Андрій РОВЕНЧАК

Статистика Бозе і дробові статистики в теорії багаточастинкових систем і суміжних задачах

 $\frac{1}{z^{-1}X(\varepsilon_j/T)-lpha}$

Міністерство освіти і науки України Львівський національний університет імені Івана Франка

Андрій Ровенчак

Статистика Бозе і дробові статистики в теорії багаточастинкових систем і суміжних задачах

УДК 530.145 + 531.19 + 538.941 + 519.116 + 81'32 ББК В317 + В368 + В131 + Ш11 Р 58

Рецензенти:

чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. Ю. В. Головач (Інститут фізики конденсованих систем НАН України, м. Львів); д-р фіз.-мат. наук, проф. С. Й. Вільчинський

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка);

д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. М. Гаврилик** (Інститут теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова НАН України, м. Київ)

Рекомендувала до друку Вчена рада Львівського національного університету імені Івана Франка (протокол №41/09 від 27.09.2017)

Ровенчак А. А. Статистика Бозе і дробові статистики в теорії багаточастинкових систем і суміжних задачах : монографія

Р 58 / А.А.Ровенчак. — Львів : Львівський національний університет імені Івана Франка, 2018. — 316 с.

ISBN 978-617-10-0443-6

У монографії викладено низку підходів до аналізу багатобозонних систем та систем із дробовими статистиками. Запропоновано нові типи дробових статистик: статистику Поліхронакоса з комплексним параметром, де передбачено існування фазових переходів, та двопараметричні статистики, які дозволяють моделювати еніони та слабковзаємодіючі скінченні бозе-системи. Аналогії з фізичними моделями використано для міждисциплінарних досліджень. Низку результатів отримано для задачі про розбиття з теорії чисел. Запропоновано нові параметри для класифікації текстів, що пов'язано з дослідженнями складних систем.

УДК 530.145 + 531.19 + 538.941 + 519.116 + 81'32 ББК В317 + В368 + В131 + Ш11

© Ровенчак А. А., 2018

© Львівський національний університет імені Івана Франка, 2018

ISBN 978-617-10-0443-6

Зміст

Передмова 7			
Bo	ступ		9
1.	Ста	ювлення і сучасний стан досліджень	13
	1.1.	Вступ	. 13
	1.2.	Квантовомеханічний підхід	. 17
		1.2.1. Еніони	. 17
		1.2.2. <i>q</i> -деформації	. 21
	1.3.	Статистико-механічні узагальнення	. 24
		1.3.1. Статистика Джентіле.	. 25
		1.3.2. Статистика Голдейна-Ву.	. 27
		1.3.3. Статистика Поліхронакоса.	. 30
	1.4.	Неекстенсивна статистика	. 32
	1.5.	Системи бозонів	. 36
2.	Одн	орідні бозе-системи зі взаємодією	41
	2.1.	Вступ	. 41
	2.2.	Енергетичний спектр взаємодіючої бозе-системи	. 43
		2.2.1. Факторизація гамільтоніана.	. 43
		2.2.2. Обчислення спектра.	. 45
		2.2.3. Результати й обговорення	. 46
	2.3.	Розрахунок спектра бозе-системи в довгохвильовій грани	ці 48
		2.3.1. Рівняння руху для функцій Ґріна.	. 48
		2.3.2. Розщеплення функцій Гріна і спектр	
		елементарних збуджень	. 49
		2.3.3. Результати розрахунків.	. 52
		2.3.4. Обговорення.	. 58
	2.4.	Міжатомні потенціали розрідженої багатобозонної систем	и 58
	2.5.	Вплив слабкої взаємодії на властивості бозе-газу	. 62
		2.5.1. Ідеальний <i>D</i> -вимірний бозе-газ	. 62
		2.5.2. Слабковзаємодіючий газ	. 67
	2.6.	Висновки до розділу 2	. 75

3.	Сис	теми частинок у зовнішньому потенціалі	77
	3.1.	Вступ	77
		3.1.1. Ідеальний газ у зовнішньому потенціалі	77
		3.1.2. Приклад застосування квазікласичного	
		наближення	79
	3.2.	Бозони в пористому середовищі під впливом зовнішнього	
		ПОЛЯ	81
		3.2.1. Загальна схема розрахунків	81
		3.2.2. Система осциляторів у <i>D</i> вимірах	81
		3.2.3. Напівкласичний підхід	82
		3.2.4. Точні результати: 1/ <i>N</i> -розклади	83
		3.2.5. Числові розрахунки.	84
	3.3.	Метод наближеного вторинного квантування для бозонів	
		у пастці	86
		3.3.1. Діагоналізація гамільтоніана	86
		3.3.2. Результати розрахунків.	90
	3.4.	Ефективний гамільтоніан і спектр елементарних збуджень	
		бозонів у гармонічній пастці	91
		3.4.1. Процедура діагоналізації	92
		3.4.2. Одновимірна задача.	97
		3.4.3. Двосортова бозе-суміш.	102
	3.5.	Одновимірні слабковзаємодіючі гармонічні осцилятори	
		зі статистикою Джентіле	104
		3.5.1. Вихідні вирази.	105
		3.5.2. Розрахунок термолинамічних функцій.	107
		3.5.3. Хімічний потенціал при $T = 0.$	110
		3.5.4. Результати числових розрахунків.	111
	3.6.	Висновки до розділу 3	115
4.	Ста	тистика Поліхронакоса з комплексним параметром	117
	4.1.	Вступ	117
	4.2.	Вихідні вирази	119
	4.3.	Бозонна і ферміонна границі	120
	4.4.	Система двовимірних осциляторів із нефіксованою	
		кількістю частинок	122
	4.5.	Одновимірні гармонічні оспилятори	124
		4.5.1. Критична температура і повелінка	
		термолинамічних функцій	126
		4.5.2. Можливості експериментальної перевірки.	130
	4.6.	Термодинамічні функції Д-вимірних осциляторів	133
		4.6.1. Високотемпературна границя.	136
		4.6.2. Область фазового переходу. Критична температура	137
		4.6.3. Критичне значення параметра статистики.	143

		4.6.4.	Поведінка термодинамічних функцій	145
		4.6.5.	Низькотемпературна область й узагальнення	
			результатів	154
	4.7.	Висно	овки до розділу 4	158
5.	Дво	парам	атричні дробові статистики	161
	5.1.	Вступ	[161
	5.2.	Віріал	њне i кластерне розвинення	163
	5.3.	Зв'язо	ж між різними типами дробової статистики	165
		5.3.1.	Віріальне розвинення для еніонів	165
		5.3.2.	Розклади за параметром статистики	169
	5.4.	Двопа	араметричні модифікації статистики	171
		5.4.1.	Неповна статистика Поліхронакоса	173
		5.4.2.	Неадитивна статистика Поліхронакоса	173
		5.4.3.	Неповна статистика Голдейна–Ву	174
		5.4.4.	Неадитивна статистика Голдейна–Ву	174
		5.4.5.	Зв'язок із еніонною статистикою	175
		5.4.6.	Бозонна границя статистики Голдейна–Ву	
			з q-експонентою	180
	5.5.	Слабк	сонеадитивна статистика Поліхронакоса	187
		5.5.1.	Розклади за малими поправками	189
		5.5.2.	Тривимірні гармонічні осцилятори	191
		5.5.3.	Критична температура тривимірної системи	195
		5.5.4.	Теплоємність модельних систем зі СНАСП	197
	5.6.	Висно	овки до розділу 5	201
6.	Ста	тистич	чна механіка в задачі про розбиття	
	нат	уралы	них чисел	203
	6.1.	Вступ	[203
	6.2.	Фізич	на аналогія та метод розрахунку	205
	6.3.	Необм	ежені розбиття	208
		6.3.1.	Одновимірний випадок.	208
		6.3.2.	Двовимірний випадок	209
		6.3.3.	Поправка до головної асимптотики	211
	6.4.	Двови	мірні розбиття цілих чисел з обмеженою кількістю	
		части	Η	213
		6.4.1.	Загальні результати для скінченної системи	
			N частинок	214
		6.4.2.	Перевірка підходу в одновимірному просторі	216
		6.4.3.	Результати для плоских розбиттів	218
		6.4.4.	Числова оцінка кількості обмежених плоских	
			розбиттів для проміжних значень $N \sim n^{2/3}$	222

	6.5.	Зв'язок між дробовою статистикою	
		і скінченною бозе-системою в одновимірному випадку	223
		6.5.1. Мікроканонічний підхід.	224
		6.5.2. Підхід канонічного і великого канонічного	
		ансамблів	225
		6.5.3. Степеневий енергетичний спектр.	226
	66	Багатовимірні розбиття цілих чисел	229
	6.7	Висновки до розділу 6	232
	0	Bhohobkin do posidivity o	202
7.	Ста	тистика Бозе в задачі класифікації	
	скла	адних систем	233
	7.1.	Вступ	233
	7.2.	Рангово-частотний розподіл	234
	7.3.	Фізична аналогія	236
	7.4.	Перші результати	239
	7.5.	Вплив довжини тексту на значення параметрів	243
	7.6.	Новела Антуана де Сент-Екзюпері	246
	7.7.	Траєкторії текстів	252
	7.8.	Моделі з дробовою вимірністю простору	
		і дробовою статистикою	256
	7.9.	Можливості дослідження еволюції мов	262
	7.10	. Висновки до розділу 7	268
Висновки 27			
Πj	редм	етний покажчик	275
Література 27			

Передмова

Монографія ґрунтується на дослідженнях, які автор проводив на кафедрі теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка протягом 2003–2017 рр., основна частина яких склала основу його докторської дисертації, захищеної у жовтні 2016 р. Праці частково підтримано в межах держбюджетних тем Фф-150Ф «Розробка нових математичних методів дослідження квантових систем» (2003–2005 pp., номер держреєстрації 0103U001935), Фф-55Ф «Теоретичні дослідження нових квантових систем» (2006–2008 pp., номер держреєстрації 0106U001294), Фф-14Ф «Нові методи дослідження квантових систем декількох і багатьох частинок» (2009–2011 pp., номер держреєстрації 0109U002096), Фф-110Ф «Нові ефекти у квантових рідинах і газах та системах з деформованою алгеброю Гайзенберґа» (2012–2014 рр., номер держреєстрації 0112U001275), проект ДФФД Ф64 «Класичні та квантові системи за межами стандартних підходів» (2015–2016 рр., номери держреєстрації 0115U004838, 0116U005055); Фф-30Ф «Класичні і квантові системи з нестандартними комутаційними співвідношеннями і статистиками» (2016–2017 рр., номер держреєстрації 0116U001539). Частину міждисциплінарних досліджень зроблено за проектом M/6-2009 «Створення збалансованого текстового банку даних української мови» (2009–2010 рр., номер держреєстрації 0109U001786) в межах програми міжнародного науково-технічного співробітництва між Україною та Австрійською Республікою.

За обговорення результатів автор висловлює вдячність своїм колегам, зокрема Іванові Вакарчуку, Володимирові Ткачуку, Юрію Криницькому, Тарасові Фітю, Володимиру Пастухову та всім співавторам. Окрема подяка за корисні зауваження рецензентам та редакторам.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

дробова виключна статистика
слабконеадитивна статистика Поліхронакоса
Bose–Einstein statistics (статистика Бозе–Айнштайна)
Bose–Einstein condensation (конденсація Бозе–Айнштайна)
Fermi–Dirac statistics (статистика Фермі–Дірака)
fractional exclusion statistics (дробова виключна статистика)
Haldane–Wu statistics (статистика Голдейна–Ву)
incomplete Haldane–Wu statistics statistics (неповна статистика Голдейна–Ву)
incomplete Polychronakos statistics (неповна статистика Поліхронакоса)
Kosterlitz–Thouless [transition] ([перехід] Костерліца–Таулеса)
nonadditive Haldane–Wu statistics (неадитивна статистика Голдейна–Ву)
nonadditive Polychronakos statistics (неадитивна статистика Поліхронакоса)
random phase approximation (наближення хаотичних фаз)
[наближення] Вентцеля–Крамерса–Бріллюена

ВСТУП

Квантові багаточастинкові системи посідають важливе місце в сучасній експериментальній і теоретичній фізиці. Одним із напрямів є вивчення макроскопічних квантових явищ, до яких належать, зокрема, надплинність, надпровідність, а також квантовий ефект Голла [1–3]. Розвиток експериментальних методів досягнення наднизьких температур і техніки керування нейтральними атомами дозволив зрештою отримати 1995 р. новий стан матерії — конденсат Бозе–Айнштайна — в лазерно-охолоджених розріджених газах лужних металів [4, 5].

Цікавим показником популярності певної тематики може бути кількість опублікованих праць. Можна простежити, наприклад, у виданнях Американського фізичного товариства (серія Physical Review), що до середини 90-х років XX ст. в анотаціях терміни «бозе-конденсат», «бозе-конденсація» траплялися 1–2 рази на кожну тисячу статей, у другій половині 90-х років цей показних майже досягнув значення 8, а після 2000 р. стабільно тримається в межах 15–17 статей на 1000.

Першими системами, в яких експериментально досягли стану бозе-конденсації, стали ізотопи ⁸⁷Rb [4], ²³Na [5] та ⁷Li [6]. Згодом перелік розпирився іншими лужними й лужноземельними ізотопами, лантаноїдами та деякими іншими елементами [7], і сьогодні відомо про бозе-конденсацію в системі атомів калію, цезію, кальцію, хрому, стронцію, ітербію, диспрозію, ербію, а також у спінполяризованого атомарного водню [8].

Експериментальні успіхи в дослідженні цього макроскопічного квантового явища дали новий поштовх зусиллям, спрямованим на побудову теоретичних моделей опису бозе-систем [9]. Для вивчення слабковзаємодіючих бозе-систем застосовують методи квантової теорії поля, які пов'язані з використанням формалізму операторів породження–знищення [10–12], а також — набагато ширше — з нелінійним рівнянням Шрьодінґера (відомим як рівняння Ґросса– Пітаєвського [13]), порівн. [14, 15]. Активно застосовують і числові методи [16, 17].

Складність і, відповідно, висока вартість експериментальних установок для дослідження конденсації Бозе–Айнштайна спричинили зацікавлення бозе-системами в нижчих розмірностях — дво- й одновимірних [17–19]. В окремий напрям також можна виділити вивчення дво- [20–22] та багатокомпонентних [23, 24] бозе-конденсатів. Використання цих систем може бути зокрема пов'язане з квантовими обчисленнями [25].

Жвавий інтерес як експериментаторів, так і теоретиків різних дослідницьких груп нині викликають дослідження квантових вихорів у конденсатах [21, 24, 26, 27], а також інших нелінійних явищ, наприклад, квантової турбулентності [27–29].

Можливість того, що у двовимірному просторі частинки можуть підлягати статистиці, відмінній від бозонної чи ферміонної, продемонстровано 1977 р. [30]. Виявляється, що завдяки топологічним особливостям двовимірного руху перестановка двох частинок може спричиняти зміну фазового множника хвильової функції, відмінну від ±1: $\psi(x_2, x_1) = e^{i\pi\alpha}\psi(x_1, x_2)$, де α — довільне число. Звідси й походить термін *еніони* (англ. *апуоп*, від *апу* — 'будь-який') [31].

Протягом останніх десятиліть до поняття дробової¹ статистики для опису квантових систем використовують цілу низку підходів [32, 33]. Системи з дробовою статистикою набувають щораз ширшого застосування як ефективні моделі в різних галузях фізики, від високотемпературної надпровідності [34] до космології [35]. Такий перелік зокрема включає дробовий квантовий ефект Голла [36], холодні атомні гази [37], ядерну матерію [38] і навіть моделі темної матерії [39]. Цікаво, що також існують праці, де темну матерію розглядають як бозе-конденсати різного типу [40–42].

Так звану виключну статистику (англ. *exclusion statistics*) можна пов'язати із взаємодіями в одновимірних системах [43], для

¹Відзначмо, що в літературі статистики, відмінні від бозонної та ферміонної, називають також «інтерполяційними», «проміжними», «нестандартними», «екзотичними» тощо.

опису ультрахолодних газів використовують еніонно-ферміонне відображення [44]. Найновіші дослідження в галузі еніонної та дробової статистики включають вивчення так званих неабелевих еніонів [45–47], які є аналогами парастатистики Ґріна [48], а також застосування виключної статистики до різних систем [49, 50]. В окрему гілку можна виділити неекстенсивні узагальнення статистичної механіки [51, 52].

Вивчення дробових статистик, окрім самостійного теоретичного інтересу, має також важливе практичне значення. Такі статистики дають змогу описувати квантові бозе- та фермі-системи з різними типами взаємодій на досить простому математичному рівні. Самі ж такі квантові системи відіграють важливу роль в галузі сучасних інформаційних технологій [53]. Зокрема, нині існують пропозиції щодо реалізації квантових обчислень за допомогою еніонів [54, 55]. Серед майбутніх технологій запису інформації також розглядають бозе-конденсати, у яких фактично на макроскопічному рівні проявляються квантові властивості. Також важливою ділянкою застосування бозе-конденсатів є високоточна інтерферометрія [56, 57], яка виявляється на два порядки точнішою за традиційні оптичні методи.

Важливою рисою сучасної науки є міждисциплінарний характер багатьох її галузей. Фізичні методи — насамперед, розвинуті в межах статистичної фізики — активно застосовують не лише в математиці [58–60] чи природничих науках, зокрема в біології [61–63], а й для встановлення закономірностей певних явищ у гуманітарних [64–67] і суспільних науках [68–71].

Процеси, які є предметом опису гуманітарних і суспільних наук, і макроскопічні квантові явища, крім можливих спільних підходів на математичному рівні, поєднує також те, що всі вони є проявом емерджентності (від англ. *emergence* 'виникнення'). Це поняття належить до теорії систем й означає існування в певної системи нових властивостей, нехарактерних для її окремих елементів.

Виклад матеріалу книги має таку структуру. В розділі 1 подано історичний огляд становлення досліджень квантових систем з різними типами статистики, а також окреслено сучасні напрями у цій галузі. Особливу увагу тут приділено саме дробовим статистикам [72], зважаючи на те, що бозонні системи належать назагал до відоміших фізичних об'єктів.

У розділі 2 методи квантової теорії поля застосовано для аналізу багатобозонних систем. Зокрема, знайдено енерґетичний спектр елементарних збуджень, отримано вирази для обчислення термодинамічних функцій та розраховано конденсатну фракцію модельної системи. Також досліджено бозе-газ зі слабкою міжчастинковою взаємодією.

Розділ 3 містить аналіз властивостей бозе-системи зі слабкою взаємодією у пастці за допомогою методу наближеного вторинного квантування. Також тут подано виведення термодинамічних функцій невзаємодіючого бозе-газу для простору довільної вимірності (зокрема дробової, якою можна моделювати пористе середовище), отримано результати для термодинаміки слабковзаємодіючої системи з дробовою статистикою Джентіле в осциляторній пастці.

У розділі 4 запропоновано узагальнення дробової статистики Поліхронакоса з використанням комплексного параметра, розраховано термодинамічні функції системи гармонічних осциляторів з такою статистикою та передбачено існування фазових переходів, пов'язаних із комплекснозначністю цього параметра.

У розділі 5 запропоновано низку двопараметричних дробових статистик, за допомогою яких можна наближено моделювати ідеальну еніонну систему. Параметри однієї з таких статистик пов'язані з ефектами взаємодії та скінченною кількістю частинок у бозесистемі зі слабкою взаємодією.

Розділи 6 і 7 присвячено міждисциплінарним застосуванням методів дослідження бозе-систем. Зокрема, у розділі 6 на підставі аналогії між кількістю мікростанів квантової бозе-системи і математичною задачею про так звані розбиття натуральних чисел отримано оцінки кількості деяких типів розбиттів з фізичних міркувань. Також аналогію між розподілом Бозе і частотним розподілом у текстах використано в розділі 7 для вивчення можливості класифікації складних систем.

Завершується праця загальними висновками, у яких стисло підсумовано головні результати та коротко вказано можливості їх застосування і подальшого розвитку відповідних напрямів досліджень.

