато систем, які, з одного боку, виявляють суттєво квантові властивості, а з іншого — можуть розглядатися як такі, що складаються з невзаємодіючих бозонів. Серед прикладів є випромінювання, про яке й писав Бозе, а також (із певними застереженнями) — "газ" куперівських пар у надпровіднику. Із простих атомарних рідин під цю характеристику міг би підійти рідкий гелій-4, атоми якого є легкими бозонами, отже, їх поведінка суттєво квантова, але міжатомна взаємодія у цій системі надто сильна, щоб розглядати її як ідеальну навіть наближено. Квантовим бозе-газом є також система спін-поляризованих атомів водню, проте отримати її та проводити з цим газом досліди технічно складно. Уперше стабілізувати атомарний водень вдалося Сильвері та Вальравену 1980 р. в Амстердамі [16]. Звичайний водень, хоч і легший за гелій, переходить у твердий стан раніше, ніж досягає критичної температури, яка відповідає переходові у фазу бозе-конденсату. Про можливість бозеконденсації ізотопів водню (H, D i T) у газовій фазі писав Чарльз Гехт ще 1959 р. [12]. Рідкий гелій-4 став історично першою (і тривалий час залишався єдиною) бозе-системою, яку детально вивчали і продовжують вивчати теоретики й експериментатори. Сам фазовий перехід у рідкому ⁴Не вперше виявив Віллем Гендрик Кеєзом зі співробітниками, проводячи наприкінці 1920-х — на початку 1930-х років низькотемпературні дослідження у лабораторії Камерлінга-Оннеса [13]. Незвична форма кривої теплоємності з пікоподібним ходом в околі температури $T \simeq 2$ К стала причиною назви цього явища — λ -перехід (1932 р.).

26 Comm. Nº. 221d. W. H. KEESOM and Miss A. P. KEESOM.

for the point at which this jump occurs. According to a suggestion made by Prof. EMRENFEST we propose to call that point, considering the resemblance of the specific heat curve with the Greek letter λ , the *lambda-point*.

The curve that shows how the lambda-point depends on the pressure will be called the *lambda-curve*¹).

Рис. І.2. Фраґмент статті В. Г. Кеєзома й А. П. Кеєзом [13], де вказано на причину виникнення терміна " λ -точка", що його запропонував Пауль Еренфест



Віллем Гендрик Кеєзом (21.VI.1876–24.III.1956)

tically the same, the much larger temperature merease of 1 r compared with I f and I g immediately indicates the fall of the specific heat.



The attention is further drawn to the fact that the afterperiods

Рис. I.3. Експериментальна крива теплоємності гелію-4, рисунок з [13]

Фріц Лондон [14] 1938 р. висловив припущення про зв'язок фазового переходу в гелії-4 з бозе–айнштайнівською конденсацією, що відбувається у разі зниження температури в ідеальному бозе-газі. Попри те, що така аналогія, зважаючи на досить сильну взаємодію між атомами гелію, видається не дуже вдалою, на сьогодні виглядає, що саме цей мікроскопічний підхід дає змогу добре описувати поведінку ⁴He.



Фріц Лондон (Fritz London) (7.III.1900–30.III.1954)



Рис. I.4. Теоретична крива теплоємності ідеального бозе-газу за працею [14]

Того ж 1938 р. Петро Капіца та незалежно від нього Джон Аллен і Дон Майснер відкрили явище надплинності в рідкому ⁴He, тобто здатність цієї рідини текти капілярами без тертя. Експериментально виміряну в'язкість гелію-4 за температури, меншої ніж температура фазового переходу, оцінено як принаймні у 1 500 разів нижчу за в'язкість нормальної модифікації гелію при 4.22 К. П. Капіца також вказав на те, що відома на той час надзвичайно висока теплопровідність ⁴Не може бути наслідком його надплинності.



Петро Капіца (9.VII.1894–8.IV.1984)

Ідею Ф. Лондона про зв'язок між властивостями гелію за низьких температур і конденсацією Бозе-Айнштайна в ідеальному газі використав Ласло Тіса у побудові своєї дворідинної моделі (1940 р.) [17]. Він запропонував розглядати рідкий гелій-4 як суміш "нормальної" (зі звичайними властивостями) і "надплинної" компонент. Л. Тіса, однак, ототожнював бозеконденсат із надплинною компонентою, що не зовсім коректно, оскільки, як засвідчують останні дослідження, конденсатна фракція в гелії-4 навіть за нульової тем-



Ласло Tica (László Tisza) (07.VII.1907-15.IV.2009)

ператури становить, мабуть, не більше, ніж 10%.



Лев Ландау (22.I.1908-1.IV.1968)



Розвиток ця ідея отримала у дворідинній моделі Лева Ландау [6], яка дещо відрізняється від моделі Л. Тіси. Під час її побудови суттєвим моментом стало постулювання енерґетичного спектра елементарних збуджень у гелії у вигляді фононної та ротонної частин (див. рис. І.5). Підбір трьох параметрів цієї кривої дав змогу отримати дуже добрий опис гелію-4 на макроскопічному рівні. Проте Л. Ландау так і не вдалося побудувати мікроскопічну теорію, яка би пояснювала такий спектр.



Микола Боголюбов (8(21).VIII.1909–13.II.1992)



Дмитро Зубарєв (27.XI.1917–29.VII.1992)

У 1947 р. Микола Боголюбов для опису взаємодіючого бозе-газу застосував оригінальний метод наближеного вторинного квантування [30]. При цьому було використано припущення про те, що слабка взаємодія тільки незначно змінює картину конденсації Бозе-Айнштайна в ідеальному бозе-газі. Тому кількість частинок у конденсаті можна вважати макроскопічною (за малих температур), а оператори породження і знищення частинок з нульовим імпульсом наближено замінити на с-числа. Тоді після діагоналізації гамільтоніана у першому наближенні отримаємо енерґетичний спектр нових квазічастинок, які є бозонами. Незважаючи на те, що для застосування цієї моделі міжатомна взаємодія має бути слабкою, результати Боголюбова виявилися коректними у границі низьких температур і для рідкого гелію-4. У 1950-х роках М. Боголюбов і Д. Зубарєв розробили метод колективних змінних, за допомогою якого вдалося знайти хвильову функцію основного стану системи взаємодіючих бозонів, а також їх функції розподілу [34].

Дещо пізніше Річардові Файнману (1954 р.) вдалося отримати подібну енерґетичну криву, щоправда, із удвічі завищеним "ротонним" мінімумом, а згодом він разом з М. Коеном запропонував модифікацію свого методу, що дозволило знизити значення мінімуму з 19.1 К до 11.5 К, тоді як на кривій Ландау воно становить 9.6 К. У цих розрахунках у вираз для хвильової функції вводили множники, що відповідали фононним і ротонним збудженням, і далі застосовували варіаційний принцип для енерґії. Раніше, 1953 р., Р. Файнман опублікував працю, в якій розвинув ідею Ф. Лондона щодо бозе-конденсації як механізму λ -переходу, описавши багатобозонну систему через інтеґрали за траєкторіями, а також увівши поняття ефективної маси атома гелію, пов'язаної зі взаємодією з оточенням.



Спартак Бєляєв 1958 р. до опису багаточастинкової бозе-системи застосував формалізм теорії поля. Із його до-

Річард Файнман (Richard Feynman) (11.V.1918–15.II.1988)

помогою вдалося отримати спектр неідеального бозе-газу. Зі своїх результатів С. Бєляєв зробив висновок про те, що різниця між реальним гелієм-4 (бозе-рідиною) і неідеальним бозе-газом є лише кількісною, а не якісною.

Наступні десятиліття принесли бурхливий розвиток різноманітних методів вивчення квантових систем. Розвивалася техніка числових (Монте-Карло) розрахунків, ренормалізаційна група, метод колективних змінних. Виникли нові експериментальні методи, до ⁴Не додалися інші системи, про які було згадано на початку. Кількість цих праць збільшувалася дуже швидко, тому їх складно проаналізувати у короткому огляді, а тим більше виділити окремі з них. Такі дослідження проводили й у Львові, спочатку у Відділенні статистичної фізики Інституту теоретичної фізики НАН України (від 1990 р. — Інститут фізики конденсованих систем) (Ігор Юхновський, Іван Вакарчук), а згодом — на кафедрі теоретичної фізики Львівського університету (І. Вакарчук та ін.). Зокрема, було розроблено мікроскопічну теорію бозе-рідини з урахуванням близько- і далекодіючих кореляцій, запропоновано оригінальний метод розрахунку частки бозе-конденсату через функції розподілу. Нині в цьому напрямку тривають роботи, пов'язані з вивченням сумішей квантових рідин, магнітної бозе-рідини, питаннями ефективної маси ⁴Не тощо.

Сьогодні бозе-системи вже перестали бути винятково предметом досліджень "чистої" науки. Поступ техніки дає змогу відшукати практичне застосування явища бозе-конденсації в галузі новітніх технологій: як елементів у квантових комп'ютерах, для запису інформації тощо. Можливо, через сто років після виникнення понять "конденсація Бозе–Айнштайна", "бозе-конденсат" ці словосполучення стануть звичними не лише для науковців, а й для широкого загалу.

Останні декілька років значно розширили наші знання про квантові бозе-системи не лише з теоретичного боку, а й з погляду експериментальних досліджень. На сьогодні, крім рідкого гелію-4 та сумішей квантових рідин ³He-⁴He, предметом вивчення стали спінполяризований водень, екситонний газ у напівпровідниках, високотемпературні надпровідники, лазерно-охолоджені розріджені гази лужних металів [3] та ін. Улітку 1995 р. групі вчених у Баулдері (Колорадо, США) під керівництвом Еріка Корнелла і Карла Вімана вдалося експериментально отримати стан речовини, який є бозеконденсатом, охолодивши 2000 атомів ⁸⁷Rb до температури 20 нК [15]. Майже одночасно аналогічні досліди було проведено з натрієм групою на чолі з Вольфґанґом Кеттерле в Массачусетському технологічному інституті [9]. Ці експерименти стимулювали нові теоретичні дослідження в галузі квантових газів і рідин. 2001 року авторів відзначили Нобелівською премією з фізики "за отримання бозеайнштайнівської конденсації в розріджених газах лужних атомів і за початкове фундаментальне вивчення властивостей конденсатів".

II. Розподіли Бозе–Айнштайна та Фермі–Дірака

У цьому розділі ми отримаємо вирази для середніх чисел заповнення квантових систем, які описуються статистиками Бозе–Айнштайна і Фермі–Дірака. Загалом є декілька підходів до виведення цих виразів. Ми спочатку скористаємося комбінаторним підходом, подібно до ориґінальної праці Бозе, а згодом розглянемо використання великого канонічного ансамблю.

II.1. Комбінаторний підхід

Нехай система характеризується енерґетичними рівнями (одночастинковим спектром) { ε_i }, причому на кожному рівні може бути n_i частинок. У випадку бозонів n_i набуває довільних значень, а для ферміонів — лише 0 і 1. Крім того, *i*-й рівень може характеризуватися виродженням g_i , тобто одній енерґії ε_i може відповідати g_i різних квантових станів (які, наприклад, відрізняються спіном). Кількість способів, якими n_i нерозрізнювальних частинок можна розподілити між g_i підрівнями, дорівнює

$$w_i = \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!}.$$
(II.1)

Щоб отримати цей результат, можна скористатися такою простою аналогією. Зрозуміло, що шукана кількість w_i дорівнює кількості способів, якими n_i нерозрізнювальних кульок можна розмістити в g_i комірках. Розмістимо кульки на одній лінії, а для розділення комірок використовуватимемо $g_i - 1$ рухомих перегородок (див. рис. II.1). Кількість перестановок кульок разом із перегородками дорівнює $(n_i + g_i - 1)!$, причому її треба розділити на $n_i!$, щоби врахувати нерозрізнювальність кульок, і на $(g_i - 1)!$, оскільки перестановки перегородок також несуттєві. Внаслідок цього й отримаємо вираз (II.1).



Рис. II.1. Модель для підрахунку кількості мікростанів бозонної системи

Відповідно, загальна кількість мікростанів, тобто способів, якими частинки розподіляються між одночастинковими станами системи, дорівнює:

$$W = \prod_{i} w_{i} = \prod_{i} \frac{(n_{i} + g_{i})!}{n_{i}! (g_{i} - 1)!},$$
 (II.2)

де враховано, що $n_i \gg 1$. Визначимо сукупність n_i , які забезпечують максимум функції W. При цьому треба зважити на те, що енерґія системи N частинок дорівнює

$$E = \sum_{i} \varepsilon_{i} n_{i}, \qquad (\text{II.3})$$

де, очевидно,

$$N = \sum_{i} n_i. \tag{II.4}$$

Отже, беручи до уваги, що логарифм є монотонною функцією, знайдемо екстремум функціонала

$$\mathcal{F}[n_i] = \ln W + \alpha \left(N - \sum_i n_i \right) + \beta \left(E - \sum_i \varepsilon_i n_i \right), \qquad (\text{II.5})$$

де α, β — множники Лаґранжа.

Прирівняємо варіацію функціонала \mathcal{F} до нуля, відразу застосувавши до факторіалів формулу Стірлінґа $\ln n! \approx n \ln n$:

$$\delta \mathcal{F} = \sum_{i} \left\{ \ln(n_i + g_i) + 1 - \ln n_i - 1 - \alpha - \beta \varepsilon_i \right\} \delta n_i = 0.$$

Зважаючи на довільність варіацій δn_i , отримаємо:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta\varepsilon_i} - 1}.$$
 (II.6)

Щоб з'ясувати зміст множників α і β , можна скористатися другим началом термодинаміки (за сталого об'єму) у вигляді

$$dE = T \, dS + \mu \, dN,\tag{II.7}$$

де T — температура, яку для простоти вимірюватимемо в енерґетичних одиницях, тобто стала Больцманна $k_{\rm B}=1,~\mu$ — хімічний потенціал, а $S=\ln W$ — ентропія. Отже,

$$dS = d\ln W = \frac{1}{T} dE - \frac{\mu}{T} dN = \beta dE + \alpha dN.$$
(II.8)

Таким чином, нам вдалося з'ясувати зміст множників Лаґранжа: $\alpha = -\mu/T$, $\beta = 1/T$. Як наслідок, для кількості частинок на *i*-му рівні маємо:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{(\varepsilon_i - \mu)/T} - 1}.$$
(II.9)

Зручно також записати цей вираз, увівши *активність* (в англомовній літературі часто застосовують термін *fugacity* "фуґативність") $z = e^{\mu/T}$:

$$n_i = \frac{g_i}{z^{-1} e^{\varepsilon_i/T} - 1}.$$
 (II.10)

Для виведення розподілу Фермі–Дірака тим самим шляхом досить лише врахувати, що кількість способів розподілити n_i частинок між g_i підрівнями так, щоб на кожному підрівні була лише одна частинка, дорівнює:

$$w_i = \frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!}.$$
 (II.11)

Проводячи ті самі процедури, що й для розподілу Бозе–Айнштайна, отримаємо для ферміонів:

$$n_i = \frac{g_i}{z^{-1}e^{\varepsilon_i/T} + 1}.\tag{II.12}$$

▼ Завдання II.1. Оригінальну статтю Бозе наведено в додатку. Проаналізуйте її й детально простежте всі кроки, які зробив автор. Чому йому не вдалося отримати "конденсації" в імпульсному просторі, про яку згодом написав Айнштайн, використавши такий самий підхід?

II.2. Підхід великого канонічного ансамблю

Для системи з енерґетичними рівнями $\{\varepsilon_i\}$, на кожному з яких може перебувати n_i частинок, статистична сума за означенням буде

$$Z_N = \sum_{\{n_i\}} \exp\left(-\frac{1}{T}\sum_i \varepsilon_i n_i\right),\tag{II.13}$$

де T — температура. Як і раніше, на числа $\{n_i\}$ накладено умову (П.4). Для спрощення вироджені рівні нумеруватимемо різними i, так що завжди кратність виродження $g_i = 1$.

Запишемо тепер велику статистичну суму

$$\Xi = \sum_{N} z^{N} Z_{N} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_{i}\}} \prod_{i} \left[z \exp\left(-\frac{\varepsilon_{i}}{T}\right) \right]^{n_{i}}.$$
 (II.14)

Завдяки сумі за кількістю частинок N прості міркування дають змогу переписати підсумовування за $\{n_i\}$ вже без обмежень у вигляді:

$$\Xi = \sum_{\{n_i\}} \prod_i \left[z \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right) \right]^{n_i} =$$

$$= \sum_{n_0} \sum_{n_1} \dots \left\{ \left[z \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right) \right]^{n_0} \left[z \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right) \right]^{n_1} \dots \right\} =$$

$$= \prod_i \left\{ \sum_n \left[z \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{T}\right) \right]^n \right\}.$$
(II.15)

У цій формулі сума за n пробігає значення n = 0, 1, 2, 3, ... для бозонів і n = 0, 1 для ферміонів. Ми спробуємо отримати вирази для чисел заповнення, вважаючи максимальне значення n обмеженим зверху деяким числом M: n = 0, 1, 2, ..., M, причому, зрозуміло, $M = \infty$ для бозонів і M = 1 для ферміонів. Інші значення M відповідають певній **проміжній статистиці** (для такого типу статистик використовують також терміни **парастатистика** чи **дробова статистика**), яку 1940 р. запропонував Дж. Джентіле мол. [18].

Підсумовуючи скінченну геометричну проґресію в (II.15), отримаємо для великої статистичної суми:

$$\Xi = \prod_{i} \frac{z^{M+1} e^{-(M+1)\varepsilon_i/T} - 1}{z e^{-\varepsilon_i/T} - 1},$$
 (II.16)

звідки кількість частинок

$$N = z \left(\frac{\partial \ln \Xi}{\partial z}\right)_{T,V} =$$

$$= \sum_{i} \left[\frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_i/T} - 1} - \frac{M+1}{z^{-(M+1)}e^{(M+1)\varepsilon_i/T} - 1}\right],$$
(II.17)

тобто число заповнення *i*-го рівня буде

$$n_i = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_i/T} - 1} - \frac{M+1}{z^{-(M+1)}e^{(M+1)\varepsilon_i/T} - 1}.$$
 (II.18)

Знайдемо границі цього виразу при $M \to \infty$ і M = 1. У першому випадку експонента в знаменнику другого дробу стає безмежно великою й n_i зводиться лише до першого доданка:

$$n_i = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_i/T} - 1},$$

що очікувано збігається з отриманим раніше виразом для розподілу Бозе (II.10), де виродження *i*-го рівня $g_i = 1$.

Якщо M = 1, то просте перетворення (II.18) дасть очікуваний вираз (II.12) для розподілу Фермі при $g_i = 1$:

$$n_i = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_i/T} + 1}.$$

▲

▼ Завдання II.2. Проаналізуйте при T = 0 поведінку чисел заповнення n_i як функції від енерґії ε_i для розподілів Бозе, Фермі, а також Джентіле. Який фізичний зміст має хімічний потенціал в останньому випадку?

III. Термодинаміка ідеального бозе-газу

III.1. Густина станів у D вимірах

Розглядатимемо систему N бозонів, які можуть перебувати у станах з енерґіями $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$. Тоді, враховуючи функцію розподілу у статистиці Бозе–Айнштайна, запишемо:

$$N = \sum_{n} \frac{g_n}{e^{(\varepsilon_n - \mu)/T} - 1}.$$
 (III.1)

Ця рівність задає хімічний потенціал μ як функцію числа частинок N і температури T.

З міркувань загальності вважатимемо простір D-вимірним. Як буде показано в подальших розділах, різні значення вимірності простору можуть виникати у фізичних задачах ефективно, наприклад, унаслідок врахування впливу зовнішнього потенціалу. Загалом, Dможе бути й дробовим, що використовують при моделюванні процесів у пористих середовищах (див. підрозділ III.5) чи знову ж таки для систем у зовнішньому потенціалі. Тому, проводячи викладки, ми будемо, де це можливо, використовувати вирази, що дають змогу узагальнювати отримані результати на випадок неперервних значень D, хоч би й зовсім формально.

Нехай частинки перебувають в об'ємі \mathscr{V}_D . Підсумовування за станами можна замінити сумою за імпульсами $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_D)$ і спінами *s*, причому $\varepsilon_p = p^2/2m$, де m — маса частинки; $p = |\mathbf{p}| = \sqrt{p_1^2 + \ldots + p_D^2}$. Враховуючи, що за великого об'єму дискретністю імпульсу можна знехтувати, отримаємо вираз:

$$N = \sum_{\mathbf{p},s} \frac{g_{\mathbf{p},s}}{e^{(\varepsilon_p - \mu)/T} - 1} = (2\sigma + 1) \int \frac{d\tau}{e^{(\varepsilon_p - \mu)/T} - 1},$$
 (III.2)

де елемент фазового об'єму

$$d\tau = \frac{(dp)(dq)}{(2\pi\hbar)^D},$$

(dp) = dp_1 \dots dp_D, (dq) = dq_1 \dots dq_D,

а $2\sigma + 1$ — мультиплетність.

Ми запишемо цю рівність, увівши функцію густини станів $g(\varepsilon)$:

$$N = \int_{0}^{\infty} \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \mu)/T} - 1}.$$
 (III.3)

Щоб отримати $g(\varepsilon)$, врахуємо, що енерґія частинки ε_p залежить лише від модуля імпульсу p, і перейдемо в інтеґралі за імпульсами у (III.2) до сферичних координат, $dp_1 \dots dp_D = p^{D-1} dp d\Omega_D$:

$$N = (2\sigma + 1) \mathscr{V}_D \Omega_D \int_0^\infty \frac{p^{D-1} dp}{e^{(\varepsilon_p - \mu)/T} - 1},$$
 (III.4)

де $\Omega_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma(\frac{D}{2})$ — повний тілесний гіперкут у *D*-вимірному просторі, а об'єм \mathcal{V}_D виникає внаслідок інтеґрування за координатною частиною фазового об'єму (*dq*).

Після заміни змінних $\varepsilon = p^2/2m$ матимемо остаточно:

$$g(\varepsilon) = (2\sigma + 1) \mathscr{V}_D \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \frac{(2m)^{D/2}}{(2\pi\hbar)^D} \varepsilon^{D/2-1},$$
 (III.5)

а вираз (III.3) набуде вигляду:

$$\frac{N}{\mathscr{V}_D} = (2\sigma + 1) \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \frac{(2m)^{D/2}}{(2\pi\hbar)^D} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{D/2 - 1} d\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \mu)/T} - 1}.$$
 (III.6)

Розрахуємо інтеґрал, що входить у (III.6):

$$\begin{split} &\int_{0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{D/2-1} \, d\varepsilon}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - 1} = T^{D/2} \int_{0}^{\infty} \frac{x^{D/2-1} z e^{-x} \, dx}{1 - z e^{-x}} = \\ &= T^{D/2} \int_{0}^{\infty} dx \, x^{D/2-1} z e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (z e^{-x})^n = \\ &= T^{D/2} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_{0}^{\infty} dx \, x^{D/2-1} e^{(-nx)} = \\ &= T^{D/2} \sum_{\substack{n=1\\ \text{Li}_{D/2}(z)}}^{\infty} \underbrace{\frac{z^n}{n^{D/2}}}_{=\Gamma(D/2)} \underbrace{\int_{-\Gamma(D/2)}^{\infty} d(nx) \, (nx)^{D/2-1} e^{(-nx)}}_{=\Gamma(D/2)}. \end{split}$$

Отже,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{D/2-1} d\varepsilon}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - 1} = T^{D/2} \operatorname{Li}_{D/2}(z) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right), \qquad (\text{III.7})$$

де так званий *полілогарифм*, або *функція Бозе*, визначається рядом:

$$\operatorname{Li}_{\alpha}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha}}.$$
 (III.8)

У граничному випадку z = 1 ця функція переходить у **дзета-функ**цію **Ріманна**:

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \operatorname{Li}_{\alpha}(1).$$
(III.9)

Тепер запишемо вираз (III.6), увівши величину

$$\lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{1/2},\tag{III.10}$$

яку називають довжиною теплової хвилі де Бройля. Отже,

$$\frac{N}{\mathcal{V}_D} = (2\sigma + 1) \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{D/2} T^{D/2} \frac{1}{\Gamma(D/2)} \operatorname{Li}_{D/2}(z) \Gamma(D/2)$$

або

$$\frac{N}{\mathscr{V}_D}\lambda^D = (2\sigma + 1)\operatorname{Li}_{D/2}(z).$$
(III.11)

Для величини N/\mathcal{V}_D , яка за змістом є густиною (чи, точніше, концентрацією), введемо позначення $\rho_D = N/\mathcal{V}_D$. Тепер рівняння, з якого визначатимемо активність (а отже, й хімічний потенціал) як функцію температури і густини, матиме вигляд:

$$\rho_D \lambda^D = (2\sigma + 1) \operatorname{Li}_{D/2}(z).$$
(III.12)

III.2. Тривимірний випадок. Явище бозе-конденсації

Розгляньмо систему ідеальних безспінових ($\sigma = 0$) бозонів у тривимірному просторі D = 3. Об'єм \mathcal{V}_3 позначатимемо V. Густина станів набуде вигляду

$$g(\varepsilon) = 2\pi V \frac{(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \varepsilon^{1/2},$$
 (III.13)

а зв'язок хімічного потенціал
у μ з густиною $\rho=N/V$ і температурою
 Tвиражатиметься так:

$$\rho \lambda^3 = \text{Li}_{3/2}(e^{\mu/T}).$$
 (III.14)

Функція Li_{α}(z) стає комплексною при z > 1. Особливість у точці z = 1 можна помітити і з фізичних міркувань. Справді, кількість частинок в основному стані з $\varepsilon = 0$ буде

$$N_0 = \frac{1}{z^{-1} - 1}.$$
 (III.15)

Це число стає від'ємним при z > 1, що відповідає нефізичній ситуації. При z = 1 кількість частинок з нульовою енерґією N_0 стає безмежною. З іншого боку, густина станів $g(\varepsilon) \sim \varepsilon^{1/2}$ спричинює те, що внесок від стану з $\varepsilon = 0$ не враховується при переході від суми до інтеґрала. Тобто насправді у формулі (III.3) і відповідно в інших, виведених із неї, потрібно виокремити стан $\varepsilon = 0$:

$$N = N_0 + \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - 1};$$

$$(\text{III.16})$$

$$N = N_0 + \frac{\mathscr{V}_D}{\lambda^D} \operatorname{Li}_{D/2}(z).$$

Зрозуміло, що такого уточнення потребують вимірності простору
$$D>2,$$
 для яких густина станів дорівнює нулеві при нульовій енергії.