Розділ 1

СТАНОВЛЕННЯ І СУЧАСНИЙ СТАН ДОСЛІДЖЕНЬ

忘るなよ薮の中なる梅の花. (松尾芭蕉)¹

1.1. Вступ

Основи сучасної статистичної фізики закладено переважно у другій половині XIX ст. у працях Рудольфа Клаузіуса, Джеймса Клерка Максвелла, Людвіґа Больцмана, Джосаї Вілларда Ґіббса та ін. Протягом 50–60-х років XIX ст. Клаузіус сформулював поняття ентропії, увівши сам термін 1865 р. [73]. Розподіл молекул за швидкостями в ідеальному газі отримав Максвелл [74, 75], результати якого узагальнив Больцман [76, 77]. Згодом Больцман запропонував спосіб розрахунку кількості мікростанів [78], фактично пов'язавши з ним ентропію, проте відомий вираз $S = k \log W$ вперше явно з'явився у праці Макса Планка 1901 р. [79]. На парадокс, пов'язаний із пізнішим квантовомеханічним принципом тотожності частинок, уперше увагу звернув, мабуть, Ґіббс [80], йому ж

¹Не забувай, // Що саме серед хащі // Трапляється розкішний сливи цвіт! (Мацуо Басьо, 1697). — *Переклад Івана Бондаренка*.

належать уведення поняття статистико-механічних ансамблів і виведення формули для розподілу ймовірностей [81], що становить основу класичної статистики Больцмана–Ґіббса.

Історія квантових розподілів бере початок у працях Сат'єндраната Бозе [82] й Альберта Айнштайна [83, 84], що з'явилися у 1924– 1925 рр. Бозе застосував комбінаторний підхід до квантів світла й за його допомогою вивів розподіл Планка. Цю ідею Айнштайн узагальнив на частинки з ненульовою масою, внаслідок чого передбачив явище накопичення макроскопічної кількості частинок у стані з нульовим імпульсом — явище, яке називають конденсацією Бозе–Айнштайна.

1925 р. Вольфґанґ Паулі з метою пояснення правила заповнення електронних оболонок атомів хімічних елементів увів правило [85], відоме зараз як принцип заборони, названий його іменем. Роком пізніше Енріко Фермі [86] та Поль Дірак [87] отримали функцію розподілу для частинок, які підкоряються принципові заборони Паулі, що відповідає антисиметричним хвильовим функціям.

Ідея Паулі спонукала до введення нового квантового числа, яке назвали спіном [88, 89]. Маркус Фірц [90] сформулював 1939 р. твердження, відоме як теорема про зв'язок спіну зі статистикою. Систематичніший підхід до цього питання подано у працях Паулі [91] та Юліана Швінґера [92]. У спрощеному вигляді теорема звучить так: хвильова функція системи тотожних частинок із цілим спіном симетрична щодо їх перестановок, а для частинок із півцілим спіном хвильова функція є антисиметричною щодо перестановок. Частинки із цілим спіном описує статистика Бозе–Айнштайна, відповідно, їх називають бозонами; для частинок із півцілим спіном справедлива статистика Фермі–Дірака, тому їх називають ферміонами.

Згадані два типи частинок вичерпують можливі варіанти як значень спіну, так і статистики квантових частинок. Дихотомія між бозонами і ферміонами, як буде сказано нижче, порушується лише в разі переходу від три- до двовимірного простору. Не позбавленим сенсу є й припущення про те, що в реальних багаточастинкових системах відхилення від цієї дихотомії можливе як ефективний наслідок взаємодії. Такі міркування дають підстави розглядати певні узагальнення квантових статистик Бозе і Фермі. Спрощено можна виділити два підходи до таких узагальнень: перший ґрунтується переважно на квантовомеханічному розгляді, тобто аналізі властивостей хвильової функції, комутаційних співвідношень тощо, а другий пов'язаний з методами статистичної фізики, тобто підрахунком кількості мікростанів, узагальненням поняття ентропії та ін. Треба зазначити, що такий поділ є досить умовним, оскільки між обома підходами існує доволі тісний зв'язок [72].

Першу відому спробу узагальнення статистики зробив Джованні Джентіле (мол.) 1940 р. [93]. Він запропонував проміжну статистику, у якій максимально дозволене заповнення рівня було обмежене деяким числом *d*. Також Джентіле та його колеги спробували застосувати цю статистику для пояснення деяких властивостей рідкого гелію [94] (див. також [95] і поклики там). Аналіз трудноців, які виникають із квантовомеханічним підходом до статистики Джентіле, можна знайти у праці Борселліно [96].

Цікаво, що Леон Бріллюен у своїй книзі [97, див. особливо розділ VI] наводить загальний вираз для кількості мікростанів у різних квантових статистиках, обмежуючись однак аналізом лише традиційних значень певного параметра, що відповідають статистикам Бозе, Фермі та Больцмана (з урахуванням тотожності частинок; у термінології Брюллюена — статистика Планка). Значно пізніше довільне значення параметра статистики у такому ж виразі для кількості мікростанів допустив Алєксіос Поліхронакос [98].

Герберт Сидні Ґрін запропонував 1953 р. узагальнення, відоме як парастатистика [48]. Певні модифікації комутаційних співвідношень між операторами породження—знищення дозволяють розглядати ситуації, коли хвильові функції k > 1 парабозонів є антисиметричними за перестановки не більше k частинок, і, відповідно, kпараферміонів залишаються симетричними за таких перестановок [99, Гл. 4]

Чимало модифікацій алґебри операторів породження–знищення приводить до різноманітних проміжних статистик (див. [100] і поклики там). Часто використовують так звані *q*-деформовані комутатори або *q*-мутатори $[a, a^{\dagger}]_q = aa^{\dagger} - qa^{\dagger}a$, порівн. [101–103]. При цьому для роботи необхідний відповідний математичний апарат, який називають *q*-численням або квантовим аналізом [104]. Варто зазначити також вивчення термодинаміки у просторах із деформованими комутаційними співвідношеннями для операторів координати та імпульсу, що приводять до існування мінімальної довжини [105].

1977 р. Йон Манне Лайнос і Ян Міргайм [30] показали, що у двовимірній системі фаза хвильової функції за перестановки двох частинок може набувати довільних значень, на відміну від тривимірного випадку. Як уже згадувалося у вступі, Френк Вілчек 1982 р. [31] запропонував для таких частинок назву *еніони*. У 1975 р. теоретично передбачено [106], а 1980 експериментально відкрито [107] квантовий ефект Голла — явище квантування за низьких температур у двовимірному електронному газі голлівської провідності $\sigma_{\rm H} = \nu e^2/h$, де ν — ціле число. Після відкриття 1982 р. дробового квантового ефекту Голла (ν — раціональний дріб) [108] запропоновано кілька теорій цього явища, які ґрунтувалися на моделях збуджень із дробовим зарядом [109–112]. Виявилося, що відповідні квазічастинки можуть бути еніонами [110, 112].

Данкан Голдейн 1991 р. ввів узагальнення принципу заборони Паулі, запропонувавши інтерполяційний між бозонною і ферміонною границями вираз для підрахунку кількості мікростанів [113]. Йон-Ші Ву 1994 р. отримав функцію розподілу у цій статистиці [114], що отримала назву *дробової виключної статистиц*и (англ. *fractional exclusion statistics*). Виявилося, що такі ж вирази для термодинамічного потенціалу і рівняння стану відповідають задачі про еніони на найнижчому рівні Ландау [115]. Однак, незважаючи на цей результат і на те, що підхід Голдейна є альтернативною моделлю для опису дробового квантового ефекту Голла, безпосереднього зв'язку між еніонною і дробовою виключною статистикою немає [33, Chap. 5]. Існують також інші способи запису кількості мікростанів систем із дробовою статистикою [98, 116], один із яких буде проаналізовано детальніше.

В окрему галузь можна виділити підходи, пов'язані з узагальненнями означення ентропії, започатковане у працях, присвячених поняттю інформаційної ентропії, зокрема Альфреда Реньї [117] та Золтана Дароці [118]. Константіно Цалліс 1988 р. запропонував неекстенсивну статистику [119], яка, за задумом, може стосуватися систем із неадитивною ентропією, тобто таких, де суттєво проявляється далекодія, спостерігаються ефекти «пам'яті», суттєво немарківські процеси тощо [120]. Розвиток цих ідей відображено у працях Курадо і Цалліса [121], Цалліса *та ін.* [122], Башкірова [123], Олємского *та ін.* [51, 124].

Зрозуміло, що навіть у досить об'ємному огляді неможливо розглянути всі способи узагальнення квантової статистики. У наступному підрозділі коротко проаналізовано деякі найбільш популярні квантовомеханічні підходи до цього питання. Підрозділ 1.3 присвячено детальному аналізу кількох статистико-механічних варіантів уведення дробової статистики. Окремо в підрозділі 1.4 розглянуто неекстенсивну статистику Цалліса та пов'язані з нею аналоги квантових розподілів. Підрозділ 1.5 присвячено короткому аналізу сучасних напрямів дослідження бозонних систем.

1.2. Квантовомеханічний підхід

1.2.1. Еніони. Існування лише двох можливостей для хвильової функції системи багатьох частинок — симетричної або антисиметричної — пов'язане з властивістю оператора перестановки P. Розгляньмо для простоти хвильову функцію двох (тотожних!) частинок $\psi(1,2)$, яка при заміні їх місцями внаслідок дії оператора P_{12} набуває додаткової фази:

$$P_{12}\psi(1,2) = \psi(2,1) = e^{i\pi\alpha}\psi(1,2).$$
(1.1)

Повторна дія оператора P_{12} дає

$$P_{12}^2\psi(1,2) = e^{2i\pi\alpha}\psi(1,2) = \psi(1,2), \qquad (1.2)$$

звідки отримуємо $\alpha = 0$ або 1, що відповідає симетричній (бозони) або антисиметричній (ферміони) хвильовій функції. Цей факт пов'язаний із тим, що подвійна перестановка зводиться до тотожної (одиничної) операції, $P_{12}^2 = I$. Виявляється, однак, що така властивість характерна для тривимірного простору, проте порушується у двовимірних задачах [33, 125]. Справді, якщо уявити операцію перестановки як переміщення однієї частинки навколо іншої, то замкнений шлях можна неперервно стиснути в точку лише у просторі з розмірністю 3 або більше, а на площині цього зробити не можна, зважаючи на тверду серцевину (частинки не можуть просто проникати одна через одну), див. рис. 1.1.



Рис. 1.1. Подвійна перестановка у двовимірному просторі (ліворуч) не зводиться до одиничної операції, як у тривимірному просторі (праворуч). Ілюстрацію класичних траєкторій можна переформулювати на квантовий випадок шляхом переходу до інтеґралів за траєкторіями

Отже, у двовимірному випадку подвійна перестановка $P_{12}^2 \neq I$ й не існує обмеження на фазу хвильової функції $\pi \alpha$. Звідси, як уже було згадано у вступі, й походить назва таких частинок — еніони.

Якщо у тривимірному просторі маємо справу із групою перестановок S_N , то відповідником у двовимірному буде так звана *група кіс* (англ. *braid group*) B_N [33, 125]. Деякі її властивості, які є багатшими порівняно зі звичайною групою перестановок, можна проілюструвати за допомогою такого графічного зображення. Генераторами групи кіс є оператори σ_i . Поставивши у відповідність *i*-й частинці *струну*, що з'єднує *i*-ті точки, розташованій на двох упорядкованих множинах (прямих), зобразимо дію оператора σ_i , як показано на рис. 1.2. Такий оператор відповідає перестановці частинок 1 і 2 (взагалі кажучи, у визначеному напрямі, — наприклад, проти годинникової стрілки).



Рис. 1.2. Дія оператора σ_1 . Струна, що виходить із точки, яка відповідає частинці 1 на нижній прямій, до точки, що відповідає частинці 2 на верхній, пролягає *над* іншою [33, 126]

Як показано на рис. 1.3, повторна дія σ_1 не дає початкової конфіґурації — коса «заплітається», тобто топологічно $\sigma_1^2 \neq \sigma_1^{-1} \sigma_1 = I$.



Рис. 1.3. Подвійна перестановка не зводиться до одиничної операції — дія оператора $\sigma_1^2 \neq \sigma_1^{-1} \sigma_1 = I$

Генератори групи кіс σ_i задовольняють такі властивості (співвідношення Артіна, Artin relations) [33, 126, 127]:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \tag{1.3}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i,$$
 якщо $|i - j| \ge 2.$ (1.4)

Відповідні графічні зображення наведено на рис. 1.4



Рис. 1.4. Графічне зображення властивостей операторів групи кіс $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ (ліворуч) і $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, $|i - j| \ge 2$ (праворуч) [33, 127]

Можна також навести міркування про те, що спін у двовимірній задачі може набувати довільних значень, а не лише цілих або півцілих (в одиницях \hbar). Квантування спіну у тривимірному просторі пов'язане з некомутативною алґеброю спінових операторів

$$[S_j, S_k] = i\hbar\varepsilon_{jkl}S_l, \qquad j, k, l = 1, 2, 3, \tag{1.5}$$

де ε_{jkl} — символ Леві-Чівіти [33, Chap. 2], див. також [128, Розд. VI].

У двовимірному просторі відповідна алґебра стає тривіальною, оскільки зводиться лише до одного оператора (наприклад, S_3 , який відповідає обертанню навколо осі z). Очевидно, що один оператор комутує сам із собою, отже, із самих його комутаційних властивостей не випливає квантування його власних значень — для їх знаходження потрібно врахувати граничні умови, які задовольняє хвильова функція. За перестановки двох частинок, що відповідає дії оператора повороту, вона набуває фази $e^{2\pi is}$, де цілі значення $s = 0, \pm 1, \ldots$ визначають симетричну хвильову функцію (бозони), а півцілі $s = \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots$ — антисиметричну (ферміони). Оскільки у двовимірному просторі фаза $2\pi s$, яка пов'язана із власними значеннями оператора повороту, може бути довільною, то її можна ототожнити з довільним спіном.

Хвильову функцію N еніонів можна записати у вигляді [129, Chap. 4]:

$$\psi(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{\alpha} \phi(z_1, \dots, z_N),$$
(1.6)

де положення k-ї частинки на площині з координатами x_k, y_k зручно описувати комплексною координатою $z_k = x_k + iy_k$, а ϕ — однозначна певним способом симетризована функція. Сама функція ψ вже буде багатозначною, її не вдається записати як добуток одночастинкових хвильових функцій: навіть для ідеального газу еніонів характерна своєрідна далекосяжна взаємодія, пов'язана з топологією траєкторій взаємного руху частинок [31]. Це, зокрема, показує, що розв'язування задачі N ідеальних еніонів не зводиться до відповідної одночастинкової задачі [130, 131]. Також не є простим перехід до вторинного квантування для еніонів: з цією метою застосовують, наприклад, формалізм так званих визначників Слетера [132] або вершинні оператори моделі Калоджеро [133].

Першу фізичну модель, яка відповідає еніонам, запропонував Вілчек у вигляді композитів магнітного потоку і зарядженої частинки [134]. Про спостереження інтерференційної картини, яка відповідала лафлінівським квазічастинкам (елементарним збудженням із дробовим зарядом, характерним для дробового квантового ефекту Голла, які вважають одними з кандидатів на еніони), повідомили 2005 р. Каміно *ma in.* [135]. Також експериментальні реалізації еніонів у системі, що складається із надпровідної плівки, вирощеної на напівпровідниковому гетеропереході, запропонували Вікс *та ін.* [136], а в одновимірних оптичних ґратках — Кайльман *та ін.* [137].

1.2.2. *q*-деформації. Як було зазначено у вступі, комутаційні співвідношення між операторами породження–знищення a^{\dagger}, a можна інтерполювати між ферміонами (антикомутатор) і бозонами (звичайний комутатор), увівши *q*-деформовані комутатори або *q*-мутатори. Одним із найпростіших узагальнень є так звана куонна (англ. *quon*) алґебра [138–140]:

$$[a_j, a_k^{\dagger}]_q = a_j a_k^{\dagger} - q a_k^{\dagger} a_j = \delta_{jk}, \qquad (1.7)$$

де $-1 \le q \le 1$ забезпечує неперервну інтерполяцію між q = -1, що відповідає ферміонам, і q = 1 — бозонами. Випадок, коли оператори різних мод комутують (а не пов'язані *q*-мутатором, як вище), називають деформованими осциляторами Арика–Куна [141–143]. Така система є дещо простішою за куони, оскільки в ній різні моди незалежні, і збігається з куонами в разі однієї моди.

Якщо ввести оператор «кількості частинок» N, доповнюючи q-мутатор відповідними співвідношеннями, то можна отримати таку алґебру q-бозонних операторів [101, 144]:

$$aa^{\dagger} - qa^{\dagger}a = 1, \qquad [a, a] = [a^{\dagger}, a^{\dagger}] = 0,$$
 (1.8)

$$[N, a^{\dagger}] = a^{\dagger}, \qquad [N, a] = -a.$$
 (1.9)

Ортонормовану систему власних станів оператора Nзаписують так:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]_q!}} (a^{\dagger})^n |0\rangle, \qquad a|0\rangle = 0, \qquad (1.10)$$

де q-факторіал

$$[n]_{q}! = [n]_{q}[n-1]_{q} \dots [1]_{q} =$$

$$= (q^{n-1} + \dots q + 1)(q^{n-2} + \dots q + 1)\dots (q^{2} + q + 1)(q + 1)1;$$

$$[0]_{q}! = 1$$
(1.11)

означено через так звані *q*-числа, які переходять у звичайні числа в бозонній границі *q* = 1:

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}, \qquad [n]_1 = n. \tag{1.12}$$

Діють ці оператори на власні стани так:

$$a^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{[n+1]_q} |n+1\rangle, \qquad (1.13)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{[n]_q} |n-1\rangle, \qquad (1.14)$$

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \tag{1.15}$$

причому

$$a^{\dagger}a = [N]_q, \qquad aa^{\dagger} = [N+1]_q,$$
 (1.16)

а для оператора N формально запишемо:

$$N = \frac{1}{\ln q} \ln \left(1 + (q-1)a^{\dagger}a \right).$$
 (1.17)

Можна також показати, що у великому канонічному ансамблі для чисел заповнення *i*-го рівня з енерґією ε_i матимемо [144]:

$$n_i = \frac{1}{\ln q} \ln \left(\frac{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_i} - 1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_i} - q} \right), \qquad (1.18)$$

де, як звичайно, $z = e^{\beta\mu}$ — активність, μ — хімічний потенціал, а $\beta = 1/T$ — обернена температура. Варто звернути увагу, що тут і далі стала Больцмана дорівнює одиниці, $k_{\rm B} = 1$.

Подібно до описаного вище, декілька різних алґебр для *q*-ферміонних операторів розглянули Алґін [145, 146], Алґін і Сенай [147].

Р.-Монтейро та ін. [148] розглянули таку q-бозонну алґебру:

$$aa^{\dagger} - qa^{\dagger}a = q^{-N},$$

 $[N, a^{\dagger}] = a^{\dagger}, \qquad [N, a] = -a,$ (1.19)

і для гамільтоніана

$$H = \hbar \omega A^{\dagger} A, \qquad A^{\dagger} = a^{\dagger} q^{N/2}, \ A = q^{N/2} a,$$
 (1.20)

- - 0

у границі $q \to \infty$ отримали ферміоноподібний вираз для чисел заповнення:

$$\langle N \rangle \simeq \frac{1 + 2e^{-\hbar\omega\beta q^2}}{1 + e^{\hbar\omega\beta} + e^{-\hbar\omega\beta q^2}}.$$
 (1.21)

Чан і Чень [149] у межах алґебри (1.19) для *q*-деформованих бозе-осциляторів із гамільтоніаном

$$H = \sum_{k} \frac{\hbar\omega_k}{2} \left(a_k a_k^{\dagger} + a_k^{\dagger} a_k \right) \tag{1.22}$$

за допомогою функцій Ґріна отримали такий формальний результат для функції розподілу:

$$n(\varepsilon) = \left\{ \exp \frac{\hbar \omega \beta (q^{N+1} + q^{-(N+1)})}{2} - 1 \right\}^{-1}.$$
 (1.23)

Розглядають також так зван
і(p,q)-деформації [150, 151], наприклад,

$$aa^{\dagger} - qa^{\dagger}a = p^{-N}, \qquad aa^{\dagger} - p^{-1}a^{\dagger}a = q^{N},$$

 $[N, a^{\dagger}] = a^{\dagger}, \qquad [N, a] = -a,$ (1.24)

причому звичайний комутатор між операторами a, a^{\dagger} зводиться до

$$[a, a^{\dagger}] = [N+1]_{p,q} - [N]_{p,q}, \qquad \text{de} \quad [x]_{p,q} = \frac{p^{-x} - q^x}{p^{-1} - q}. \tag{1.25}$$

Можливі також і багатопараметричні узагальнення подібного типу [151].

На завершення цього пункту зазначимо ще дві алґебри, у яких автори розглядали комплексний параметр q на одиничному колі

|q| = 1. У праці Дутта *та ін.* [152] брали співвідношення між операторами породження-знищення q-ферміонів у вигляді:

$$f_q f_q^{\dagger} + q^{\frac{1}{2}} f_q^{\dagger} f_q = q^{-\frac{1}{2}N_f}, \qquad (1.26)$$

$$[N_f, f_q] = -f_q, \qquad [N_f, f_q^{\dagger}] = f_q^{\dagger}. \tag{1.27}$$

В іншій праці Ян та ін. [153] запропонували такий варіант:

$$a_q a_q^{\dagger} - q a_q^{\dagger} a_q = 1, \quad a_{q^*} a_{q^*}^{\dagger} - q^* a_{q^*}^{\dagger} a_{q^*} = 1. \quad a_q = (a_{q^*}^{\dagger})^{\dagger}, \quad (1.28)$$

де $q = e^{2\pi i/(s+1)} - (s+1)$ -й корінь із одиниці, а зірочка позначає комплексне спряження.

Подібно до операторів f_q із [152], можна показати, що ці оператори володіють такою властивістю нільпотентності:

$$(a_q)^n = (a_{q^*})^n = \left(a_q^{\dagger}\right)^n = (a_{q^*}^{\dagger})^n = 0, \quad \text{якщо } n \ge s+1.$$
(1.29)

Отже, така алґебра відповідає обмеженню на заповнення одного квантового стану не більше за *s*, тобто статистиці Джентіле [93], про яку йтиметься у наступному розділі.

1.3. Статистико-механічні узагальнення

У межах статистичної фізики дробові (проміжні) статистики можна отримати, ґрунтуючись на виразах для кількості мікростанів W_i , що забезпечуватимуть інтерполяцію між бозонами (В) і ферміонами (F):

$$W_i^{\rm B} = \frac{(G_i + N_i - 1)!}{N_i! (G_i - 1)!}, \qquad W_i^{\rm F} = \frac{G_i!}{N_i! (G_i - N_i)!}, \tag{1.30}$$

де G_i — ступінь виродження *i*-го рівня, а N_i — кількість частинок на цьому рівні.

Для знаходження чисел заповнення $n_i = N_i/G_i$ (функції розподілу), що відповідають певній статистиці, можна скористатися таким методом. Ентропія системи *S* пов'язана з кількістю мікростанів *W* відомим співвідношенням:

$$S = \ln W, \qquad \text{ge} \qquad W = \prod_{i} W_i(N_i). \tag{1.31}$$

Вираз для n_i отримуємо внаслідок знаходження екстремуму цього функціонала за додаткових умов, що фіксують кількість частинок у системі

$$N = \sum_{i} N_i \tag{1.32}$$

та повну енергію

$$E = \sum_{i} \varepsilon_i N_i, \tag{1.33}$$

де ε_i — енергія *i*-го рівня.

Отже, потрібно розв'язати задачу на умовний екстремум:

$$\delta S + \alpha \delta N - \beta \delta E = 0, \qquad (1.34)$$

де варіацію беремо за N_i , а множники Лаґранжа пов'язані з температурою T і хімічним потенціалом μ : $\alpha = \mu/T$, $\beta = 1/T$, в чому легко переконатися на підставі стандартних термодинамічних співвідношень.

1.3.1. Статистика Джентіле. Можна постулювати певний проміжний розподіл, у якому максимальна заселеність рівня буде обмежена якимось числом d. Відповідна статистика має назву статистики Джентіле [93]. Зрозуміло, що при d = 1 матимемо граничний випадок розподілу Фермі, а $d = \infty$ відповідає розподілові Бозе.

Вираз для чисел заповнення у статистиці Джентіле можна отримати, керуючись виразом для кількості способів розподілу частинок за всіма можливими енерґетичними рівнями:

$$W = \prod_{i} \frac{G_i!}{n_i(0)! n_i(1)! \dots n_i(d)!},$$
(1.35)

де

$$G_i = \sum_{j=0}^d n_i(j)$$
 (1.36)

— ваговий множник *i*-го стану.

Кількість частинок на *і*-му рівні буде

$$N_i = \sum_{j=0}^d j n_i(j).$$
 (1.37)

Внаслідок цього отримуємо варіаційну задачу (1.34), де кількість частинок та енерґію задано виразами (1.32) і (1.33), див., наприклад, [99, Гл. 3, 4]. З її розв'язків матимемо числа заповнення:

$$n_i^{\rm G} = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_i/T} - 1} - \frac{d+1}{z^{-(d+1)}e^{(d+1)\varepsilon_i/T} - 1},$$
(1.38)

де $z=e^{\mu/T}$ — активність. Нескладно переконатися, що справдіd=1дає розподіл Фермі, а $d=\infty$ — розподіл Бозе.

Цікавою рисою статистики Джентіле є те, що високотемпературна поведінка системи в ній наближається до результатів статистики Бозе, тоді як в низькотемпературній границі простежують прояви, характерні для статистики Фермі. Зокрема, із самого означення статистики випливає існування аналога рівня Фермі $\varepsilon_{\rm G}$: при T = 0 функція $n_i^{\rm G}$ має сходинкоподібну форму, тобто всі частинки перебувають у станах з енергією, меншою за $\varepsilon_{\rm G}$.

Рівняння стану ідеального *D*-вимірного газу *N* частинок з дисперсією $\varepsilon_p = ap^s$, які підкоряються статистиці Джентіле, можна записати так [33, р. 160–161]:

$$\frac{pV}{NT} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{N}{A_{D,s}VT^{D/s}}\right)^{j-1} b_j^{\rm G},$$
(1.39)

де стала

$$A_{D,s} = \frac{2a^{-D/s}}{(4\pi\hbar^2)^{D/2}} \frac{\Gamma(D/s)}{s\Gamma(D/2)},$$
(1.40)

а віріальні коефіцієнти b_j^{G} визначаються відповідними віріальними коефіцієнтами такої ж системи зі статистикою Бозе b_i^{B} :

$$b_j^{\rm G} = b_j^{\rm B}$$
, якщо $j \le d$,
 $b_{d+1}^{\rm G} = b_{d+1}^{\rm B} + \frac{d}{(d+1)^{D/s}}$, (1.41)

див. також [152].

У високотемпературній границі теплоємність такої системи C_V також пов'язана з теплоємністю відповідного бозе-газу $C_V^{\rm B}$ [33, 152]:

$$\frac{C_V}{N} = \frac{C_V^{\rm B}}{N} - \frac{1}{(d+1)^{D/s}} \frac{Dd}{s} \left(\frac{Dd}{s} - 1\right) \left(\frac{N}{A_{D,s} V T^{D/s}}\right)^d + \dots \quad (1.42)$$

Хоча фізична реалізація статистики Джентіле в реальних системах є досить сумнівною, ця модель становить не лише академічний інтерес [154]. Зважаючи на відносну простоту виразу для чисел заповнення і прозорість інтерпретації параметра *d*, статистику Джентіле зручно використовувати як певне узагальнення з подальшим переходом до бозонної й ферміонної границь [155, 156]. Цю статистику застосовано до розв'язування задачі про обмежені розбиття в теорії чисел [157]. Можна також показати, що відповідний підбір параметра статистики *d* дозволяє моделювати скінченну бозе-систему [158].

Як показали Дай і Сє [159], для отримання розподілу Бозе–Айнштайна граничний перехід за параметром статистики Джентіле $d \to \infty$ потрібно виконувати перед термодинамічним граничним переходом за кількістю частинок $N \to \infty$. Особливості термодинаміки, зокрема температурну поведінку теплоємності та хімічного потенціалу, системи слабковзаємодіючих одновимірних осциляторів з цією статистикою проаналізовано у праці [160]. Шень *ma ін.* [161] досліджували зв'язок між статистикою Джентіле й еніонною статистикою та визначили, за яких умов між ними можна встановити певну (неповну) еквівалентність. Також межі застосовності статистики Джентіле до задач, пов'язаних зі статистикою Голдейна–Ву, обговорювали Ван *ma ін.* [162], зазначаючи математичну простоту виразу для функції розподілу в першій.

1.3.2. Статистика Голдейна–Ву. Голдейн [113] запропонував поняття параметра *статистичної взаємодії*

$$g = -\frac{d_{N+\Delta N} - d_N}{\Delta N},\tag{1.43}$$

де d_N — розмірність простору одночастинкових станів системи N частинок за умови, що координати решти (N-1) частинок фіксовані. Зрозуміло, що g = 1 для ферміонів (додавання однієї частинки

забирає один стан, відповідно до принципу Паулі) і g = 0 для бозонів (через відсутність обмеження на заповнення станів). На параметр g накладено лише очевидне обмеження g > 0, натомість статистики з g > 1, що виходять за межі інтерполяційного інтервалу $g \in [0; 1]$, цілком можна розглядати. Фактично, пропозиція Голдейна полягає в постулюванні деякого узагальненого принципу Паулі, який може стосуватися не одного, а декількох станів.

Для кількості мікростанів станів W_i , у яких можуть перебувати N_i ідентичних частинок, що займають G_i станів, можна використати таку комбінаторну інтерполяційну формулу [114]:

$$W_i = \frac{[G_i + (N_i - 1)(1 - g)]!}{N_i! [G_i - gN_i - (1 - g)]!}$$
(1.44)

яка у границях g=0
іg=1переходить у стандартні вирази (1.30) для бозоні
в $W^{\rm B}_i$ і ферміонів $W^{\rm F}_i,$ відповідно.

Середні числа заповнення $n_i = N_i/G_i$ виражаються так:

$$n_i^{\rm HW} = \frac{1}{w\left(e^{(\varepsilon_i - \mu)/T}\right) + g},\tag{1.45}$$

де функція w(x) задовольняє трансцендентне рівняння

$$w^{g}(x) \left[1 + w(x)\right]^{1-g} = x \equiv e^{(\varepsilon_{i} - \mu)/T}.$$
(1.46)

Легко переконатися, що при g = 0 отримаємо w(x) = x - 1, тобто розподіл Бозе, а при g = 1 будемо мати w(x) = x, тобто розподіл Фермі. Зазначмо, що такий вираз для чисел заповнення у проміжній статистиці отримано й раніше, зокрема, його можна знайти у праці Капура [163].

У границі $x \to \infty$ розв'язком рівняння (1.46) буд
е $w(x) \simeq x,$ що дає

$$n_i = e^{-(\varepsilon_i - \mu)/T} \tag{1.47}$$

— розподіл Больцмана, який, як бачимо, не залежить від параметра статистики *g*, чого й треба було очікувати.

З того, що xу рівнянні (1.46) завжди додатне, випливає, що такожw>0,отже

$$n_i^{\rm HW} \le 1/g. \tag{1.48}$$

Як нескладно переконатися, при T = 0 поведінка чисел заповнення нагадуватиме статистику Фермі:

$$n_i^{\rm HW} = \begin{cases} 1/g, & \text{якщо } \varepsilon_i < \mu_0, \\ 0, & \text{якщо } \varepsilon_i > \mu_0, \end{cases}$$
(1.49)

де μ_0 — аналог енергії Фермі.

Рівняння (1.46) можна розв'язати аналітично для деяких значень g, що відрізняються від ферміонної і бозонної границь, а саме: $g = \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4$. Найпростіший результат отримаємо для так званих *семіонів* (англ. *semion*) із g = 1/2:

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{1/4 + e^{2(\varepsilon_i - \mu)/T}}}.$$
(1.50)

Загалом, для частинок, що підкоряються статистиці Голдейна–Ву, використовують назви *ексклюзон* (англ. *excluson*) або *g*-он.

Як згадувалося у вступі, дробова статистика може виникати ефективно у системах із взаємодією. Виявляється, що взаємодіючі ферміони в моделі Калоджеро–Сазерленда [164–167] з гамільтоніаном ($\hbar = m = 1$)

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2} \omega^2 x_i^2 \right) + \sum_{1 \le i < j \le N} \frac{\lambda}{(x_i - x_j)^2}, \qquad \lambda = \frac{g(g-1)}{2},$$

відповідають ідеальному газові ексклюзонів (1.45) [168]. Також цією статистикою можна описувати двовимірний електронний газ із короткосяжними взаємодіями [169], хоча тут ідентифікація параметра статистики через значення рівня Фермі допускає й інші варіанти (статистика Джентіле, Поліхронакоса). Цікаво, що тричастинкова модель Калоджеро з $-1/4 < \lambda < 0$ дозволяє емулювати еніонну статистику [170].

Розрахунок термодинамічних функцій системи частинок зі статистикою Голдейна–Ву можна провести стандартним способом. Нижче наведено результат для рівняння стану двовимірного ідеального газу N частинок з дисперсією $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2/2m$ у границі $e^{\mu/T} \ll 1$, коли функція w(x) = x + g - 1 [114]:

$$\frac{p}{T} = \rho_2 \left(1 + \frac{2g - 1}{4} \rho_2 \lambda^2 \right),$$
(1.51)

де p — тиск, T — температура, $\rho_2 = N/V_2$ — двовимірна густина. Цей вираз, який фактично є віріальним розкладом, буде використано в розділі 5.3 для встановлення зв'язку між різними типами статистик. Як легко зауважити, «статистична взаємодія» є відштовхувальною при g > 1/2 і притягальною при g < 1/2 [114].

Нескладно отримати високотемпературний розклад теплоємності D-вимірного ідеального газу ексклюзонів із дисперсією $\varepsilon_p = ap^s$ [33, р. 154]:

$$\frac{C_V}{N} = \frac{D}{s} \left[1 + \frac{g - 1/2}{2^{D/s}} \frac{\rho_D}{A_{D,s} T^{D/s}} \left(1 - \frac{D}{s} \right) + \dots \right],$$
(1.52)

де $\rho_D - D$ -вимірна густина, $A_{D,s}$ — константа (1.40).

Термодинаміку ідеального газу зі статистикою Голдейна–Ву вивчали різні групи, зокрема Ісаков ma in. [171], Джойс ma in. [172]. Аояма [173], розглядаючи модель сильного зв'язку на ґратці (tightbinding model), показав, що теплоємність відповідного двовимірного газу характеризується певними особливостями, на відміну від звичайної системи, в якій не проявляється залежність від параметра статистики. Цінь і Чень [174] аналізували швидкість звуку і стисливість газу ексклюзонів у гармонічній пастці. Анґель ma *ін.* [38] застосували дробову виключну статистику для розрахунку термодинамічних характеристик релятивістьскої ядерної матерії.

Статистика Голдейна–Ву також виявилася корисною у математичних задачах: зокрема, за її допомогою отримано деякі співвідношення для так званого дилогарифма Роджерса [175].

1.3.3. Статистика Поліхронакоса. У 1996 р. Поліхронакос [98] запропонував таку реалізацію дробової статистики: нехай перша частинка в системі може зайняти один із G станів, друга вже має на вибір $(G - \gamma)$ станів, третя — $(G - 2\gamma)$ станів і т. д. Повну кількість мікростанів, що комбінаторно відповідає кількості способів розміщення N_i частинок по G_i станах, можна записати так:

$$W = \prod_{i} \frac{G_i(G_i - \gamma)(G_i - 2\gamma)\dots(G_i - (N_i - 1)\gamma)}{N_i!}.$$
 (1.53)

Переписавши кількість мікростанів у вигляді [98]

$$W_i = \gamma^N \frac{(G_i/\gamma)!}{N!(G_i/\gamma - N_i)!},\tag{1.54}$$

де під факторіалом нецілого числа мають на увазі узагальнення через гамма-функцію $x! = \Gamma(x+1)$, можна стандартним способом показати, що середні числа заповнення $n_i = N_i/G_i$ у цій статистиці виражаються простим співвідношенням:

$$n_i^{\mathrm{P}} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_i - \mu)/T} + \gamma}.$$
(1.55)

Зокрема, Ачар'я і Нараяна Свамі [176] розглядали цей вираз як простий варіант статистикомеханічного опису еніонів з коректною граничною поведінкою в бозонній і ферміонній границях. Легко бачити, що граничні значення $\gamma = \pm 1$ виразу для кількості мікростанів (1.53) відповідають розподілам Фермі та Бозе (1.30).

Зважаючи на математичну подібність виразу (1.55) до функцій розподілу у статистиках Бозе–Айнштайна і Фермі–Дірака, нескладно отримати рівняння стану та результати для віріальних коефіцієнтів ідеального *D*-вимірного газу з дисперсією $\varepsilon_p = ap^s$ у статистиці Поліхронакоса [33, р. 163]:

$$b_{j}^{\mathrm{P}}(\gamma) = |\gamma|^{j-1} b_{j}^{\mathrm{B}}, \qquad \text{якщо} \quad \gamma < 0,$$
$$b_{j}^{\mathrm{P}}(\gamma) = \gamma^{j-1} b_{j}^{\mathrm{F}}, \qquad \text{якщо} \quad \gamma > 0, \qquad (1.56)$$

де $b_j^{B,F} - j$ -й віріальний коефіцієнт бозе- або фермі-системи, відповідно (див. також [176]).

Як і в статистиці Джентіле, функція розподілу (1.55) може виникати в контексті *q*-деформованих алґебр [177]. Статистику Поліхронакоса також неодноразово аналізували одночасно з деякими іншими видами дробових статистик, насамперед це стосується узагальнень Джентіле й Голдейна–Ву [33, 178, 179].

Мірза і Могаммадзаде [179] вивчали так звану термодинамічну геометрію [180] кількох типів дробової статистики. Зокрема, виявлено явище, подібне до бозе-конденсації в ідеальному газі зі статистикою Поліхронакоса. Заре *ma in.* [181] розглядали бозе-газ на розтягнутому горизонті чорних дір Шварцшільда і Керра, використовуючи статистику Поліхронакоса для моделювання взаємодії у газі ґравітонів.

Плавний перехід у рівнянні (1.55) між фермі- і бозе-статистикою, минаючи так звану квантову статистику Больцмана ($\alpha = 0$), можна забезпечити вибором параметра γ у вигляді комплексного числа $\gamma = e^{i\pi\nu}$, $\nu = 0 \div 1$. Виявляється, що зокрема у бозонній границі така система буде відповідати бозе-газові з енерґетичним спектром ϵ_p , який містить малу розсіювальну (уявну) частину $\epsilon_p = \epsilon_p + i\varkappa_p$, яка пов'язана з параметром статистики $\nu: \varkappa_p \simeq \pi \nu T$ [182]. Особливості одновимірної системи осциляторів із такою статистикою проаналізовано в [183].

1.4. Неекстенсивна статистика

Традиційно ентропію вводять як логарифм кількості мікростанів:

$$S = \ln W, \tag{1.57}$$

причому звідси майже автоматично випливає адитивність ентропії:

$$S(A+B) = S(A) + S(B),$$
(1.58)

де A і B позначають підсистеми, а логарифм добутку їх імовірностей (що відповідає системі A + B) зводиться до суми логарифмів.