Фізично ситуація виглядає так. Активність z зі зниженням температури наближається до значення 1, якого досягає за температури $T = T_c$, яку, вочевидь, визначають із умови:

$$\rho \lambda_c^3 = \zeta(3/2) = 2.612 \dots,$$
(III.17)

де $\lambda_c = \sqrt{2\pi\hbar^2/mT_c}$, або

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{\rho}{\zeta(3/2)}\right)^{2/3}.$$
 (III.18)

Подальше охолодження системи не змінює значення z = 1 (і хімічного потенціалу $\mu = 0$, див. рис. III.1), проте натомість дедалі більше й більше частинок починає переходити в основний стан з $\varepsilon = 0$ — відбувається **бозе-конденсація**. Тобто для кількості частинок маємо:

$$N = N_0 + \frac{V}{\lambda^3} \zeta(3/2),$$
 (III.19)

звідки

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}.$$
(III.20)

Цю величину, яка дорівнює відносній кількості частинок у стані бозеконденсату, називають *конденсатною фракцією*.



Рис. III.1. Активність z і хімічний μ потенціал тривимірного ідеального бозе-газу як функції температури. Розрахунки зроблено для значення параметрів $\rho(2\pi\hbar^2/m)^{3/2}=1$

Зрозуміло, що ці результати легко поширюються на всі значення вимірності простору D > 2, а саме — для критичної температури маємо:

$$\rho_D \lambda_c^D = \zeta(D/2), \tag{III.21}$$
$$T_c^{(D)} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{\rho_D}{\zeta(D/2)}\right)^{2/D}, \tag{III.21}$$

а для конденсатної фракції —

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^{(D)}}\right)^{D/2}.$$
 (III.22)

III.3. Дво- й одновимірні випадки

У двовимірному випадку вираз (III.12) спрощується до елементарних функцій:

$$\rho_2 \lambda^2 = \text{Li}_1(z) = -\ln(1-z).$$
(III.23)

Тому маємо

$$\mu = T \ln \left(1 - e^{-\rho_2 \lambda^2} \right). \tag{III.24}$$

Величина $\rho_2 \lambda^2$ є параметром виродження.

У класичній границі $\rho_2\lambda^2\ll 1$ маємо

$$\mu = T \ln \left(\rho_2 \lambda^2\right) \to -\infty \tag{III.25}$$

— велике за абсолютним значенням від'ємне число. При сильному виродженні, тобто $\rho_2 \lambda^2 \gg 1$, отримаємо

$$\mu = -Te^{-\rho_2 \lambda^2} \to -0 \tag{III.26}$$

— мале від'ємне число.



Рис. III.2. Хімічний потенціал двовимірного ідеального бозе-газу як функція температури. Розрахунки зроблено для значення параметрів $\rho_2(2\pi\hbar^2/m) = 1$

Схематично поведінку хімічного потенціалу двовимірного ідеального бозе-газу зображено на рис. III.2.

Як бачимо, $\mu < 0$ для всіх температур і перетворюється в нуль лише при T = 0. Можна сказати, що температура бозе-конденсації двовимірного ідеального газу $T_c^{(2D)} = 0$. Інакше кажучи, в такій системі бозе-конденсація не відбувається.

Формально такий результат також випливає з (III.21) при D = 2:

$$T_c^{(2)} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{\rho_2}{\zeta(1)}\right) = 0,$$
 (III.27)

оскільки $\zeta(1) = \infty$.

В одновимірному випадку параметром виродження буде, очевидно, $\rho_1 \lambda$. Класична границя $\rho_1 \lambda \ll 1$ відповідає $z \to 0$. З рівняння

$$\rho_1 \lambda = \text{Li}_{1/2}(z) = z = e^{\mu/T}$$
(III.28)

для хімічного потенціалу матимемо:

$$\mu = T \ln(\rho_1 \lambda) \to -\infty. \tag{III.29}$$

У границі сильного виродження $\rho_1 \lambda \gg 1$, яка відповідає $z \to 1$, скористаємося розкладом

$$\operatorname{Li}_{\alpha} e^{\nu} = \Gamma(1-\alpha)(-\nu)^{\alpha-1}, \qquad \operatorname{Re} \alpha < 1, \qquad (\text{III.30})$$

і, покладаючи $\nu = \mu/T$, відразу отримаємо

$$\mu = -\frac{\pi T}{(\rho_1 \lambda)^2} \to -0. \tag{III.31}$$

Отже, як і у двовимірному випадку, за D = 1 немає бозе-конденсації.

Цікаво зазначити, що в одновимірному газі (як і взагалі при D < 2) вже навіть формально не можна говорити про нульову температуру бозе-конденсації. При значеннях арґумента, менших за одиницю, дзета-функція стає від'ємною і, наприклад, для D = 1 рівняння на визначення критичної температури буде

$$\rho_1 \lambda_c = \zeta(1/2) = -1.460 \dots,$$
(III.32)

тобто не матиме фізичного сенсу. Проте насправді писати таке рівняння при D < 2 некоректно, оскільки, якщо z = 1, то інтеґрал у виразі (III.6), звідки фактично отримана умова (III.21), розбігається.

III.4. Енергія і теплоємність ідеального бозе-газу

Для розрахунку енергії системи використаємо вираз:

$$E = \sum_{j} \varepsilon_{j} g_{j} n_{j} = \sum_{j} \frac{\varepsilon_{j} g_{j}}{e^{(\varepsilon_{j} - \mu)/T} - 1},$$
 (III.33)

причому хімічний потенціал μ як функція температури T й кількості частинок N визначається з умови

$$N = \sum_{j} g_{j} n_{j} = \sum_{j} \frac{g_{j}}{e^{(\varepsilon_{j} - \mu)/T} - 1}.$$
 (III.34)

У цих формулах, як і раніше, g_j і ε_j — відповідно виродження й енерґія *j*-го рівня, а підсумовування відбувається за всіма можливими рівнями.

Зважаючи на нульове значення енергії основного рівня, в разі переходу до інтеґральних виразів не потрібно виділяти в E доданка, що відповідає $\varepsilon = 0$, як це треба було робити у формулі для кількості частинок N. Тому матимемо просто:

$$E = \int_{0}^{\infty} \frac{\varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - 1}.$$
 (III.35)

Запишемо також вираз для термодинамічного потенціалу:

$$\Omega = T \sum_{j} g_{j} \ln \left(1 - z \, e^{-\varepsilon_{j}/T} \right), \qquad (\text{III.36})$$

або в інтеґральній формі —

$$\Omega = T \int_{0}^{\infty} d\varepsilon \ g(\varepsilon) \ \ln\left(1 - z \, e^{-\varepsilon/T}\right). \tag{III.37}$$

Якщо тут виконати інтеґрування частинами, то матимемо:

$$\Omega = A_D T \int_0^\infty d\varepsilon \ \varepsilon^{D/2 - 1} \ln\left(1 - z \ e^{-\varepsilon/T}\right) = = -\frac{2}{D} A_D \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{D/2} d\varepsilon}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - 1} = -\frac{2}{D} E.$$
(III.38)

Вираз для енергії (III.35) просто аналізувати при температурах, менших за критичну, тобто коли z = 1. Тоді для *D*-вимірного газу (D > 2):

$$E = A_D \int_0^\infty \frac{\varepsilon \,\varepsilon^{D/2 - 1} \,d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - 1} = A_D T^{D/2 + 1} \int_0^\infty \frac{x^{D/2} \,dx}{e^x - 1},$$

тобто $E \sim T^{D/2+1}$.

За високих температур $z \to 0$, розподіл Бозе переходить у розподіл Больцмана, і відповідне рівняння, що пов'язує активність із кількістю частинок і температурою, можна розв'язати:

$$N = z \int_{0}^{\infty} g(\varepsilon) e^{-\varepsilon/T} d\varepsilon = z A_D T^{D/2} \int_{0}^{\infty} x^{D/2 - 1} e^{-x} dx,$$

звідки:

$$z = N \left[A_D T^{D/2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \right]^{-1}.$$
 (III.39)

У тій самій високотемпературній границі енергія дорівнює:

$$E = z \int_{0}^{\infty} \varepsilon g(\varepsilon) e^{-\varepsilon/T} d\varepsilon = z A_D T^{D/2+1} \Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right).$$

Підставляючи знайдене значення активності z, отримаємо:

$$E = \frac{D}{2} NT \tag{III.40}$$

— класичний результат для енерт'ї *D*-вимірного ідеального газу, як і повинно бути.

Теплоємність за сталого об'єму рахуємо стандартно:

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V.$$
 (III.41)

Отже, за малих температур $T < T_c$ маємо:

$$C_V \sim T^{D/2},\tag{III.42}$$

а класична границя $T \to \infty$ буде

$$C_V = \frac{D}{2} N. \tag{III.43}$$

Поведінку ж теплоємності, як і енерґії, при проміжних температурах ($T > T_c$) вже не можна з'ясувати на підставі простого аналізу. Особливий інтерес становить безпосередній окіл критичної точки $T \to T_c + 0$, який і стане предметом подальшого розгляду.

Запишемо рівняння (III.34) для визначення активності z (чи хімічного потенціалу μ) у вигляді:

$$N = N_1(T) + \int_0^\infty d\varepsilon \left[\frac{g(\varepsilon)}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - 1} - \frac{g(\varepsilon)}{e^{\varepsilon/T} - 1} \right], \qquad \text{(III.44)}$$

де величина

$$N_1(T) = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon) \, d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - 1} \tag{III.45}$$

є відомою функцією температури T без будь-яких особливостей, $N_1(T) \sim T^{D/2}$. Активність $z \to 1$ знизу при наближенні до T_c справа. Розкладемо підінтеґральний вираз у (III.44) в ряд за ε :

$$N = N_1(T) + A_D \int_0^\infty d\varepsilon \ \varepsilon^{D/2 - 1} \left[\frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/T} - 1} - \frac{1}{e^{\varepsilon/T} - 1} \right] \simeq$$
$$\simeq N_1(T) + A_D \mu T \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{D/2 - 2} d\varepsilon}{\varepsilon - \mu}, \tag{III.46}$$

де враховано, що $\mu \to 0$, а отже, найсуттєвішою буде область малих ε . Легко бачити, що для збіжності інтеґрала (і в нулі, й на безмежності) має виконуватися умова: 2 < D < 4. Насправді ж виникнення верхньої межі пов'язане лише з використанням наближення у вигляді розкладу, точні інтеґрали збіжні для всіх D > 2.

Візьмемо до уваги те, що хімічний потенціал — від'ємний, і перепишемо отриманий результат у вигляді

$$N - N_1(T) = A_D \mu T \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{D/2 - 2} d\varepsilon}{\varepsilon + |\mu|} = A_D T \, \mu \, |\mu|^{D/2 - 2} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^{D/2 - 2} dx}{x + 1}}_{= -\pi \csc(\pi D/2)},$$

звідки:

$$\mu = -|\mu| = -\left\{\frac{1}{A_D\pi \csc(\pi D/2)} \frac{1}{T} \left[N_1(T) - N\right]\right\}^{2/(D-2)}.$$
 (III.47)

Далі використаємо термодинамічне співвідношення $-\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = N$ (для спрощення не виписано змінні, які залишаються сталими, в даному випадку — об'єм), звідки, враховуючи (III.38), матимемо:

$$\frac{\partial E}{\partial \mu} = -\frac{D}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \frac{D}{2} N \simeq \frac{D}{2} N_1(T),$$

або для самої енерґії:

$$E = E_0 + \frac{D}{2} N_1(T) \mu =$$
(III.48)
= $E_0 - B_D N_1(T) T^{2/(2-D)} [N_1(T) - N]^{2/(D-2)},$

де $E_0, B_D = \text{const},$ а три співмножники, що залежать від температури, виписані явно.

У критичній точці $T = T_c$ особливості поведінки можливі лише для функції $N_1(T) - N$, оскільки $N_1(T_c) - N = 0$. Розглянемо, які внески цей співмножник дасть у теплоємність C_V та її похідну:

$$C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = f_1(T) \left[N_1(T) - N \right]^{\frac{2}{D-2}} + f_2(T) \left[N_1(T) - N \right]^{\frac{2}{D-2}-1};$$

$$\frac{\partial C_V}{\partial T} = h_1(T) \left[N_1(T) - N \right]^{\frac{2}{D-2}} + h_2(T) \left[N_1(T) - N \right]^{\frac{2}{D-2}-1} + h_3(T) \left[N_1(T) - N \right]^{\frac{2}{D-2}-2}.$$

Тут коефіцієнти $f_{1,2}(T), h_{1,2,3}(T)$ не мають особливостей у точці $T = T_c$, а їх вигляд для нашого аналізу не є надто суттєвим.

Зрозуміло, що особливості поведінки похідної $\partial C_V / \partial T$ в точці $T = T_c$ можна отримати з останнього доданка (біля $h_3(T)$). Якщо показник степеня

$$\frac{2}{D-2} - 2 < 0,$$

то похідна стає безмежною, а отже, сама теплоємність у точці T_c має розрив. Така ситуація відповідає вимірності простору D > 3. Якщо ж D = 3, то у виразі для похідної від теплоємності виникає невизначеність виду 0^0 — можна показати, що в результаті похідна

в точці T_c буде скінченною, а отже, крива теплоємності має в $T = T_c$ злам. При D < 3 похідна неперервна, як і сама теплоємність C_V .

Графіки теплоємності ідеального бозе-газу при різних значеннях вимірності простору показано на рис. III.3.



Рис. III.3. Питома теплоємність C_V/N ідеального бозе-газу в *D*вимірному просторі. Верхній лівий графік відповідає D = 2, верхній правий — $D = \ln 20/\ln 3 = 2.726...$ — вимірність губки Менґера (див. наступний підрозділ); у нижньому ряду ліворуч D = 3 і праворуч D = 4

III.5. Поняття про дробову вимірність

На завершення цього розділу розглянемо, в яких задачах виникає так звана **дробова** або **фрактальна вимірність простору**. При цьому не вдаватимемося у складні математичні нюанси, натомість спробуємо використовувати певні майже інтуїтивні міркування. Розгляньмо квадрат зі стороною a. Якщо поділити його на менші квадрати зі стороною a/n, то буде потрібно n^2 таких менших квадратиків, щоб повністю покрити вихідний квадрат. Саме двійка в n^2 і відповідає за те, що вимірність квадрата D = 2. Легко зауважити, що для відрізка довжиною a ті самі міркування дають вимірність D = 1, оскільки потрібно n відрізків довжиною a/n, щоб покрити вихідний відрізок, а для куба з ребром a матимемо D = 3, оскільки потрібно n^3 кубиків з ребром a/n, щоб заповнити такий куб.

Виявляється, однак, що є об'єкти, для яких визначена подібним способом вимірність може бути дробовим числом. Їх називають **фракталами**, а утворити їх можна шляхом послідовного застосування певних ітераційних процедур. Одним із найвідоміших прикладів є так званий **килимок Серпінського** (див. рис. III.4). Щоб побудувати цей об'єкт, розіб'ємо квадрат на дев'ять менших однакових квадратів і виймемо середній. Те саме зробимо з рештою вісьмома квадратиками, а потім знову повторимо зі ще меншими, і так далі до безмежності. Покажемо тепер, що вимірність отриманого об'єкта буде дробовим числом.

Справді, на n-му кроці ми розбивали вихідну фігуру на частини розміром $\sim 1/3^n$, при цьому для її заповнення нам потрібно було 8^n таких фігур. Розглянуте означення вимірності фактично означає, що має виконуватися рівність

$$(3^n)^D = 8^n,$$

звідки матимемо:

$$D = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1.89278926\dots$$

Загалом інтуїтивно зрозуміло, що такий "дірявий" квадрат, отриманий унаслідок безмежного застосування описаної процедури побудови, і справді може характеризуватися вимірністю, меншою за 2.

Аналогом килимка Сєрпінського у тривимірному просторі є так звана *губка Менз'ера*. Її отримують із куба з ребром *a*, розділивши його на 27 рівних кубиків з ребром *a*/3 і вийнявши центральні кубики граней і внутрішній центральний куб, у результаті процедуру


Рис. III.4. Перші шість ітерацій килимка Сєрпінського

повторюють для решти 20 кубиків, і так далі до безмежності (див. рис. III.5). Легко обчислити. що вимірність отриманого об'єкта буде

$$D = \frac{\ln 20}{\ln 3} = 2.72683302\dots$$

Одним із перших об'єктів вивчення була *крива Коха*, яку утворюють з відрізка, поділивши його на три частини і замінивши середню на ламану з двох відрізків такої самої довжини. Згодом цю операцію повторюють із кожним відрізком і т. д., див. рис. III.6. Нескладно обчислити вимірність такої фігури:

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26185950\dots$$
 (III.49)



Рис. III.5. Губка Менґера (джерело: http://commons.wikimedia.org /wiki/File:Menger-Schwamm-einfarbig.jpg)



Рис. III.6. Кілька перших ітерацій кривої Коха

Розглянуті міркування про вимірність фрактальних об'єктів можна узагальнити за допомогою такого означення фрактальної вимірності певної множини:

$$D = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_{\delta}}{(-\ln \delta)},\tag{III.50}$$

де N_{δ} — кількість множин діаметром δ .

Насправді об'єкти, що мають фрактальну структуру, не є винятково математичними абстракціями. Єдиним застереженням щодо фракталів у реальному світі є те, що процес ітерацій не безмежний, тому відповідні міркування залишаються наближеними. Одним із найвідоміших прикладів природного фрактала є берегова лінія: зрозуміло, що чим меншою "лінійкою" ми її будемо міряти, тим довшою в результаті вона виявиться, особливо це відчутно, якщо узбережжя сильно "порізане". Наприклад, фрактальна вимірність берегової лінії Великої Британії становить 1.25 [21], а берегової лінії Норвегії — 1.52 [20, гл. 2].

Схожі властивості мають і пористі середовища: зрозуміло, що чим меншими об'єктами (наприклад, сферами) ми заповнюватимемо пори, тим більше таких об'єктів буде потрібно. При цьому можлива ситуація, коли зв'язок між розмірами сфер і їх кількістю буде описувати вираз із дробовим значенням розмірності. Експериментальні дослідження на різноманітних стеклах (Vycor, Gelsil тощо) чи аероґелях дають значення 2 < D < 3, часто $D \simeq 2.2$.

IV. Ідеальний бозе-газ у зовнішньому полі

У цьому розділі розглядатимемо бозе-систему під впливом зовніпнього потенціалу V(q). У такій ситуації вже не вдається просто відінтеґрувати в об'єм просторові змінні (dq) елемента фазового простору. З метою спрощення задачі потрібно застосовувати певні наближення.

IV.1. Урахування зовнішнього потенціалу у квазікласичному наближенні

Як і раніше, запишемо інтеґральний вираз для кількості частинок

$$N = N_0 + \int \frac{(dp)(dq)}{(2\pi\hbar)^s} \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon(p,q)/T} - 1}.$$
 (IV.1)

Тут $\varepsilon(p,q) = p^2/2m + V(q)$ — енергія частинки, а s = D. Для спрощення записів вважатимемо частинки безспіновими, тому мультиплетність дорівнює одиниці.

Інтеґрування за просторовими змінними (dq) виконуватимемо у квазікласичному наближенні в тому сенсі, що вважатимемо об'єм, у якому може рухатися частинка, обмеженим класичними точками повороту.

Зважаючи на те, що енергія залежить лише від модуля імпульсу *p*, можемо перейти до сферичних координат:

$$(dp) = p^{D-1} dp d\Omega_D. (IV.2)$$

Далі зручно перейти від змінних (p,q) до змінних (ε,q) :

$$\varepsilon = p^2/2m + V(q) \implies p = \sqrt{2m[\varepsilon - V(q)]},$$

$$dp = \frac{\sqrt{2m}}{2} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - V(q)}}.$$
(IV.3)

Після цих перетворень (IV.1) набуде вигляду

$$N = N_0 + \frac{\Omega_D}{(2\pi\hbar)^D} \frac{(2m)^{D/2}}{2} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{z^{-1}e^{\varepsilon/T} - 1} \times (\text{IV.4}) \times \int_{\substack{\text{cl.turn.} \\ \text{points}}} (dq) \left[\varepsilon - V(q)\right]^{D/2 - 1}.$$

Класичні точки повороту визначають з умов
иp=0,тобто

$$\varepsilon = V(q).$$
 (IV.5)

У загальному випадку це — рівняння поверхні у *D*-вимірному просторі, яка й обмежує доступний об'єм для частинки з енерґією ε .

IV.2. Ізотропний зовнішній потенціал

Нехай зовнішній потенціал є сферично-симетричним, тобто залежить лише від модуля $q = \sqrt{q_1^2 + \ldots + q_D^2}$:

$$V(q) = V_0 \left(\frac{q}{a}\right)^{\eta}, \qquad \text{ge} \quad a, V_0 > 0.$$
 (IV.6)

Тоді інтеґрування за просторовими змінними (*dq*) можна виконати у сферичних координатах, як це було зроблено для імпульсів:

$$(dq) = \Omega_D \, q^{D-1} \, dq,$$

причому тілесний гіперкут Ω_D відразу запишемо як множник, оскільки підінтеґральна функція від нього не залежить. Умова на класичні точки повороту q_{\max} набуде вигляду:

$$\varepsilon = V_0 \left(\frac{q_{\max}}{a}\right)^{\eta},$$
 (IV.7)

звідки:

$$q_{\max}(\varepsilon) = a \left(\frac{\varepsilon}{V_0}\right)^{1/\eta},$$
 (IV.8)

а інтеґрування за змінною q відбувається від нуля до q_{\max} (див. рис. IV.1).



Рис. IV.1. Доступна у квазікласичному наближенні область інтеґрування за просторовою радіальною змінною q в зовнішньому потенціалі V(q)

Отже,

$$\int_{\substack{\text{cl.turn.}\\\text{points}}} (dq) \left[\varepsilon - V(q)\right]^{D/2 - 1} = \Omega_D \int_{0}^{q_{\max}(\varepsilon)} dq \ q^{D - 1} \left[\varepsilon - V_0 \left(\frac{q}{a}\right)^{\eta}\right]^{D/2 - 1} = \\ = \begin{bmatrix} \text{заміна змінних: } t = \frac{V_0}{\varepsilon} \left(\frac{q}{a}\right)^{\eta}; \\ dq = \frac{a\varepsilon^{1/\eta}}{\eta V_0^{1/\eta}} t^{1/\eta - 1} dt; \quad t_{\max} = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \varepsilon^{D/2 + D/\eta - 1} \frac{\Omega_D a^D}{\eta V_0^{D/\eta}} \underbrace{\int_{0}^{1} dt \ t^{D/\eta - 1} (1 - t)^{D/2 - 1}}_{=\mathrm{B}(D/\eta, D/2) = \frac{\Gamma(D/\eta)\Gamma(D/2)}{\Gamma(D/\eta + D/2)}}$$

Отже, в нашому випадку густина станів буде пропорційною до $\varepsilon^{D/2+D/\eta-1}$, тобто поведінка системи відповідає ідеальному бозегазові у просторі з деякою ефективною вимірністю $D_{\rm eff}$, яку визначимо з умови:

$$\frac{D_{\text{eff}}}{2} - 1 = \frac{D}{2} + \frac{D}{\eta} - 1,$$

звідки

$$D_{\rm eff} = D\left(1 + \frac{2}{\eta}\right). \tag{IV.9}$$

При цьому ефективну густину в такій D_{eff} -вимірній системі визначають параметри потенціалу пастки a, V_0, η .

З виразу (IV.9) відразу бачимо, що для існування бозе-конденсації в одновимірному ідеальному бозе-газі показник степеня зовнішнього потенціалу мусить бути меншим за 2, оскільки лише умова $\eta < 2$ забезпечує ефективну вимірність $D_{\rm eff} > 2$.

Прирівнюючи множники біля енерґії в густинах станів D-вимірної системи в зовнішньому потенціалі й ідеального газу в $D_{\rm eff}$ -вимірному просторі

$$\frac{\Omega_D^2}{(2\pi\hbar)^D} \frac{(2m)^{D/2}}{2} \frac{a^D}{\eta V_0^{D/\eta}} = \mathscr{V}_{D_{\rm eff}} \frac{\pi^{D_{\rm eff}/2}}{(2\pi\hbar)^{D_{\rm eff}}} \frac{(2m)^{D_{\rm eff}/2}}{\Gamma(D_{\rm eff}/2)}$$

отримаємо після спрощень ефективний об'єм:

$$\mathscr{V}_{D_{\text{eff}}} = \frac{2\pi^{D/2 - D/\eta} (2\pi\hbar)^{2D/\eta}}{\eta (2m)^{D/\eta}} \frac{\Gamma(D/2 + D/\eta)}{\Gamma^2(D/2)} \frac{a^D}{V_0^{D/\eta}}.$$
 (IV.10)

Потрібно, однак, усвідомлювати, що такий ефективний об'єм має зовсім формальний характер і є радше математичною абстракцією — систему в зовнішньому потенціалі не можна вважати однорідною. Натомість за допомогою цієї величини можна просто розрахувати критичну температуру системи в зовнішньому потенціалі, застосовуючи формулу (III.21) для ідеального газу з густиною $\rho_{D_{\text{eff}}} = N/\mathscr{V}_{D_{\text{eff}}}$, чим ми скористаємося в наступному підрозділі.

IV.3. Двовимірна осциляторна пастка

Двовимірна задача про знаходження густини станів є математично найпростішою, оскільки в ній інтеґрал за просторовими змінними зводиться до обчислення звичайної площі:

$$\int_{\substack{\text{cl.turn.}\\\text{points}}} (dq) \left[\varepsilon - V(q)\right]^{D/2 - 1} = \int_{\varepsilon = V(q_1, q_2)} dq_1 \, dq_2.$$

З іншого боку, системи у двовимірних пастках є предметом активних експериментальних досліджень. При цьому потенціал пастки часто можна змоделювати як потенціальну енергію гармонічного осцилятора

$$V(q_1, q_2) = \frac{m\omega_1^2}{2}q_1^2 + \frac{m\omega_2^2}{2}q_2^2.$$
 (IV.11)

Рівняння на визначення класичних точок повороту буде просто рівнянням еліпса:

$$\varepsilon = \frac{m\omega_1^2}{2}q_1^2 + \frac{m\omega_2^2}{2}q_2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1^2}{2\varepsilon/m\omega_1^2} + \frac{q_2^2}{2\varepsilon/m\omega_2^2} = 1.$$

Оскільки площа еліпса з півосями a, b дорівнює πab , то матимемо

$$\int_{\substack{\text{cl.turn.}\\\text{points}}} (dq) \left[\varepsilon - V(q)\right]^{D/2 - 1} = \int_{\varepsilon = V(q_1, q_2)} dq_1 dq_2 = \frac{2\pi}{m\omega_1\omega_2}\varepsilon$$

Це відповідає ефективній вимірності простору $D_{\text{eff}} = 4$, як і для ізотропного потенціалу з $\eta = 2$.

Ефективний об'єм системи визначимо, як і раніше, прирівнявши отриманий вираз для густини станів і відповідний результат для 4-вимірного ідеального газу:

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{2\pi}{m\omega_1\omega_2} = \mathscr{V}_4 \frac{\pi^2}{\Gamma(2)} \frac{(2m)^2}{(2\pi\hbar)^4},$$
 (IV.12)

звідки

$$\mathscr{V}_4 = \frac{(2\pi\hbar)^2}{m^2\omega_1\omega_2}.$$
 (IV.13)

Розрахуємо тепер за допомогою \mathscr{V}_4 критичну температуру системи в зовнішньому потенціалі, застосовуючи формулу (III.21) для ідеального газу:

$$T_{c} = T_{c}^{(4)} = \frac{2\pi\hbar^{2}}{m} \left(\frac{N/\mathscr{V}_{4}}{\zeta(2)}\right)^{1/2} = \hbar\sqrt{\omega_{1}\omega_{2}} \left(\frac{N}{\zeta(2)}\right)^{1/2}, \quad (\text{IV.14})$$

див. також вираз (VIII.5) і міркування, що його супроводжують.

IV.4. Анізотропний потенціал степеневого типу

Розглянемо зовнішній потенціал у формі

$$V(q) = V(q_1 \dots, q_D) = \sum_{i=1}^{D} a_i q_i^{\eta_i}.$$
 (IV.15)

Відзначимо зокрема, що вертикальні стінки відповідають $\eta_i = \infty$. Таку структуру може мати, наприклад, потенціал циліндричної пастки: якщо вісь циліндра спрямувати вздовж осі z, а в напрямках x, y прикласти гармонічний потенціал, то $\eta_1 = \eta_2 = 2$, а $\eta_3 = \infty$.

Для того, щоб виконати інтеґрування в (IV.4), зведемо V(q) до вигляду, з яким зручніше працювати, а саме — до осциляторної структури:

$$V(q) = V(q_1 \dots, q_D) = \sum_{i=1}^{D} a_i q_i^{\eta_i} = \sum_{i=1}^{D} \varepsilon \xi_i^2.$$
 (IV.16)

Таким чином, змінні q_i і ξ_i пов'язані співвідношенням:

$$q_i = \left(\frac{\varepsilon\xi_i^2}{a_i}\right)^{1/\eta_i}, \qquad dq_i = \frac{2\varepsilon^{1/\eta_i}}{\eta_i a_i^{1/\eta_i}} \xi_i^{2/\eta_i - 1} d\xi_i.$$
 (IV.17)

Матимемо інтеґрал

$$\int (dq) \left[\varepsilon - V(q) \right]^{D/2 - 1} = \int dq_1 \dots \int dq_D \left[\varepsilon - V(q) \right]^{D/2 - 1} =$$
$$= \varepsilon^{D/2 - 1} \left(\prod_{i=1}^D \frac{2\varepsilon^{1/\eta_i}}{\eta_i a_i^{1/\eta_i}} \right) \int d\xi_1 \dots \int d\xi_D \left(\prod_{j=1}^D \xi_j^{2/\eta_j - 1} \right) \times$$
$$\times \left[1 - (\xi_1^2 + \dots + \xi_D^2) \right]^{D/2 - 1} =$$

$$=\varepsilon^{\frac{D}{2}+\sum_{i=1}^{D}\frac{1}{\eta_{i}}-1}C_{D}(\{a_{i}\},\{\eta_{i}\}),$$

де стала $C_D(\{a_i\},\{\eta_i\})$ не є функцією від енерґії. Отже, ми знайшли залежність густини станів від енерґії у загальному випадку анізотропного степеневого потенціалу. Прирівнюючи показник степеня ε до показника ($D_{\text{eff}}/2 - 1$), що відповідає ідеальному газові у скриньці, отримаємо ефективну вимірність простору

$$D_{\text{eff}} = D + \sum_{i=1}^{D} \frac{2}{\eta_i}.$$
 (IV.18)

З'ясувати значення сталої $C_D(\{a_i\},\{\eta_i\})$ можна, перейшовши в інтеґралі за ξ_i до гіперсферичних координат:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi \cos \varphi_1, \\ \xi_2 &= \xi \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ \xi_3 &= \xi \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \\ \vdots \\ \xi_{D-1} &= \xi \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{D-2} \cos \varphi_{D-1}, \\ \xi_D &= \xi \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{D-2} \sin \varphi_{D-1}. \end{aligned}$$

Інтеґрування відбувається по кулі одиничного радіус
а $\xi = [0,1].$ Елемент об'єму має вигляд:

$$d\xi_1 \dots d\xi_D =$$

= $\xi^{D-1} \sin^{D-2} \varphi_1 \sin^{D-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{D-2} d\xi d\varphi_1 d\varphi_1 \dots d\varphi_{D-1},$

причому за кутом φ_1 інтеґруємо в межах $[0, 2\pi]$, а за рештою кутів — у межах $[0, \pi]$.

▼ Завдання IV.1. Розрахуйте $C_D(\{a_i\}, \{\eta_i\})$, перейшовши до виписаних вище гіперсферичних координат, враховуючи, що інтеґрали від степенів тригонометричних функцій дорівнюють:

$$\int_{0}^{\pi} \sin^{\nu}\varphi \, d\varphi = \sqrt{\pi} \, \frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)},$$
$$\int_{0}^{\pi} \cos^{\nu}\varphi \, d\varphi = \frac{1+(-1)^{\nu}}{2} \sqrt{\pi} \, \frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)},$$
$$\int_{0}^{2\pi} \sin^{\nu}\varphi \, d\varphi = \frac{1+(-1)^{\nu}}{\nu} \sqrt{\pi} \, \frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}.$$

V. Рівняння Ґросса–Пітаєвського

V.1. Виведення рівняння

Якщо система є достатньо розрідженою, то міжчастинкову взаємодію можна вважати слабкою. Крім цього, можна знехтувати багаточастинковими взаємодіями, оскільки зіткнення (зближення) декількох частинок дуже малоймовірне.

Запишемо гамільтоніан такої системи N бозонів масою m у зовнішньому потенціалі $U(\mathbf{r})$:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + U(\mathbf{r}_i) \right] + \sum_{1 \le i < j \le N} \Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), \quad (V.1)$$

де Δ_i — оператор Лапласа, що стосується *i*-ї частинки, а Φ — парний (двочастинковий) потенціал міжчастинкової взаємодії, який залежить від відстані між частинками: $\Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \Phi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$.

Вводячи польові оператори $\hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r})$ і $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$, що описують, відповідно, народження і знищення частинки в точці з координатами \mathbf{r} , отримаємо

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \,\hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r} \,\hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}). \quad (V.2)$$

Оскільки для сильнорозрідженої системи взаємодію в доброму наближенні можна замінити на потенціал твердих сфер, розглядаючи задачу розсіяння в борнівському наближенні, то візьмемо функцію $\Phi(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ у вигляді [24]:

$$\Phi(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \lambda \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \qquad (V.3)$$

де зокрема у тривимірному випадку константа зв'язку лінійно залежить від довжини розсіяння *s*-хвилі *a*:

$$\lambda = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}.\tag{V.4}$$

Гамільтоніан, як наслідок, набуде вигляду:

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \,\hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r}) + \frac{\lambda}{2} \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}). \quad (V.5)$$

Розглядаючи в загальному випадку польові оператори, залежні від часу (у представленні Гайзенберґа), можна записати рівняння, яке визначає їх часову еволюцію:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[\hat{\Psi}, \hat{H}\right].$$
 (V.6)

Враховуючи, що польові оператори задовольняють переставні співвідношення для бозонів

$$\begin{split} & \left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}'), \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r})\right] = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \\ & \left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}'), \hat{\Psi}(\mathbf{r})\right] = \left[\hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}'), \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r})\right] = 0, \end{split}$$

після нескладних перетворень матимемо:

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\Psi}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\mathbf{r}) + \lambda\hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r},t)\hat{\Psi}(\mathbf{r},t)\right]\hat{\Psi}(\mathbf{r},t). \quad (V.7)$$

Якщо тепер припустити, що слабка взаємодія лише незначно змінює властивості бозе-системи порівняно з ідеальною, то за малих температур (а квантовомеханічний опис, як відомо, відповідає T = 0) в основному енерґетичному стані перебуватимуть майже всі частинки (явище бозе-конденсації). Отже, польовий оператор буде описувати фактично макроскопічний об'єкт. Тому замінимо в рівнянні (V.7) оператор $\hat{\Psi}(\mathbf{r},t)$ на звичайну функцію $\psi(\mathbf{r},t)$, яку називають *хвильовою функцією конденсату*. Рівняння, що отримаємо внаслідок цього, — це нелінійне рівняння Шрьодінґера, або *рівняння* **Ґросса–Пітаєвського** [4, Sec. 6.1]:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r}) + \lambda \left| \psi(\mathbf{r},t) \right|^2 \right] \psi(\mathbf{r},t).$$
(V.8)

Стаціонарне рівняння Ґросса–Пітаєвського отримаємо, зобразивши хвильову функцію конденсату у вигляді:

$$\psi(\mathbf{r},t) = \varphi(\mathbf{r}) \, e^{-i\mu t/\hbar},\tag{V.9}$$

де μ — хімічний потенціал, а функція φ — дійсна й нормована на повну кількість частинок:

$$\int \varphi^2(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = N. \tag{V.10}$$

У результаті для неї отримаємо рівняння

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\mathbf{r}) + \lambda \,\varphi^2(\mathbf{r})\right]\varphi(\mathbf{r}) = \mu\varphi(\mathbf{r}). \tag{V.11}$$

За відсутності взаємодії між частинками ($\lambda = 0$) отримуємо звичайне рівняння Шрьодінґера.

Переконаємося, що μ у виразі (V.9) справді є хімічним потенціалом. Для цього розглянемо енергію системи як функціонал на одночастинкових функціях $\phi(\mathbf{r})$:

$$E[\phi, \phi^*] = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle, \qquad (V.12)$$

де гамільтоніан \hat{H} задано виразом (V.1) з міжчастинковим потенціалом $\Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \lambda \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, а хвильова функція

$$\Psi(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)=\phi(\mathbf{r}_1)\ldots\phi(\mathbf{r}_N). \tag{V.13}$$

Справді, в ідеальному газі бозе-конденсат відповідає тому, що всі частинки перебувають у тому самому квантовомеханічному стані. Слабка міжчастинкова взаємодія дещо зіпсує таку ситуацію, і для визначення функції $\phi(\mathbf{r})$ ми застосуємо варіаційний підхід.

Мінімізовуватимемо функціонал $E[\phi, \phi^*]$ з додатковою умовою нормування функції $\phi(\mathbf{r})$:

$$\int |\phi(\mathbf{r})|^2 \, d\mathbf{r} = 1,\tag{V.14}$$

для чого знайдемо варіаційну похідну

$$\frac{\delta}{\delta\phi^*} \left\{ E[\phi, \phi^*] - \mu N \int |\phi(\mathbf{r})|^2 \, d\mathbf{r} \right\} = 0, \qquad (V.15)$$

де μ — множник Лаґранжа, а коефіцієнт N виписано для зручності, зважаючи на структуру функціонала $E[\phi, \phi^*]$:

$$E[\phi, \phi^*] = N \int \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \phi^*(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 \right] d\mathbf{r} + \frac{N(N-1)}{2} \lambda \int |\phi(\mathbf{r})|^4 d\mathbf{r}.$$
(V.16)

Зважаючи на велике значення N, в останньому доданку знехтуємо "-1". Як наслідок із варіаційної похідної отримаємо рівняння:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\mathbf{r}) + \lambda N |\phi(\mathbf{r})|^2\right] \phi(\mathbf{r}) = \mu \phi(\mathbf{r}), \qquad (V.17)$$

що збігається зі стаціонарним рівняння Ґросса–Пітаєвського з точністю до заміни $\varphi(\mathbf{r}) = \sqrt{N} \phi(\mathbf{r})$, пов'язаної з нормуванням відповідних функцій. Нелінійний доданок $\lambda N |\phi(\mathbf{r})|^2$, яким це рівняння відрізняється від звичайного рівняння Шрьодінґера для одночастинкової хвильової функції $\phi(\mathbf{r})$, очевидно, має зміст певного ефективного впливу решти (N-1) частинок середовища на одну частинку, що й описується функцією $\phi(\mathbf{r})$. Цей вплив можна проінтерпретувати як додатковий ефективний потенціал, відштовхувальний при $\lambda > 0$ і притягальний при $\lambda < 0$.

Помноживши рівняння (V.17) зліва на ϕ^* і проінтеґрувавши за об'ємом, отримаємо для μ вираз, що збігається з означенням хімічного потенціалу

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N} = \int \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \phi^*(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \lambda N |\phi(\mathbf{r})|^4 \right] d\mathbf{r}.$$
(V.18)

V.2. Двовимірна задача розсіяння

Зважаючи на те, що експерименти з бозе-конденсатами часто проводять у системах, які можна вважати суттєво двовимірними (у тому сенсі, що, скажімо, утримання вздовж одного з напрямків є значно більшим, ніж за двома іншими), то розглянемо, як можна отримати константу зв'язку міжатомного потенціалу λ для такого випадку.

Діючи стандартним способом, запишемо для хвилі, розсіяної на потенціалі $\Phi(\rho)$, вираз:

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = \psi_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\rho}) + \int G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \frac{2M}{\hbar^2} \Phi(\boldsymbol{\rho}') \psi(\boldsymbol{\rho}') d\boldsymbol{\rho}'.$$
(V.19)

Тут M — зведена маса, двовимірний радіус-вектор позначено ρ , а двовимірний хвильовий вектор — κ . Плоска хвиля $\psi_{\kappa}(\rho) = A e^{i\kappa\rho}$, де A — стала нормування. Функція $G(\rho, \rho')$ є функцією Ґріна двовимірного рівняння Гельмгольца:

$$(\nabla_{2D}^2 + \kappa^2) G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'), \qquad (V.20)$$

яка виражається через функції Ганкеля:

$$G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|). \tag{V.21}$$

У границі великих значень арґумента асимптотична поведінка функції Ганкеля має вигляд:

$$H_0^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{ix - i\pi/4}, \qquad |x| \to \infty.$$

Проводячи відповідні спрощення у границі великих значень радіус вектора $|\rho| \gg |\rho'|$:

$$egin{array}{rcl} |oldsymbol{
ho}-oldsymbol{
ho}'| &\simeq&
ho-(oldsymbol{
ho}',oldsymbol{
abla}
ho)=
ho-igg(oldsymbol{
ho}',rac{oldsymbol{
ho}}{
ho}igg), \ &rac{1}{|oldsymbol{
ho}-oldsymbol{
ho}'|} &\simeq& rac{1}{
ho}, \end{array}$$

де $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$, для хвильової функції отримаємо:

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = A\left(e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}} + \frac{e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}}}{\sqrt{\rho}}f\right),\tag{V.22}$$

де *f* — *амплітуда розсіяння*, яка дорівнює:

$$f = -\frac{i}{4} \frac{2M}{\hbar^2} e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa}} \int \Phi(\boldsymbol{\rho}) e^{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho} = -\frac{i}{4} \frac{2M}{\hbar^2} e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa}} \nu_{\boldsymbol{\varkappa}},$$
(V.23)

тут $\hbar \boldsymbol{\varkappa}$ — імпульс передачі, $\boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{\kappa} - \kappa \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}$, а ν_{\varkappa} — фур'є-зображення потенціалу міжчастинкової взаємодії $\Phi(\boldsymbol{\rho})$, яке для центральносиметричного потенціалу залежить лише від модуля $\boldsymbol{\varkappa} = |\boldsymbol{\varkappa}|$.

Скористаємося далі методом парціальних хвиль. На великих відстанях від центра розсіяння вплив потенціалу міжчастинкової взаємодії є нехтівно малим і може спричиняти лише зміну фази розсіяної хвилі $\psi_{\rm s}$, яку шукатимемо як розв'язок відповідного рівняння Шрьодінґера для вільної частинки:

$$\psi_{\rm s}(\boldsymbol{\rho}) = A \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) H_n^{(1)}(\kappa \rho), \qquad (V.24)$$

де θ — кут між векторами ρ і κ . Налітаючу плоску хвилю розкладемо за допомогою функцій Бесселя (так званий *розклад Якобі*-*Анґера*):

$$e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}} = e^{i\kappa\rho\cos\theta} = J_0(\kappa\rho) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(\kappa\rho)\cos n\theta.$$
(V.25)

Коефіцієнти a_n , b_n у формулі (V.24) знайдемо з умови рівності хвильової функції $\psi(\rho)$ нулеві при $\rho = a$, де a можна вважати радіусом частинки, розглядаючи її як твердий диск (за аналогією з твердою сферою у тривимірному просторі):

$$\psi(a) = A e^{i\kappa a\cos\theta} + \psi_{\rm s}(a) = 0, \qquad (V.26)$$

тобто

$$J_0(\kappa a) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(\kappa a) \cos n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) H_n^{(1)}(\kappa a) = 0$$

Звідси відразу бачимо, що $a_n = 0$, а

$$b_0 = -\frac{J_0(\kappa a)}{H_0^{(1)}(\kappa a)}, \qquad b_n = -2i^n \frac{J_n(\kappa a)}{H_n^{(1)}(\kappa a)}.$$
 (V.27)

Для подальших розрахунків візьмемо до уваги лише головний внесок, який дають *s*-хвилі (що відповідає n = 0). Отже,

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = A e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}} - A \frac{J_0(\kappa a)}{H_0^{(1)}(\kappa a)} H_0^{(1)}(\kappa \rho).$$
(V.28)

За умов сильнорозрідженої системи хвильовий вектор $\kappa \sim 1/L \ll \ll 1/a$, де L — певний характерний масштаб, який, взагалі кажучи, визначається зовнішніми умовами. Для малого значення κa можемо записати [26, формула 9.1.8]:

$$\frac{J_0(\kappa a)}{H_0^{(1)}(\kappa a)} \simeq -\frac{i\pi}{2\ln\kappa a}.$$
(V.29)

Отже, хвильова функція набуде вигляду:

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = A \left\{ e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}} + \frac{i\pi}{2\ln\kappa a} H_0^{(1)}(\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}) \right\}.$$
 (V.30)

Розглянемо границю цього виразу при $\kappa \rho \gg 1$ і порівняємо з результатом (V.22):

$$\frac{i\pi}{2\ln\kappa a}\sqrt{\frac{2}{\pi\kappa}}\frac{e^{i\kappa\rho-i\pi/4}}{\sqrt{\rho}} = f\frac{e^{i\kappa\rho}}{\sqrt{\rho}}.$$
 (V.31)

Звідси, зважаючи на вираз (V.23) для амплітуди розсіяння, матимемо:

$$\nu_{\varkappa} = \frac{4\pi\hbar^2}{2M} \frac{1}{\ln[1/(\kappa a)^2]}.$$
 (V.32)

У випадку розсіяння частинок однакової маси *m* зведена маса M = m/2. Зважаючи на те, що для потенціалу міжатомної взаємодії, змодельованого за допомогою дельта-функції $\Phi(\boldsymbol{\rho}) = \lambda \delta(\boldsymbol{\rho})$, фур'є-зображення буде просто $\nu_{\varkappa} = \lambda$, маємо для константи зв'язку:

$$\lambda = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{\ln[1/(\kappa a)^2]}.$$
 (V.33)

Величина κ , як уже було зазначено, визначається певним характерним масштабом. Так, для однорідної системи з густиною (концентрацією) $\rho_{\rm 2D}$ можна записати (κa)² = $\rho_{\rm 2D}a^2$, а в системі, що перебуває в зовнішньому осциляторному потенціалі з частотою ω , характерним масштабом буде $a_{\rm ho} = \sqrt{\hbar/m\omega}$, тоді $\kappa = 1/a_{\rm ho}$.

V.3. Однорідна тривимірна система

Розглянемо однорідний випадок, тобто поведінку системи без зовнішнього потенціалу, $U(\mathbf{r}) \equiv 0$. Зрозуміло, що в цьому випадку функція $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$, і з умови нормування (V.10) $\varphi(\mathbf{r}) = \sqrt{N/V}$, де V -об'єм системи. Оператор кінетичної енергії дасть нульовий внесок, і в результаті для хімічного потенціалу матимемо:

$$\mu = \lambda |\varphi(\mathbf{r})|^2 = \lambda \frac{N}{V}.$$
 (V.34)

При T = 0 хімічний потенціал є просто похідною від енергії за кількістю частинок:

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N}.\tag{V.35}$$

Отже,

$$\frac{\partial E}{\partial N} = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \frac{N}{V},$$

звідки енергія основного стану на одну частинку буде

$$\frac{E}{N} = 4\pi (na^3) \frac{\hbar^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2}{2m\xi^2},$$
 (V.36)

де

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi na}} \tag{V.37}$$

— так звана довжина відновлення (англ. healing length), яка показує, на якій відстані конденсат перестає відчувати зміни граничних умов. Легко зауважити, що ця величина має зміст довжини хвилі де Бройля (не теплової, а звичайної квантовомеханічної). Для того, щоб пояснити фізичний зміст довжини відновлення, можна розглянути таку задачу. Нехай в однорідному конденсаті в точці z = 0 поміщено безмежну стінку у площині xy. Рівняння Ґросса–Пітаєвського

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\mathbf{r}) + \lambda|\varphi(\mathbf{r})|^2\varphi(\mathbf{r}) = \mu\varphi(\mathbf{r})$$
(V.38)

у підпросторі z > 0 має розв'язок, що залежить лише від змінної z. Його шукатимемо у вигляді

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sqrt{n} \operatorname{th} kz, \qquad (V.39)$$

який задовольняє граничні умови $\varphi(z=0) = 0$ і $\varphi(z=\infty) = \sqrt{n}$. Після елементарних перетворень, враховуючи $\mu = \lambda n$, отримаємо:

$$k = \sqrt{\frac{\lambda mn}{\hbar^2}} = \sqrt{4\pi na} = \frac{1}{\xi}.$$
 (V.40)

Отже, й справді на відстанях $z \gtrsim \xi$ хвильова функція конденсату швидко прямує до значення \sqrt{n} , яке відповідає однорідній системі, тобто перестає відчувати наявність стінки.

Таким чином, для розрідженої бозе-системи можна виділити три характерні масштаби: розмір атома a, середня міжатомна відстань $1/n^{1/3}$ і довжина відновлення ξ . Для них маємо таку ієрархію [25]:

$$a \ll 1/n^{1/3} \ll \xi \sim 1/\sqrt{na}.$$

Наступним кроком розглянемо низькотемпературний режим, якому відповідають малі збудження. Хвильову функцію конденсату запишемо у вигляді:

$$\psi(\mathbf{r},t) = e^{-i\mu t/\hbar} \left[\varphi(\mathbf{r}) + u(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + v^*(\mathbf{r})e^{i\omega t} \right], \qquad (V.41)$$

де $u(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})$ — малі величини.

Підставимо цей вираз у рівняння (V.8). Зберігаючи лише лінійні за малими величинами $u(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})$ доданки і прирівнявши множники біля $e^{i\omega t}$ і $e^{-i\omega t}$, отримаємо систему рівнянь:

$$\hbar\omega \, u(\mathbf{r}) = \left[\hat{H}_0 - \mu + 2\lambda\varphi^2(\mathbf{r})\right] u(\mathbf{r}) + \lambda\varphi^2(\mathbf{r})v(\mathbf{r}), \quad (V.42)$$

$$-\hbar\omega v(\mathbf{r}) = \left[\hat{H}_0 - \mu + 2\lambda\varphi^2(\mathbf{r})\right]v(\mathbf{r}) + \lambda\varphi^2(\mathbf{r})u(\mathbf{r}), \quad (V.43)$$

де

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\mathbf{r}). \tag{V.44}$$

В однорідному випадку ($U(\mathbf{r}) = 0$) функції $u(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})$ є плоскими хвилями:

$$u(\mathbf{r}) = C_1 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \qquad v(\mathbf{r}) = C_2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$
 (V.45)

Підставивши ці вирази в (V.42)-(V.43), отримаємо:

$$\hbar\omega C_1 = \left(\varepsilon_k + \lambda \frac{N}{V}\right) C_1 + \lambda \frac{N}{V} C_2, \qquad (V.46)$$

$$-\hbar\omega C_2 = \left(\varepsilon_k + \lambda \frac{N}{V}\right) C_2 + \lambda \frac{N}{V} C_1, \qquad (V.47)$$

де введено позначення для енергії вільної частинки

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{V.48}$$

і враховано, що в однорідному випадку хімічний потенціал $\mu = \lambda N/V$, див. (V.34), а функція $\varphi(\mathbf{r}) = \sqrt{N/V}$.