Цю ентропію, відому як ентропія Больцмана–Ґіббса, можна переписати через імовірності p_j реалізації j-го стану відомим способом:

$$S = -\sum_{j} p_j \ln p_j. \tag{1.59}$$

Виявляється, що адитивність ентропії, яка є майже інтуїтивною, може порушуватися для різноманітних систем, що мають певні особливості. Зокрема, до таких особливих належать фрактальні структури та системи, у яких наявна далекодіюча взаємодія (у більшості «традиційних» об'єктів у взаємодіях беруть безпосередню участь лише близькі сусіди). Іншим прикладом можуть бути суттєво немарківські процеси (системи з «пам'яттю»). Крім суто фізичних явищ, викладений нижче підхід [120, Chap. 1] може бути застосований і в суспільних дисциплінах (моделі фінансових ринків, лінгвістичні закони тощо).

Так звана неекстенсивна статистика, описана в цьому розділі, стоїть дещо осібно порівняно з наведеними в попередніх. Узагалі кажучи, існує щонайменше зо два десятки способів узагальнити означення ентропії Больцмана–Ґіббса (1.59). Один із них, який запропонував Цалліс [119], розглянемо нижче.

Можна ввести узагальнену ентропію співвідношенням

$$S_q = \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{n=1}^W p_n^q \right), \qquad \sum_{n=1}^W p_n = 1, \quad q \in \mathbb{R}.$$
 (1.60)

Нескладно переконатися, що в границі $q \to 1$ отримаємо звичну ентропію Больцмана–Ґіббса (1.59). Справді,

$$p_n^{q-1} = e^{(q-1)\ln p_n} \simeq 1 + (q-1)\ln p_n$$

й ентропія набуває вигляду

$$S_q = \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{n=1}^W p_n^q \right) = \dots = -\sum_{n=1}^W p_n \ln p_n,$$

що збігається з очікуваним виразом (1.59).

Замість умови адитивності (екстенсивності), заданої формулою (1.58), ентропія (1.60) задовольняє співвідношення

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B),$$
(1.61)

тобто є неекстенсивною величиною. При цьому індексqє фактично мірою неекстенсивності.

Як і звичайна ентропія, S_q досягає максимуму за умови однакових імовірностей $p_n = 1/W \ \forall n$ (т. зв. принцип Лапласа):

$$S_q = \frac{W^{1-q} - 1}{1-q}.$$
(1.62)

У границі $q \rightarrow 1$ отримаємо відоме співвідношення Больцмана $S = \ln W.$

Уводячи *q*-логарифм

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}, \qquad \ln_1 x = \ln x, \tag{1.63}$$

можна записати ентропію Цалліса у больцманоподібній формі

$$S_q = \ln_q W. \tag{1.64}$$

Легко показати, що оберненою до q-логарифма буде така q-експонента:

$$\exp_q(x) = [1 + (1 - q)x]^{1/(1 - q)}, \tag{1.65}$$

яка у границі $q \rightarrow 1$ переходить у звичайну експоненту.

Варто звернути увагу, що *q*-експонента Цалліса відрізняється від *q*-експонент, що виникають у деяких інших задачах, зокрема пов'язаних із *q*-деформованими комутаторами:

$$\exp_q x \equiv e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]_q!}, \quad \operatorname{Exp}_q x \equiv E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{[j]_q!}, \quad (1.66)$$

де q-факторіал задано формулою (1.11). Зрозуміло, що

$$e_1^x = E_1^x = e^x. (1.67)$$

Для знаходження ймовірносте
й p_n скористаємося стандартним методом множників Лаґранжа. Екстремум
ентропії S_q визначимо з умови

$$\delta\left\{\frac{1}{q-1}\sum_{n=1}^{W}\left(p_n-p_n^q\right)-\alpha\sum_{n=1}^{W}p_n-\beta\sum_{n=1}^{W}\varepsilon_np_n\right\}=0,$$

де одиницю в означенні S_q розписано як $1 = \sum_{n=1}^W p_n$. Отримаємо остаточно

$$p_n = \left\{ \frac{1 - (q - 1)(\alpha + \beta \varepsilon_n)}{q} \right\}^{\frac{1}{q-1}}.$$
(1.68)

За допомогою узагальненої статистичної суми

$$Z_q = \left\{\frac{1 - (q - 1)\alpha}{q}\right\}^{-\frac{1}{q-1}},$$
(1.69)

з якою вільна енергія пов'язана співвідношенням

$$F = -\frac{q}{\beta} \ln_q Z_q = -(1+\alpha)\frac{1}{\beta}, \qquad (1.70)$$

визначимо температуру як

$$T = \frac{1 - (q - 1)\alpha}{\beta} = \frac{1}{Z_q^{q-1}} \frac{1}{\beta}.$$
 (1.71)

Тепер імовірність *p_n* набуває звичного «ґіббсівського» вигляду:

$$p_n = \frac{1}{Z_q} \exp_q\left(-\frac{\varepsilon_n}{T}\right). \tag{1.72}$$

Додатковий коефіцієнт у зв'язок (1.71) між T і β насправді ускладнює опис систем за допомогою ентропії Цалліса. З метою уникнення відповідних проблем запропоновано низку модифікацій описаного підходу, відомих як статистики (Цалліса–)Мендеша–Пластіно [122], Курадо(–Цалліса) [121], Башкірова [123] та ін.

Існують також *q*-узагальнення розподілів Фермі–Дірака й Бозе– Айнштайна [184–186]:

$$n_i = \frac{1}{\{1 + (q-1)\beta(\varepsilon_i - \mu)\}^{\frac{1}{q-1}} \pm 1} = \frac{1}{\exp_q[\beta(\varepsilon_i - \mu)] \pm 1}.$$
 (1.73)

Модифікацію виразу для ентропії застосував Ван зі співавторами [186–188] для побудови статистико-механічних узагальнень на підставі так званої неповної інформаційної теорії. Наприклад, неповна умова нормування

$$\sum_{i=1}^{W} p_i^q = 1 \tag{1.74}$$
і відповідно утворена узагальнена ентропія

$$S_q = -\sum_{i=1}^{W} p_i^q \ln p_i$$
 (1.75)

дають змогу отримати вираз для чисел заповнення бозе- або ферміподібних збуджень у так званій екстенсивній неповній статистиці (*extensive incomplete statistics*) [187]:

$$n_i = \frac{1}{e^{q(\varepsilon_i - \mu)/T} \pm 1}.$$
 (1.76)

Неекстенсивні аналоги [186, 188] можна утворити подібно до розподілів Фермі та Бозе у статистиці Цалліса (1.73):

$$n_i = \frac{1}{\{1 + (q-1)\beta(\varepsilon_i - \mu)\}^{\frac{q}{q-1}} \pm 1} = \frac{1}{\exp_q[q\beta(\varepsilon_i - \mu)] \pm 1}.$$
 (1.77)

Загалом, неекстенсивна статистика допускає й багато інших узагальнень квантових розподілів, а їх детальний аналіз потребує окремого розширеного огляду, що виходить далеко за межі тематики цієї праці.

1.5. Системи бозонів

У розглянутих далі в цій праці підходах особливе місце посідає статистика Бозе–Айнштайна: саме на її основі, зокрема, побудовано узагальнення дробової статистики Поліхронакоса в розділах 4 і 5. На аналогіях з розподілом Бозе ґрунтуються підходи до розв'язування задач теорії чисел у розділі 6 та лінґвістики у розділі 7. Інтерес до багатобозонних систем пов'язаний насамперед із тим, що в них на макроскопічному рівні проявляється квантовомеханічний принцип тотожності частинок — явище конденсації Бозе–Айнштайна.

Зважаючи на велике розмаїття напрямів дослідження бозонних систем, тут коротко розглянемо лише ті теми, які мають безпосередній стосунок до роботи, а також деякі основні найцікавіші сучасні експерименти з бозе-конденсатами.

Однією з класичних задач фізики низьких температур і зокрема теорії бозе-систем є розрахунок спектра елементарних збуджень, який став важливим складником у формулюванні теорії надплинності рідкого гелію-4. Феноменологічно спостульований Ландау [189, 190], цей спектр також розраховано з мікроскопічних міркувань у працях Бейля [191], Боголюбова [10], Файнмана і Коена [192, 193]. Протягом наступних десятиліть з'явилися численні праці на цю тему, порівн. [194–203]. Зазвичай у таких теоріях використовують параметри для підгонки, наприклад, у статті [198] доброго узгодження з експериментом досягнуто для обмеженої області навколо ротонного мінімуму, а в [199] спектр добре підігнано за допомогою двох параметрів.

Вивчення багатобозонних систем отримало новий поштовх після експериментального відкриття 1995 р. конденсації Бозе– Айнштайна в ультрахолодних розріджених газах лужних металів ⁸⁷Rb i ²³Na [4, 5], а згодом і в інших речовинах [7]. Це відкрило шлях пошуку теоретичних методів, за допомогою яких можна передбачити відповідні явища. Зокрема, майже відразу з'явилися праці, в яких досліджували питання колективних збуджень у таких системах [204–206].

Бозе-конденсацію під впливом зовнішнього гармонічного потенціалу (пастки) обговорювали в [207–209], квазіодновимірним системам присвячено працю [210]. Огляди, що стосуються відповідних квантових багаточастинкових явищ як з експериментального, так і з теоретичного боку, можна знайти в [7, 14, 211, 212].

Цікавим об'єктом досліджень можуть бути дво- та багатокомпонентні бозе-суміші, які не лише характеризуються багатством фізичних явищ, а й безпосередньо пов'язані з технологіями, про що докладніше йтиметься трохи далі. Вперше таку суміш отримано із двох станів ⁸⁷Rb, що відрізнялися надтонкою структурою [213], згодом — з різних ізотопів ⁸⁵Rb і ⁸⁷Rb [214] та з різних хімічних елементів [215, 216]. Зазначимо також експерименти з ітербієвими сумішами, що можуть складатися як із ферміонів і бозонів, так і з самих бозонних ізотопів [217]. Відповідні теоретичні методи досліджень перебувають на стадії розробки.

Опис збуджень у бозонних системах, що перебувають у пастках, зараз не можна вважати повністю розв'язаною проблемою, коли йдеться про вихід за межі наближення середнього поля чи рівняння Ґросса–Пітаєвського [218, 219]. Наприклад, спектри елементарних збуджень у низькорозмірних бозе-системах за допомогою теорії Ліба–Лініґера [220, 221] вивчали у [222, 223]. Для аналізу бозеконденсатів ув оптичних ґратках часто застосовують модель Бозе– Габбарда [224–226]. Математичні аспекти наближення Боголюбова [10] для спектра елементарних збуджень бозонів зі слабкою міжчастинковою взаємодією обговорювали у працях [227, 228]. Теоретичний опис збуджень типу Боголюбова в екситонно-поляритонних конденсатах подано в [229].

Повідомлення про експериментальне спостереження збуджень боголюбівського типу в екситонно-поляритонних бозе-конденсатах зробили Уцономія *ma in.* [230]. Такі системи [231, 232] є, поруч із розрідженими газами лужних металів, добрими об'єктами для спостереження конденсації Бозе–Айнштайна [9]. Досить своєрідні експерименти з так званої нерівноважної бозе-конденсації екситонівполяритонів у полімері за кімнатної температури описано в праці [233].

В окремий напрям можна виділити дослідження бозе-конденсатів, що обертаються [234]. Відповідні експерименти зокрема забезпечують вивчення так званої квантової турбулентності, яка полягає в появі квантових вихорів [235–237]. Незважаючи на квантову природу, це явище вдається описувати за допомогою досить простих математичних моделей, а отже, його можна розглядати як своєрідну лабораторію для аналізу класичної турбулентності [237, 238] важливого складника гідро- та аеродинаміки. Квантові переходи в атомарних конденсатах між станами з різним орбітальним моментом мають також аналогію з явищами в надпровідних системах, наприклад, квантування циркуляції моделює зміну магнітного потоку [239].

Бозе-системи зі скінченною кількістю частинок N стали предметом низки теоретичних праць [240–242], у яких знайдено відповідні поправки до термодинамічних функцій, спричинені скінченністю N. Ще одним важливим об'єктом досліджень є бозонні системи в пористому середовищі, зокрема, властивості гелію-4 в пористих стеклах [243], аероґелі [244, 245], нанопористому склі Gelsil [246, 247] або вайкорі (Vycor) [248, 249]. Один із можливих підходів до аналізу бозонів полягає в моделюванні пористого середовища простором із фрактальною вимірністю [250, 251]. З експериментами над гелієм-4 у вайкорі пов'язана цікава епопея: у 2004 р. Кім і Чан [252] зробили повідомлення про можливі ефекти надплинності у твердому гелії-4 (відповідний стан називають *supersolid*). Кілька років пошуків такої особливої поведінки не принесли успіхів жодній з експериментальних груп, і 2012 р. Чан визнав, що спостереження було помилковим [253]. Водночас, нещодавно з'явилися публікації про спостереження такої фази в бозе-конденсатах інших типів [254, 255].

До дещо несподіваних експериментів належить досягнення стану бозе-конденсації фотонів [256]. Зрозуміло, що через відсутність в них маси спокою спостереження цього явища можливе лише за певних умов, — наприклад, у мікропорожнинах із дзеркальними стінками, що забезпечують скінченну (ненульову) масу спокою [257].

Конденсати Бозе–Айнштайна застосовують для моделювання різних фізичних систем і явищ. Наприклад, квантові симуляції з використанням ультрахолодних ферміонів і бозонів описано в [54, 258]. Моделі з бозе-конденсатами належать до квантових аналогів ґравітації [259]. Нещодавно в бозе-конденсаті ⁸⁷Rb за допомогою топологічних дефектів земульовано отримання ізольованих магнітних монополів [260].

Поступово набувають поширення технології з використанням бозе-конденсатів. Передбачено їх застосування у квантових обчисленнях, метрології, інтерферометрії. Наприклад, у праці [25] запропоновано реалізацію квантових алгоритмів на підставі колективних станів двокомпонентних конденсатів. Гібридні пристрої для опрацювання квантової інформації з використанням ультрахолодних атомів, які перебувають в оптичних мікропорожнинах на магнітній плівці, описано в [261]. У праці [262] показано можливість квантової телепортації когерентного спінового стану за допомогою бозе-конденсатів.

Схеми з використанням ультрахолодних атомів цезію [263] та рубідію [264] застосовано у квантовій метрології [265]. Інтерферометр Маха–Цендера на бозе-конденсаті атомів рубідію-87 в умовах мікроґравітації сконструювала експериментальна група у Бремені [56]. Високої контрастності вдалося досягти іншій групі за допомогою інтерферометра Ремсі, також на рубідієвому конденсаті [57]. Так званий контрастний інтерферометр з використанням бозеконденсату ізотопів ітербію ¹⁷⁴Yb дає перспективи високоточних вимірювань до однієї частини на мільярд [266].

У розділах 6 та 7 розглянуто можливості застосування методів, які ґрунтуються на використанні статистики Бозе і дробових статистик, до розв'язування деяких проблем із суміжних галузей науки. Насамперед, це теоретико-числові задачі про розбиття натуральних чисел, а також питання класифікації складних систем. Зважаючи на специфіку цих тематик, докладні огляди перенесено у вступні частини відповідних розділів з міркувань компактного подання матеріалу для зручності ознайомлення.

Розділ 2

ОДНОРІДНІ БОЗЕ-СИСТЕМИ ЗІ ВЗАЄМОДІЄЮ

Надо что-то переделать: либо теорию, либо эксперимент. Теорию переделать легче.

(Пётр Капица)

2.1. Вступ

Гамільтоніан системи N бозе-частинок масою m з координатами \mathbf{r}_j в об'ємі V з урахуванням багаточастинкових взаємодій має вигляд:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^N \Delta_j + \sum_{1 \le j < l \le N} \Phi(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l) + \sum_{1 \le j < l < s \le N} \Phi_3(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l, \mathbf{r}_s) + \dots, \qquad (2.1)$$

де Δ_j — оператор Лапласа щодо j-ї координати, $\Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ і $\Phi_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \Phi_3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)$ — парний і тричастинковий потенціали, відповідно, а крапки відповідають доданкам з чотиричастинковими й вищими взаємодіями в потенціальній енерґії. У зображенні колективних змінних [267]

$$\rho_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{j}}, \qquad \partial_{-\mathbf{k}} \equiv \frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{k}}}, \qquad \text{ge} \quad \mathbf{k} \neq 0, \qquad (2.2)$$

якщо врахувати тричастинкові взаємодії [268], матимемо:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \left\{ \varepsilon_{k} \left(\rho_{\mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{k}} - \partial_{\mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{k}} \right) + \frac{N}{2V} \tilde{\nu}_{k} \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} \right\} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \left\{ \frac{\hbar^{2}}{2m} \mathbf{k} \mathbf{q} \, \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \partial_{-\mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{q}} + \frac{N^{2}}{\mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0} \mathbf{k} \partial_{-\mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{q}} + \frac{N^{2}}{6V^{2}} \nu_{3} (\mathbf{k}+\mathbf{q},-\mathbf{k},-\mathbf{q}) \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{q}} \right\}, \qquad (2.3)$$

де ε_k — енерґетичний спектр вільної частинки $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2/2m$, а ν_k та $\nu_3(\mathbf{k}+\mathbf{q},-\mathbf{k},-\mathbf{q})$ — фур'є-зображення, відповідно, дво- і тричастинкового потенціалу, що залежать від хвильових векторів \mathbf{k}, \mathbf{q} , при цьому

$$\tilde{\nu}_k = \nu_k + \frac{N}{V}\nu_3(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, 0) - \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\nu_3(\mathbf{k} + \mathbf{q}, -\mathbf{k}, -\mathbf{q}).$$
(2.4)

Надалі всі вирази записано у наближенні, наступному після хаотичних фаз (RPA). Це відповідає двом сумам за хвильовим вектором у гамільтоніані і, відповідно, одній сумі у виразах для операторів, які в нього входять. Такий підхід має сенс своєрідної «числової» теорії збурень: внески від поправок виявляються на порядок меншими від RPA-доданків.

Для обчислення енерґетичного спектра застосуємо метод факторизації гамільтоніана взаємодіючої багатобозонної системи. Подібні результати отримано також у праці [269] шляхом уведення поняття ефективної маси і використання техніки двочасових температурних функцій Ґріна.

2.2. Енерґетичний спектр взаємодіючої бозе-системи

2.2.1. Факторизація гамільтоніана. Гамільтоніан бозесистеми можна записати через колективні змінні ($\rho_{\mathbf{k}}, \partial_{\mathbf{k}}$) або ($\rho_{\mathbf{k}}, \hat{\pi}_{\mathbf{k}}$) [270], де колективний «потік»

$$\hat{\pi}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} \left(\frac{\hbar}{m}\right) (\mathbf{k}\hat{\mathbf{p}}_j)$$

пов'язаний з оператором $\partial_{\mathbf{k}}$ таким способом:

$$\varepsilon_k \partial_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \hat{\pi}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q} \neq 0 \\ \mathbf{k} + \mathbf{q} \neq 0}} \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k} \mathbf{q} \, \rho_{\mathbf{k} + \mathbf{q}} \partial_{-\mathbf{q}}.$$

У цих співвідношеннях $\hat{\mathbf{p}}_{j}$ — імпульс j-ї частинки.

Нижче ми покажемо, що гамільтоніан системи можна переписати за допомогою спряжених операторів $\hat{A}_{\mathbf{q}}$ і $\hat{A}_{\mathbf{q}}^{\dagger}$:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{q}\neq\mathbf{0}} \hat{A}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{A}_{\mathbf{q}} + \Delta \hat{H}, \qquad (2.5)$$

де недіагональна частина $\Delta \hat{H}$ необов'язково дорівнює нулеві. Її поява спричинена тим, що вихідний гамільтоніан (2.3) є неермітовим (з одиничною ваговою функцією; цю проблему можна обійти, використовуючи оператори $\rho_{\mathbf{q}}$, $\hat{\pi}_{\mathbf{q}}$ замість $\rho_{\mathbf{q}}$, $\partial_{\mathbf{q}}$, але останні зручніші для аналітичних перетворень). У наближенні, яке ми використовуємо, $\Delta \hat{H} = 0$.