Ця система рівнянь для C_1 , C_2 — однорідна, для існування розв'язків прирівняємо її визначник до нуля. У результаті для енерґії малих збуджень отримаємо

$$\hbar\omega = \varepsilon_k \sqrt{1 + \frac{2\lambda}{\varepsilon_k} \frac{N}{V}}.$$
(V.49)

Для малих імпульсів $k \to 0$ одержимо фононний спектр

$$\hbar\omega = \hbar ck, \tag{V.50}$$

де швидкість звуку

$$c = \sqrt{\frac{N}{V} \frac{\lambda}{m}}.$$
 (V.51)

Зрозуміло, що необхідною умовою існування звукових коливань є наявність взаємодії, тобто $\lambda > 0$.

V.4. Ґауссівське наближення для осциляторної пастки

Нехай система частинок перебуває в ізотропній тривимірній осциляторній пастці $U(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2/2$. Запишемо рівняння Ґросса–Пітаєвського:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\mathbf{r}) + \frac{m\omega^2 r^2}{2}\varphi(\mathbf{r}) + \lambda\varphi^2(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = \mu\varphi(\mathbf{r}).$$
(V.52)

Якщо вимкнути взаємодію, $\lambda = 0$, то розв'язком буде хвильова функція основного стану гармонічного осцилятора $\varphi(\mathbf{r}) = Ce^{-\alpha^2 r^2}$. Підставляючи її в рівняння (V.52), отримаємо:

$$\alpha^2 = \frac{m\omega}{2\hbar}, \qquad \mu = \frac{3}{2}\hbar\omega, \qquad (V.53)$$

а з умови нормування $\int \varphi^2(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = N$ матимемо сталу

$$C = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/4} \sqrt{N} \,\alpha^{3/2}.$$
 (V.54)

Для спрощення розрахунків перепишемо рівняння (V.52) у знерозміреній формі, вибираючи за одиницю енергії величину $\hbar\omega$, а за одиницю довжини — $a_{\rm ho} = \sqrt{\hbar/m\omega}$. Пам'ятаючи, що φ^2 має розмірність, обернену до довжини в кубі, запишемо:

$$-\frac{1}{2}\Delta\varphi + \frac{r^2}{2}\varphi + \tilde{\lambda}\varphi^2\varphi = \mu\varphi, \qquad (V.55)$$

де в нових одиницях

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\hbar\omega} = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a \frac{1}{\hbar\omega} = \frac{4\pi a}{\sqrt{\hbar/m\omega}}.$$
 (V.56)

Хвильову функцію конденсату φ знайдемо за допомогою варіаційного підходу. Припустимо, що вмикання слабкої взаємодії лише незначно змінить поведінку системи, запишемо:

$$\varphi(\mathbf{r}) = C e^{-\alpha^2 r^2},\tag{V.57}$$

де тепер уже lpha — варіаційний параметр. Його шукатимемо, мінімізуючи функціонал енергії

$$E = \int \left[-\frac{1}{2} \varphi^* \Delta \varphi + \frac{r^2}{2} |\varphi|^2 \right] d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \tilde{\lambda} \int |\varphi(\mathbf{r})|^4 d\mathbf{r} =$$

(V.58)
$$= \frac{3}{2} N \alpha^2 + \frac{3}{8} \frac{N}{\alpha^2} + \Lambda N^2 \alpha^3,$$

де

$$\Lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{2\pi^{3/2}}.\tag{V.59}$$

Легко зауважити, що три доданки у виразі для E відповідають (у записаному порядку) за кінетичну енерґію частинок, потенціальну енерґію частинок у зовнішньому потенціалі пастки, а також за енерґію міжчастинкової взаємодії.

Виявляється, що розв'язок цієї варіаційної задачі суттєво залежить від характеру міжчастинкової взаємодії, яка може бути відштовхувальною (a > 0, а отже, й $\Lambda > 0$) чи притягальною (a < 0, тобто й $\Lambda < 0$).

Відштовхувальна взаємодія (a > 0). Параметр α знайдемо з умови $dE(\alpha)/d\alpha = 0$:

$$\frac{dE(\alpha)}{d\alpha} = 3N\alpha - \frac{3}{4}\frac{N}{\alpha^3} + 3\Lambda N\alpha^2 = 0$$

або

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{4\alpha^5} + \Lambda N = 0. \tag{V.60}$$

Записати загальний розв'язок цього рівняння в аналітичному вигляді не вдається, проте нас цікавитимуть якраз граничні випадки. Зрозуміло, що в границі $\Lambda N \to 0$ отримаємо параметр $\alpha^2 = 1/2$, що, як легко переконатися, відповідає ідеальному газові. Натомість у границі $\Lambda N \to \infty$ маємо $\alpha \sim N^{-1/5}$. Отже, густина ймовірності $|\varphi|^2 \sim N^{2/5}$, тобто збільшення кількості атомів у пастці спричиняє просторове розпирення конденсату. Зважимо, що в такій границі кінетичний доданок в енерґії пропорційний до $N^{3/5}$ і є нехтівно малим порівняно з двома іншими доданками, які пропорційні до $N^{7/5}$. Відповідно, рівновага в системі досягається внаслідок компенсування міжчастинкового відштовхування зовнішнім потенціалом.

Притягальна взаємодія (*a* < 0). Перепишемо енергію у вигляді:

$$E(\alpha) = \frac{3}{2}N\alpha^{2} + \frac{3}{8}\frac{N}{\alpha^{2}} - |\Lambda|N^{2}\alpha^{3}.$$
 (V.61)

Ця функція завдяки останньому доданку має ґлобальний мінімум при $\alpha \to \infty$, що відповідає колапсуванню конденсату в точку. Якщо ж кількість частинок у системі не є дуже великою, то притягальну частину можна скомпенсувати кінетичною енерґією частинок. Це відповідатиме певному локальному мінімумові функції $E(\alpha)$. Знайти таку критичну кількість частинок N_c можна з умови, що локальний мінімум перестає існувати, переходячи натомість у точку перегину функції $E(\alpha)$ (див. рис. V.1), у якій нулеві рівні перша та друга похідні:

$$\frac{dE(\alpha)}{d\alpha} = 0;$$
 $\frac{d^2E(\alpha)}{d\alpha^2} = 0.$

Матимемо:

$$3N_c\alpha - \frac{3}{4}\frac{N_c}{\alpha^3} - 3|\Lambda|N_c\alpha^2 = 0,$$

$$(V.62)$$

$$3N_c + \frac{9}{4}\frac{N_c}{\alpha^4} - 6|\Lambda|N_c\alpha = 0.$$

Отриману систему рівнянь легко розв'язати відносно α і N_c . У результаті нескладних перетворень отримаємо:

$$N_c = \left(\frac{4}{5}\right)^{5/4} \frac{1}{|\Lambda|} = -\frac{2\sqrt{2\pi}}{5^{5/4}} \frac{\sqrt{\hbar/m\omega}}{a} \simeq -0.67 \frac{a_{\rm ho}}{a}.$$
 (V.63)

Ця оцінка добре корелює з результатами чисельного інтеґрування рівняння Ґросса–Пітаєвського, які дають $N_c \simeq -0.57 a_{\rm ho}/a$, що також підтверджується експериментально [28, 29].



Рис. V.1. Залежність енергії E від варіаційного параметра α для різних значень інтенсивності взаємодії Λ . Суцільні лінії — $\Lambda > 0$, тонка штрихова лінія — $\Lambda = 0$, пунктирні лінії — $\Lambda < 0$

При значеннях кількості частинок $N > N_c$ відбувається колапс конденсату. Тобто у системах з притягальною взаємодією явище бозеконденсації можна спостерігати лише для кількості частинок $N < N_c$.

V.5. Наближення Томаса–Фермі

Як ми щойно побачили, за умов відштовхувальної взаємодії і великої кількості частинок у конденсаті доданком із кінетичною енерґією в рівнянні Ґросса–Пітаєвського можна знехтувати. Відповідно, в осциляторній пастці будемо мати з (V.52):

$$\frac{m\omega^2 r^2}{2}\varphi(\mathbf{r}) + \lambda\varphi^2(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = \mu\varphi(\mathbf{r}), \qquad (V.64)$$

звідки відразу знаходимо хвильову функцію конденсату:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\mu - \frac{m\omega^2 r^2}{2}} \tag{V.65}$$

для $r \leq \sqrt{2\mu/m\omega^2}$ і $\varphi(\mathbf{r}) = 0$ для більших значень r.

Хімічний потенціал μ знайдемо з умови нормування $\int |\varphi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = N$:

$$\frac{4\pi}{\lambda} \int_{0}^{\sqrt{2\mu/m\omega^2}} \left(\mu - \frac{m\omega^2 r^2}{2}\right) r^2 dr = N$$

Як наслідок матимемо:

$$\mu = \frac{\hbar\omega}{2} \left(15N \frac{a}{a_{\rm ho}} \right)^{2/5}.$$
 (V.66)

З означення $\mu = \partial E / \partial N$ можна знайти енергію:

$$E = \int \mu \, dN = \frac{5}{7} N \mu.$$

Отже, хімічний потенціал відрізняється від середньої енергії на одну частинку:

$$\frac{E}{N} = \frac{5}{7}\mu. \tag{V.67}$$

Використане наближення означає, що енергія, пов'язана з додаванням у систему однієї частинки (тобто хімічний потенціал) є сталою величиною

$$\mu = \frac{m\omega^2 r^2}{2} + \lambda \varphi^2(\mathbf{r}) = \text{const}, \qquad (V.68)$$

тобто не залежить від того, в якій точці **r** перебуває частинка. Такий підхід нагадує наближення Томаса–Фермі в теорії атома, тому його також називають *наближенням Томаса–Фермі*.

На рис. V.2 наведено якісне порівняння залежностей хвильової функції від відстані для ґауссівського наближення і наближення Томаса–Фермі.



Рис. V.2. Залежність хвильової функції конденсату від відстані (якісно): суцільна лінія — ґауссівське наближення, пунктирна лінія — наближення Томаса-Фермі

V.6. Гідродинамічний опис. Вихори в конденсаті

Хвильову функцію конденсату можна зобразити у вигляді:

$$\psi(\mathbf{r},t) = |\psi(\mathbf{r},t)| e^{i\Phi(\mathbf{r},t)}.$$
(V.69)

Розглянемо потік густини

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right) = \rho(\mathbf{r},t) \mathbf{v}(\mathbf{r},t), \qquad (V.70)$$

де густина

$$\rho(\mathbf{r},t) = |\psi(\mathbf{r},t)|^2, \qquad (V.71)$$

а поле швидкості

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \Phi(\mathbf{r},t). \tag{V.72}$$

Підставляючи вираз (V.69) у рівняння Ґросса–Пітаєвського (V.8), отримаємо, розглядаючи окремо дійсну й уявну частини:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\hbar}{m} (\boldsymbol{\nabla}, \rho \boldsymbol{\nabla} \Phi),$$
(V.73)
$$-\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} + \frac{\hbar^2}{2m} (\boldsymbol{\nabla} \Phi, \boldsymbol{\nabla} \Phi) + U(\mathbf{r}) + \lambda \rho^2.$$

З урахуванням уведених понять густини $\rho(\mathbf{r},t)$ і швидкості $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ перше рівняння набуває форми рівняння неперервності:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \qquad (V.74)$$

а з другого, беручи ґрадієнт, отримаємо:

$$m\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left\{\frac{1}{2}mv^2 + U(\mathbf{r}) + \lambda\rho^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla^2\sqrt{\rho}\right\} = 0. \quad (V.75)$$

Якщо відкинути останній доданок, який називають **квантовим тиском**, то отриманий вираз — це звичайне гідродинамічне рівняння для руху нев'язкої рідини. Інакше кажучи, бозе-конденсат за відсутності синґулярностей густини поводиться як ідеальна рідина.

Легко переконатися, що поле швидкості є потенціальним. Справді, знайдемо циркуляцію за замкненим контуром *L*:

$$\Gamma = \oint_{L} (\mathbf{v}, d\boldsymbol{\ell}) = \frac{\hbar}{m} \oint_{L} (\boldsymbol{\nabla}\Phi, d\boldsymbol{\ell}) = \frac{\hbar}{m} \int_{S} (\operatorname{rot} \boldsymbol{\nabla}\Phi, d\mathbf{S}) = 0. \quad (V.76)$$

Якщо ж на поверхні *S* виникне особливість, то інтеґрал уже не буде рівним нулеві. З умови однозначності хвильової функції матимемо для фази:

$$\oint_{L} (\boldsymbol{\nabla} \Phi, d\boldsymbol{\ell}) = 2\pi k, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \qquad (V.77)$$

або для циркуляції:

$$\Gamma = \oint_{L} (\mathbf{v}, d\boldsymbol{\ell}) = \frac{\hbar}{m} \oint_{L} (\boldsymbol{\nabla}\Phi, d\boldsymbol{\ell}) = \frac{\hbar}{m} 2\pi k.$$
(V.78)

Такі особливості, що порушують потенціальний характер поля швидкості, називають **вихорами**. Експериментально їх спостерігають, наприклад, у конденсатах, що обертаються. На практиці значення $k = \pm 1$; вихори з вищими значеннями нестабільні і швидко розпадаються.

Запишемо стаціонарне рівняння Ґросса–Пітаєвського з урахуванням обертання з частотою Ω навколо осі z:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - (\mathbf{\Omega}, \hat{\mathbf{L}}) + U(\mathbf{r}) + \lambda |\varphi|^2(\mathbf{r})\right]\varphi(\mathbf{r}) = \mu\varphi(\mathbf{r}), \qquad (V.79)$$

де $\hat{\mathbf{L}}$ — момент імпульсу. Зі збільшенням частоти внесок від енергії обертання — $\Omega \hat{L}_z$ спричинить урешті-решт те, що сумарна енерґія стане меншою за енерґію основного стану в лабораторній системі відліку. Внаслідок цього виділиться вихор, а поступовим збільшенням частоти можна досягти й утворення так званої *з'ратки вихорів* (vortex lattice), див. рис. V.3.



Рис. V.3. Ґратка вихорів (за працею [27])

Дослідження вихорів у конденсатах, а також інших нелінійних явищ, наприклад, турбулентності, нині викликають жваве зацікавлення як експериментаторів, так і теоретиків різних дослідницьких груп у всьому світі.

VI. Метод наближеного вторинного квантування Боголюбова

VI.1. Однорідна система

Запишемо гамільтоніан взаємодіючої бозе-системи у зображенні чисел заповнення (так зване **вторинне квантування**). Для цього розкладемо польові оператори породження-знищення $\hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}(\mathbf{r})$ за одночастинковими хвильовими функціями:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \hat{a}_{\mathbf{k}}, \qquad \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}^{*}(\mathbf{r}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}, \qquad (\text{VI.1})$$

де $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ — плоскі хвилі для частинки в об'ємі V:

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},\tag{VI.2}$$

а $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}, \hat{a}_{\mathbf{k}}$ — оператори, відповідно, породження і знищення частинки з імпульсом $\hbar \mathbf{k}$, які задовольняють бозонні комутаційні співвідношення:

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}\right] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \qquad \left[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}\right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}\right] = 0.$$
(VI.3)

Проробимо відповідні перетворення з гамільтоніаном:

$$\begin{split} \hat{H} &= \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i \right) + \sum_{1 \le i < j \le N} \Phi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \\ &= \int d\mathbf{r} \; \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \\ &+ \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r} \; \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \end{split}$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_k \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \\ + \sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{k}',\\\mathbf{q},\mathbf{q}'}} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'} \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{q}'} \frac{1}{2V^2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \, \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\mathbf{k}'\mathbf{r}' + i\mathbf{q}\mathbf{r} + i\mathbf{q}'\mathbf{r}'}.$$

Тут ε_k — енерґетичний спектр вільної частинки, $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$. В останньому інтеґралі зробимо заміну змінних $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \to \mathbf{r}, \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Унаслідок цього він набуде вигляду:

$$\begin{split} \frac{1}{2V^2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \, \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\mathbf{k}'\mathbf{r}' + i\mathbf{q}\mathbf{r} + i\mathbf{q}'\mathbf{r}'} = \\ &= \underbrace{\frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \, e^{i\mathbf{r}(\mathbf{q} + \mathbf{q}' - \mathbf{k} - \mathbf{k}')}}_{=\delta_{\mathbf{q} - \mathbf{k}, \mathbf{k}' - \mathbf{q}'}} \frac{1}{2V} \int d\mathbf{R} \, \Phi(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{R}(\mathbf{k}' - \mathbf{q}')} = \\ &= \delta_{\mathbf{q} - \mathbf{k}, \mathbf{k}' - \mathbf{q}'} \frac{1}{2V} \nu_{|\mathbf{q} - \mathbf{k}|}, \end{split}$$

де ν_q — фур'є-зображення потенціалу міжатомної взаємодії:

$$\nu_q = \int d\mathbf{R} \, \Phi(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{R}\mathbf{q}},\tag{VI.4}$$

яке у випадку сферично-симетричного потенціалу $\Phi(\mathbf{R}) = \Phi(|\mathbf{R}|)$ залежить лише від модуля хвильового вектора.

Остаточно в зображенні чисел заповнення отримаємо:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_k \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2V} \sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{k}',\\\mathbf{q},\mathbf{q}'}} \delta_{\mathbf{q}-\mathbf{k},\mathbf{k}'-\mathbf{q}'} \nu_{|\mathbf{q}-\mathbf{k}|} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{q}'}.$$
(VI.5)

Варто звернути увагу на закон збереження імпульсу, який у такому записі відповідає тому, що в кожному доданку сумарний імпульс в операторах породження дорівнює сумарному імпульсу в операторах знищення.

Розглядатимемо термодинамічну границю:

$$N \to \infty, \quad V \to \infty, \qquad \frac{N}{V} = \rho = \text{const.}$$
 (VI.6)

Оператор кількості частинок у стані з імпульсом $\hbar \mathbf{k}$ дорівнює $\hat{N}_{\mathbf{k}} = \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}$. Як ми бачили раніше, у випадку ідеального газу в низькотемпературній границі $T \to 0$ в основному стані (з $\mathbf{k} = 0$) перебувають майже всі частинки. Оскільки міжчастинкова взаємодія слабка, то можна припустити, що подібне будемо спостерігати й у цьому разі. Тому з усіх можливих станів виділяється основний, де кількість частинок $\hat{N}_0 = \hat{a}_0^{\dagger} \hat{a}_0$. Зваживши на комутаційні співвідношення, можемо записати також, що $\hat{N}_0 + 1 = \hat{a}_0 \hat{a}_0^{\dagger}$. Для макроскопічних значень заповнення основного рівня $N_0 + 1 \simeq N_0$, тому можна вважати, що оператори \hat{a}_0^{\dagger} і \hat{a}_0 наближено комутують, а отже, поводяться як звичайні числа (*c*-числа):

$$\hat{a}_0^{\dagger} \to \sqrt{N_0}, \qquad \hat{a}_0 \to \sqrt{N_0}.$$
 (VI.7)

Також зазначимо, що величина

$$\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}N_{\mathbf{k}} = \frac{1}{N}(N-N_0)$$

у нашому випадку є малою, тому в гамільтоніані знехтуємо доданками, які містять добутки трьох і чотирьох операторів $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ при $\mathbf{k} \neq 0$.

З урахуванням викладених міркувань послідовно виділимо в другому доданку гамільтоніана (VI.5) доданки з двома нульовими значеннями хвильових векторів:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' = 0,$$
 $\mathbf{k} = \mathbf{q} = 0,$ $\mathbf{k} = \mathbf{q}' = 0,$
 $\mathbf{k}' = \mathbf{q} = 0,$ $\mathbf{k}' = \mathbf{q}' = 0,$ $\mathbf{q} = \mathbf{q}' = 0,$

а також із чотирма нульовими індексами: $\mathbf{k} = \mathbf{k}' = \mathbf{q} = \mathbf{q}' = 0$. Із закону збереження імпульсу відразу бачимо, що неможливими є три нульові значення хвильового вектора.

Виконавши ці перетворення і зваживши на комутаційні співвід-

ношення для операторів \hat{a} , перепишемо гамільтоніан у вигляді:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_k \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \nu_0 \left(\frac{1}{2V} (\hat{a}^{\dagger}_0 \hat{a}_0)^2 + \frac{1}{V} \hat{a}^{\dagger}_0 \hat{a}_0 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \right) + \\
+ \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \nu_k \left(\hat{a}^{\dagger}_0 \hat{a}^{\dagger}_0 \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}} + \hat{a}_0 \hat{a}_0 \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}} + 2 \hat{a}^{\dagger}_0 \hat{a}_0 \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \right).$$
(VI.8)

Далі замінимо добутки $\hat{a}_0^{\dagger}\hat{a}_0, \, \hat{a}_0^{\dagger}\hat{a}_0^{\dagger}$ та $\hat{a}_0\hat{a}_0$ на N_0 . Оскільки

$$\sum_{\mathbf{k}\neq 0} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} N_{\mathbf{k}} = N - N_0,$$

то в межах прийнятих наближень маємо:

$$\frac{N_0^2}{2V} + \frac{N_0}{V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} = \frac{N_0^2 + 2N_0(N - N_0)}{2V} = \frac{N^2}{2V}.$$

Після цих перетворень гамільтоніан набуде вигляду:

$$\hat{H} = \frac{N^2}{2V}\nu_0 + \sum_{\mathbf{k}} \left(\varepsilon_k + \frac{N_0}{V}\nu_k\right) \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{N_0}{2V}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\nu_k \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{-\mathbf{k}}\right).$$
(VI.9)

Цю квадратичну форму можна діагоналізувати, увівши нові оператори \hat{b} через такі лінійні комбінації:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = u_k \hat{b}_{\mathbf{k}} + v_k \hat{b}_{-\mathbf{k}}^{\dagger},$$

$$(\text{VI.10})$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} = u_k \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} + v_k \hat{b}_{-\mathbf{k}},$$

де коефіцієнти u_k , v_k — дійсні функції, а оператори \hat{b}_k , \hat{b}_k^{\dagger} задовольняють комутаційні співвідношення Бозе:

$$\left[\hat{b}_{\mathbf{k}},\hat{b}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}\right] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \qquad \left[\hat{b}_{\mathbf{k}},\hat{b}_{\mathbf{k}'}\right] = \left[\hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger},\hat{b}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}\right] = 0.$$
(VI.11)

З комутатора $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}] = 1$ після нескладних перетворень отримаємо:

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}] = u_k^2 [\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger}] - v_k^2 [\hat{b}_{-\mathbf{k}}, \hat{b}_{-\mathbf{k}}^{\dagger}] = u_k^2 - v_k^2 = 1.$$
(VI.12)

Підставивши означення (VI.10) в гамільтоніан (VI.9) і вимагаючи, щоб недіагональні доданки $\sim \hat{b}_{\mathbf{k}}\hat{b}_{-\mathbf{k}}$ та $\sim \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{b}_{-\mathbf{k}}^{\dagger}$ зникли, отримаємо ще одну умову:

$$\frac{N_0}{2V}\nu_k\left(u_k^2+v_k^2\right)+\left(\varepsilon_k+\frac{N}{V}\nu_k\right)u_kv_k=0.$$
 (VI.13)

При цьому гамільтоніан набуде вигляду:

$$\hat{H} = \text{const} + \sum_{\mathbf{k}} E_k \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}, \qquad (\text{VI.14})$$

де const позначає неоператорний доданок, а E_k — спектр елементарних збуджень, які відповідають квазічастинкам із операторами породження і знищення $\hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$, $\hat{b}_{\mathbf{k}}$, що формують ідеальний бозе-газ. Розв'язуючи систему рівнянь (VI.12)–(VI.13), отримаємо для цього спектра:

$$E_k = \varepsilon_k \sqrt{1 + \frac{N_0}{2V} \frac{\nu_k}{\varepsilon_k}}.$$
 (VI.15)

Легко переконатися, що за малих імпульсів, $k \to 0$, знайдений енерґетичний спектр поводиться лінійно, тобто відповідає фононним (звуковим) збудженням:

$$E_k \Big|_{k \to 0} = \hbar k \sqrt{\frac{N_0}{V} m \nu_0}, \qquad (\text{VI.16})$$

де $c = \sqrt{m\nu_0 N_0/V}$ — швидкість звуку. Тобто навіть слабка взаємодія змінює характер спектра елементарних збуджень у бозе-системі, а отже, й температурну поведінку термодинамічних функцій, принаймні за малих температур.

VI.2. Система в зовнішній гармонічній пастці

У цьому розділі узагальнимо метод наближеного вторинного квантування Боголюбова на випадок слабковзаємодіючого *D*-вимірного бозе-газу в гармонічному зовнішньому потенціалі. Унаслідок діагоналізації гамільтоніана отримаємо систему матричних рівнянь, що дасть змогу врешті обчислити конденсатну фракцію та енерґію.

Розглядатимемо D-вимірну систему N слабковзаємодіючих бозонів масою m кожен, які перебувають у гармонічному зовнішньому потенціалі (пастці)

$$V(x_1, \dots, x_D) = \frac{m}{2} \left(\omega_1^2 x_1^2 + \dots + \omega_D^2 x_D^2 \right).$$
(VI.17)

Потенціал міжатомної взаємодії має вигляд $U(x_1, \ldots, x_D) = g\delta(\mathbf{x})$, де вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_D)$, а g — параметр взаємодії.

Гамільтоніан задачі має вигляд

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}_{j}^{2}}{2m} + V(\mathbf{x}_{j}) \right] + \sum_{1 \le j < l \le N} U(\mathbf{x}_{j} - \mathbf{x}_{l}) = \hat{H}_{0} + \hat{U}. \quad (\text{VI.18})$$

У цьому виразі $\hat{\mathbf{p}}_j$ — оператор імпульсу j-ї частинки, \mathbf{x}_j — її координата.

Вторинне квантування можна побудувати з використанням власних функцій $|\mathbf{n}\rangle = |n_1, \ldots, n_D\rangle$ оператора \hat{H}_0 , що відповідає звичайному *D*-вимірному гармонічному осциляторові. Для спрощення вимагатимемо, щоб відношення частот $\omega_1, \ldots, \omega_D$ не було раціональним числом — цим уникнемо випадкового виродження енерґетичних рівнів.