Спробуймо шукати оператор $\hat{A}_{\mathbf{q}}$ у такому вигляді:

$$\hat{A}_{\mathbf{q}} = u_q \,\rho_{\mathbf{q}} + v_q \,\partial_{\mathbf{q}} + \sum_{\substack{\mathbf{q}' \neq 0\\\mathbf{q}' + \mathbf{q} \neq 0}} \left[w_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} \,\rho_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}'} + y_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} \,\rho_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}} \partial_{-\mathbf{q}'} \right], \quad (2.6)$$

де коефіцієнти $u_q, v_q, w_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}$ і $y_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}$ — дійсні функції. Оператор, спряжений до $\partial_{\mathbf{q}}$, у наближенні, наступному після RPA, запишемо:

$$\partial_{\mathbf{q}}^{\dagger} = \rho_{-\mathbf{q}} - \partial_{-\mathbf{q}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q}' \neq 0\\\mathbf{q}' + \mathbf{q} \neq 0}} \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{q}' \mathbf{q} \frac{1}{\varepsilon_q} \rho_{-\mathbf{q}'-\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}'}.$$

Можна показати, що спряжений оператор $\hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{q}}$ задано виразом

$$\hat{A}_{\mathbf{q}}^{\dagger} = \widetilde{u}_{q} \, \rho_{-\mathbf{q}} + \widetilde{v}_{q} \, \partial_{-\mathbf{q}} + \sum_{\substack{\mathbf{q}' \neq 0 \\ \mathbf{q}' + \mathbf{q} \neq 0}} \left[\widetilde{w}_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} \, \rho_{-\mathbf{q}'-\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}'} + \widetilde{y}_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} \, \rho_{-\mathbf{q}'-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{q}'} \right],$$

де

$$\begin{split} \widetilde{u}_{q} &= u_{q} + v_{q}, \qquad \widetilde{v}_{q} = -v_{q}, \\ \widetilde{y}_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} &= -y_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}, \qquad \widetilde{w}_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} = w_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} + y_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\hbar^{2}}{2m} \mathbf{q}' \mathbf{q} \frac{v_{q}}{\varepsilon_{q}} \end{split}$$

Енерґетичний спектр отримаємо з комутатора

$$[\hat{A}_{\mathbf{q}}, \hat{A}_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = \hat{E}_q.$$

Оператор \hat{E}_q складається з неоператорної частини $E_q^{(0)}$ (яка приводить до звичайного, боголюбівського, спектра) плюс доданки операторної природи.

Порівнюючи вирази (2.5) і (2.3), можна отримати такий результат для коефіцієнтів у (2.6):

$$\begin{split} u_q &= \frac{\sqrt{\varepsilon_q}}{2} \left(\alpha_q - 1 \right), \quad v_q = \sqrt{\varepsilon_q}, \qquad \text{de} \quad \alpha_q = \sqrt{1 + \frac{2N}{V} \frac{\nu_q}{\varepsilon_q}}, \\ y_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} &= -\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{q}' \mathbf{q} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_q}}, \\ w_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\alpha_q \sqrt{\varepsilon_q}} \left[\frac{N^2}{6V^2} \nu_3(\mathbf{q}' + \mathbf{q}, -\mathbf{q}', -\mathbf{q}) - \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{q}' \mathbf{q} \frac{(\alpha_q - 1)}{4} \right] \end{split}$$

У термодинамічній границі $N \to \infty$ комутатор набуває вигляду

$$\begin{aligned} [\hat{A}_{\mathbf{q}}, \hat{A}_{\mathbf{q}'}^{\dagger}] &= \\ &= \delta_{\mathbf{q}', \mathbf{q}} \Biggl\{ E_{q}^{(0)} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{\mathbf{k} \neq 0 \\ \mathbf{k} + \mathbf{q} \neq 0}} [W(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \, \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} + Y(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \, \rho_{\mathbf{k}} \partial_{-\mathbf{k}}] \Biggr\}, \quad (2.7) \end{aligned}$$

де

$$E_q^{(0)} = \varepsilon_q \alpha_q,$$

$$W(\mathbf{q}', \mathbf{q}) = y_{-\mathbf{q}'-\mathbf{q},\mathbf{q}} \left[w_{-\mathbf{q}'-\mathbf{q},\mathbf{q}} + \widetilde{w}_{-\mathbf{q}'-\mathbf{q},\mathbf{q}} + w_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} + \widetilde{w}_{\mathbf{q}',\mathbf{q}} \right],$$

$$Y(\mathbf{q}', \mathbf{q}) = -2y_{-\mathbf{q}'-\mathbf{q},\mathbf{q}}y_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}.$$

2.2.2. Обчислення спектра. Оператори колективних змінних під сумою за хвильовим вектором можна подати через оператори $\hat{A}_{\mathbf{q}}, \hat{A}_{\mathbf{q}}^{\dagger}$ записані в наближенні хаотичних фаз:

$$\hat{A}_{\mathbf{q}} = u_q \rho_{\mathbf{q}} + v_q \partial_{\mathbf{q}}, \qquad \hat{A}_{-\mathbf{q}}^{\dagger} = (u_q + v_q) \rho_{\mathbf{q}} - v_q \partial_{\mathbf{q}}$$

Після нескладних алґебричних перетворень отримаємо такі вирази:

$$\rho_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\alpha_q \sqrt{\varepsilon_q}} \left[\hat{A}_{\mathbf{q}} + \hat{A}_{-\mathbf{q}}^{\dagger} \right]$$
(2.8)

$$\partial_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_q}} \left[\left(\frac{1}{\alpha_q} + 1 \right) \hat{A}_{\mathbf{q}} + \left(\frac{1}{\alpha_q} - 1 \right) \hat{A}_{-\mathbf{q}}^{\dagger} \right].$$
(2.9)

Отже, гамільтоніан дорівнює

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \hat{A}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{A}_{\mathbf{k}}, \qquad (2.10)$$

а комутаційні співвідношення мають вигляд:

$$\begin{split} [\hat{A}_{\mathbf{k}}, \hat{A}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] &= \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \Biggl\{ E_{k}^{(0)} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{\mathbf{q} \neq 0\\\mathbf{k} + \mathbf{q} \neq 0}} \Biggl[B(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \left(\hat{A}_{\mathbf{q}} \hat{A}_{-\mathbf{q}} + \hat{A}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{A}_{\mathbf{q}} \right) + \\ &+ C(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \left(\hat{A}_{-\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{A}_{\mathbf{q}}^{\dagger} + \hat{A}_{\mathbf{q}} \hat{A}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \right) \Biggr] \Biggr\}, \quad (2.11) \end{split}$$

 $[\hat{A}_{\mathbf{k}}, \hat{A}_{\mathbf{k}'}] = 0, \qquad [\hat{A}_{\mathbf{k}}^{\dagger}, \hat{A}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = 0.$ (2.12)

Таким чином, маємо досить складну нелінійну алґебру. Коефіцієнтні функції $B(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ і $C(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ повністю визначаються міжатомними взаємодіями. Вирази для них легко відтворити з (2.7)–(2.9). Одним зі способів їх застосування є розширення підходу деформованої алґебри для багатовимірного випадку (порівн. [271]).

Найпростішим шляхом застосування комутатора (2.7) видається усереднення відповідних виразів з метою переходу від операторів до звичайних функцій у правій частині. Тому пропонуємо переписати (2.7) у наближеній формі:

$$[\hat{A}_{\mathbf{q}}, \hat{A}_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = E_{q}^{(0)} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{\mathbf{q}' \neq 0\\ \mathbf{q}' + \mathbf{q} \neq 0, \ q' < Q}} \left[W(\mathbf{q}', \mathbf{q}) S_{q'} + Y(\mathbf{q}', \mathbf{q}) D_{q'} \right] \quad (2.13)$$

з такими позначеннями для середніх:

$$S_q = \langle \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \rangle = \frac{1}{\alpha_q} \qquad D_q = \langle \rho_{\mathbf{q}} \partial_{-\mathbf{q}} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_q} - 1 \right).$$

Верхня межа Q суми за хвильовим вектором визначається з умови, що кількість ступенів вільності в системі дорівнює 3N, порівн. [272]:

$$3N = \sum_{\mathbf{q}' \neq 0, \ q' < Q} 1; \qquad Q = \left(18\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3},$$

останнє співвідношення відповідає переходові від підсумовування до інтеґрування за стандартним правилом $\sum_{\mathbf{q}} \rightarrow V \int d\mathbf{q}/(2\pi)^3$ і наступному використанню сферичних координат.

Подібний вираз можна отримати за допомогою формалізму функцій Ґріна. А саме, якщо в рівнянні руху для функції $\langle\!\langle \hat{A}_{\mathbf{k}}^{\dagger} | \hat{A}_{\mathbf{k}} \rangle\!\rangle$ розщепити функції $\langle\!\langle \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \hat{A}_{\mathbf{k}}^{\dagger} | \hat{A}_{\mathbf{k}} \rangle\!\rangle$ так: $\langle \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \rangle \langle\!\langle \hat{A}_{\mathbf{k}}^{\dagger} | \hat{A}_{\mathbf{k}} \rangle\!\rangle$ і т. д. Спектр визначається як полюси функції Ґріна.

2.2.3. Результати й обговорення. Енергетичний спектр взаємодіючої бозе-системи матиме вигляд:

$$E_{q} = E_{q}^{(0)} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{\mathbf{q}' \neq 0 \\ \mathbf{q}' + \mathbf{q} \neq 0, \ q' < Q}} \left[W(\mathbf{q}', \mathbf{q}) \frac{1}{\alpha_{q'}} + Y(\mathbf{q}', \mathbf{q}) \frac{1 - \alpha_{q'}}{2\alpha_{q'}} \right]. \quad (2.14)$$



Рис. 2.1. Енергетичний спектр ⁴Не. 1 — експериментальні значення [273]; 2 — наближення хаотичних фаз, або боголюбівське, результат $E_q^{(0)}$; 3 — ця робота, без урахування тричастинкових взаємодій; 4 — ця робота, з урахуванням тричастинкових взаємодій (якісний результат)



Рис. 2.2. Парна функція розподілу ⁴Не: 1— експериментальні значення при 1.38 К [274]; 2— врахування лише двочастинкових взаємодій; 3— врахування тричастинкових взаємодій [268]

На рис. 2.1 зображено результати розрахунків для рідкого ⁴Не. Видно, що поправка до $E_q^{(0)}$ (другий доданок у (2.14)) суттєво покращує спектр, особливо в околі так званого «ротонного мінімуму».

Ми також оцінили внесок тричастинкових взаємодій. У грубому конволюційному наближенні для ν_3 (див. [268]) простежується опускання кривої в напрямі до експериментальних значень.

Цікаво, що врахування тричастинкових ефектів також уточнює результати розрахунків структурних функцій, що можна проілюструвати на прикладі парної функції розподілу на рис. 2.2.

2.3. Розрахунок спектра бозе-системи в довгохвильовій границі

У цьому підрозділі розглянемо взаємодіючу бозе-систему за допомогою двочасових температурних функцій Ґріна на колективних змінних. Буде проаналізовано дві системи: рідкий гелій-4 і бозерідина з потенціалом Юкави, що може слугувати моделлю ядерної матерії [275].

2.3.1. Рівняння руху для функцій Ґріна. Для операторів *А* та *В* у зображенні Гайзенберґа двочасові температурні функції визначають так [276]:

$$\langle\!\langle A(t)|B(t')\rangle\!\rangle = i\theta(t-t')\left\langle [A(t),B(t')]\right\rangle, \qquad (2.15)$$

де $\theta(t)$ — одинична сходинка Гевісайда, а $[\cdot, \cdot]$ позначає комутатор.

Рівняння руху у частотному зображенні записують у вигляді

$$\hbar\omega\langle\!\langle A|B\rangle\!\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle[A,B]\rangle + \langle\!\langle [A,H]|B\rangle\!\rangle, \qquad (2.16)$$

звідки після нескладних перетворень, використовуючи гамільтоні-

ан (2.3), отримаємо таку систему:

$$\hbar\omega \langle\!\langle \rho_{\mathbf{k}} | \rho_{-\mathbf{k}} \rangle\!\rangle = -\varepsilon_{k} \langle\!\langle \rho_{\mathbf{k}} | \rho_{-\mathbf{k}} \rangle\!\rangle + 2\varepsilon_{k} \langle\!\langle \partial_{\mathbf{k}} | \rho_{-\mathbf{k}} \rangle\!\rangle - - \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q} \neq 0\\\mathbf{k} + \mathbf{q} \neq 0}} \frac{\hbar^{2}}{2m} \mathbf{k} \mathbf{q} \langle\!\langle \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \partial_{-\mathbf{q}} | \rho_{-\mathbf{k}} \rangle\!\rangle,$$
(2.17)

$$\begin{split} &\hbar\omega\langle\!\langle\partial_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\!\rangle = \frac{1}{2\pi} + \varepsilon_{k}\langle\!\langle\partial_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\!\rangle + n\nu_{k}\langle\!\langle\rho_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\!\rangle + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}\neq0\\\mathbf{k}+\mathbf{q}\neq0}} \left[\frac{\hbar^{2}}{2m}\mathbf{k}\mathbf{q}\langle\!\langle\partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\partial_{-\mathbf{q}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\!\rangle - \frac{n^{2}}{2}\nu_{3}(\mathbf{k},\mathbf{q})\langle\!\langle\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\!\rangle\right]. \end{split}$$

Відкидаючи триоператорні функції Ґріна, тобто у наближенні RPA, отримаємо такий вираз для одного з розв'язків системи (2.17):

$$\langle\!\langle \rho_{\mathbf{k}} | \rho_{-\mathbf{k}} \rangle\!\rangle = \frac{\varepsilon_k}{\pi} \frac{1}{(\hbar\omega)^2 - \varepsilon_k^2 \alpha_k^2},\tag{2.18}$$

що відразу дає спектр Боголюбова з полюсів функції Ґріна щодо змінної $\hbar\omega$:

$$E_k^{\rm B} = \varepsilon_k \alpha_k, \qquad \text{de} \quad \alpha_k = (1 + 2n\nu_k/\varepsilon_k)^{1/2}.$$
 (2.19)

Можна також записати рівняння руху для триоператорних функцій, однак із їх розв'язків не вдасться отримати виразу для спектра елементарних збуджень у замкненому вигляді. Тому в наступному пункті ми розглянемо інший спосіб розрахунку, який виявляється дещо простішим.

2.3.2. Розщеплення функцій Ґріна і спектр елементарних збуджень. Оскільки функції Ґріна типу $\langle\!\langle AB|C \rangle\!\rangle$ використовують для розрахунку середніх від добутку трьох операторів $\langle CAB \rangle$, то можна запропонувати розщеплення

$$\langle\!\langle A_1 B_2 | C_3 \rangle\!\rangle = \lambda(1,2) \langle\!\langle A_{1+2} | C_3 \rangle\!\rangle + \mu(1,2) \langle\!\langle B_{1+2} | C_3 \rangle\!\rangle$$
 (2.20)

з такими коефіцієнтами:

$$\lambda(1,2) = (1-\eta) \frac{\langle C_3 A_1 B_2 \rangle}{\langle C_3 A_{1+2} \rangle}, \qquad \mu(1,2) = \eta \frac{\langle C_3 A_1 B_2 \rangle}{\langle C_3 B_{1+2} \rangle}, \qquad (2.21)$$

де значення параметра $\eta=0\div 1$ виберемо згодом. Числами 1, 2, 3 для скорочення позначено хвильові вектори ${\bf k}_1, {\bf k}_2, {\bf k}_3,$ відповідно.

У роботі проаналізовано два наближення для середніх:

$$\langle C_3 A_1 B_2 \rangle_s = \frac{1}{6} \left(\langle CA \rangle_1 \langle CB \rangle_2 \langle AB \rangle_3 + \text{симетр. за індексами} \right) (2.22)$$

зі шістьма доданками в дужках, звідки й походить позначення «s» (від англ. six), та

$$\langle C_3 A_1 B_2 \rangle_f = \frac{1}{4} \left[\left(\langle AB \rangle_1 \langle CA \rangle_2 + \langle AB \rangle_2 \langle CA \rangle_1 \right) \langle CB \rangle_3 + \left(\langle AB \rangle_1 \langle CB \rangle_2 + \langle AB \rangle_2 \langle CB \rangle_1 \right) \langle CA \rangle_3 \right]$$

$$+ \left(\langle AB \rangle_1 \langle CB \rangle_2 + \langle AB \rangle_2 \langle CB \rangle_1 \right) \langle CA \rangle_3 \right]$$
(2.23)

з чотирма доданками в дужках (позначення «f» — від англ. four).

Щоб розщепити функції, які входять у рівняння (2.17), потрібно знати такі середні:

$$\langle \rho_{-\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \rangle_{s,f} = \frac{1}{\sqrt{N}} \langle \rho_{-\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} \rangle, \qquad (2.24)$$

що відповідає так званому конволюційному наближенню і є однаковим для обох типів розщеплення, зазначених вище,

$$\langle \rho_{-\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \partial_{-\mathbf{q}} \rangle_s = \frac{1}{3\sqrt{N}} \Big(\langle \rho_{-\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{k}} \rangle +$$
(2.25)

$$+ \langle \rho_{-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{k}} \rangle + \langle \rho_{-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} \rangle \Big),$$

$$\langle \rho_{-\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \partial_{-\mathbf{q}} \rangle_s = \frac{1}{3\sqrt{N}} \Big(\langle \partial_{-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{k}} \rangle +$$
(2.26)

$$+ \langle \rho_{-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{q}} \rangle \langle \partial_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{k}} \rangle + \langle \rho_{-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle \langle \partial_{-\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{k}} \rangle \Big),$$

а також

$$\langle \rho_{-\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \partial_{-\mathbf{q}} \rangle_{f} = \frac{1}{2\sqrt{N}} \Big(\langle \rho_{-\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{k}} \rangle + \langle \rho_{-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{k}} \rangle \Big), \quad (2.27)$$

$$\langle \rho_{-\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \partial_{-\mathbf{q}} \rangle_{f} = \frac{1}{2\sqrt{N}} \Big(\langle \partial_{-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{k}} \rangle + \langle \rho_{-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{q}} \rangle \langle \partial_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle \langle \rho_{-\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{k}} \rangle \Big). \quad (2.28)$$

Парні середні легко розрахувати в наближенні RPA за допомогою відповідних розв'язків системи (2.17) [269]:

$$\langle \rho_{-\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{\alpha_k}, \qquad \langle \rho_{-\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_k} - 1 \right),$$
$$\langle \partial_{-\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\alpha_k} - \alpha_k \right). \tag{2.29}$$

Застосовуючи розщеплення в (2.17), отримаємо таку систему рівнянь руху:

$$\hbar\omega \langle\!\langle \rho_{\mathbf{k}} | \rho_{-\mathbf{k}} \rangle\!\rangle = -\varepsilon_{k}^{(1)} \langle\!\langle \rho_{\mathbf{k}} | \rho_{-\mathbf{k}} \rangle\!\rangle + 2\varepsilon_{k}^{(2)} \langle\!\langle \partial_{\mathbf{k}} | \rho_{-\mathbf{k}} \rangle\!\rangle$$

$$\hbar\omega \langle\!\langle \partial_{\mathbf{k}} | \rho_{-\mathbf{k}} \rangle\!\rangle = \frac{1}{2\pi} + \varepsilon_{k}^{(3)} \langle\!\langle \partial_{\mathbf{k}} | \rho_{-\mathbf{k}} \rangle\!\rangle + n\nu_{k}^{(*)} \langle\!\langle \rho_{\mathbf{k}} | \rho_{-\mathbf{k}} \rangle\!\rangle,$$
(2.30)

де

$$\varepsilon_k^{(1)} = \varepsilon_k + \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0\\\mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0}} \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k} \mathbf{q} X(\mathbf{k}, \mathbf{q}), \qquad (2.31)$$

$$\varepsilon_k^{(2)} = \varepsilon_k + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0\\\mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0}} \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k} \mathbf{q} \, Y(\mathbf{k}, \mathbf{q}), \qquad (2.32)$$

$$\varepsilon_k^{(3)} = \varepsilon_k + \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0\\\mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0}} \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k} \mathbf{q} \, Z(\mathbf{k}, \mathbf{q}), \tag{2.33}$$

$$\nu_k^{(*)} = \tilde{\nu}_k + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0\\\mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0}} \nu_3(\mathbf{k}, \mathbf{q}) T(\mathbf{k}, \mathbf{q}).$$
(2.34)

Тут використано такі позначення:

$$\begin{split} X(\mathbf{k}, \mathbf{q}) &= (1 - \eta) \frac{\langle \rho_{-\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \partial_{-\mathbf{q}} \rangle}{\langle \rho_{-\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} \rangle}, \\ Y(\mathbf{k}, \mathbf{q}) &= -\eta \frac{\langle \rho_{-\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \partial_{-\mathbf{q}} \rangle}{\langle \rho_{-\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{k}} \rangle}, \\ Z(\mathbf{k}, \mathbf{q}) &= \frac{\langle \rho_{-\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \partial_{-\mathbf{q}} \rangle}{\langle \rho_{-\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{k}} \rangle}, \\ T(\mathbf{k}, \mathbf{q}) &= \frac{\langle \rho_{-\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \rangle}{\langle \rho_{-\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} \rangle}. \end{split}$$

Спектр елементарних збуджень тепер буде розв'язком біквадратного рівняння:

$$E_{k} = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_{k}^{(3)} - \varepsilon_{k}^{(1)} + \sqrt{\left[\varepsilon_{k}^{(1)}\right]^{2} + \left[\varepsilon_{k}^{(3)}\right]^{2} + 2\varepsilon_{k}^{(1)}\varepsilon_{k}^{(3)} + 8\varepsilon_{k}^{(2)}n\nu_{k}^{(*)}} \right\}.$$
(2.35)

Якщо у цьому виразі відкинути доданки, що містять суму за хвильовим вектором, то отримаємо результат Боголюбова (2.19), як і повинно бути.