Нехай $\hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger}, \hat{a}_{\mathbf{n}}$ — оператори породження-знищення стану $|\mathbf{n}\rangle$. Відповідні енерґетичні рівні $\varepsilon_{\mathbf{n}} = \hbar (\omega_1 n_1 + \ldots + \omega_D n_D)$. У такому зображенні гамільтоніан (VI.18) дорівнює

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{n}} \varepsilon_n \hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{n}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{m}', \mathbf{n}, \mathbf{n}'} \langle \mathbf{mn} | U | \mathbf{m}' \mathbf{n}' \rangle \hat{a}_{\mathbf{m}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{m}'} \hat{a}_{\mathbf{n}'}. \quad (\text{VI.19})$$

Оператори задовольняють стандартні бозонні комутаційні співвідношення:

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{n}'}, \hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger}\right] = \delta_{\mathbf{nn}'}.$$
 (VI.20)

Застосуємо тепер наближене вторинне квантування. Нехай N_0 кількість частинок на найнижчому енерґетичному рівні ε_0 . Оскільки взаємодія слабка, то поведінка бозонів не буде суттєво відрізнятися від ідеальної системи. Тобто за низьких температур можна очікувати конденсації Бозе–Айнштайна, а отже, N_0 — макроскопічна величина. Враховуючи, що вона є власним значенням оператора $\hat{a}_0^{\dagger}\hat{a}_0$, можемо вважати \hat{a}_0^{\dagger} і \hat{a}_0 с-числами: $\hat{a}_0^{\dagger}\hat{a}_0 = N_0$, $\hat{a}_0\hat{a}_0^{\dagger} = N_0 + 1 \simeq N_0$, $\hat{a}_0^{\dagger} \simeq \sqrt{N_0}$, $\hat{a}_0 \simeq \sqrt{N_0}$. З метою отримання загальніших фізичних результатів ми не покладатимемо $N_0 = N$. Зауважмо ще, що при D < 3 бозе-конденсація можлива лише в пастках [23].

Далі знехтуємо доданками, що мають більше ніж два оператори з ненульовим індексом. Оскільки власні функції $|\mathbf{n}\rangle$ дійсні, то матричні елементи в другому доданкові (VI.19) при різних комбінаціях операторів збігаються: $\langle \mathbf{m0} | U | \mathbf{n0} \rangle = \langle \mathbf{mn} | U | \mathbf{00} \rangle = \langle \mathbf{00} | U | \mathbf{mn} \rangle \equiv g c_{\mathbf{mn}}$, де

$$c_{\mathbf{mn}} = \left(\frac{m\omega}{2\pi^2\hbar}\right)^{D/2} \prod_{j=1}^{D} \frac{(-1)^{(3m_j+n_j)/2}}{\sqrt{m_j! n_j!}} \Gamma\left(\frac{m_j+n_j+1}{2}\right), \quad (\text{VI.21})$$

якщо $m_j + n_j$ парне для всіх j, і $c_{\mathbf{mn}} = 0$ в іншому випадку. Тут використано позначення $\omega = (\omega_1 \dots \omega_D)^{1/D}$.

Матричні елементи з трьома нулями дорівнюють

$$\langle \mathbf{n0}|U|\mathbf{00}\rangle \equiv g \, d_{\mathbf{n}} = g \left(\frac{m\omega}{2\pi^2\hbar}\right)^{D/2} \prod_{j=1}^{D} \frac{(-1)^{n_j/2}}{\sqrt{n_j!}} \, \Gamma\left(\frac{n_j+1}{2}\right), \, (\text{VI.22})$$

якщо n_j парне для всіх j, і $d_{\mathbf{n}} = 0$ в іншому випадку.

Гамільтоніан (VI.19) набуває вигляду:

$$\hat{H} = \operatorname{const} + \sum_{\mathbf{n}} \varepsilon_{\mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{n}} + g N_0^{3/2} \sum_{\mathbf{n}} d_{\mathbf{n}} \left(\hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{n}} \right) + g \frac{N_0}{2} \sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}} c_{\mathbf{mn}} \left(4 \hat{a}_{\mathbf{m}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{n}} + \hat{a}_{\mathbf{m}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{m}} \hat{a}_{\mathbf{n}} \right), \quad (\text{VI.23})$$

де 'const' позначає доданки неоператорного типу, які ми далі відкинемо. Для скорочення запису умову $\mathbf{n} \neq 0, \mathbf{m} \neq 0$ не виписано
явно. Зауважмо появу лінійних доданків $\sim \hat{a}^{\dagger}$, $\sim \hat{a}$, яких не було у боголюбівському підході [30] через закон збереження імпульсу.

Нехай індекси m, n нумерують усі стани, які позначали векторні індекси \mathbf{m}, \mathbf{n} . Для отримання енерґетичного спектра гамільтоніана (VI.23) застосуємо процедуру діагоналізації. Для цього зобразимо гамільтоніан (VI.23) у такій матричній формі:

$$\hat{H} = \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \mathcal{E} \hat{\mathbf{a}} + 2\lambda \sqrt{N_0} \left(\hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \mathbf{d} + \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{d} \right) +
+ \lambda \left(4 \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} C \hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} C \hat{\mathbf{a}}^{\dagger T} + \hat{\mathbf{a}}^T C \hat{\mathbf{a}} \right),$$
(VI.24)

де $\hat{\mathbf{a}}$ та \mathbf{d} — вектори безмежної розмірності:

$$\hat{\mathbf{a}}^{T} = (\hat{a}_{1}, \hat{a}_{2} \dots), \qquad \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} = (\hat{a}_{1}^{\dagger}, \hat{a}_{2}^{\dagger}, \dots), \quad \mathbf{d}^{T} = (d_{1}, d_{2}, \dots),$$

діагональна матриця

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \end{pmatrix},$$

а елементами матриці C є коефіцієнти c_{mn} . Також для скорочення запису введено позначення $g N_0/2 = \lambda$.

Щоб отримати гамільтоніан у діагональному вигляді

$$\hat{H} = \sum_{n} \epsilon_{n} \hat{\alpha}_{n}^{\dagger} \hat{\alpha}_{n} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\dagger} \mathfrak{E} \, \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad (\text{VI.25})$$

де \mathfrak{E} — діагональна матриця з елементами ϵ_n , можна застосувати узагальнення відомих u-v перетворень Боголюбова у такій формі:

$$\hat{\mathbf{a}} = X\hat{\boldsymbol{\alpha}} + Y\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\dagger T} + \mathbf{z}, \qquad \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\dagger}X + \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{T}Y + \mathbf{z}^{T}.$$
 (VI.26)

Тут X та Y — квадратні матриці безмежної розмірності, вимагатимемо, щоби вони були ермітовими (симетричними й дійсними, а **z** — вектор з дійсними компонентами. З комутаційних співвідношень (VI.20) випливає, що X та Y задовольняють таку умову:

$$X^2 - Y^2 = I, (VI.27)$$

де *I* — одинична матриця.

Легко показати, що лінійні доданки (вирази в перших дужках) у рівнянні (VI.24) спричиняють лише зсув енерґетичних рівнів, не змінюючи відстані між ними. Тому далі братимемо до уваги лише квадратичні за $\hat{\mathbf{a}}$ й $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ доданки в гамільтоніані.

Щоб занулити лінійні за $\hat{\pmb{\alpha}}$ члени в $\hat{H},$ вектор
 ${\bf z}$ мусить дорівнювати

$$\mathbf{z} = -2\lambda \sqrt{N_0} \left(\mathcal{E} + 6\lambda C\right)^{-1} \mathbf{d}.$$
 (VI.28)

Вимагаючи відсутності в гамільтоніані членів типу $\hat{\alpha}_{m}^{\dagger}\hat{\alpha}_{n}^{\dagger}$ і $\hat{\alpha}_{m}\hat{\alpha}_{n}$, отримаємо такі матричні рівняння:

$$X\mathcal{E}Y + 4\lambda XCY + \lambda XCX + \lambda YCY = 0, \qquad (VI.29)$$

$$Y\mathcal{E}X + 4\lambda YCX + \lambda XCX + \lambda YCY = 0.$$
(VI.30)

Матриця & дорівнює

$$\mathfrak{E} = X\mathcal{E}X + Y\mathcal{E}Y + 4\lambda(XCX + YCY) + 2\lambda(XCY + YCX), \quad (\text{VI.31})$$

а її власні значення визначають шуканий енерґетичний спектр.

Якщо у системі вимкнути міжатомну взаємодію (g = 0), то розв'язки матимуть вигляд X = I, Y = 0. Тому розкладемо матриці Xта Y у ряд за параметром λ :

$$X = I + 2\lambda^2 \chi^2 + \dots, \qquad Y = \lambda \upsilon + \lambda^2 \upsilon_1 + \dots$$
 (VI.32)

Матриці χ, v, v_1 можна знайти з рівнянь (VI.27)–(VI.30):

$$v = 2\chi;$$
 $\chi = -\mathcal{E}^{-1}C/2;$ $v_1 = 4 \,\mathcal{E}^{-1}C \mathcal{E}^{-1}C.$ (VI.33)

З точністю до λ^2 отримаємо для матриці
 $\mathfrak{E}:$

$$\mathfrak{E} = \mathcal{E} + 4\lambda C + \frac{\lambda^2}{2} \left\{ \left(\mathcal{E}^{-1}C \right)^2 \mathcal{E} - 3C\mathcal{E}^{-1}C - 2\mathcal{E}^{-1}C^2 \right\}, \quad (\text{VI.34})$$

а енергетичні рівні $\epsilon_n = \varepsilon_n + 4\lambda c_{nn} + \mathcal{O}(\lambda^2).$

Систему рівнянь (VI.27)–(VI.30) у загальному випадку розв'язувати складно, оскільки вони є нелінійними щодо безмежних матриць. Їх можна трактувати як систему матричних рівнянь Ріккаті:

$$XAY + XBX + YBY = 0, (VI.35)$$

$$YAX + XBX + YBY = 0, (VI.36)$$

$$X^2 - Y^2 - I = 0, (VI.37)$$

де $A = \mathcal{E} + 4\lambda C$, $B = \lambda C$. Чисельне (непертурбативне) розв'язування такої задачі потребує спеціальних підходів [31, 32].

За бозе-конденсації хімічний потенціал μ системи наближається до нуля, а повне число частинок визначається виразом:

$$N = N_0 + \sum_{n>0} \frac{1}{e^{\epsilon_n/T} - 1},$$
 (VI.38)

де N_0 — заповнення найнижчого енерґетичного рівня. Тому, знаючи N та енерґетичний спектр $\epsilon_n = \epsilon_n(\lambda) = \epsilon_n(gN_0)$ з власних значень (VI.34), можна розрахувати N_0 як функцію температури T. Тобто приходимо до самоузгодженої задачі, розв'язки якої дають змогу обчислити енерґію

$$E = E_0 + \sum_{n>0} \frac{\epsilon_n}{e^{\epsilon_n/T} - 1}$$
(VI.39)

та інші термодинамічні функції.

Оскільки $c_{nn} > 0$, то взаємодія зсуває енерґетичні рівні вгору, що ефективно відповідає легшим частинкам. Отже, температура бозеконденсації зростає. Проте варто зазначити, що запропонований підхід не є коректним для вищих температур — у цьому випадку потрібно враховувати більше доданків у гамільтоніані (VI.23).

VII. Сильна взаємодія

VII.1. Колективні змінні

Гамільтоніан системи N бозонів масою m з координатами \mathbf{r}_j з урахуванням багаточастинкових взаємодій має вигляд:

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_{j}^{2}}{2m} + \sum_{1 \le j < l \le N} \Phi(|\mathbf{r}_{j} - \mathbf{r}_{l}|) + \sum_{1 \le j < l < m \le N} \Phi_{3}(\mathbf{r}_{j}, \mathbf{r}_{l}, \mathbf{r}_{m}) + \dots, \quad (\text{VII.1})$$

де $\Phi(r)$ і $\Phi_3(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l, \mathbf{r}_m)$ — парний і тричастинковий потенціали, відповідно, а крапки відповідають доданкам з чотиричастинковими й вищими взаємодіями в потенціальної енергії.

Перейдемо до зображення колективних змінних

$$\rho_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j},\tag{VII.2}$$

а також введемо відповідні оператори похідної:

$$\partial_{\mathbf{k}} = \frac{\partial}{\partial \rho_{-\mathbf{k}}}.$$
 (VII.3)

За їх допомогою знайдемо вираз для оператора ∇_i :

$$\nabla_{j} = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \frac{\partial \rho_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{r}_{j}} \frac{\partial}{\partial \rho_{\mathbf{k}}} = -i \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \mathbf{k} \, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{j}} \frac{\partial}{\partial \rho_{\mathbf{k}}}$$

та його квадрата:

$$\begin{split} \nabla_{j}^{2} &= -i\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathbf{k}\,\nabla_{j}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{j}}\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{k}}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}k^{2}\,e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{j}}\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{k}}} - i\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathbf{k}\,e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{j}}\nabla_{j}\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{k}}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}k^{2}\,e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{j}}\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{k}}} - \\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\mathbf{k}\,e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{j}}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}'\neq 0}\mathbf{k}'\,e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}_{j}}\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{k}'}}\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{k}}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}k^{2}\,e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{j}}\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{k}}} + \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}k^{2}\frac{\partial}{\partial\rho_{-\mathbf{k}}}\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{k}}} - \\ &\quad -\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\sum_{\mathbf{k}'\neq 0}(\mathbf{k}'\mathbf{k})\,e^{-i(\mathbf{k}'+\mathbf{k})\mathbf{r}_{j}}\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{k}'}}\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{k}}}. \end{split}$$

Таким чином, оператор кінетичної енергії дорівнює:

$$\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^{N} \nabla_j^2 = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_k \left(\rho_{\mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{k}} - \partial_{\mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{k}} \right) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{k} \neq 0 \\ \mathbf{k} + \mathbf{k}' \neq 0}} \frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{k}' \mathbf{k}) \rho_{\mathbf{k}' + \mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{k}'} \partial_{-\mathbf{k}}, \quad (\text{VII.4})$$

де ε_k — енергія вільної частинки: $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2/2m$.

Розглянемо потенціальну енергію. Нехай фур'є-зображення потенціалу двочастинкової взаємодії дорівнює ν_k :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \nu_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \qquad (\text{VII.5})$$

а тричастинкову взаємодію перепишемо через подвійне перетворення Фур'є:

$$\Phi_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \nu_3(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k} - \mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + i\mathbf{k}'(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)}.$$
 (VII.6)

Потенціальна енергія парних взаємодій дорівнює:

$$\sum_{1 \le j < l \le N} \Phi(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \Phi(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Phi(0) =$$

$$= \frac{N}{2V} \sum_{\mathbf{k} \ne 0} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^N \nu_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_j - i\mathbf{k}\mathbf{r}_l} - \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k} \ne 0} \sum_{j=1}^N \nu_k +$$

$$+ \frac{1}{2V} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \nu_0 - \frac{1}{2V} \sum_{j=1}^N \nu_0 =$$

$$= \frac{N}{2V} \sum_{\mathbf{k} \ne 0} \nu_k \left(\rho_{\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{k}} - 1\right) + \frac{N(N-1)}{2V} \nu_0.$$

Загалом, у першій сумі одиницю можна не об'єднувати зі змінними $\rho_{\mathbf{k}}$, проте така форма запису виявляється зручнішою для чисельних розрахунків.

Аналогічно отримаємо потенціальну енерґію тричастинкових взаємодій:

$$\begin{split} \sum_{1 \le j < l < m \le N} & \Phi_3(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l, \mathbf{r}_m) = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \Phi(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l, \mathbf{r}_m) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N \Phi(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_m) + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^N \Phi(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j) = \dots = \\ & = \frac{N^2}{6V^2} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{k} \neq 0 \ \mathbf{k}' \neq 0}} \sum_{\mathbf{k}' \neq 0} \nu_3(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k} - \mathbf{k}') \rho_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}'} \rho_{\mathbf{k} + \mathbf{k}'} + \\ & + \frac{N(N-1)}{2V^2} \sum_{\substack{\mathbf{k} \neq 0}} \nu_3(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, 0) \left(\rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} - 1\right) + \\ & + \frac{N(N-1)(N-2)}{6V^2} \nu_3(0, 0, 0). \end{split}$$

▼ Завдання VII.1. Отримайте наведений вираз для тричастинкового потенціалу через фур'є-зображення ν₃(k, k', -k - k'), діючи за аналогією з перетвореннями для потенціалу парних взаємодій. Збираючи разом отримані вирази для операторів кінетичної і потенціальної енергій, остаточно запишемо гамільтоніан у вигляді

$$\hat{H} = \operatorname{const} + \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \left\{ \varepsilon_{k} \left(\rho_{\mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{k}} - \partial_{\mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{k}} \right) + \frac{N}{2V} \tilde{\nu}_{k} \left(\rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} - 1 \right) \right\} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \left\{ \frac{\hbar^{2}}{2m} \mathbf{k} \mathbf{q} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \partial_{-\mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{q}} + \frac{N^{2}}{\mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0} \left\{ \frac{N^{2}}{6V^{2}} \nu_{3} (\mathbf{k} + \mathbf{q}, -\mathbf{k}, -\mathbf{q}) \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{q}} + \frac{N^{3}}{8V^{3}} \nu_{4} (\mathbf{k}, -\mathbf{k}, \mathbf{q}, -\mathbf{q}) \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \right\}.$$
(VII.7)

Величина ν_4 — це фур'є-зображення чотиричастинкового потенціалу, внесок від якого вичерпує багаточастинкові взаємодії в записаному наближенні двох сум за хвильовим вектором, тобто наступному після хаотичних фаз. Через 'const' позначено неоператорні доданки, які надалі в гамільтоніані враховувати не будемо. Позначення $\tilde{\nu}_k$ відповідає ефективному парному потенціалові:

$$\tilde{\nu}_k = \nu_k + \frac{N-1}{V} \nu_3(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, 0).$$
(VII.8)

Зрозуміло, що в термодинамічній границі можна знехтувати виразами 1/V порівняно з густиною N/V, що дасть змогу переписати гамільтоніан трохи компактніше.

Далі ми розглянемо метод розрахунку, за допомогою якого можна встановити відповідність міжатомних потенціалів і певних величин, які порівняно просто визначити на експерименті.

VII.2. Хвильова функція основного стану

Оскільки хвильова функція системи бозонів симетрична за координатами частинок $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N$, то її можна також переписати через колективні змінні $\rho_{\mathbf{k}}$. Використаємо такий вираз для хвильової функції основного стану [35]:

$$\Psi(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N) = C \exp\left\{\sum_{n\geq 2} \frac{N^{1-n/2}}{n!} \sum_{\mathbf{k}_1\neq 0} \dots\right.$$
(VII.9)

$$\ldots \sum_{\mathbf{k}_n \neq 0} \delta(\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_n) a_n(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n) \rho_{\mathbf{k}_1} \ldots \rho_{\mathbf{k}_n} \bigg\},\$$

де запис у вигляді експоненти враховує, що в основному стані функція не має вузлів. З рівняння Шрьодінґера $\hat{H}\Psi = E_0\Psi$, збираючи коефіцієнти при однакових "степенях" $\rho_{\mathbf{k}}$, отримаємо рівняння для коефіцієнтних функцій a_n .

Розглянемо найпростіше наближення, зберігаючи в гамільтоніані лише доданки з однією сумою за хвильовим вектором:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \left\{ \varepsilon_k \left(\rho_{\mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{k}} - \partial_{\mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{k}} \right) + \frac{N}{2V} \tilde{\nu}_k \left(\rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} - 1 \right) \right\}, \quad (\text{VII.10})$$

як і в експоненті хвильової функції — залишаючи лише доданок із *a*₂:

$$\Psi = C \exp\left\{\sum_{\mathbf{q}\neq 0} a_2(\mathbf{q})\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right\}.$$
 (VII.11)

З коефіцієнта при $\rho_{\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{k}}$ матимемо рівняння:

$$\frac{N}{2V}\,\tilde{\nu}_k + \varepsilon_k\,a_2(\mathbf{k}) - \varepsilon_k\,a_2^2(\mathbf{k}) = 0.$$
(VII.12)

▼ Завдання VII.2. Покажіть, що для фур'є-зображення тричастинкового потенціалу можна отримати таке рівняння, якщо врахувати в гамільтоніані і хвильовій функції доданки з двома сумами за хвильовим вектором:

$$\frac{N^{2}}{V^{2}}\nu_{3}(\mathbf{k}_{1},\mathbf{k}_{2},\mathbf{k}_{3}) + \\
+ \frac{\hbar^{2}}{m} \left[\mathbf{k}_{1}\mathbf{k}_{2} a_{2}(\mathbf{k}_{1})a_{2}(\mathbf{k}_{2}) + \mathbf{k}_{1}\mathbf{k}_{3} a_{2}(\mathbf{k}_{1})a_{2}(\mathbf{k}_{3}) + \mathbf{k}_{2}\mathbf{k}_{3} a_{2}(\mathbf{k}_{2})a_{2}(\mathbf{k}_{3})\right] + \\
+ a_{3}(\mathbf{k}_{1},\mathbf{k}_{2},\mathbf{k}_{3}) \left\{ \varepsilon_{k_{1}} \left[1 - 2a_{2}(\mathbf{k}_{1})\right] + \varepsilon_{k_{2}} \left[1 - 2a_{2}(\mathbf{k}_{2})\right] + \\
+ \varepsilon_{k_{3}} \left[1 - 2a_{2}(\mathbf{k}_{3})\right] \right\} = 0, \quad (\text{VII.13})$$

причому тут мається на увазі закон збереження імпульсу:

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0.$$

VII.3. Міжатомні потенціали

Виявляється, що коефіцієнтні функції a_n можна пов'язати зі статичними структурними факторами. Зокрема, парний (двочастинковий) структурний фактор S_k визначається як середнє

$$S_k = \langle \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} \rangle,$$
 (VII.14)

а тричастинковий, відповідно, як середнє

$$S_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \frac{1}{\sqrt{N}} \langle \rho_{\mathbf{k}_1} \rho_{\mathbf{k}_2} \rho_{\mathbf{k}_3} \rangle.$$
(VII.15)

Легко зауважити, що ці означення дають змогу виразити структурні фактори як варіаційні похідні від конфіґураційного інтеґрала $Q = \int (d\rho) |\Psi|^2$ (інтеґрування відбувається за всіма змінними $\rho_{\bf k}$):

$$S_k = \frac{\delta Q}{\delta a_2(\mathbf{k})}, \qquad (\text{VII.16})$$

$$S_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \frac{\delta Q}{\delta a_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}.$$
 (VII.17)

Можна показати [35], що внаслідок низки перетворень отримаємо такий зв'язок у наближенні хаотичних фаз для парного структурного фактора:

$$S_k = \frac{1}{1 - 2a_2(\mathbf{k})},\tag{VII.18}$$

та в разі врахування вищого наближення — для тричастинкового структурного фактора [41]:

$$S_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = S_{k_1} S_{k_2} S_{k_3} [1 + 2a_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)].$$
(VII.19)

Як наслідок, міжатомні потенціали виявляються пов'язаними зі структурними факторами.

На рис. VII.1 зображено результати розрахунку парного потенціалу міжатомної взаємодії для атомів гелію-4 порівняно з модельними потенціалами Леннарда-Джонса й Азіза [42]. Як видно, для отримання задовільного кількісного узгодження наближення хаотичних фаз виявляється замало. Ефективне ж розштовхування атомів унаслідок тричастинкових та вищих взаємодій приводить до зсуву мінімуму потенціалу праворуч, правильних значень можна досягти, виокремивши ефекти від тричастинкових взаємодій [41].

▼ Завдання VII.3. Покажіть, що в конволюційному наближенні $S_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = S_{k_1} S_{k_2} S_{k_3}$ тричастинковий потенціал можна отримати у вигляді:

$$\Phi_{3}(\mathbf{r}_{1}, \mathbf{r}_{2}, \mathbf{r}_{3}) = \frac{\hbar^{2}}{4m} \left\{ \frac{\mathbf{r}_{1} \mathbf{r}_{2}}{r_{1} r_{2}} C'(r_{1}) C'(r_{2}) + \frac{\mathbf{r}_{1} \mathbf{r}_{3}}{r_{1} r_{3}} C'(r_{1}) C'(r_{3}) - \frac{\mathbf{r}_{2} \mathbf{r}_{3}}{r_{2} r_{3}} C'(r_{2}) C'(r_{3}) \right\}, \qquad (\text{VII.20})$$

де C(r) — пряма кореляційна функція:

$$C(r) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left(1 - \frac{1}{S_k} \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$
 (VII.21)

На рис. VII.2 наведено результати розрахунку тричастинкового потенціалу [41].

Зазначимо, що характерні осциляції парного і тричастинкового потенціалів на великих відстанях є наслідком квантової природи взаємодій.



Рис. VII.1. Парний потенціал $\Phi(r)$ гелію [42]: а) суцільна лінія, 1 — результат розрахунку в наближенні, наступному після хаотичних фаз, якому відповідає штрихова лінія, 2; б) розрахований потенціал (суцільна лінія, 1) порівняно з модельним потенціалом Азіза [39] (штрихова лінія, 2) і Леннарда-Джонса (штрихпунктирна лінія, 3)



Рис. VII.2. Тричастинковий потенціал гелію для різних конфіґурацій. Верхній рисунок — $\widehat{\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2} = \pi/3$; нижній рисунок — $\widehat{\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2} = \pi/2$ (див. кольорове зображення на 4-й сторінці обкладинки)

VII.4. Розрахунок термодинамічних функцій: двочасові температурні функції Ґріна

Двочасові температурні функції Ґріна визначають так [37, 38]:

$$\langle\!\langle \hat{A}(t) | \hat{B}(t') \rangle\!\rangle = i\theta(t - t') \langle [\hat{A}(t), \hat{B}(t')] \rangle, \qquad (\text{VII.22})$$

де оператори \hat{A}, \hat{B} задано у зображенні Гайзенберґа,
а $\theta(t)$ — тета-функція Гевісайда.