2.3.3. Результати розрахунків. Спектр елементарних збуджень розраховано для двох бозе-систем: рідкого гелію-4 та бозерідини з потенціалом Юкави, що може слугувати моделлю ядерної матерії. Оскільки даних про тричастинкові взаємодії у цих системах досить мало, внесок від $\nu_3(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ не враховано. Як було зазначено у попередньому підрозділі, у випадку рідкого гелію-4 такий підхід не впливає суттєво на довгохвильову ділянку спектра [270].

У чисельних розрахунках підсумовування за хвильовим вектором у формулах (2.31)–(2.33) зручно замінити на інтеґрування за правилом

$$\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}}\ldots = \frac{1}{N}\frac{V}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{q}\ldots \qquad (2.36)$$

Вирази, які можна безпосередньо використати для чисельних розрахунків, мають такий вигляд:

$$S_{1} = \frac{1}{\alpha_{q}}, \ L_{1} = \frac{S_{1} - 1}{2}, \ D_{1} = \frac{1}{4} \left(S_{1} - \frac{1}{S_{1}} \right), \quad \text{de } q = |\mathbf{q}|;$$

$$S_{2} = \frac{1}{\alpha_{p}}, \ L_{2} = \frac{S_{2} - 1}{2}, \ D_{2} = \frac{1}{4} \left(S_{2} - \frac{1}{S_{2}} \right), \quad \text{de } p = |\mathbf{k} + \mathbf{q}|;$$

$$S_{3} = \frac{1}{\alpha_{k}}, \ L_{3} = \frac{S_{3} - 1}{2}, \ D_{3} = \frac{1}{4} \left(S_{3} - \frac{1}{S_{3}} \right), \quad \text{de } k = |\mathbf{k}|.$$
(2.37)

Для розщеплення *s*-типу:

$$\varepsilon_k^{(1)} = \varepsilon_k + \frac{(1-\eta)}{(2\pi)^3} \frac{1}{n} \frac{\hbar^2}{m} \int d\mathbf{q} \left(\mathbf{kq}\right) \frac{S_1 L_2 L_3 + L_1 S_2 L_3 + L_1 L_2 S_3}{3S_3},$$

$$\varepsilon_{k}^{(2)} = \varepsilon_{k} - \frac{\eta}{(2\pi)^{3}} \frac{1}{n} \frac{\hbar^{2}}{2m} \int d\mathbf{q} \left(\mathbf{kq}\right) \frac{S_{1}L_{2}L_{3} + L_{1}S_{2}L_{3} + L_{1}L_{2}S_{3}}{3L_{3}},$$

$$\varepsilon_k^{(3)} = \varepsilon_k + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{n} \frac{\hbar^2}{2m} \int d\mathbf{q} \, (\mathbf{kq}) \frac{D_1 L_2 L_3 + L_1 D_2 L_3 + L_1 L_2 D_3}{3L_3}.$$

Для розщеплення *f*-типу:

$$\begin{split} \varepsilon_{k}^{(1)} &= \varepsilon_{k} + \frac{(1-\eta)}{(2\pi)^{3}} \frac{1}{n} \frac{\hbar^{2}}{m} \int d\mathbf{q} \left(\mathbf{kq}\right) (S_{1}L_{2} + L_{1}S_{2}) \frac{L_{3}}{2S_{3}}, \\ \varepsilon_{k}^{(2)} &= \varepsilon_{k} - \frac{\eta}{(2\pi)^{3}} \frac{1}{n} \frac{\hbar^{2}}{2m} \int d\mathbf{q} \left(\mathbf{kq}\right) \frac{S_{1}L_{2} + L_{1}S_{2}}{2}, \\ \varepsilon_{k}^{(3)} &= \varepsilon_{k} + \frac{1}{(2\pi)^{3}} \frac{1}{n} \frac{\hbar^{2}}{2m} \int d\mathbf{q} \left(\mathbf{kq}\right) \frac{D_{1}L_{2} + L_{1}D_{2}}{2}. \end{split}$$

Інтеґрування у цих формулах зручно проводити у сферичних координатах.

Для розрахунків спектра рідкого гелію-4 використано такі значення параметрів:

$$m = 4.0026$$
 a.m. u., $n = 0.02185$ Å⁻³. (2.38)

9

Дані про міжчастинковий потенціал ν_k взято з праці [277]. Треба зауважити, що точні парні потенціали, які ґрунтуються на квантовомеханічних або напівфеноменологічних розрахунках [278–280], не дуже добре підходять для наших обчислень. Наприклад, у праці [279] залежності на великих відстанях отримано з напівфеноменологічних міркувань, тому не варто очікувати доброго опису довгохвильової поведінки фур'є-зображення. Потенціал із [277] отримано самоузгодженим способом у підході колективних змінних, і він є в певному сенсі ефективним парним потенціалом, який ураховує також внески від багаточастинкових взаємодій. Це уподібнює його до розглянутого нижче потенціалу Юкави, який можна трактувати як екранований кулонівський потенціал.

Результати для спектра елементарних збуджень гелію-4, які відповідають рівнянню (2.35), показано на рис. 2.3 і в табл. 2.1 у порівнянні з наближенням хаотичних фаз (спектром Боголюбова) та експериментальними даними. Параметр η взято $\eta = 1$, оскільки для менших значень поправка до RPA виявляється недостатньою, щоби правильно відтворити нахил фононної гілки (лінійної у границі $k \to 0$). Це означає, що функція $\langle\!\langle \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\partial_{-\mathbf{q}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\!\rangle = \mu(\mathbf{k},\mathbf{q})\langle\!\langle \partial_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\!\rangle$, а включення доданка з $\langle\!\langle \rho_{\mathbf{k}}|\rho_{-\mathbf{k}}\rangle\!\rangle$ призводить до небажаної взаємної компенсації відповідних поправок.



Рис. 2.3. Спектр елементарних збуджень рідкого гелію-4. На нижньому графіку у збільшеному вигляді зображено виділену прямокутну область верхнього графіка. Суцільна лінія — результат RPA (спектр Боголюбова); штрихова — спектр (2.35) із розщепленням *s*-типу, $\eta = 1$; пунктирна — спектр (2.35) із розщепленням *f*-типу, $\eta = 1$; кружечки (з «вусами») — експериментальні дані [273]

Таблиця 2.1. Спектр елементарних збуджень рідкого гелію-4. Обчислені значення у наближенні Боголюбова $E_k^{\rm B}$ та з використанням двох типів розщеплення (s і f) подано у порівнянні з експериментальними даними [273]. Одиниця вимірювання енергії — кельвіни

$k, \mathrm{\AA}^{-1}$	E_k^{B}	$E_k^{s\text{-type}}$	$E_k^{f\text{-type}}$	E_k^{\exp}		ΔE_k
0.2	4.21	3.79	3.69	3.70	\pm	0.5
0.3	6.31	5.60	5.44	5.65	\pm	0.20
0.4	8.53	7.48	7.21	7.40	\pm	0.20
0.5	10.84	9.37	8.97	9.15	\pm	0.20
0.6	13.27	11.32	10.75	10.75	\pm	0.20
0.7	15.80	13.31	12.52	11.75	\pm	0.20
0.8	18.26	15.22	14.17	12.65	\pm	0.20
0.9	20.47	16.90	15.60	13.15	\pm	0.20
1.0	22.14	18.13	16.59	13.55	\pm	0.25
1.2	23.55	19.09	17.29	13.75	\pm	0.25
1.4	22.83	18.78	17.17	12.95	\pm	0.20
1.6	20.45	17.89	17.05	11.20	\pm	0.20
1.8	18.23	18.12	18.43	9.25	\pm	0.20
2.0	19.57	21.23	22.20	8.95	\pm	0.20

Як s-, так і f-типи розщеплень можна застосовувати для опису довгохвильової поведінки спектра гелію-4, не використовуючи поняття ефективної маси, яка необхідна в RPA, порівн. [269]. З іншого боку, запропонований метод і надалі не дає добрих результатів за більших значень хвильового вектора, і варто шукати подальші модифікації для коректного відтворення так званих максонної та ротонної ділянок.

Цікавим також видається аналіз ядерної матерії, у якій передбачають існування різних типів бозе-конденсації [281, 282]. Ядерну матерію можна моделювати потенціалом Юкави [283]

$$\Phi(r) = \epsilon \, \frac{e^{-r/\sigma}}{r}.$$

Його фур'є-зображення має вигляд [284]

$$\nu_k = \frac{4\pi\epsilon\sigma^3}{1+\sigma^2k^2}.\tag{2.39}$$

Ядерній матерії відповідають такі значення параметрів [283]:

$$\epsilon = 5725 \text{ MeV}, \qquad \sigma = 0.244 \text{ fm}^{-1}, \qquad (2.40)$$

а також

$$\Lambda^* = \frac{2\pi\hbar}{\sigma\sqrt{\epsilon m}} = 1.08, \qquad n = 0.16 \text{ fm}^{-3}.$$
 (2.41)



Рис. 2.4. Спектр елементарних збуджень бозе-рідини з потенціалом Юкави; параметри відповідають ядерній матерії. Суцільна лінія — результат RPA (спектр Боголюбова); штрихова — спектр (2.35) із розщепленням *s*-типу, $\eta = 0$; пунктирна — спектр (2.35) із розщепленням *f*-типу, $\eta = 0$; штрихпунктирна — спектр (2.35) із розщепленням *f*-типу, $\eta = 0$.

Результати розрахунків спектра елементарних збуджень такої системи наведено на рис. 2.4. Отримана поправка до наближення RPA змінює форму кривої E_k , що дає добре якісне узгодження з

іншими даними [284, 285]. Потрібно зазначити, що у цьому випадку значення параметра η близькі до нуля, оскільки, починаючи від $\eta \gtrsim 0.2$, виникають нефізичні розбіжності в області мінімуму ($k = 4 \div 6 \text{ fm}^{-1}$).

2.3.4. Обговорення. Підсумовуючи результати цього підрозділу, зазначимо, що запропоновано підхід до вивчення взаємодіючих бозе-систем, який добре описує спектр елементарних збуджень у довгохвильовій границі. Причому коректний опис фононної ділянки спектра рідкого гелію-4 отримано без застосування поняття ефективної маси. Як показує проведений аналіз, у двох розглянутих моделях потрібно брати різні значення параметра розщеплення $\eta: \eta = 1$ для рідкого гелію-4 й $\eta = 0$ для юкавівської бозе-рідини. Вибір параметра залежить від типу взаємодій: у випадку короткосяжного потенціалу в гелії відбувається ефективна зміна доданка, відповідального за взаємодію $\varepsilon_k^{(2)} \nu_k$ у виразі (2.35), а відносно далекосяжний потенціал Юкави вимагає зміни «кінетичних» доданків $\varepsilon_k^{(1,3)}$.

2.4. Міжатомні потенціали розрідженої багатобозонної системи

Хоча в багатьох випадках для встановлення властивостей розрідженої системи достатньо задати лише основні параметри міжатомної взаємодії, такі, наприклад, як радіус (при моделюванні твердими кульками), все ж з'ясування деталей потенціальної кривої становить інтерес з огляду на перспективу точніших розрахунків термодинамічних і структурних функцій, а також конденсатної фракції. Дослідження парного потенціалу, його зв'язку зі структурою проводили для різних речовин. Оскільки розрахунки здійснено для рубідію-87, то цікаво зазначити деякі праці, що стосуються цього газу. Головно, такі дослідження виконували за суттєво інших умов порівняно з тими, що відповідають бозе-конденсації [286–288]. Скажімо, у праці [286] значення температури становить 1900 К, а в [288] — 185 К. Фактично йдеться про рідкий рубідій, а нас цікавитиме газ за температур ~ 1 нК. Зважаючи на порівняну новизну в цьому питанні, відповідних експериментальних і теоретичних даних для порівняння бракує.

На підставі отриманих раніше результатів для багатобозонної системи на прикладі гелію-4 [277, 289, 290] запишемо вирази для міжатомного потенціалу сильнорозрідженої системи. Відповідне рівняння для фур'є-зображення потенціалу ν_k отримується в межах формалізму колективних змінних. Воно має вигляд [277, 289, 290]:

$$\frac{N}{2V}\nu_{k} + \varepsilon_{k} a_{2}(\mathbf{k}) - \varepsilon_{k} a_{2}^{2}(\mathbf{k}) - \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \varepsilon_{q} a_{4}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, \mathbf{k}, -\mathbf{k}) + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\hbar^{2}}{2m} \mathbf{q}(-\mathbf{k} - \mathbf{q}) a_{3}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, -\mathbf{k} - \mathbf{q}) = 0, \qquad (2.42)$$

тут ε_k — енергія вільної частинки, N — кількість частинок, V — об'єм системи. Коефіцієнтні функції a_3, a_4 складним способом виражаються через структурний фактор.

Якщо у всіх співвідношеннях зберегти лише доданки, лінійні за густиною N/V (таке наближення є цілком виправданим, зважаючи на типове значення густини ~ 10^{-11} Å^{-3} [4]), то для фур'єзображення міжатомного потенціалу $\nu(x)$ у знерозміреній формі отримаємо [291]

$$\nu(x) = \nu_0(x) + \frac{1}{x} \int_0^\infty dy \int_{|x-y|}^{x+y} dp \ py \ \frac{\nu(p)}{p^2} \times \left[\frac{\nu(x)}{x^2} (x^2 + p^2 - y^2) + \frac{\nu(y)}{y^2} (x^2 + p^2 + y^2) \right], \quad (2.43)$$

причому, попри позірну розбіжність, насправді цей інтеґрал виявляється збіжним, що можна показати за допомогою детального аналізу. У цьому виразі одиницею вимірювання фур'є-зображення потенціалу є $4\pi\hbar^2 a/m$, а хвильового вектора — $2\pi/a$, де a — параметр довжини, зміст якого з'ясовано нижче. Така форма запису допомагає відразу отримати результати для різних речовин, що відповідає різним значенням a та m. Початкове наближення для $\nu_0(x)$ можна вибрати, виходячи з потенціалу «майже твердих сфер» [292]. З цією метою використано пробну функцію Маєра у вигляді

$$f(R) = \exp\left[-\left(\frac{a}{R}\right)^n\right] - 1, \qquad n = 36.$$
(2.44)

У випадку Rb⁸⁷ взято значення a = 58.2 Å (довжина розсіяння *s*-хвилі) [9]. На основі форми кривої, яку отримуємо внаслідок ітераційного розв'язування інтеґрального рівняння, можна сказати, що розв'язок для Фур'є-зображення потенціалу парної взаємодії потрібно шукати у вигляді суперпозиції функцій типу

$$\frac{\cos 2n\pi x}{x^{2m}}, \quad \frac{\sin 2n\pi x}{x^{2m+1}}$$

із деяким загасаючим множником. Попередній аналіз засвідчує, що достатньо обмежитися значеннями m, n < 4. Однак, через складність аналітичних викладок, а також через неможливість отримати аналітичні результати навіть на проміжних етапах розв'язування рівняння (2.43) (це пов'язано з його нелінійністю), було застосовано ітераційну процедуру, аналогічну до [277].

Початкове наближення $\nu_q^{(0)}$ виражається через структурний фактор S_q так [277]:

$$\nu_q^{(0)} = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \frac{V}{2N} \left(\frac{1}{S_q^2} - 1\right), \qquad (2.45)$$

тут вжито розмірні величини.

Обмежуючись лише доданками, лінійними за густиною, можна показати, що [291]

$$\nu_q^{(0)} = -4\pi \, \frac{\hbar^2}{2m} \, q \int_0^\infty dR \, Rf(R) \, \sin qR, \qquad (2.46)$$

де f(R) — функція Маєра (2.44) (див., наприклад, [293], де наведено вираз для парної функції розподілу у вигляді ряду за густиною).

Обчислення проведемо, підставляючи в інтеґральний доданок у формулі (2.43) на місце $\nu(y)$ і $\nu(p)$ початкове наближення, відповідно, $\nu_0(y)$ і $\nu_0(p)$. Перейшовши потім до координатного простору

$$\Phi(R) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}} \nu_q, \qquad (2.47)$$

для потенціалу $\Phi(R)$ матимемо криву, зображену на рис. 2.5.



Рис. 2.5. Потенціал взаємодії між атомами $\rm Rb^{87}.$
1-початкове наближення; 2-перша і
терація [291]

Треба зауважити, що, незважаючи на сильне відштовхування у моделі, така процедура, пов'язана з фур'є-перетворенням, є коректною — згадаймо, наприклад, псевдопотенціал для твердих сфер [294]. Зазначмо ще між іншим, що початкове наближення $\nu_0(x)$, отримане в моделі твердих сфер, не можна безпосередньо використовувати для ітерацій, оскільки інтеґральний доданок у рівнянні (2.43) виявляється розбіжним. Проте цю незручність можна обійти, вводячи певний обрізуючий множник — експоненту з малим показником. Як бачимо з рис. 2.5, на потенціальній кривій з'являється мінімум, що означає притягання між атомами. Така поведінка потенціалу свідчить про те, що застосоване наближення є кращим від, скажімо, наближення звичайних твердих сфер, у якому наявне тільки короткосяжне відштовхування. Що стосується нульових чи від'ємних значень потенціалу на малих міжатомних віддалях і можливості квантовомеханічного тунелювання крізь потенціальний бар'єр, то ймовірність такої події за малих температур (нанокельвіновий діапазон), коли спостерігається бозе-конденсація, є нехтовно малою.

Проведення точнішого (неітераційного) розв'язування рівняння (2.43) може бути предметом окремого дослідження, так само як і вивчення впливу параметрів моделі початкового наближення на результати розрахунків. На цьому етапі можна стверджувати, що поведінка першої ітерації стосовно початкової якісно відображає спостережуваний раніше ефект у випадку гелію-4 [277], що дає підстави розвивати запропоновану методику.

2.5. Вплив слабкої взаємодії на властивості бозе-газу

Незважаючи на те, що більшість відомих бозе-систем є взаємодіючими, модель ідеального бозе-газу часто можна використати як базову для побудови теорії, особливо, коли взаємодію можна вважати слабкою. У цьому підрозділі ми спочатку коротко підсумуємо основні відомості про термодинамічні функції ідеального бозе-газу, вивчимо вплив зовнішнього потенціалу на властивості цієї системи і зрештою розглянемо властивості слабковзаємодіючого бозе-газу, у якому міжатомний потенціал ураховано в моделі твердих сфер із використанням енерґетичного спектра Боголюбова [10].