Використовуючи частотне зображення функцій Ґріна, можна знайти середні значення добутку операторів [37, 38]:

$$\langle A(t)B(t')\rangle \equiv \hat{\mathcal{A}}G_{BA}(\hbar\omega) =$$
(VII.23)
$$= i \int_{-\infty}^{+\infty} d\hbar\omega \frac{G_{BA}(\hbar\omega + i\eta) - G_{BA}(\hbar\omega - i\eta)}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \bigg|_{\eta \to +0} e^{i\omega(t-t')},$$

де позначення G_{BA} використано для функції $\langle\!\langle \hat{B} | \hat{A} \rangle\!\rangle$. Оператор $\hat{\mathcal{A}}$ введено для зручності, правила роботи з ним мають вигляд:

$$\hat{\mathcal{A}} \frac{1}{\hbar\omega \pm \varepsilon} = \frac{2\pi}{e^{\mp \varepsilon/T} - 1}, \\ \hat{\mathcal{A}} \frac{1}{\hbar^2 \omega^2 - \varepsilon^2} = \frac{\pi}{\varepsilon} \operatorname{cth} \frac{\varepsilon}{2T},$$

у чому нескладно переконатися безпосереднім розрахунком. Як правило, ми вважатимемо, що часові арґументи операторів $\hat{A}(t)$ та $\hat{B}(t')$ збігаються: t - t' = 0. Це дасть статичні властивості системи, у протилежному випадку можна отримати динамічні характеристики, наприклад, динамічний структурний фактор як середнє $\langle \rho(t)\rho(t')\rangle$.

Рівняння руху для зображень Фур'є запишемо так:

$$\hbar\omega \langle\!\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle\!\rangle = \frac{1}{2\pi} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle + \langle\!\langle [\hat{A}, \hat{H}] | \hat{B} \rangle\!\rangle.$$
(VII.24)

Розглядатимемо двочасові температурні функції Ґріна, побудовані на операторах $\rho_{\mathbf{k}}$ і $\partial_{\mathbf{k}}$. Комутаційне співвідношення для них має вигляд

$$[\rho_{\mathbf{k}}, \partial_{-\mathbf{k}'}] = -\delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}.\tag{VII.25}$$

Використовуватимемо позначення $G_{\rho\rho}(\mathbf{k})$ для функцій $\langle\!\langle \rho_{\mathbf{k}} | \rho_{-\mathbf{k}} \rangle\!\rangle$, $G_{\rho\partial}(\mathbf{k})$ для $\langle\!\langle \rho_{\mathbf{k}} | \partial_{-\mathbf{k}} \rangle\!\rangle$ тощо.

Потрібно зазначити, що в рівняннях руху внаслідок наявності комутатора з гамільтоніаном постійно виникатимуть функції з дедалі більшою кількістю операторів: $\langle\!\langle \rho \rho | \rho \rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle \rho \rho \rho | \rho \rangle\!\rangle$ і т. п., а тому розв'язування системи рівнянь руху є досить складним завданням, яке вимагає на певному етапі ввести якесь замикання, розщепивши вищі функції Ґріна через нижчі (з меншою кількістю операторів). Для ілюстрації ж самого методу розрахунків ми далі обмежимося в гамільтоніані лише доданками з однією сумою за хвильовим вектором (наближення хаотичних фаз), у якому система рівнянь руху виявляється замкненою.

Провівши необхідні розрахунки, отримаємо такі рівняння руху:

$$\begin{split} \hbar\omega G_{\rho\rho}(\mathbf{k}) &= -\varepsilon_k G_{\rho\rho}(\mathbf{k}) + 2\varepsilon_k G_{\partial\rho}(\mathbf{k}), \\ \hbar\omega G_{\partial\rho}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2\pi} + \varepsilon_k G_{\partial\rho}(\mathbf{k}) + \frac{N}{V} \nu_k G_{\rho\rho}(\mathbf{k}), \\ \hbar\omega G_{\rho\partial}(\mathbf{k}) &= -\frac{1}{2\pi} - \varepsilon_k G_{\rho\partial}(\mathbf{k}) + 2\varepsilon_k G_{\partial\partial}(\mathbf{k}), \\ \hbar\omega G_{\partial\partial}(\mathbf{k}) &= \varepsilon_k G_{\partial\partial}(\mathbf{k}) + \frac{N}{V} \nu_k G_{\rho\partial}(\mathbf{k}). \end{split}$$
(VII.26)

Розв'язуючи ці рівняння, отримаємо такі результати:

$$G_{\rho\rho}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \frac{2\varepsilon_k}{\hbar^2 \omega^2 - \varepsilon_k^2 \tilde{\alpha}_k^2}, \qquad G_{\rho\partial}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon_k - \hbar\omega}{\hbar^2 \omega^2 - \varepsilon_k^2 \tilde{\alpha}_k^2},$$
(VII.27)
$$G_{\partial\partial}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{N}{V} \nu_k}{\hbar^2 \omega^2 - \varepsilon_k^2 \tilde{\alpha}_k^2}, \qquad G_{\partial\rho}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon_k + \hbar\omega}{\hbar^2 \omega^2 - \varepsilon_k^2 \tilde{\alpha}_k^2}.$$

Для обчислення термодинамічних функцій системи знайдемо енерґію як середнє від гамільтоніана (для спрощення константи опустимо):

$$E = \langle \hat{H} \rangle =$$
(VII.28)
$$= \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left\{ \varepsilon_k \left(\langle \rho_{\mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{k}} \rangle - \langle \partial_{\mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{k}} \rangle \right) + \frac{N}{2V} \tilde{\nu}_k \langle \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} \rangle \right\}.$$

Структурний фактор бозе-рідини дорівнює середньому
 $\langle \rho_{\bf k} \rho_{-{\bf k}} \rangle,$ тобто:

$$S_k(T) = \hat{\mathcal{A}} G_{\rho\rho}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\tilde{\alpha}_k} \operatorname{cth} \frac{\varepsilon_k \tilde{\alpha}_k}{2T}.$$
 (VII.29)

Тильда над α_k означає наявність доданків, відповідальних за тричастинкові взаємодії. Якщо ними знехтувати, то отримаємо точно боголюбівське α_k , записане для слабконеідеального бозе-газу [30]:

$$\alpha_k = \sqrt{1 + \frac{2N}{V} \frac{\nu_k}{\varepsilon_k}}.$$
 (VII.30)

Для інших потрібних нам середніх після нескладних перетворень матимемо:

$$\langle \rho_{\mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{2} (S_k - 1), \qquad \langle \partial_{\mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{k}} \rangle = \frac{1 - \tilde{\alpha}_k^2}{4} S_k.$$
 (VII.31)

Як наслідок, енергія дорівнюватиме:

$$E = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \frac{\varepsilon_k}{2} \left\{ \tilde{\alpha}_k \operatorname{cth} \frac{\varepsilon_k \tilde{\alpha}_k}{2T} - 1 \right\}.$$
 (VII.32)

VII.5. Енергетичний спектр бозонної суміші

Розглянемо двокомпонентну бозонну суміш атомів сорту a і сорту b з масами m_a і m_b , відповідно. Гамільтоніан такої системи має вигляд:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N_a} \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m_a} + \sum_{j=1}^{N_b} \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m_b} + \sum_{1 \le j < l \le N_a} \Phi_a(|\mathbf{r}_j^a - \mathbf{r}_l^a|) + \sum_{1 \le j < l \le N_a} \Phi_b(|\mathbf{r}_j^b - \mathbf{r}_l^b|) + (\text{VII.33}) + \sum_{j=1}^{N_a} \sum_{l=1}^{N_b} \Phi_{ab}(|\mathbf{r}_j^a - \mathbf{r}_l^b|),$$

де $\Phi_a(r)$, $\Phi_b(r)$ — потенціали міжчастинкової взаємодії атомів відповідних сортів, а $\Phi_{ab}(r)$ — потенціал міжсортової взаємодії.

Перейшовши до колективних змінних

$$\rho_{\mathbf{k}}^{a,b} = \frac{1}{\sqrt{N_{a,b}}} \sum_{m=1}^{N_{a,b}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_{m}^{a,b}}, \qquad \partial_{\mathbf{k}}^{a,b} = \frac{\partial}{\partial\rho_{-\mathbf{k}}^{a,b}}, \qquad (\text{VII.34})$$

запишемо гамільтоніан з точністю до однієї суми за хвильовим вектором:

$$H = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \left\{ \varepsilon_{\mathbf{k}}^{a} \left(\rho_{\mathbf{k}}^{a} \partial_{-\mathbf{k}}^{a} - \partial_{\mathbf{k}}^{a} \partial_{-\mathbf{k}}^{a} \right) + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{b} \left(\rho_{\mathbf{k}}^{b} \partial_{-\mathbf{k}}^{b} - \partial_{\mathbf{k}}^{b} \partial_{-\mathbf{k}}^{b} \right) \right\} + \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \left\{ \frac{N_{a}}{2V} \nu_{a}(\mathbf{k}) \left(\rho_{\mathbf{k}}^{a} \rho_{-\mathbf{k}}^{a} - 1 \right) + \frac{N_{b}}{2V} \nu_{b}(\mathbf{k}) \left(\rho_{\mathbf{k}}^{b} \rho_{-\mathbf{k}}^{b} - 1 \right) + \frac{\sqrt{N_{a}N_{b}}}{V} \nu_{ab}(\mathbf{k}) \rho_{-\mathbf{k}}^{a} \rho_{\mathbf{k}}^{b} \right\} + E_{0}, \qquad (\text{VII.35})$$

де

$$\begin{split} \varepsilon_k^a &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m_a}, \qquad \varepsilon_k^b = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_b}, \\ E_0 &= \frac{N_a (N_a - 1)}{2V} \nu_a(0) + \frac{N_b (N_b - 1)}{2V} \nu_b(0) + \frac{N_a N_b}{V} \nu_{ab}(0). \end{split}$$

Увівши, як і раніше, двочасові температурні функції Ґріна:

$$G^{aa}_{\rho\rho} = \langle\!\langle \rho^a | \rho^a \rangle\!\rangle, \quad G^{bb}_{\rho\rho} = \langle\!\langle \rho^b | \rho^b \rangle\!\rangle, \quad G^{ab}_{\rho\rho} = \langle\!\langle \rho^a | \rho^b \rangle\!\rangle, \quad G^{ba}_{\rho\rho} = \langle\!\langle \rho^b | \rho^a \rangle\!\rangle,$$

$$G^{aa}_{\partial\rho} = \langle\!\langle \partial^a | \rho^a \rangle\!\rangle, \quad G^{bb}_{\partial\rho} = \langle\!\langle \partial^b | \rho^b \rangle\!\rangle, \quad G^{ab}_{\partial\rho} = \langle\!\langle \partial^a | \rho^b \rangle\!\rangle, \quad G^{ba}_{\partial\rho} = \langle\!\langle \partial^b | \rho^a \rangle\!\rangle,$$

можна записати для них систему рівнянь руху.

▼ Завдання VII.4. Отримайте систему рівнянь руху для виписаних вище функцій Ґріна та знайдіть її розв'язки.

▲

Нескладно зауважити, що отримана система восьми рівнянь розпадається на дві незалежні по чотири рівняння в кожній. Розв'язком, наприклад, буде така функція Ґріна:

$$G^{aa}_{\rho\rho}(\omega) = \frac{\varepsilon_q^a}{\pi} \frac{\omega^2 - (E_q^b)^2}{\left[\omega^2 - (E_q^a)^2\right] \left[\omega^2 - (E_q^b)^2\right] - \nu^2}, \quad \text{(VII.36)}$$

де введено такі позначення:

$$E_{a,b} = \varepsilon_q^{a,b} \alpha_q^{a,b} \qquad \alpha_q^{a,b} = \sqrt{1 + \frac{2N_{a,b}}{V} \frac{\nu_{a,b}(q)}{\varepsilon_q^{a,b}}}, \qquad \nu^2 = \frac{N_a N_b}{V^2} \frac{4\nu_{ab}^2(q)}{\varepsilon_q^a \varepsilon_q^b}.$$

Додатні полюси $\omega_{1,2}$ визначають гілки спектра елементарних збуджень, пор. [43]:

$$\mathcal{E}_{q}^{(1,2)} = \omega_{1,2} =$$
(VII.37)
= $\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(E_{q}^{b})^{2} + (E_{q}^{a})^{2} \pm \sqrt{\left[(E_{q}^{b})^{2} - (E_{q}^{a})^{2}\right]^{2} - 4\nu^{2}}}.$

Якщо вимкнути міжсортову взаємодію ($\nu = 0$), то отримаємо, як і треба було очікувати, дві незалежні гілки E_a^a та E_a^b .

Зазначимо, що експериментально часто досліджують бозонні суміші ізотопів важких елементів із близькими масами, $m_a \simeq m_b$ (наприклад, іттербієві ізотопи ¹⁷⁴Yb і ¹⁷⁶Yb [40]). У такому випадку можна ще трохи спростити вираз для спектра:

$$\mathcal{E}_{q}^{(1,2)} = \frac{\varepsilon_{q}}{\sqrt{2}} \sqrt{(\alpha_{q}^{b})^{2} + (\alpha_{q}^{a})^{2}} \pm \sqrt{\left[(\alpha_{q}^{b})^{2} - (\alpha_{q}^{a})^{2}\right]^{2} - 4\nu^{2}}, \quad (\text{VII.38})$$

де

$$\varepsilon_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}, \qquad m = \frac{m_a + m_b}{2}$$

VIII. Системи зі скінченною кількістю частинок

Експериментальні дослідження бозонів, і зокрема явища бозе-конденсації, стосуються переважно вивчення властивостей систем у зовнішніх потенціалах — пастках, які з доброю точністю можна змоделювати квадратичною залежністю від відстані. Крім того, зазвичай кількість частинок N у таких експериментах є порівняно невеликою і має порядок від тисяч до мільйонів, тому важливим є з'ясування ефектів, пов'язаних зі скінченністю N.

З міркувань загальності розглянемо D-вимірну систему N осциляторів з частотою ω (вважатимемо їх поки що ізотропними, поширення результатів на анізотропний випадок виявляється нескладним).

VIII.1. Квазікласичне наближення

Спочатку пригадаємо квазікласичні міркування для такої задачі. Енергія частинки масою *m* дорівнює:

$$\varepsilon(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2},$$
 (VIII.1)

причому $p^2 = p_1^2 + \ldots + p_D^2$, $q^2 = q_1^2 + \ldots + q_D^2$. Відповідно, перейдемо відразу до сферичних координат і за змінними p, і за q. Кількість частинок дорівнює:

$$N = N_0 + \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int_{\substack{\text{cl.turn.}\\\text{points}}} \frac{(dp)(dq)}{z^{-1}e^{\varepsilon(p,q)/T} - 1},$$
 (VIII.2)

де виокремлено основний стан з кількістю частинок $N_0 = z/(1-z)$. Отже,

$$\begin{split} N &= \frac{z}{1-z} + \frac{\Omega_D^2}{(2\pi\hbar)^D} \int_0^\infty dp \ p^{D-1} \int_{\substack{\text{cl.turn.} \\ \text{points}}} \frac{q^{D-1} \, dq}{z^{-1} e^{\varepsilon(p,q)/T} - 1} = \\ &= \begin{bmatrix} p = \sqrt{2m \left(\varepsilon - m\omega^2 q^2/2\right)} \\ dp = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - m\omega^2 q^2/2}} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{z}{1-z} + \frac{\Omega_D^2 (2m)^{D/2}}{2(2\pi\hbar)^D} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - 1} \times \\ &\times \int_0^{\sqrt{2\varepsilon/m\omega^2}} dq \ q^{D-1} \left(\varepsilon - \frac{m\omega^2 q^2}{2}\right)^{D/2-1} = \\ &= \frac{z}{1-z} + \frac{\Omega_D^2 (2m)^{D/2}}{4(2\pi\hbar)^D} \left(\frac{2}{m\omega^2}\right)^{D/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{D-1} d\varepsilon}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - 1} \times \\ &\times \int_0^1 dx \ x^{D/2-1} (1-x)^{D/2-1} . \\ &\times \int_{(D/2, D/2) = \Gamma^2 (D/2)/\Gamma(D)}^{1} \end{split}$$

Спрощуючи цей вираз, остаточно матимемо:

$$N = \frac{z}{1-z} + \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \operatorname{Li}_D(z).$$
(VIII.3)

Звідси можемо знайти критичну температуру $T_c^{(0)}$, за якої відбувається бозе-конденсація, з умов, що z = 1 і кількість частинок в основному стані $N_0 = z/(1-z)$ дорівнює нулеві:

$$N = \left(\frac{T_c^{(0)}}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D), \qquad (\text{VIII.4})$$

звідки:

$$T_c^{(0)} = \hbar \omega \left(\frac{N}{\zeta(D)}\right)^{1/D}.$$
 (VIII.5)

Зазначимо, що для системи осциляторів термодинамічна границя визначається вже не співвідношенням кількості частинок і об'єму (який не є параметром задачі). Натомість із записаного виразу бачимо, що фіксована температура переходу відповідає границі

$$\omega N^{1/D} = \text{const}$$
 при $N \to \infty, \ \omega \to 0.$ (VIII.6)

Температурну залежність конденсатної фракції (нагадаємо, що для $T < T_c^{(0)}$ активність z = 1) легко розрахувати на підставі виразів (VIII.3), (VIII.5):

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^{(0)}}\right)^D.$$
 (VIII.7)

На рис. VIII.1 зображено цю залежність для різних значень N. Як свідчить цей графік, навіть за невеликого значення кількості частинок (N = 100 і 1000) помітна різниця лише в безпосередньому околі критичної температури.

VIII.2. Скінченна кількість бозонів у просторі з D > 2

Проаналізуємо системи з дискретним спектром, відмовившись таким чином від заміни суми за станами через інтеґрал з відповідною густиною станів. Для числа заповнення *j*-го рівня з енерґією ε_j маємо:

$$n_j = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_j/T} - 1} = ze^{-\varepsilon_j/T} \frac{1}{1 - ze^{-\varepsilon_j/T}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} e^{-\ell\varepsilon_j/T}.$$
 (VIII.8)

Повна кількість частинок дорівнює

$$N = \sum_{j=0}^{\infty} n_j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} e^{-\ell \varepsilon_j/T}.$$
 (VIII.9)



Рис. VIII.1. Конденсатна фракція у тривимірному випадку як функція температури у квазікласичному наближенні для кількості частинок N = 100 (штрихпунктирна лінія), 1000 (штрихова лінія) і 10^6 (суцільна лінія)

Перепишемо цей вираз, враховуючи для енергії *j*-го рівня розклад за квантовими числами *D*-вимірного осцилятора j_1, \ldots, j_D :

$$N = \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\ell \varepsilon_j/T} = \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} \sum_{j_1=0}^{\infty} e^{-\ell \hbar \omega j_1/T} \dots \sum_{j_D=0}^{\infty} e^{-\ell \hbar \omega j_D/T} = \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} \left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\ell \hbar \omega j/T} \right)^D = \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} \left(\frac{1}{1 - e^{-\ell \hbar \omega/T}} \right)^D. \quad (\text{VIII.10})$$

Звернемо увагу, що у виразі (VIII.9) сума за ℓ стає розбіжною при $z \to 1$ через доданок із j = 0. Тому виділимо в (VIII.9) цю розбіжність, переписавши тотожно рівність у вигляді

$$N = \frac{z}{1-z} + \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} \left[\frac{1}{\left(1 - e^{-\ell\hbar\omega/T}\right)^D} - 1 \right].$$
 (VIII.11)

У цьому виразі перейдемо до границі $T/\hbar\omega \gg 1$, яка відповідає більшості експериментальних параметрів. Простий розклад з точністю до двох головних внесків дає:

$$\frac{1}{\left(1 - e^{-\ell\hbar\omega/T}\right)^{D}} = \frac{1}{\left[\ell\frac{\hbar\omega}{T} - \frac{\ell^{2}}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^{2} \pm \ldots\right]^{D}} \simeq$$
$$\simeq \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^{D} \frac{1}{\ell^{D}} \left[1 + \frac{D}{2}\ell\frac{\hbar\omega}{T}\right].$$

Як наслідок, для кількості частинок матимемо:

$$N = \frac{z}{1-z} + \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^{D} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell}}{\ell^{D}} + \frac{D}{2} \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^{D-1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell}}{\ell^{D-1}} =$$

$$(VIII.12)$$

$$= \frac{z}{1-z} + \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^{D} \operatorname{Li}_{D}(z) + \frac{D}{2} \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^{D-1} \operatorname{Li}_{D-1}(z).$$

▼ Завдання VIII.1. Покажіть, що для анізотропного осциляторного потенціалу з частотами $\omega_1, \ldots, \omega_D$ вираз для кількості частинок можна записати у вигляді:

$$N = \frac{z}{1-z} + \left(\frac{T}{\hbar\omega_{\rm g}}\right)^D \operatorname{Li}_D(z) + \frac{D}{2} \left(\frac{T}{\hbar\omega_{\rm g}}\right)^{D-1} \frac{\omega_{\rm a}}{\omega_{\rm g}} \operatorname{Li}_{D-1}(z), \text{ (VIII.13)}$$

де введено, відповідно, позначення для середнього арифметичного і середнього геометричного частот:

$$\omega_{\rm a} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{D} \omega_i, \qquad \omega_{\rm g} = \left(\prod_{i=1}^{D} \omega_i\right)^{1/D}. \tag{VIII.14}$$

Перші два доданки у виразі (VIII.12) відповідають розглянутому раніше квазікласичному наближенню (VIII.3). Знайдемо поправки до цього наближення, пов'язані зі скінченністю кількості частинок, проаналізувавши вирази для критичної температури. Із (VIII.12) маємо:

$$N = \left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D) + \frac{D}{2} \left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^{D-1} \zeta(D-1).$$
(VIII.15)

Зазначимо, що останній доданок визначає умову застосовності подальшого підходу D > 2. Одновимірний і двовимірний випадки проаналізуємо згодом.

Виражаючи з (VIII.5)

$$\frac{\zeta(D)}{(\hbar\omega)^D} = N\left(\frac{1}{T_c^{(0)}}\right)^D,$$

після елементарних перетворень матимемо:

$$\left(\frac{T_c}{T_c^{(0)}}\right)^D = 1 - \frac{D}{2} \frac{\zeta(D-1)}{[\zeta(D)]^{1-1/D}} \left(\frac{T_c}{T_c^{(0)}}\right)^{D-1} N^{-1/D}.$$
 (VIII.16)

Запишемо тепер відношення критичних температур у вигляді:

$$\frac{T_c}{T_c^{(0)}} = 1 - \alpha N^{-1/D}$$

і знайдемо значення множника
 $\alpha,$ зберігаючи в (VIII.16) лише лінійні за малою поправкою
 $\sim N^{-1/D}$ доданки:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\zeta(D-1)}{[\zeta(D)]^{1-1/D}},$$

і для критичної температури матимемо поправку, пов'язану зі скінченністю кількості частинок:

$$T_c = T_c^{(0)} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\zeta(D-1)}{[\zeta(D)]^{1-1/D}} N^{-1/D} \right\}.$$
 (VIII.17)

Вираз (VIII.7) для температурної залежності конденсатної фракції виявляється добрим наближенням і у випадку скінченної кількості частинок, потрібно лише замінити температуру $T_c^{(0)}$ на T_c :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^D.$$
 (VIII.18)

Відповідні результати чисельних розрахунків наведено на рис. VIII.2.



Рис. VIII.2. Конденсатна фракція у тривимірному випадку як функція температури у квазікласичному наближенні для кількості частинок N = 1000. Пунктирна лінія відповідає формулі (VIII.3), штрихова — (VIII.7), суцільна — (VIII.12), штрихпунктирна — (VIII.18)

VIII.3. Одновимірний випадок

В одновимірному випадку для кількості частинок маємо:

$$N = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell}}{1 - e^{-\ell\hbar\omega/T}}.$$
 (VIII.19)

Як і раніше, ви
окремимо розбіжність $z \to 1$ і зробимо деякі елементарні перетворення:

$$N = \frac{z}{1-z} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell} e^{-\ell\hbar\omega/T}}{1 - e^{-\ell\hbar\omega/T}} = \frac{z}{1-z} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell} e^{-\ell\hbar\omega/2T}}{2\operatorname{sh}(\ell\hbar\omega/2T)}.$$

У границі $T/\hbar\omega \gg 1$ отримаємо:

$$N = \frac{z}{1-z} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell} e^{-\ell\hbar\omega/2T}}{\ell\hbar\omega/T} = \frac{z}{1-z} - \frac{T}{\hbar\omega} \ln\left(1 - z e^{-\hbar\omega/2T}\right).$$
(VIII.20)



Рис. VIII.3. Конденсатна фракція в одновимірному гармонічному потенціалі як функція температури, розрахована з (VIII.20) для кількості частинок N = 100 (штрихпунктирна лінія) 1000 (пунктирна лінія), 10^6 (штрихова лінія) і 10^9 (суцільна лінія)

Критичну температуру, як і в попередніх випадках, визначимо з умов: $N_0 = z/(1-z) = 0$, z = 1. Розкладаючи додатково експоненту в ряд, матимемо таке трансцендентне рівняння на знаходження критичної температури:

$$N = \frac{T_c}{\hbar\omega} \ln \frac{2T_c}{\hbar\omega}.$$
 (VIII.21)

Зрозуміло, що при збереженні головного внеску двійкою під логарифмом можна знехтувати.

Якщо розглянути цей вираз у термодинамічній границі (VIII.6), тобто $\omega N = \text{const}$ при $N \to \infty$, $\omega \to 0$, то отримаємо $T_c = 0$, інакше кажучи, бозе-конденсація в безмежній одновимірній системі осциляторів не відбувається. Потрібно зазначити, що міркування, які привели до формулювання термодинамічної границі у вигляді (VIII.6), загалом, справедливі при D > 1, проте поширення на випадок D = 1зі збереженням форми співвідношення можна зробити й на підставі інших міркувань (див., наприклад, [47, 48]). Ймовірно, однак, що питання цього означення саме для одновимірного випадку не можна вважати до кінця з'ясованим.

▼ Завдання VIII.2. Зважаючи на те, що густина станів двовимірної системи у скриньці залежить від енерґії так само, як і густина станів одновимірних осциляторів, проаналізуйте питання критичної температури такої двовимірної системи зі скінченною кількістю частинок.