2.5.1. Ідеальний *D***-вимірний бозе-газ.** Розглядатимемо систему *N* бозонів, які можуть перебувати у станах з енерґіями $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$. Тоді, враховуючи функцію розподілу в статистиці Бозе–Айнштайна, запишемо:

$$N = \sum_{n} \frac{g_n}{e^{(\varepsilon_n - \mu)/T} - 1}.$$
 (2.48)

Ця рівність задає хімічний потенціал μ як функцію числа частинок Nі температури T.

З міркувань загальності можна вважати простір D-вимірним. Різні значення вимірності простору можуть виникати у фізичних задачах ефективно, наприклад, унаслідок урахування впливу зовнішнього потенціалу. Загалом, D може бути й дробовим, що використовують під час моделювання пористих середовищ чи знову ж таки для систем у зовнішньому потенціалі. Тому далі використаємо вирази у формі, що дають змогу узагальнювати отримані результати на випадок неперервних значень D, хоч би й зовсім формально.

Нехай частинки перебувають в об'ємі \mathscr{V}_D . Підсумовування за станами можна замінити сумою за імпульсами $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_D)$ і спінами *s*, причому $\varepsilon_p = p^2/2m$, де m — маса частинки; $p = |\mathbf{p}| = \sqrt{p_1^2 + \ldots + p_D^2}$. З урахуванням того, що за великого об'єму дискретністю імпульсу можна знехтувати, отримаємо вираз:

$$N = \sum_{\mathbf{p},s} \frac{g_{\mathbf{p},s}}{e^{(\varepsilon_p - \mu)/T} - 1} = (2\sigma + 1) \frac{\mathscr{V}_D}{(2\pi\hbar)^D} \int \frac{(dp)}{e^{(\varepsilon_p - \mu)/T} - 1} =$$
$$= (2\sigma + 1) \int \frac{d\tau}{e^{(\varepsilon_p - \mu)/T} - 1},$$
(2.49)

де \mathscr{V}_D-D -вимірний об'єм, а елемент фазового об'єму

$$d\tau = \frac{(dp)(dq)}{(2\pi\hbar)^D}, \qquad \mathscr{V}_D = \int (dq),$$
$$(dp) = dp_1 \dots dp_D, \qquad (dq) = dq_1 \dots dq_D.$$

Величина $(2\sigma + 1)$ — це мультиплетність. Для спрощення у подальших розрахунках вважатимемо бозони безспіновими, $\sigma = 0$.

Рівність (2.49) можна записати, ввівши функцію густини станів $g(\varepsilon)$:

$$N = \int_{0}^{\infty} \frac{g(\varepsilon) \, d\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \mu)/T} - 1}.$$
(2.50)

Ураховуючи, що енергія частинки ε_p залежить лише від модуля імпульсу p, після переходу в (2.49) до інтеґрування за (гіпер-)сферичними координатами, $dp_1 \dots dp_D = p^{D-1} dp d\Omega_D$, де

 $\Omega_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma(\frac{D}{2})$ — повний тілесний гіперкут у *D*-вимірному просторі, матимемо остаточно:

$$g(\varepsilon) = \mathscr{V}_D \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \, \frac{(2m)^{D/2}}{(2\pi\hbar)^D} \, \varepsilon^{D/2-1}.$$
 (2.51)

Важливим результатом тут є показник степеня густини станів ідеального *D*-вимірного бозе-газу:

$$g(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D/2-1},$$
 (2.52)

який можна використовувати для інтерпретації ефективної вимірності простору в багатьох задачах.

Після нескладних перетворень вираз (2.50) матиме вигляд:

$$\frac{N}{\mathcal{V}_D} = \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \frac{(2m)^{D/2}}{(2\pi\hbar)^D} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{D/2-1} d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1} = \frac{1}{\lambda^D} \operatorname{Li}_{D/2} \left(e^{\mu/T} \right), \quad (2.53)$$

де

$$\lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{1/2} \tag{2.54}$$

 довжина теплової хвилі де Бройля, а так званий полілогарифм, або функція Бозе, визначається рядом:

$$\operatorname{Li}_{\alpha}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha}}.$$
(2.55)

У граничному випадку z = 1 ця функція переходить у дзета-функцію Рімана:

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \operatorname{Li}_{\alpha}(1).$$
(2.56)

Увівши для величини N/\mathcal{V}_D , яка за змістом є густиною (чи, точніше, концентрацією), позначення $\rho_D = N/\mathcal{V}_D$, запишемо у компактній формі рівняння, з якого визначатимемо хімічний потенціал як функцію температури і густини:

$$\rho_D \lambda^D = \mathrm{Li}_{D/2}(z). \tag{2.57}$$

Якщо при заданій густині ρ_D зменшувати температуру газу, то хімічний потенціал μ , що встановлюється з рівності (2.57), зменшуватиметься за модулем і досягне значення $\mu = 0$ за критичної температури, що визначається виразом

$$T_c^{(D)} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{\rho_D}{\zeta(D/2)}\right)^{2/D}.$$
 (2.58)

При $T < T_c^{(D)}$ рівняння для обчислення N не має фізичних розв'язків — ця точка відповідає явищу конденсації Бозе–Айнштайна (бозеконденсації). Це означає, що найнижчий одночастинковий стан ($\varepsilon = 0$) стає макроскопічно заселеним із кількістю частинок $N_0 \sim N$. Внесок від цього стану потрібно врахувати явно під час переходу до густини станів:

$$N = N_0 + \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1},$$
(2.59)

оскільки при D > 2 функція $g(\varepsilon)$ не дає змоги врахувати макроскопічну заселеність стану $\varepsilon = 0$, див. (2.52). Кількість частинок у цьому стані (бозе-конденсат) легко отримати у вигляді:

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c^{(D)}} \right)^{\frac{D}{2}} \right].$$
 (2.60)

При D = 2 в ідеальному бозе-газі бозе-конденсації не відбувається [295, 296]. Математично це випливає з того, що у виразі (2.58) ζ -функція дає розбіжний внесок у вигляді

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

отже, $T_c^{(2)}=0.$ Не спостерігається бозе-конденсація й приD<2.

Обчисливши
 μ з (2.57), енерґію Eі теплоємність
 C_V системи розрахуємо за співвідношенням:

$$E = \sum_{n} \frac{\varepsilon_{n} g_{n}}{e^{(\varepsilon_{n} - \mu)/T} - 1} = \int_{0}^{\infty} \frac{\varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \mu)/T} - 1}, \quad C_{V} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V}.$$
 (2.61)

Зокрема, залежність питомої теплоємності C_V/N від $T \leq T_c$ можна записати так:

$$\frac{C_V}{N} = \frac{D(D+2)}{4} \frac{\zeta \left(\frac{D}{2}+1\right)}{\zeta \left(\frac{D}{2}\right)} \left(\frac{T}{T_c^{(D)}}\right)^{\frac{D}{2}},\qquad(2.62)$$

а класична границя $T \to \infty$ буде

$$\frac{C_V}{N} = \frac{D}{2}.\tag{2.63}$$

л

Поведінку ж теплоємності, як і енерґії, за проміжних температур $(T > T_c)$ вже не можна з'ясувати на підставі простого аналізу. Особливий інтерес становить безпосередній окіл критичної точки $T \to T_c + 0$, який і стане предметом подальшого розгляду.



Рис. 2.6. Питома теплоємність C_V/N ідеального бозе-газу в *D*вимірному просторі. Верхній лівий графік відповідає D = 2 (тут за T_c взято значення, що відповідає тривимірній системі); верхній правий — $D = \ln 20/\ln 3 = 2.726...$ — вимірність губки Менґера; у нижньому ряду ліворуч D = 3 і праворуч D = 4

Результати розрахунків теплоємності для різних вимірностей простору наведено на рис. 2.6. Дробове значення $D = \ln 20 / \ln 3 = 2.726...$ відповідає фрактальній вимірності так званої губки Сєрпінського або Менґера (див. рис. 2.7), якою можна моделювати, наприклад, пористе середовище.



Рис. 2.7. Губка Менґера (джерело: http://commons.wikimedia. org/wiki/File:Menger-Schwamm-einfarbig.jpg)

2.5.2. Слабковзаємодіючий газ. Для дослідження бозе-конденсації в розріджених газах можна використати спрощену теорію слабковзаємодіючого бозе-газу, яка була вперше розвинена зі сподіванням пояснити властивості рідкого гелію [10].

Незважаючи на багато зусиль, проблема визначення залежності температури бозе-конденсації слабковзаємодіючого бозе-газу від взаємодії все ще не знайшла остаточної відповіді [297], порівн. [298]. Відомо, що температура T_c переходу в конденсатний стан несуттєво відрізняється від температури, передбаченої для ідеального газу. Це свідчить про те, що взаємодії незначно змінюють протікання цього явища. Їхній вплив на температуру переходу становить декілька відсотків, тому таку систему дуже часто можна трактувати як ідеальну в головному наближенні.

Без взаємодії всі N частинок системи заселяють стан з нульовою енерґією та з нульовим імпульсом (для вимірності простору більше двох). У цьому випадку кількість конденсованих частинок N_0 дорівнює загальній кількості частинок. Коли вмикається взаємодія, частинки можуть покинути конденсат, тому N_0 природно зменшується [297].

У розрідженій системі враховуємо тільки двочастинкову взаємодію, оскільки ймовірність багаточастинкових зіткнень мізерна. Розгляньмо слабковзаємодіючий газ у наближенні твердих сфер, потенціал яких найбільш пристосований до вивчення газів із низькими густинами через його формальну простоту [299].

Пояснити поведінку газу твердих сфер можна, використавши енергетичний спектр Боголюбова для слабконеідеального газу [10]

$$\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m} \sqrt{1 + \frac{2\varrho\nu_p}{p^2/2m}},\tag{2.64}$$

де ε — енергія, p = |p| — абсолютне значення імпульсу частинки; $\rho = N/V$ — густина системи, ν_p — фур'є-зображення потенціалу міжатомної взаємодії, $\nu_p = \nu_0 = \text{const}$ для моделі твердих сфер.

Із дисперсійного співвідношення (2.64) бачимо, що в довгохвильовій межі боголюбівські квазічастинки поводяться як фонони зі швидкістю звуку $c = \sqrt{\frac{\rho\nu_0}{m}}$ та за низької температури термодинаміка бозе-конденсованої системи визначається її фононним спектром. На противагу цьому в короткохвильовій межі квазічастинки поводяться як вільні частинки з енергією $p^2/2m$.

Розглядаючи слабковзаємодіючий газ твердих сфер, ми розвинемо за степенями ν_0 густину станів, що може бути корисним для дослідження розріджених багатобозонних систем.

Для опису слабковзаємодіючої системи бозонів у зовнішньому потенціалі застосуємо метод, який ґрунтується на теорії ідеального бозе-газу, описаній у пункті 2.5.1. Зв'язок між енергією та імпульсом частинки масою *m* можна записати, використовуючи результат Боголюбова для спектра елементарних збуджень слабковзаємодіючого бозе-газу (2.64).

Для конкретизації задачі розглядатимемо двовимірну систему.

У випадку твердих сфер потенціал взаємодії у борнівському наближенні можна записати

$$\Phi(\mathbf{r}) = \nu_0 \delta(\mathbf{r}).$$

Вигляд потенціалу взаємодії визначає мінімальне значення енергії (2.64), тобто енергії основного стану. При p = 0

$$\varepsilon \simeq \frac{p^2}{2m} \left(\frac{4m\varrho\nu_0}{p^2}\right)^{1/2} = p\sqrt{\frac{\varrho\nu_0}{m}}, \qquad \varepsilon\Big|_{p\to 0} \to 0.$$

Обчислимо основні термодинамічні функції [300]. Густина станів

$$g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{(dp) \int dV}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{\Omega_2 V}{(2\pi\hbar)^2} p dp,$$

$$p(\varepsilon) = \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{m^2 \varepsilon^2 + m^2 \varrho^2 \nu_0^2} - m \varrho \nu_0},$$

$$p(\varepsilon) dp = m^2 \varepsilon (m^2 \varepsilon^2 + m^2 \varrho^2 \nu_0^2)^{-1/2} d\varepsilon.$$

Функцію $g(\varepsilon)$ запишемо, використовуючи розклад за параметром взаємодії ν_0 :

$$g(\varepsilon) = g_0(\varepsilon) + \nu_0 g_1(\varepsilon) + \nu_0^2 g_2(\varepsilon) + \cdots$$

Зважаючи на різні ділянки збіжності функції $p(\varepsilon)$, розгляньмо два випадки:

1) $\varepsilon < \varrho \nu_0$.

Можна записати

$$p \, dp = \frac{m\varepsilon}{\varrho\nu_0} \left(\frac{\varepsilon^2}{\varrho^2\nu_0^2} + 1\right)^{-1/2} d\varepsilon =$$
$$= m \left[\frac{\varepsilon}{\varrho\nu_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(2n-1)!!}{2^n} \left(\frac{\varepsilon}{\varrho\nu_0}\right)^{2n+1}\right] d\varepsilon.$$
(2.65)

2) $\varepsilon > \varrho \nu_0$. Тоді

$$p \, dp = m \left(1 + \frac{\varrho^2 \nu_0^2}{\varepsilon^2} \right)^{-1/2} d\varepsilon =$$
$$= m \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(2n-1)!!}{2^n} \left(\frac{\varrho \nu_0}{\varepsilon} \right)^{2n} \right) d\varepsilon.$$
(2.66)

Кількість частинок визначаємо з (2.59):

$$N = N_0 + \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} =$$
$$= N_0 + \int_0^{\varrho\nu_0} \frac{g_{\varepsilon < \varrho\nu_0}(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} + \int_{\varrho\nu_0}^\infty \frac{g_{\varepsilon > \varrho\nu_0}(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1}.$$
(2.67)

Зміст індексів біля $g(\varepsilon)$ очевидний.

Перепишемо інтеґрал для першого випадку так:

$$\begin{split} &\int_{0}^{\varrho\Phi} \frac{g_{\varepsilon < \varrho\nu_0}(\varepsilon) \, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} = \\ &= \frac{V}{2\pi\hbar^2} \left(\frac{m}{\varrho\nu_0} \int_{0}^{\varrho\nu_0} \frac{\varepsilon \, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} - \frac{m}{2\varrho^3\nu_0^3} \int_{0}^{\varrho\nu_0} \frac{\varepsilon^3 \, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} + \right. \\ &\left. + \frac{3m}{8\varrho^5\nu_0^5} \int_{0}^{\varrho\nu_0} \frac{\varepsilon^5 \, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} - \cdots \right). \end{split}$$

Розгляньмо окремо інтеґрал

$$\begin{split} \int_{0}^{\varrho\nu_{0}} \frac{\varepsilon \,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1} &= -\frac{1}{2}\varrho^{2}\nu_{0}^{2} + T\varrho\nu_{0}\ln\left(1 - e^{\frac{\varrho\nu_{0}-\mu}{T}}\right) + \\ &+ T^{2}\left[\operatorname{Li}_{2}\left(e^{\frac{\varrho\nu_{0}-\mu}{T}}\right) - \operatorname{Li}_{2}\left(e^{\frac{-\mu}{T}}\right)\right] \end{split}$$

Розписуючи полілогарифм (2.55), матимемо

$$\operatorname{Li}_{2}\left(e^{\frac{\rho\nu_{0}-\mu}{T}}\right) - \operatorname{Li}_{2}\left(e^{\frac{-\mu}{T}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{-n\mu}{T}}}{n^{2}} \left(e^{\frac{n\rho\nu_{0}}{T}} - 1\right) =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{-n\mu}{T}}}{n^2} \left(n\frac{\varrho\nu_0}{T} + \frac{1}{2}n^2\frac{\varrho^2\nu_0^2}{T^2} + \cdots \right) =$$
$$=\frac{\varrho\nu_0}{T}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{-n\mu}{T}}}{n} + \frac{1}{2}\frac{\varrho^2\nu_0^2}{T^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-n\mu}{T}} + \mathcal{O}(\varrho^3\nu_0^3) =$$
$$=-\frac{\varrho\nu_0}{T}\ln\left(1 - e^{\frac{-\mu}{T}}\right) + \frac{\varrho^2\nu_0^2}{2T^2}\frac{e^{\frac{-\mu}{T}}}{1 - e^{\frac{-\mu}{T}}} + \mathcal{O}(\varrho^3\nu_0^3).$$

Тут враховано, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\frac{-\mu}{T}}}{n} = -\ln\left(1 - e^{\frac{-\mu}{T}}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-n\mu}{T}} = \frac{e^{\frac{-\mu}{T}}}{1 - e^{\frac{-\mu}{T}}}.$$

Остаточно отримаємо значення інтеґрала

$$\int_{0}^{\varrho\nu_{0}} \frac{\varepsilon \, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1} = \frac{1}{2} \frac{\varrho^{2}\nu_{0}^{2}}{e^{-\mu/T} - 1} + \mathcal{O}(\varrho^{3}\nu_{0}^{3}).$$
(2.68)

Аналогічно обчислюємо наступні інтеґрали.

$$\int_{0}^{\varrho\nu_{0}} \frac{g_{\varepsilon < \varrho\nu_{0}}(\varepsilon) \, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1} = \frac{mV}{2\pi\hbar^{2}} \Biggl\{ \frac{1}{2} \frac{\varrho\nu_{0}}{e^{-\mu/T-1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \frac{\varrho\nu_{0}}{e^{-\mu/T} - 1} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} \frac{\varrho\nu_{0}}{e^{-\mu/T} - 1} + \mathcal{O}(\varrho^{2}\nu_{0}^{2}) \Biggr\}.$$
(2.69)

Після перетворень можна записати (з точністю до лінійних доданків):

$$\int_{0}^{\varrho\nu_{0}} \frac{g_{\varepsilon < \varrho\nu_{0}}(\varepsilon) \, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1} = \frac{mV}{2\pi\hbar^{2}} \varrho\nu_{0} \frac{1}{e^{-\mu/T} - 1} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(2n-1)!!}{n!2^{n}(2n+2)} \right] = \frac{mV}{2\pi\hbar^{2}} \varrho\nu_{0} \frac{1}{e^{-\mu/T} - 1} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n+1/2)}{2n+2} \right] = \frac{mV}{2\pi\hbar^{2}} \varrho\nu_{0} \frac{1}{e^{-\mu/T} - 1} \left(\sqrt{2} - 1 \right).$$
(2.70)
Для $\varepsilon > \rho \nu_0$, використовуючи зазначений вище спосіб, можемо записати:

$$\begin{split} &\int_{\varrho\nu_0}^{\infty} \frac{g_{\varepsilon>\varrho\nu_0}(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1} = \frac{mV}{2\pi\hbar^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ T\frac{1}{n} e^{n(\mu-\varrho\nu_0)/T} - \frac{1}{2} e^{n\mu/T} \varrho\nu_0 + \right. \\ &+ \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} e^{n\mu/T} \varrho\nu_0 - \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{5} e^{n\mu/T} \varrho\nu_0 + \frac{35}{128} \cdot \frac{1}{7} e^{n\mu/T} \varrho\nu_0 + \ldots + \\ &+ + \varrho^2 \nu_0^2 \ln \frac{n\varrho\nu_0}{T} \frac{e^{n\mu/T}n}{T} + \ldots \Big\}. \end{split}$$

Після перетворень, аналогічних виконаним для першого інтеґрала,

$$\int_{\varrho\nu_0}^{\infty} \frac{g_{\varepsilon>\varrho\nu_0}(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}-1} = -\frac{mV}{2\pi\hbar^2}T\ln\left(1-e^{\frac{\mu-\varrho\nu_0}{T}}\right) + \frac{mV}{2\pi\hbar^2}\varrho\nu_0\frac{1}{e^{-\mu/T}-1}\left(1-\sqrt{2}\right).$$
(2.71)

Для розрахунку хімічного потенціалу та критичної температури запишемо повну кількість частинок

$$N = N_0 + \int_0^{\varrho\nu_0} \frac{g_{\varepsilon < \varrho\nu_0}(\varepsilon) \, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} + \int_{\varrho\nu_0}^{\infty} \frac{g_{\varepsilon > \varrho\nu_0}(\varepsilon) \, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} =$$
$$= N_0 + \frac{mV}{2\pi\hbar^2} \left[-T \ln\left(1 - e^{\frac{\mu - \varrho\nu_0}{T}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^2 \nu_0^2 \frac{e^{n\mu/T}}{T} n \ln\frac{n\varrho\nu_0}{T} \right].$$

Після перетворень маємо

$$N = N_0 + \frac{mV}{2\pi\hbar^2} \left[-T\ln\left(1 - e^{\frac{\mu - \varrho\nu_0}{T}}\right) + \frac{1}{4T \operatorname{sh}^2 \frac{\mu}{2T}} \varrho^2 \nu_0^2 \ln \frac{\varrho\nu_0}{T} \right].$$
(2.72)

Це — рівняння для визначення хімічного потенціалу, яке зручніше переписати у вигляді [300]:

$$-T\ln\left(1-e^{\frac{\mu-\varrho\nu_0}{T}}\right) + \frac{1}{4T\operatorname{sh}^2\frac{\mu}{2T}}\varrho^2\nu_0^2\ln\frac{\varrho\nu_0}{T} = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\varrho,$$

~

де враховано, що при наближенні до точки бозе-конденсації справа $N_0 = 0$. Бачимо, що при $\mu \to 0$ другий доданок стає розбіжним, що, зокрема, свідчить про існування фазового переходу.