Рис. VIII.4. Конденсатна фракція в одновимірному гармонічному потенціалі як функція температури, розрахована з (VIII.20) (суцільна лінія) і з (VIII.22) (штрихова лінія) для кількості частинок N = 1000

Для температурної залежності конденсатної фракції одновимірного бозе-газу матимемо:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{T}{T_c} \frac{\ln(2T/\hbar\omega)}{\ln(2T_c/\hbar\omega)}.$$
 (VIII.22)

Порівняння результатів чисельних розрахунків для різних наближень наведено на рис. VIII.4. Як видно, в одновимірному випадку узгодження є суттєво гіршим, ніж у тривимірному.

VIII.4. Мікроканонічний аналіз одновимірної системи осциляторів

Запишемо статистичну сум
у $Z=\sum_i e^{-\varepsilon_i/T},$ перейшовши від суми до інтеґрала:

$$Z(\beta) = \int_{0}^{\infty} \Gamma(E) e^{-\beta E} dE, \qquad (\text{VIII.23})$$

де $\beta = 1/T$, а $\Gamma(E)$ визначає кількість мікростанів. Цей зв'язок, очевидно, задає пряме перетворення Лапласа, а отже, $\Gamma(E)$ можна записати як обернене перетворення Лапласа:

$$\Gamma(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} Z(\beta) \, e^{\beta E} \, d\beta.$$
(VIII.24)

Ентропія $S(\beta)$ дорівнює

$$S(\beta) = \beta E + \ln Z(\beta), \qquad (\text{VIII.25})$$

звідки для кількості мікростанів матимемо:

$$\Gamma(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{S(\beta)} d\beta.$$
(VIII.26)

Цей інтеґрал можна розрахувати за допомогою методу перевалу. Розкладемо ентропію в околі стаціонарної точки β_0 в ряд Тейлора:

$$S(\beta) \simeq S(\beta_0) + \frac{1}{2!} S''(\beta_0) (\beta - \beta_0)^2,$$
 (VIII.27)

де

$$S'(\beta_0) = 0. \tag{VIII.28}$$

Відповідно,

$$\Gamma(E) \simeq \frac{e^{S(\beta_0)}}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp\left[\frac{1}{2!}S''(\beta_0)(\beta-\beta_0)^2\right] d\beta.$$
(VIII.29)

Заміною змінних $\beta = ix + \beta_0$, взявши також $\gamma = \beta_0$, зведемо цей інтеґрал до пуассонівського вигляду:

$$\Gamma(E) \simeq \frac{e^{S(\beta_0)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2!}S''(\beta_0)x^2\right] dx =$$
$$= \frac{e^{S(\beta_0)}}{\sqrt{2\pi S''(\beta_0)}}.$$
(VIII.30)

Для розрахунку ентропії S статистичну суму системи осциляторів зобразимо у вигляді

$$Z(\beta) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\beta\hbar\omega n} \right)^{-1}, \qquad (\text{VIII.31})$$

$$\ln Z(\beta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - e^{-\beta\hbar\omega n}\right).$$
 (VIII.32)

Застосуємо для обчислення суми формулу Ейлера–Маклорена й отримаємо:

$$S(\beta) = \beta E + \frac{\pi^2}{6\beta} + \frac{1}{2}\ln\beta - \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \dots$$
(VIII.33)

Обмежившись першими двома доданками, знайдемо звідси стаціонарну точку

$$\beta_0 = \frac{\pi}{\sqrt{6E}},\tag{VIII.34}$$

а для кількості мікростанів, зберігаючи в ентропії всі виписані в (VIII.33) доданки, матимемо:

$$\Gamma(E) = \frac{1}{4\sqrt{3} E/\hbar\omega} e^{\pi\sqrt{2/3}\sqrt{E/\hbar\omega}}.$$
 (VIII.35)

Отриманий результат насправді відтворює формулу Гарді–Рамануджана для задачі про розбиття в теорії чисел².

Покажемо, як на підставі проведених обчислень можна проінтерпретувати поняття термодинамічної границі. Для цього знайдемо температуру за означенням

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE}, \qquad \text{ge} \quad S = \ln \Gamma.$$
 (VIII.37)

Зберігши в ентропії лише головний внесок $S = \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{E}{\hbar \omega}}$, після елементарних перетворень матимемо:

$$E = \frac{\pi^2}{6} \hbar \omega \left(\frac{T}{\hbar \omega}\right)^2.$$
(VIII.38)

Зважаючи на екстенсивний характер енергії, $E \sim N$, де N — кількість частинок, відразу матимемо умову $\omega N = \text{const}$, яку можна вважати термодинамічною границею.

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

тобто кількість розбиттів p(5) = 7. Ґ. Гарді і С. Рамануджан 1918 р. отримали асимптотичну оцінку функції p(n) у вигляді:

$$p(n) = \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{2/3}\sqrt{n}},$$
 (VIII.36)

який, очевидно, збігається з (VIII.35), як і треба сподіватися. Справді, кількість мікростанів $\Gamma(E)$ і є кількістю способів розподілити енергію E між осциляторами зі спектром $\varepsilon_j = \hbar \omega j$, причому нерозрізнювальність квантових частинок відповідає тому, що порядок доданків не є суттєвим.

² Розбиттям натурального числа n називають його запис у вигляді суми натуральних доданків, порядок яких несуттєвий. Цікавою задачею є знаходження кількості розбиттів p(n), тобто кількості способів, яким натуральне число можна подати як таку суму. Наприклад, для числа 5 маємо:

VIII.5. Двовимірна система осциляторів

При D = 2 умову (VIII.15) на визначення поправки до критичної температури, зумовленої скінченністю кількості частинок, уже не можна застосувати через розбіжний останній доданок з $\zeta(1) = \infty$. Тому перегрупуємо вираз для кількості частинок, стандартно виділивши у ньому заповнення основного стану:

$$\begin{split} N &= \frac{z}{1-z} + \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} \left(\frac{1}{\left[1 - e^{-\ell\hbar\omega/T} \right]^{2}} - 1 \right) = \\ &= \frac{z}{1-z} + \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} \left(\frac{1}{1 - e^{-\ell\hbar\omega/T}} - 1 \right) \left(\frac{1}{1 - e^{-\ell\hbar\omega/T}} + 1 \right) = \\ &= \frac{z}{1-z} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell} e^{-\ell\hbar\omega/T}}{\left[1 - e^{-\ell\hbar\omega/T} \right]^{2}} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell} e^{-\ell\hbar\omega/T}}{1 - e^{-\ell\hbar\omega/T}} = \\ &= \frac{z}{1-z} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell}}{4 \operatorname{sh}^{2}(\ell\hbar\omega/2T)} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{\ell} e^{-\ell\hbar\omega/T}}{2 \operatorname{sh}(\ell\hbar\omega/2T)}. \end{split}$$

Зберігаючи головні внески при $T/\hbar\omega \gg 1$, матимемо:

$$N = \frac{z}{1-z} + \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^2 \operatorname{Li}_2(z) - \frac{T}{\hbar\omega} \ln\left(1 - z \, e^{-\hbar\omega/2T}\right). \quad \text{(VIII.39)}$$

Звідси критична температура з урахуванням ефектів скінченності кількості частинок визначатиметься рівнянням:

$$N = \left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^2 \zeta(2) + \frac{T_c}{\hbar\omega} \ln \frac{2T_c}{\hbar\omega}.$$
 (VIII.40)

Для відношення температур маємо

$$\left(\frac{T_c}{T_c^{(0)}}\right)^2 = 1 - \frac{T_c}{T_c^{(0)}} \frac{1}{2\sqrt{\zeta(2)}} N^{-1/2} \ln N, \qquad (\text{VIII.41})$$

де

$$T_c^{(0)} = \hbar \omega \left[\frac{N}{\zeta(2)}\right]^{1/2}.$$
 (VIII.42)



Рис. VIII.5. Конденсатна фракція двовимірної системи осциляторів як функція температури у квазікласичному наближенні для кількості частинок N = 1000. Пунктирна лінія відповідає формулі (VIII.3), штрихова — (VIII.7), суцільна — (VIII.39), штрихпунктирна — (VIII.44)

Звідси, діючи за аналогією з випадком D > 2, отримаємо поправку:

$$T_c = T_c^{(0)} \left\{ 1 - \frac{1}{4\sqrt{\zeta(2)}} N^{-1/2} \ln N \right\}.$$
 (VIII.43)

Для температурної залежності конденсатної фракції матимемо в доброму наближенні (див. рис. VIII.5):

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2.$$
 (VIII.44)

IX. Охолодження й утримання атомів: фізичні основи експериментальних методів

У цьому розділі ми коротко ознайомимося з головними фізичними принципами, покладеними в основу деяких сучасних методів охолодження атомів та їх утримання у зовнішніх полях. Два основні методи лазерного охолодження — допплерівське (разом із зеєманівським) і сізіфівське — потрібно доповнити так званим випаровувальним охолодженням, лише завдяки якому вдається досягнути температур, потрібних для спостереження бозе-конденсації.

IX.1. Допплерівське охолодження

Один із методів охолодження ґрунтується на ефекті Допплера. Нехай для простоти атом — дворівневий, його основний стан має енерґію E_0 , а збуджений — E_1 . Такий атом поглинатиме світло на частоті $\omega_{\rm A} = (E_1 - E_0)/\hbar$.

Розглянемо насамперед рух уздовж осі Oz. Нехай атом рухається зі швидкістю v в додатному напрямку (v > 0). Якщо йому назустріч спрямувати лазерний промінь, то поглинання світла буде можливим, якщо підлаштувати частоту лазера $\omega_{\rm L}$ так, щоб з урахуванням ефекту Допплера вона збігалася з резонансною частотою $\omega_{\rm A}$:

$$\omega_{\rm L} = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\omega_{\rm A},\tag{IX.1}$$

де $\delta = \omega_{\rm L} - \omega_{\rm A} < 0$ — розлаштування лазера.

Виявляється, що силу, яка діє на атом, спричиняючи його сповільнення, для досить повільних атомів можна зобразити як деяку силу тертя з коефіцієнтом α :

$$\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v}.\tag{IX.2}$$

Унаслідок поглинання кванта атом перейде у збуджений стан, а через деякий час повернеться в основний, перевипромінивши квант, проте вже у випадковому напрямку. Таким чином, *z*-складова швидкості атома зменшиться у зв'язку з законом збереження імпульсу (пор. рис. IX.1).



Рис. IX.1. Ілюстрація сповільнення атома під дією світла. Ліворуч — атом поглинає фотон, переходячи у збуджений стан; праворуч — атом випромінює фотон у довільному напрямку, повертаючись в основний стан

Водночас, випадкове випромінювання під час переходу в основний стан приводить до нагрівання системи. Зміну кінетичної енергії можна описати так, як це роблять в теорії браунівського руху, вводячи коефіцієнт дифузії імпульсу *D*:

$$\frac{d}{dt}\frac{\langle p_i^2 \rangle}{2m} = \frac{D}{m}, \qquad \text{de } i = x, y, z.$$
(IX.3)

Рівновага в системі досягається, коли зрівноважуються ефекти від нагрівання і вилив сповільнюючої сили:

$$\frac{d}{dt}\frac{\langle p_i^2 \rangle}{2m} = \langle F_i v_i \rangle = -\frac{\alpha}{m^2} \langle p_i^2 \rangle.$$
(IX.4)

Встановленій швидкості відповідає температура T, що визначається рівнянням:

$$T = \frac{D}{\alpha}.$$
 (IX.5)

Якщо вивести вирази для *D* і *α*, наприклад, у межах дворівневої моделі атома, то можна визначити мінімально досяжну температуру, яку й називають *допплерівською границею*:

$$T_{\rm D} = \frac{\hbar\Gamma}{2},\tag{IX.6}$$

де природна ширина лінії Γ пов'язана з розлаштуванням δ простим співвідношенням: $\delta = -\Gamma/2$.

Значення допплерівської границі для атомів рубідію становить близько 140 мкК, для атомів цезію — близько 120 мкК.

IX.2. Оптична меляса

Ефект Допплера можна застосувати для створення своєрідної оптичної пастки. Якщо опромінювати систему атомів у двох протилежних напрямках лазерами з однаковим розлаштуванням (у червоний бік), то кожен із лазерів сповільнюватиме атоми, які рухаються йому назустріч. Відповідно, у тривимірному просторі такого ж ефекту можна досягти, спрямувавши на систему атомів шість лазерів, орієнтованих уздовж декартових осей (див. рис. IX.2). У такій конфіґурації лазерних променів сповільнення відбуватиметься в усіх напрямках, і, як наслідок, атоми ніби грузнутимуть у випромінюванні. Ця ситуація чимось нагадує мелясу (патоку, *англ.* molasse), звідки й походить назва — **оптична меляса**.

Цікаво зазначити, що від такого способу сповільнення не можна очікувати досягнення температур, нижчих за допплерівську границю, проте отримані на експериментах температури виявилися у кілька разів нижчими. Це пов'язано з тоншими явищами, ніж звичайний ефект Допплера, що, зокрема, буде описано далі в розділі про сізіфівське охолодження.



Рис. IX.2. Схематичне зображення принципу дії оптичної меляси

IX.3. Зеєманівське охолодження

Сповільнюючись унаслідок допплерівського охолодження, атом виходить із резонансу, який визначає умова (IX.1). Для того, щоби продовжити гальмування атома, який вже рухається із меншою швидкістю, потрібно або відповідно перелаштовувати частоту лазера $\omega_{\rm L}$ (англійською такий спосіб називають "chirping"), або ж змінити відстань між енерґетичними рівнями атома, тобто частоту $\omega_{\rm A}$. У другому випадку на допомогу приходить ефект Зеємана, внаслідок якого можна розщепити атомні рівні й досягти потрібних частот переходу.

Розщеплення енерґетичних рівнів у лінійному ефекті Зеємана в магнітному полі **B** дорівнює

$$\Delta E_{\pm} = \pm \mu B, \tag{IX.7}$$

де μ — магнітний момент, а знаки "±" відповідають додатній і від'ємній круговим поляризаціям σ_{\pm} .



Рис. IX.3. Вгорі — схематичне зображення зеєманівського сповільнювача. Внизу — зміна поля вздовж осі соленоїда [52]

Таким чином, замість (IX.1) можемо записати умову:

$$\omega_{\rm L} = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(\omega_{\rm A} \pm \frac{\mu}{\hbar}B\right),\tag{IX.8}$$

де $\omega_{\rm A}$ надалі позначає частоту переходу атома без зовнішнього поля.

Нехай атом рухається вздовж осі *z*, причому його рух можна вважати рівносповільненим із прискоренням *-a*:

$$\omega_{\rm L} = \left(1 - \frac{v_0 - at}{c}\right) \left(\omega_{\rm A} \pm \frac{\mu}{\hbar}B\right), \quad \text{de} \quad \omega_{\rm L} = \left(1 - \frac{v_0}{c}\right) \omega_{\rm A}. \quad (\text{IX.9})$$

Записуючи для рівносповільненого руху координату $z(t) = v_0 t - -at^2/2$, після нескладних перетворень для зміни поля з координатою матимемо:

$$B(z) = B_1 \pm B_2 \sqrt{1 - \frac{2az}{v_0^2}},$$
 (IX.10)

причому враховано також, що $v \ll c$.
IX.4. Сізіфівське охолодження

Розгляньмо два лінійно поляризовані лазерні промені однакової інтенсивності, напрямлені протилежно. Нехай промінь, що поширюється вздовж додатного напрямку осі Oz, поляризований уздовж осі Ox, а промінь, що поширюється йому назустріч, — уздовж осі Oy. Запишемо відповідне електричне поле у вигляді:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(z,t) = \boldsymbol{\mathcal{E}}(z)e^{-i\omega t} + \boldsymbol{\mathcal{E}}^*(z)e^{i\omega t}, \qquad (\text{IX.11})$$

де просторова частина

$$\mathcal{E}(z) = \mathcal{E}_0 \left(\mathbf{e}_x e^{iqz} + \mathbf{e}_y e^{-iqz} \right).$$
(IX.12)

Вектор поляризації має вигляд:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y e^{-2iqz} \right).$$
(IX.13)

Отже, поляризація випромінювання періодично змінюється вздовж напрямку z, причому період зміни π/q вдвічі менший за довжину хвилі випромінювання $\lambda = 2\pi/q$. У точці z = 0 маємо лінійнополяризоване електричне поле під кутом 45° до осі Ox, у точці $z = -\lambda/4$ — знову лінійно-поляризоване, але вже під кутом -45° . Натомість у точці $z = \lambda/8$ матимемо кругову поляризацію (від'ємну, σ_{-}), а в точці $z = 3\lambda/8$ — знову кругову, але додатну (σ_{+}). Зміну поляризації електричного поля схематично зображено на рис. IX.4.

Розглянемо далі атомні переходи між основним рівнем "g" і збудженим "e", яким у випадку атомів лужних металів відповідають електронні стани ${}^{2}S_{1/2}$ і ${}^{2}P_{3/2}$. Основний рівень вироджений двократно ($J_{\rm g} = 1/2$, магнітне квантове число $m_{\rm g} = \pm 1/2$), а збуджений — чотирикратно ($J_{\rm e} = 3/2$, $m_{\rm e} = \pm 1/2, \pm 3/2$), див. рис. IX.5. Якщо атом перебуває на осі Oz у точці $\lambda/8$, то після поглинання від'ємнополяризованого фотона можуть відбутися переходи $g_{-1/2} \rightarrow e_{-3/2}$ або $g_{+1/2} \rightarrow e_{-1/2}$. При цьому, відповідно до правил відбору $\Delta m = 0, \pm 1$, зі збудженого рівня $e_{-3/2}$ можливе повернення лише назад на $g_{-1/2}$, тоді як з рівня $e_{-1/2}$ можна повернутися на обидва основні рівні $g_{\pm 1/2}$, однак з імовірністю 2/3 (яку визначають коефіцієнти Клебша– Ґордана, див. рис. IX.5) перехід відбудеться на $g_{-1/2}$. Отже, у точках з від'ємною поляризацією σ_{-} відбуватиметься оптичне накачування рівня $g_{-1/2}$. Такі самі міркування вказують на те, що в точках з додатною поляризацією σ_{+} накачуватиметься рівень $g_{+1/2}$.



Рис. IX.4. Схема просторової зміни поляризації двох зустрічних лазерних променів у методі сізіфівського охолодження



Рис. IX.5. Дипольні переходи між дублетним основним рівнем (g) і квадруплетним збудженим рівнем (e). Числа біля стрілок — квадрати коефіцієнтів Клебша-Ґордана відповідних переходів

Водночас під дією електромагнітного поля лазерних променів рівні атома зазнаватимуть розщеплення, яке змінюватиметься у просторі залежно від поляризації, див. рис. IX.6. Відповідно до цього,



Рис. IX.6. Переходи атома між різними рівнями під час руху в полі, створеному лазерними променями, які призводять до втрати енергії

атом, який початково (наприклад, у точці $z = \lambda/8$) перебував на рівні $g_{-1/2}$ і мав мінімальну потенціальну енергію, рухаючись у просторі, втрачатиме кінетичну енергію і набуватиме потенціальної, аж поки у точці $z = 3\lambda/8$ не перейде на рівень $g_{+1/2}$, втративши частину енергії. Таке поступове підіймання на максимум потенціальної енергії і різке падіння нагадує давньогрецький міф про Сізіфа, звідси й походить назва методу — сізіфівське охолодження.

Отже, внаслідок руху в просторі атоми поступово втрачатимуть енерґію. Зрозуміло, що цей процес для окремого атома матиме щоразу ймовірнісний характер, але сумарний ефект буде полягати у зниженні температури. Метод сізіфівського охолодження дає змогу досягти температур, на порядок нижчих за допплерівську границю. При цьому нижню температурну межу $T_{\rm S}$ методу визначає так звана енерґія віддачі:

$$T_{\rm S} \sim \frac{\hbar^2}{m\lambda^2},$$
 (IX.14)

яка, наприклад, для натрію дорівнює близько 2.4 мкК (порівняно з допплерівською границею 240 мкК). Експериментально вдається досягти температур, які становлять від кількох до кількадесят T_S.

IX.5. Магнітні пастки

Просту магнітну пастку запропонував Пауль ще у 1950-х роках, експериментально її реалізували у 1985 [54]. Магнітне поле у такій пастці створюють два розміщених у паралельних площинах кільця, в яких однакові за величиною струми течуть у протилежних напрямках (див. рис. IX.7). Така конфіґурація струмів відповідає магнітному квадруполю.



Рис. IX.7. Проста квадрупольна магнітна пастка

Оберемо вісь симетрії вздовж z. Магнітне поле в такій простій квадрупольній пастці поблизу центра є лінійним, причому зважаючи на рівноправність осей x, y, ґрадієнт уздовж яких нехай дорівнює b_0 , з умови div $\mathbf{B} = 0$ легко отримаємо:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = b_0 (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y - 2z \mathbf{e}_z). \tag{IX.15}$$

Нульове значення магнітного поля в центрі пастки є причиною *переворотів Майорани*, коли випадкове перевертання спіну спричинює вилітання атома з пастки (див. трохи детальніше пояснення про випаровувальне охолодження в підрозділі IX.7).

Позбутися проблеми переворотів Майорани дозволяє певна модифікація простої конфіґурації пастки, яка може забезпечити відсутність точок з магнітним полем $\mathbf{B} = 0$. Цього можна досягти, наприклад, додаючи до поля пастки змінне у часі поле. Внаслідок цього отримують так звану *пастку з усередненим у часі обертальним потенціалом (ПУЧОП)* (TOP-trap, де TOP — time-averaged orbiting potential). Якщо взяти це додаткове поле у вигляді

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = b'(\mathbf{e}_x \cos \Omega t + \mathbf{e}_y \sin \Omega t), \qquad (IX.16)$$

то після усереднення за період матимемо для величини сумарного магнітного поля $\mathbf{B}_{\mathrm{tot}} = \mathbf{B} + \mathbf{B}'$:

$$B_{\text{tot}}(x, y, z) \equiv |\mathbf{B}_{\text{tot}}| = B_0 + a_r r^2 + a_z z^2, \quad \text{de } r^2 = x^2 + y^2, (\text{IX.17})$$

а B_0, a_r, a_z — сталі, що визначаються параметрами пастки. Відповідно, енергію атома в такому полі $U = \mu B$ (де μ — величина магнітного дипольного момента) можна подати у вигляді:

$$U(x, y, z) = U_0 + \frac{m\omega_r^2 r^2}{2} + \frac{m\omega_z^2 z^2}{2},$$
 (IX.18)

▲

де знову ж стала U_0 і частоти ω_r, ω_z визначаються параметрами пастки.

▼ Завдання IX.1. Отримайте вирази для поля (IX.15) квадрупольної пастки, зображеної на рис. IX.7, і поля (IX.17) та потенціалу (IX.18) в ПУЧОП.

Уникнути проблеми нульового поля в центрі квадрупольної пастки можна за допомогою використання інших конфіґурацій. Однією з найпопулярніших є **пастка Йоффе-Прітчарда** (див. рис. IX.8). Чотири прямолінійні провідники (**стрижсні Йоффе**) орієнтовано так, що струми в сусідніх провідниках однакові за величиною і протилежні за напрямком. При цьому створюється квадрупольне поле, яке дорівнює нулеві на центральній осі (нехай вона збігається з віссю z системи координат). Додаткове поле вздовж z створюють два кільця, в яких напрям струму однаковий (на відміну від квадрупольної пастки на рис. IX.7.



Рис. IX.8. Пастка Йоффе-Прітчарда. Ліворуч — просторова конфіґурація, праворуч — переріз у площині *ху*

Як і в ПУЧОП, можна показати, що в околі початку координат x = y = z = 0 потенціальна енергія атома має вигляд:

$$U(x, y, z) = U_0 + \frac{m\omega_r^2 r^2}{2} + \frac{m\omega_z^2 z^2}{2}.$$
 (IX.19)

Є різноманітні конфіґурації магнітних пасток, які аналогічні до пастки Йоффе–Прітчарда, наприклад, такі, де контури зі струмами формують щось подібне на листок конюшини (clover-leaf trap, рис. IX.9,a) або бейсбольну рукавицю (baseball trap, рис. IX.9,б).



Рис. IX.9. Магнітні пастки: а) "листок конюшини" (стрілки показують напрямок струмів), б) "бейсбольна рукавиця"

Ще одним способом уникнення переходів Майорани в центрі квадрупольної пастки може бути використання так званого **оптичного корка** (optical plug). Ідея цього методу полягає в тому, що центральну область пастки опромінюють лазером, унаслідок чого виникає сила, яка відштовхує атоми за її межі.

IX.6. Магнітооптична пастка

За допомогою магнітного поля оптичну мелясу можна використати не лише для сповільнення атомів, але й для їх утримання. Пристрої, в яких застосовують відповідні фізичні принципи, називають *магнітооптичними пастками (МОП)*. Схематично принцип дії одновимірної МОП показано на рис. IX.10. Величина магнітного поля в такій пастці значно менша, ніж у власне магнітної пастки, і за допомогою самого лиш поля атоми втримати не можна.

Як було зазначено в попередньому підрозділі, у центрі квадрупольної магнітної пастки (z = 0) поле **B** = 0, а в околі цієї точки поле має однорідний ґрадієнт уздовж z. Розглянемо для спрощення два рівні, J = 0 і J = 1. Унаслідок ефекту Зеємана рівень J = 1розщеплюється на три підрівні, $m_J = 0, \pm 1$, причому розщеплення зростає лінійно із z. Якщо спрямувати вздовж осі z два протилежно напрямлені лазерні промені з частотою, меншою за частоту переходу між рівнями J = 0 і J = 1, і з різнонапрямленими круговими поляризаціями, як показано на рис. IX.10, то магнітне поле спричинятиме утримання таким способом. Для атома, який рухається в напрямку z > 0, резонансним буде перехід $\Delta m_J = -1$, тому за правилом відбору поглинання від'ємно-поляризованого фотона зміщуватиме атом у напрямку центра пастки z = 0. Для атома ж, що рухається у напрямку z < 0, поглинання додатно-поляризованого фотона зміщуватиме його також у протилежний бік, до центра пастки.

На практиці цю схему поширюють на тривимірний випадок, опромінюючи магнітну пастку трьома парами лазерних променів, як в оптичній мелясі. Застосування МОП дає змогу акумулювати для експериментальних досліджень більше атомів, ніж сам метод оптичної меляси, оскільки в такі пастки потрапляють і досить швидкі атоми, які не можуть зав'язнути лише в мелясі. Наприклад, для натрію максимальна швидкість атомів, які ще можна утримати в оптичній мелясі, становить близько 6 м/с, тоді як у МОП — близько 70 м/с [55, р. 193–194].



Рис. IX.10. Принцип дії магнітооптичної пастки

IX.7. Випаровувальне охолодження

Метод випаровувального охолодження ґрунтується на тому самому ефекті, завдяки якому вистигає горнятко кави: швидкі атоми чи молекули вилітають із системи, забираючи частину енергії, і внаслідок цього температура поступово знижується. Основною проблемою є спосіб усунення швидких атомів так, щоб у системі залишилася достатня їх кількість для спостереження явища бозе-конденсації.

Ефекту охолодження можна досягти, зменшивши величину потенціалу пастки, внаслідок чого її залишать найшвидші атоми. Через деякий час внаслідок зіткнень і обміну енерґією в системі встановиться рівноважний розподіл, що відповідає нижчій температурі, і процес можна продовжити. На практиці, однак, переважно застосовують дещо інший метод, у якому використовують радіочастотне випромінювання (так званий radio-frequency evaporative cooling). В основі методу покладено те, як атоми в різних станах реагують на магнітне поле. Енергія атома з магнітним дипольним моментом μ , який перебуває в магнітному полі **B**, дорівнює

$$U = -\boldsymbol{\mu}\mathbf{B} = g\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{B}}mB,\tag{IX.20}$$

де g — множник Ланде, $\mu_{\rm B}$ — магнетон Бора, а m — магнітне квантове число. При gm > 0 атомові енерґетично вигідніше перебувати там, де магнітне поле менше (англійською такий атом називають *low-field seeker*). Значення m, які забезпечують утримання атомів у пастці, відповідають "пійманим" станам (trapped aбо anti-trapped states). За допомогою випромінювання з частотою $\omega_{\rm rf}$, яке відповідає переходам $\Delta m = \pm 1$, атоми можна перевести у "вільний" стан (untrapped state), коли вигіднішим є рух до областей з більшим магнітним полем (*high-field seeker*).

Додаток. Стаття С. Бозе

Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese // Zeitschrift für Physik. — 1924. — Band 26, Heft 3. — S. 178–181.

Відтворено з дозволу Springer Science + Business Media.

178

Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese.

Von Bose (Dacca-University, Indien).

(Eingegangen am 2. Juli 1924.)

Der Phasenraum eines Lichtquants in bezug auf ein gegebenes Volumen wird in "Zellen" von der Größe k^3 aufgeteilt. Die Zahl der möglichen Verteilungen der Lichtquanten einer makroskopisch definierten Strahlung unter diese Zellen liefert die Entropie und damit alle thermodynamischen Eigenschaften der Strahlung.

Plancks Formel für die Verteilung der Energie in der Strahlung des schwarzen Körpers bildet den Ausgangspunkt für die Quantentheorie, welche in den letzten 20 Jahren entwickelt worden ist und in allen Gebieten der Physik reiche Früchte getragen hat. Seit der Publikation im Jahre 1901 sind viele Arten der Ableitung dieses Gesetzes vorgeschlagen worden. Es ist anerkannt, daß die fundamentalen Voraussetzungen der Quantentheorie unvereinbar sind mit den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik. Alle bisherigen Ableitungen machen Gebrauch von der Relation

$$\varrho_{\mathbf{v}}\,d\mathbf{v} = \frac{8\,\pi\,\mathbf{v}^2\,d\mathbf{v}}{c^3}\,E,$$

d. h. von der Relation zwischen der Strahlungsdichte und der mittleren Energie eines Oszillators, und sie machen Annahmen über die Zahl der Freiheitsgrade des Äthers, wie sie in obige Gleichung eingeht (erster Faktor der rechten Seite). Dieser Faktor konnte jedoch nur aus der klassischen Theorie hergeleitet werden. Dies ist der unbefriedigende Punkt in allen Ableitungen, und es kann nicht wundernehmen, daß immer wieder Anstrengungen gemacht werden, eine Ableitung zu geben, die von diesem logischen Fehler frei ist.

Eine bemerkenswert elegante Ableitung ist von Einstein angegeben worden. Dieser hat den logischen Mangel aller bisherigen Ableitungen erkannt und versucht, die Formel unabhängig von der klassischen Theorie zu deduzieren. Von sehr einfachen Annahmen über den Energieaustausch zwischen Molekülen und Strahlungsfeld ausgehend, findet er die Relation

$$\varrho_{v} = \frac{\alpha_{mn}}{\frac{\epsilon_{m}-\epsilon_{n}}{e^{-kT}-1}}$$

Indessen muß er, um diese Formel mit der Planckschen in Übereinstimmung zu bringen, von Wiens Verschiebungsgesetz und Bohrs Korrespondenzprinzip Gebrauch machen. Wiens Gesetz ist auf die klassische

Bose, Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. 179

Theorie gegründet, und das Korrespondenzprinzip nimmt an, daß die Quantentheorie mit der klassischen Theorie in gewissen Grenzfällen übereinstimme.

In allen Fällen scheinen mir die Ableitungen nicht genügend logisch gerechtfertigt. Dagegen scheint mir die Lichtquantenhypothese in Verbindung mit der statistischen Mechanik (wie sie durch Planck den Bedürfnissen der Quantentheorie angepaßt worden ist) für die Ableitung des Gesetzes unabhängig von der klassischen Theorie hinreichend zu sein. Im folgenden will ich die Methode kurz skizzieren.

Die Strahlung sei in das Volumen V eingeschlossen und ihre Gesamtenergie E sei gegeben. Es seien verschiedene Sorten von Quanten von der jeweiligen Anzahl N_s und Energie hv_s vorhanden (s = 0 bis $s = \infty$). Die Totalenergie E ist dann

$$E = \sum_{s} N_{s} h \, \boldsymbol{\nu}_{s} = V \int \varrho_{\boldsymbol{\nu}} d\, \boldsymbol{\nu}. \tag{1}$$

Die Lösung des Problems verlangt dann die Bestimmung der N_s , welche ϱ_{ν} bestimmen. Wenn wir die Wahrscheinlichkeit für jede durch beliebige N_s charakterisierte Verteilung angeben können, dann wird die Lösung durch die Bedingung bestimmt, daß diese Wahrscheinlichkeit bei Wahrung der Nebenbedingung (1) ein Maximum sein soll. Diese Wahrscheinlichkeit wollen wir nun aufsuchen.

Das Quantum hat ein Moment vom Betrage $\frac{h v_s}{c}$ in der Richtung seiner Fortbewegung. Der Momentanzustand des Quantums wird charakterisiert durch seine Koordinaten x, y, z und die zugehörigen Momente $p_x p_y p_z$; diese sechs Größen können als Punktkoordinaten in einem sechsdimensionalen Raum aufgefaßt werden, wobei wir die Beziehung haben

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{h^2 \nu^2}{c^2}$$

vermöge welcher der genannte Punkt auf einer durch die Frequenz des Quants bestimmten Zylinderfläche zu bleiben gezwungen ist. Zum Frequenzbereich dv_s gehört in diesem Sinne der Phasenraum

$$\int dx \, dy \, dz \, dp_x \, dp_y \, dp_z = V \cdot 4 \pi \left(\frac{h \nu}{c}\right)^2 \frac{h \, d \nu}{c} = 4 \pi \frac{h^3 \nu^2}{c^3} \, V d \nu.$$

Wenn wir das gesamte Phasenvolumen in Zellen von der Größe h^3 einteilen, gehören zum Frequenzbereich $d\nu$ also $4\pi V \frac{\nu^3}{c^3} d\nu$ Zellen. In bezug auf die Art dieser Einteilung kann nichts Bestimmtes gesagt werden. 180

Bose,

Indessen muß die Gesamtzahl der Zellen als die Zahl der möglichen Anordnungen eines Quants in dem gegebenen Volumen angesehen werden. Um der Tatsache der Polarisation Rechnung zu tragen, erscheint es dagegen geboten, diese Zahl noch mit 2 zu multiplizieren, so daß wir für die Zahl der zu $d\nu$ gehörigen Zellen $8 \pi V \frac{\nu^3 d\nu}{c^3}$ erhalten.

Nun ist es einfach, die thermodynamische Wahrscheinlichkeit eines (makroskopisch definierten) Zustandes zu berechnen. Es sei N^s die Zahl der zum Frequenzbereich $d v^s$ gehörigen Quanten. Auf wie viele Arten können diese auf die zu $d v^s$ gehörigen Zellen verteilt werden? Sei p_0^s die Zahl der vakanten Zellen, p_1^s die Zahl derer, die ein Quant enthalten, p_2^s die Zahl der Zellen, die zwei Quanten enthalten usf. Die Zahl der möglichen Verteilungen ist dann

$$\frac{A^s!}{p_0^s! p_1^s! \dots}, \quad \text{wobei} \quad A^s = \frac{8 \pi v^2}{c^s} u^s,$$

und wobei

$$N^s = 0 \cdot p^s_0 + 1 \cdot p^s_1 + 2 p^s_2 \dots$$

die Zahl der zu dv^s gehörigen Quanten ist.

Die Wahrscheinlichkeit des durch sämtliche p_r^s definierten Zustandes ist offenbar

$$\prod_{s} \frac{A^{s}!}{p_{0}^{s}! p_{1}^{s}! \dots}$$

Mit Rücksicht darauf, daß wir die p_r^s als große Zahlen betrachten können, haben wir

$$\lg W = \sum_{s} A^{s} \lg A^{s} - \sum_{s} \sum_{r} p_{r}^{s} \lg p_{r}^{s},$$

wobei

$$A^s = \sum_r p_r^s.$$

Dieser Ausdruck soll ein Maximum sein unter der Nebenbedingung

$$E = \sum_{s} N^{s} h \boldsymbol{v}^{s}; \quad N^{s} = \sum_{r} r p_{r}^{s}.$$

Die Durchführung der Variation liefert die Bedingungen

$$\sum_{s} \sum_{r} \delta p_{r}^{s} (1 + \lg p_{r}^{s}) = 0, \qquad \sum_{s} \delta N^{s} h v^{s} = 0$$
$$\sum_{r} \delta p_{r}^{s} = 0 \qquad \delta N^{s} = \sum_{r} r \, \delta p_{r}^{s}.$$
folgt

Hieraus folgt

$$\sum_{s} \sum_{r} \delta p_{r}^{s} (1 + \lg p_{r}^{s} + \lambda^{s}) + \frac{1}{\beta} \sum_{s} h \nu^{s} \sum_{r} r \, \delta p_{r}^{s} = 0.$$

Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. 181
Daraus folgt zunächst

$$p_r^s = B^s e^{-\frac{rhv^s}{\beta}}.$$
Da aber

$$A^s = \sum_r B^s e^{-\frac{rhv^s}{\beta}} = B^s \left(1 - e^{-\frac{hv^s}{\beta}}\right)^{-1},$$
so ist

$$B_s = A^s \left(1 - e^{-\frac{hv^s}{\beta}}\right).$$
Ferner hat man

$$N^s = \sum_r r p_r^s = \sum_r r A^s \left(1 - e^{-\frac{hv^s}{\beta}}\right) e^{-\frac{rhv^s}{\beta}}$$

$$= \frac{A^s e^{-\frac{hv^s}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{hv^s}{\beta}}}.$$

Mit Rücksicht auf den oben gefundenen Wert von As ist also

$$E = \sum_{s} \frac{8\pi h v^{s^3} d v^s}{c^3} V \frac{e^{-\frac{h v^s}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{h v^s}{\beta}}}$$

Mit Benutzung der bisherigen Resultate findet man ferner

$$S = k \Big[\frac{E}{\beta} - \sum_{s} A^{s} \lg \Big(1 - e^{\frac{h r^{s}}{\beta}} \Big) \Big],$$

woraus mit Rücksicht darauf, daß $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$, folgt, daß $\beta = kT$. Setzt

man dies in obige Gleichung für E ein, so erhält man

$$E = \sum_{s} \frac{8 \pi h v^{s^{s}}}{c^{s}} V \frac{1}{e^{\frac{h v^{s}}{kT}} - 1} dv^{s},$$

welche Gleichung Plancks Formel äquivalent ist.

(Übersetzt von A. Einstein.)

Anmerkung des Übersetzers. Boses Ableitung der Planckschen Formel bedeutet nach meiner Meinung einen wichtigen Fortschritt. Die hier benutzte Methode liefert auch die Quantentheorie des idealen Gases, wie ich an anderer Stelle ausführen will.

121

Література

Загальна

- Исихара А. Статистическая физика / А. Исихара. Москва : Мир, 1973. 471 с.
- [2] Ландау Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в 10 т. Т. V. Статистическая физика. Ч. І. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стереот. – Москва : Физматлит, 2002. – 616 с.
- [3] Bose-Einstein Condensation / Ed. by A. Griffin, D. W. Snoke, S. Stringari. Cambridge : Cambridge University Press, 1995. – xiii, 602 p.
- [4] Pethick C. Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases / C. Pethick, H. Smith. — Cambridge University Press, 2002. — xii, 402 p.
- [5] Sacha K. Kondensat Bosego-Einsteina / K. Sacha. Kraków : Instytut Fizyki im. M. Smoluchowskiego, Uniwersytet Jagielloński, 2004. — 137 s.

До розділу І

- [6] Ландау Л. Теория сверхтекучести гелия-II / Л. Ландау // Журн. эксп. теор. физ. — 1941. — Т. 11, Вып. 6. — С. 592–614.
- [7] Ровенчак А. 80 років історії досліджень Бозе-систем / А. Ровенчак // Світ фізики. — 2004. — № 3(27). — С. 3–9.
- [8] Bose S. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese / S. Bose // Zs. Phys. 1924. – B. 26, Hft. 3. – S. 178–181.
- [9] Bose–Einstein condensation in a gas of sodium atoms / K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews et al. // Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 75, No. 22. – P. 3969–3973.
- [10] Einstein A. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases / A. Einstein // Sitzungsber. Preuss. Konigl. Akad. Wiss.: phys.-math. Klasse. — 1924. — S. 261– 267; Эйнштейн А. Квантовая теория одноатомного идеального газа // Эйнштейн А. Собрание научных трудов : в 5 т. — Т. III. — С. 481–488.

- [11] Einstein A. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung / A. Einstein // Sitzungsber. Preuss. Konigl. Akad. Wiss.: phys.-math. Klasse. — 1925. — S. 3–14; Эйнштейн А. Квантовая теория одноатомного идеального газа. Второе сообщение // Эйнштейн А. Собрание научных трудов : в 5 т. — Т. III. — С. 489–502.
- [12] Hecht C. E. The possible superfluid behaviour of hydrogen atom gases and liquids / C. E. Hecht // Physica. – 1959. – Vol. 29. – P. 1159–1161.
- [13] Keesom W. H. On the anomaly in the specific heat of liquid helium / W. H. Keesom, A. P. Keesom // Communications from the Physical Laboratory of Leiden. - 1932. - No. 221d. - P. 19-26.
- [14] London F. The λ-phenomenon of liquid helium and the Bose–Einstein degeneracy / F. London // Nature. – 1938. – Vol. 141, No. 3571. – P. 643– 644.
- [15] Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor / M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews et al. // Science. – 1995. – Vol. 269, No. 5221. – P. 198–201.
- [16] Silvera I. F. Stabilization of atomic hydrogen at low temperature / I. F. Silvera, J. T. M. Walraven // Phys. Rev. Lett. - 1980. - Vol. 44, No. 3. - P. 164-168.
- [17] Tisza L. The theory of liquid helium / L. Tisza // Phys. Rev. 1947. Vol. 72, No. 9. - P. 838-854.

До розділу ІІ

- [18] Gentile G. Osservazioni sopra le statistiche intermedie / G. Gentile // Nuovo Cim. - 1940. - Vol. 17. - P. 493-497.
- [19] Khare A. Fractional Statistics and Quantum Theory / A. Khare. 2nd edition. — Singapore : World Scientific, 2005. — xiv, 300 p.

До розділу III

- [20] Федер Е. Фракталы / Е. Федер. Москва : Мир, 1991. 260 с.
- [21] Mandelbrot B. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension / B. Mandelbrot // Science. - 1967. - Vol. 156, No. 3775. -P. 636-638.

До розділу IV

- [22] Bagnato V. Bose-Einstein condensation in an external potential / V. Bagnato, D. E. Pritchard, D. Kleppner // Phys. Rev. A. - 1987. - Vol. 35, No. 10. -P. 4354-4358.
- Bagnato V. Bose-Einstein condensation in low-dimensional traps / V. Bagnato,
 D. Kleppner // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44, No. 11. P. 7439-7441.

До розділу V

- [24] Вакарчук І. О. Квантова механіка / І. О. Вакарчук. 4-те доповнене вид. Львів : Львівський національний університет імені Івана Франка. — 872 с.
- [25] de Toledo Piza A. F. R. Bose-Einstein condensation in dilute atomic gases / A. F. R. de Toledo Piza // Brazilian J. Phys. - 2004. - Vol. 34, No. 3B. -P. 1102-1157.
- [26] Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / edited by Milton Abramovitz and Irene A. Stegun. — Tenth Printing National Bureau of Standards, 1978. — XIV, 1046 p.
- [27] Ketterle W. The magic of matter waves / W. Ketterle // MIT Physics Annual. 2001. – P. 44–49.
- [28] Time-dependent solution of the nonlinear Schrödinger equation for Bosecondensed trapped neutral atoms / P. A. Ruprecht, M. J. Holland, K. Burnett, M. Edwards // Phys. Rev. A. - 1995. - Vol. 51, No. 6. - P. 4704-4711.
- [29] Thermodynamics of a trapped Bose condensate with negative scattering length / B. Pozzi, L. Salasnich, A. Parola, L. Reatto // J. Low Temp. Phys. - 2000. --Vol. 119, No. 1/2. - P. 57-77.

До розділу VI

- [30] Боголюбов Н. Н. К теории сверхтекучести / Н. Н. Боголюбов // Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1947. — Т. 11. — С. 77–90; Боголюбов Н. Н. К теории сверхтекучести // Боголюбов Н. Н. Избранные труды в трех томах. — К. : Наук. думка, 1970. — Т. 2. — С. 210–224.
- [31] Meini B. Nonlinear matrix equations and structured linear algebra / B. Meini // Lin. Alg. Appl. – 2006. – Vol. 413, No. 2–3. – P. 440–457.
- [32] Mukaidani H. Asymptotic expansions and a new numerical algorithm of the algebraic Riccati equation for multiparameter singularly perturbed systems / H. Mukaidani, T. Shimomura, K. Mizukami // J. Math. Analysis Appl. 2002. Vol. 267, No. 1. P. 209–234.
- [33] Rovenchak A. Weakly-interacting bosons in a trap within approximate second quantization approach / A. Rovenchak // J. Low Temp. Phys. - 2007. - Vol. 148, No. 3/4. - P. 411-416.

До розділу VII

[34] Боголюбов Н. Н. Волновая функция нижнего состояния системы взаимодействующих бозе-частиц / Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев // Журн. эксп. теор. физ. — 1955. — Т. 28, Вып. 2. — С. 129–139.

- [35] Вакарчук И. А. Самосогласованное описание дальнодействующих и короткодействующих корреляций в теории жидкого He⁴. I / И. А. Вакарчук, И. Р. Юхновский // Теор. мат. физ. — 1979. — Т. 40, № 1. — С. 100–111.
- [36] Вакарчук І. О. Вступ до проблеми багатьох тіл / І. О. Вакарчук. Львів : Львівський національний університет ім. І. Франка, 1999. — 220 с.
- [37] Зубарев Д. Н. Двухвременные функции Грина в статистической физике / Д. Н. Зубарев // Успехи физических наук. — 1960. — Т. 71, Вып. 1. — С. 71– 116.
- [38] Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика / Д. Н. Зубарев. — Москва : Наука, 1971. — 417 с.
- [39] Janzen A. R. An accurate potential energy curve for helium based on *ab initio* calculations / A. R. Janzen, R. A. Aziz // J. Chem. Phys. – 1997. – Vol. 107, No. 3. – P. 914–919.
- [40] Kasamatsu K. Static and dynamic properties of multicomponent Bose–Einstein condensates of ytterbium atoms / K. Kasamatsu, M. Tsubota // J. Low Temp. Phys. - 2008. - Vol. 150, No 3/4. - P. 599–604.
- [41] Rovenchak A. A. Extraction of interatomic potentials from structure of liquids / A. A. Rovenchak // Centr. Eur. J. Physics. - 2005. - Vol. 3, No. 1. - P. 47-60.
- [42] Vakarchuk I. O. A potential energy of interaction between helium atoms / I. O. Vakarchuk, V. V. Babin, A. A. Rovenchak // J. Phys. Stud. – 2000. – Vol. 4, No. 1. – C. 16–22.
- [43] Vakarchuk I. O. Bose-condensate in two-component Bose-liquid / I. O. Vakarchuk, V. S. Pastukhov // J. Phys. Stud. – 2008. – Vol. 12, No. 3. – Art. 3002. – 8 p.

До розділу VIII

- [44] Bose–Einstein condensation of a finite number of particles trapped in anydimensional space / M. Li, L. Chen, J. Chen et al. // Phys. Rev. A. – 1999. – Vol. 60, No. 5. – P. 4168–4170.
- [45] Ketterle W. Bose–Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions / W. Ketterle, N. J. van Druten // Phys. Rev. A. – 1996. – Vol. 54, No. 1. – P. 656–660.
- [46] Petrov D. S. Low-dimensional trapped gases / D. S. Petrov, D. M. Gangardt, G. V. Shlyapnikov // J. Phys. IV France. - 2004. - Vol. 116. - P. 5-44.
- [47] Rovenchak A. The relation between fractional statistics and finite bosonic systems in one-dimensional case / A. Rovenchak // Fiz. Nizk. Temp. 2009. Vol. 35, No. 5. P. 510-513; Low Temp. Phys. 2009. Vol. 35, No. 5. P. 400-403.

[48] Theory of Bose–Einstein condensation in trapped gases / F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari // Rev. Mod. Phys. – 1999. – Vol. 71, No. 3. – P. 463–512.

До розділу IX

- [49] Кеттерле В. Когда атомы ведут себя как волны. Бозе-эйнштейновская конденсация и атомный лазер / В. Кеттерле // Усп. физ. наук. — 2003. — Т. 173, № 12. — С. 1339–1358.
- [50] Корнелл Э. А. Бозе-эйнштейновская конденсация в разреженном газе. Первые 70 лет и несколько последних экспериментов / Э. А. Корнелл, К. Э. Виман // Усп. физ. наук. — 2003. — Т. 173, № 12. — С. 1320–1338.
- [51] Коэн-Тануджи К. Н. Управление атомами с помощью фотонов / К. Н. Коэн-Тануджи // Усп. физ. наук. — 1999. — Т. 169, № 3. — С. 292–304.
- [52] Филипс У. Д. Лазерное охлаждение и пленение нейтральных атомов / У. Д. Филипс // Усп. физ. наук. — 1999. — Т. 169, № 3. — С. 305–322.
- [53] Adams C. S. Laser cooling and trapping of neutral atoms / C. S. Adams, E. Riis // Prog. Quant. Electr. - 1997. - Vol. 21, No. 1. - P. 1-79.
- [54] First observation of magnetically trapped neutral atoms / A. L. Migdall, J. V. Prodan, W. D. Phillips *et al.* // Phys. Rev. Lett. – 1985. – Vol. 54, No. 24. – P. 2596–2599.
- [55] Foot C. J. Atomic Physics / C. J. Foot. Oxford University Press, 2005. xiv, 331 p.

Покажчик

активність, 17 амплітуда розсіяння, 52 бозе-конденсація, 25 вихор. 64 вторинне квантування, 65 губка Менґера, 34, 35 ґратка вихорів, 64 допплерівська границя, 105 довжина теплової хвилі де Бройля, 23 довжина відновлення, 54 дробова статистика, див. проміжна статистика дробова вимірність простору, 34 дзета-функція Ріманна, 23 квантовий тиск. 63 килимок Серпінського, 35 конденсатна фракція, 25 крива Коха, 36 магнітооптична пастка (МОП), 113 наближення Томаса-Фермі, 61 оптична меляса, 105 оптичний корок, 113 парастатистика, див. проміжна статистика

пастка Йоффе-Прітчарда, 112 пастка з усередненим у часі обертальним потенціалом (ПУЧОП), 111 перевороти Майорани, 111 полілогарифм, 23 проміжна статистика, 19 розбиття натурального числа, 99 розклад Якобі–Анґера, 52 стрижні Йоффе, 112 фрактал, 35 фрактальна вимірність простору, див. дробова вимірність простору фуґативність, 17 функція Бозе, див. полілогарифм fugacity, див. фугативність healing length, $\partial u \boldsymbol{e}$. довжина відновлення high-field seeker, 115 low-field seeker, 115 optical plug, *див.* оптичний корок TOP-trap, *див.* пастка з усередненим у часі... untrapped state, 115 vortex lattice, *див.* сітка вихорів

Навчальне видання

Ровенчак Андрій Адамович

ФІЗИКА БОЗЕ-СИСТЕМ

Навчальний посібник

Редактор Коректор Комп'ютерна верстка Технічний редактор

Анна Габрук Христина Макович Андрій Ровенчак Світлана Сеник

Формат 60 × 90 $^{1}/_{16}$ Умовн. друк. арк. 8.0 Наклад 300 прим. Зам. .

Львівський національний університет імені Івана Франка вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів видавничої продукції Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Віддруковано у книжковій друкарні "Коло" вул. Бориславська, 8, м. Дрогобич, Львівська обл., 82100

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів видавничої продукції Серія ДК № 498 від 20.06.2001 р.