Для оцінки хімічного потенціалу в лінійному наближенні запишемо його так:

$$\mu = \mu_0 + \Delta \mu.$$

Тут μ_0 — хімічний потенціал ідеального газу, а $\Delta \mu$ — доданок, який враховує взаємодію в системі. Знаходимо його з рівняння

$$-T\ln\left(1-e^{\frac{\mu-\rho\nu_0}{T}}\right)+o(\rho\nu_0)=-T\ln\left(1-e^{\frac{\mu_0}{T}}\right).$$

Отже, $\Delta \mu = \varrho \nu_0$:

$$\mu = \mu_0 + \Delta \mu = \mu_0 + \varrho \nu_0.$$

Тепер можна визначити T_c як точку, в якій потенціал ідеального бозе-газу набуває значення $(-\rho\nu_0)$:

$$-T_c \ln\left(1 - e^{\frac{-\rho\nu_0}{T_c}}\right) = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\rho.$$
 (2.73)

Отже, для T_c отримаємо трансцендентне рівняння. Для малих ν_0 [300]:

$$T_c \simeq -\frac{2\pi\hbar^2 \varrho/m}{\ln\left(\nu_0 / \frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)} \to 0, \qquad (2.74)$$

що збігається з $T_c = 0$ для ідеального двовимірного бозе-газу.

У табл. 2.2 наведено порівняння числових розрахунків критичної температури зі значенням, яке дає вираз (2.74).

Розгляньмо далі поведінку системи у просторі вимірності D = 4. Як ми побачимо в наступному розділі, це ефективно відповідає ідеальному двовимірному газові в зовнішньому квадратичному потенціалі. У цьому випадку показник ε у густині станів збільшується на 1, див. (2.52). Для $\varepsilon < \rho \nu_0$ найнижчі степені — $\rho^2 \nu_0^2$, тобто нелінійні за $\rho \nu_0$. Згідно з попередніми наближеннями,

$$\int_{\varrho\nu_0}^{\infty} \frac{g_{\varepsilon>\varrho\nu_0}(\varepsilon) \, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1} = T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\mu/T}}{n^2} + \mathcal{O}(\varrho^2 \nu_0^2 \ln \varrho\nu_0)$$
$$= T^2 \operatorname{Li}_2\left(e^{\frac{\mu}{T}}\right) + \mathcal{O}\left(\varrho^2 \nu_0^2 \ln \varrho\nu_0\right). \tag{2.75}$$

Тобто, у наближенні, лінійному за ν_0 , хімічний потенціал збігається з результатом для ідеального бозе-газу. Поправки матимуть порядок $\rho^2 \nu_0^2 \ln \rho \nu_0$.

Таблиця 2.2. Залежність критичної температури однорідного слабковзаємодіючого бозе-газу від параметра взаємодії ν_0 . Значення параметрів: $2\pi\hbar^2/m = 1$, $\varrho = 1$

$ u_0 $	Числовий результат	Оцінка (2.74)
1.0	0.95	∞
0.5	0.74	1.44
0.25	0.58	0.72
0.125	0.47	0.48
0.0625	0.39	0.36
0.03125	0.32	0.29

Числові розрахунки для двовимірного взаємодіючого бозе-газу в зовнішньому квадратичному потенціалі проведено за описаною вище схемою без використання розкладу за параметром взаємодії. Як ми побачимо в наступному розділі, така ситуація ефективно відповідає системі в чотиривимірному просторі. Результати обчислень для газу твердих сфер із різними значеннями параметра взаємодії показують, що температура фазового переходу (у випадку відштовхувальної взаємодії) зростає порівняно з ідеальним газом.



Рис. 2.8. Залежність теплоємності бозе-газу в зовнішньому потенціалі від температури [300]. Параметр $b = \rho \Phi$

2.6. Висновки до розділу 2

У розділі проаналізовано бозе-системи з різними типами міжчастинкових взаємодій. Для випадку сильних взаємодій застосовано два різні підходи до розрахунку спектра елементарних збуджень, один із яких дає добрий опис спектра елементарних збуджень у довгохвильовій границі, а інший — в області більших значень хвильового вектора. Причому досягнуто коректного опису фононної ділянки спектра рідкого гелію-4 без застосування поняття ефективної маси, а для системи бозонів із потенціалом Юкави отримано якісний збіг з результатами інших авторів.

Детальніше вивчення точних комутаційних співвідношень для операторів $\hat{A}_{\mathbf{q}}, \hat{A}_{\mathbf{q}}^{\dagger}$, за допомогою яких розраховано спектр у підрозділі 2.2, може бути предметом окремих досліджень.

Ми очікуємо, що подальший розвиток обчислень міжатомних потенціалів покращить розрахований енерґетичний спектр. Отримані загальні вирази можна застосовувати до вивчення інших бозесистем, насамперед тих, де відомі фур'є-зображення потенціалів (наприклад, розріджені бозе-гази з потенціалом у вигляді δ-функції чи заряджені бозе-системи [301]). Для покращення опису рідкого гелію поза довгохвильовим наближенням потрібно зокрема враховувати тричастинкові взаємодії та застосовувати інші способи розщеплення триоператорних функцій.

Для слабковзаємодіючого бозе-газу розраховано потенціал взаємодій між атомами рубідію. У модельній системі твердих сфер обчислено густину станів, кількість частинок, критичну температуру та хімічний потенціал із використанням теорії ідеального газу на підставі спектра Боголюбова. Для двовимірного газу отримано розклади за параметром взаємодії ν_0 , які можна узагальнити для довільної вимірності. Показано, що критична температура $T_c \sim -1/\ln \nu_0$ й очікувано прямує до нуля, а хімічний потенціал газу в пастці з точністю до лінійних за ν_0 доданків дорівнює хімічному потенціалові ідеального газу й відрізняється від нього доданками типу $\varrho^2 \nu_0^2 \ln \varrho \nu_0$.

Розділ 3

СИСТЕМИ ЧАСТИНОК У ЗОВНІШНЬОМУ ПОТЕНЦІАЛІ

Перед ним не було ані часу, ані простору; фізичні вражіння не доходили до його свідомості. (Іван Франко, «Перехресні стежки», 1900)

3.1. Вступ

Наявність зовнішнього потенціалу (пастки, від англ. *trap*) забезпечує сприятливі умови для контролю за розрідженими охолодженими газами та дослідження їхніх властивостей. Поведінку бозесистем визначають не лише просторова вимірність та кінематичні характеристики частинок, а й форма зовнішнього поля [302]. Саме тому важливо спочатку підсумувати деякі загальні відомості про ідеальні бозе-гази в пастках.

3.1.1. Ідеальний газ у зовнішньому потенціалі. Енергію частинки у *D*-вимірному просторі можна подати в такому загальному вигляді

$$\varepsilon = \alpha p^{\beta} + \sum_{i=1}^{D} b_i \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^{\eta_i}.$$
(3.1)

Для характеристики явища конденсації Бозе–Айнштайна доцільно ввести параметр χ [303]:

$$\chi = \frac{D}{\beta} + \sum_{i=1}^{D} \frac{1}{\eta_i} > 1.$$
(3.2)

Величина $(\chi - 1)$ — це показник степеня у функції густини станів (див. зокрема [304]), яка відповідає проаналізованому далі квазікласичному наближенню, $q(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\chi-1}$ порівняно з $q(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D/2-1}$ для ідеального *D*-вимірного газу вільних частинок. Лише за умови (3.2) у системі може відбуватися бозе-конденсація. Для бозе-газу з $D/\beta \leq 1$ зовнішній потенціал має визначальну роль для можливості переходу системи у стан бозе-конденсату. Наприклад, у нерелятивістському двовимірному бозе-газі $(D = 2, \beta = 2)$, згідно з (3.2), бозе-конденсація відсутня, якщо система вільна; це забезпечують значення $\eta_i \to \infty$ — границя, яка відповідає вертикальним стінкам [295]. Однак якщо систему поміщено в зовнішній гармонічний потенціал, тоді $\eta_i = 2$ і бозе-конденсація відбувається. Критерій (3.2) показує, що вибором потрібного потенціалу можна забезпечити існування конденсації Бозе-Айнштайна у просторі довільної вимірності. Коли зовнішній потенціал симетричний, тобто $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_D = \eta$, то умова спрощується:

$$\frac{D}{\beta} + \frac{D}{\eta} > 1.$$

Можна показати, що теплоємність системи за температури $T < T_c$ залежить від χ так [302]:

$$C_{T < T_c} = N\chi(\chi + 1) \frac{\zeta(\chi + 1)}{\zeta(\chi)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\chi}, \qquad (3.3)$$

а в безпосередньому околі критичної температури при $T>T_c-$

$$C_{T>T_c} = N\chi(\chi+1)\frac{\zeta(\chi+1)}{\zeta(\chi)}\left(\frac{T}{T_c}\right)^{\chi} - \chi^2\frac{\zeta(\chi)}{\zeta(\chi-1)}.$$
(3.4)

Якщо задовольняється критерій (3.2), то теплоємність у точці T_c розривається і відбувається фазовий перехід. Якщо χ задовольняє умову $1 < \chi \leq 2$, то теплоємність в T_c буде неперервною. Легко бачити, що у випадку $D/\beta \leq 2$ саме зовнішній потенціал системи визначає поведінку теплоємності системи.

3.1.2. Приклад застосування квазікласичного наближення. Виявляється, що система в зовнішньому полі ефективно поводиться так, як такий самий ідеальний газ вищих вимірностей [296]. Наявність зовнішнього потенціалу не дає змоги просто замінити координатну частину об'єму фазового простору (dq) в (2.49) на об'єм системи V. У квазікласичному трактуванні рух відбувається між класичними точками повороту [296], тобто межі R просторового інтеґрування визначають з умови $U(x) = \varepsilon$ (див. схематичний рис. 3.1).



Рис. 3.1. Зовнішній потенціал і класичні точки повороту

Розгляньмо для прикладу двовимірний ідеальний бозе-газ у пастці

$$U(x,y) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2).$$
 (3.5)

Енергія частинки, відповідно, дорівнюватиме

$$\varepsilon(p) = p^2/2m + U(x, y). \tag{3.6}$$

Кількість частинок

$$N = \int \frac{dx \, dy \, dp_x \, dp_y}{(2\pi\hbar)^2} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1}.$$
(3.7)

Імпульс системи

$$p = \sqrt{2m(\varepsilon - U(x, y))}, \qquad dp_x \, dp_y = 2\pi p \, dp. \tag{3.8}$$

Інтеґрал

$$\int dx \, dy = S$$

просто обчислюємо з умови p = 0 (між класичними точками повороту)

$$\varepsilon = U(x,y) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2).$$

Легко бачити, що це рівняння еліпса, тому

$$S = \frac{2\pi\varepsilon}{m\omega_x\omega_y},$$

тобто в задачі виникає певна ефективна площа.

Отже, кількість частинок

$$N = \frac{1}{(\hbar\omega_x)(\hbar\omega_y)} \int_0^\infty \frac{\varepsilon \, d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1}.$$
(3.9)

Зауважимо принагідно, що зі співвідношення (2.59) густина станів

$$\rho(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{(\hbar\omega_x)(\hbar\omega_y)} \propto \varepsilon.$$

У загальному випадку (2.52) $\rho \propto \varepsilon^{\frac{D}{2}-1}$, тобто тут маємо ефективну вимірність D = 4.

Критична температура двовимірного ідеального бозе-газу в потенціалі загальнішого вигляду $U(r) = U_0(r/a)^\eta$, встановлена з умови $\mu = \varepsilon_0$ при $T = T_c$, буде [296]

$$T_c^{2D} = \left[\frac{2N\hbar^2 U_0^{2/\eta}}{ma^2 \Gamma(2/\eta+1)\zeta(2/\eta+1)}\right]^{\eta/(2+\eta)}.$$
 (3.10)

У *D*-вимірному просторі в такому ж степеневому потенціалі нижче від критичної температури кількість частинок у конденсаті $N_0 \neq 0$, якщо виконується умова (3.2), і температурна залежність для конденсатної фракції має вигляд [305]:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{D(\eta+2)/2\eta}.$$
(3.11)

Для гармонічного потенціалу $\eta = 2$, а результати для вільної системи (у скриньці) обчислюють, приймаючи $\eta \to \infty$. Якщо D = 2, то бозе-конденсація в останньому випадку не відбувається, оскільки $T_c \to 0$ з формули (3.10) через $\zeta(1) = \infty$.

3.2. Бозони в пористому середовищі під впливом зовнішнього поля

У цьому підрозділі вплив пористого середовища враховано шляхом уведення дробової (фрактальної) просторової вимірності [250, 251]. Така спрощена модель не враховує інших характеристик фракталів, наприклад, лакунарності [306], яка може впливати на критичну поведінку системи [307]. У контексті роботи треба радше розуміти, що розрахунки зроблено для об'єкта з певною фрактальною вимірністю, а не для конкретного фрактала.

3.2.1. Загальна схема розрахунків. Для розрахунку термодинамічних функцій системи бозонів використаємо таку просту схему. Кількість частинок N пов'язана з активністю z і температурою T співвідношенням:

$$N = N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{z^{-1} e^{\varepsilon_n/T} - 1},$$
(3.12)

де $N_0 = z/(1-z)$ — заповнення найнижчого енерґетичного рівня, ε_n — енерґетичний спектр одночастинкових збуджень (причому $\varepsilon_0 = 0$), а g_n — виродження *n*-го рівня. Величина N_0 є макроскопічною лише тоді, коли відбувається бозе-конденсація.

Рівняння (3.12) неявно задає z як функцію N і T. Далі активність можна використати для розрахунку енерґії

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n g_n}{z^{-1} e^{\varepsilon_n / T} - 1},$$
(3.13)

де враховано, що енергія найнижчого рівня дорівнює нулеві. Похідна енергії за температурою дасть теплоємність C = dE/dT.

3.2.2. Система осциляторів у *D* **вимірах.** Нехай задано систему *N* гармонічних осциляторів, що перебувають в ізотропній пастці. Одночастинковий енерґетичний спектр такої системи буде $\varepsilon_n = \hbar \omega n$. В одновимірному просторі виродження рівнів дорівнює $g_n = 1$, у двовимірному — $g_n = n + 1$, а в тривимірному —

 $g_n = (n+1)(n+1)/2.$ Тобто у випадку D вимірів його визначає біноміальний коефіцієнт

$$g_n = C_{n+D-1}^{D-1} = \frac{(n+D-1)!}{n!(D-1)!}.$$
(3.14)

Природним є таке узагальнення цього виразу для неперервних *D* (порівн. [308]):

$$g_n = \frac{\Gamma(n+D)}{\Gamma(D)\Gamma(n+1)}.$$
(3.15)

Отже, вираз (3.12) набуває вигляду

$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{z}{\Gamma(D)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+D)}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{e^{\hbar\omega n/T} - z}.$$
 (3.16)

Подібне співвідношення можна записати також для енергії (3.13).

3.2.3. Напівкласичний підхід. У напівкласичному підході нехтують дискретністю енерґетичних рівнів, а доступний для частинки у зовнішньому потенціалі простір визначають класичні точки повороту [296]. В осциляторній задачі енерґія частинки дорівнює $\varepsilon = p^2/2m + m\omega^2q^2/2$, де p — модуль її імпульсу, а q — модуль її координати.

Після нескладних перетворень отримаємо аналог (3.12):

$$N = N_0 + \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \operatorname{Li}_D(z), \qquad (3.17)$$

де ${\rm Li}_D(z)$ — полілогарифм (2.55).

Критичну температуру T_c (точку, в якій починається бозе-конденсація) визначають дві умови: $N_0 = 0$ і z = 1. Із (3.17) отримуємо

$$T_c = \hbar \omega \left[\frac{N}{\zeta(D)} \right]^{1/D}.$$
(3.18)

Зауважмо, що цей результат правильний лише для D > 1, а також, що ніяких ознак бозе-конденсації в гармонічній пастці при $D \le 1$ не простежується.

Конденсатна фракція дорівнює

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^D,\tag{3.19}$$

а енергія —

$$E = \hbar\omega D \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^{D+1} \operatorname{Li}_{D+1}(z).$$
(3.20)

При $T < T_c$ теплоємність має вигляд

$$C = D(D+1) \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D+1).$$
(3.21)

3.2.4. Точні результати: 1/N-розклади. Перед тим, як перейти до точних розрахунків за формулою (3.16), варто з'ясувати, якою є термодинамічна границя у цій задачі. Підказку дає формула (3.18): T_c залишається сталою, якщо $\omega N^{1/D} = \text{const.}$ Таку ж умову можна отримати з інших міркувань [14, 297]. Для спрощення розрахунків зручно використовувати $\hbar\omega$ як одиницю енергії й температури. Також позначимо

$$T_0 = \left[\frac{1}{\zeta(D)}\right]^{1/D}.$$
(3.22)

Критичну температуру системи з дискретним спектром визначають з умови

$$N = \frac{1}{\Gamma(D)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+D)}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{e^{n/T_c} - 1}, \qquad T_c = T_0 N^{1/D}.$$
 (3.23)

Скориставшись формулою Стірлінґа для Г-функції, отримаємо

$$\frac{\Gamma(n+D)}{\Gamma(n+1)} \approx n^{D-1} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \frac{D(D-1)}{2} + \dots \right\}.$$
 (3.24)

У границі великих N підсумовування в першому доданку можна зробити за формулою Ейлера–Маклорена:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{D-1}}{e^{n/T_c} - 1} = T_c^D \int_{1/T_c}^{\infty} \frac{x^{D-1} dx}{e^x - 1} + \frac{1}{2} T_c + \dots =$$
$$= T_c^D \int_0^{\infty} \frac{x^{D-1} dx}{e^x - 1} - T_c^D \int_0^{1/T_c} \frac{x^{D-1} dx}{e^x - 1} + \frac{1}{2} T_c + \dots =$$
$$= T_c^D \Gamma(D)\zeta(D) + T_c \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{D-1} + \dots\right] + o(T_c),$$

де крапки позначають малі поправки до другого та наступних доданків у формулі Ейлера–Маклорена.

Другий доданок у (3.24) дає такий внесок:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{D-2}}{e^{n/T_c} - 1} = T_c \sum_{n=1}^{\infty} n^{D-3} + o(T_c) = T_c \zeta(3 - D) + o(T_c).$$

Цей розклад є правильним при D < 2. Решту доданків у (3.24) можна розрахувати аналогічно, проте вони дають малі поправки й ними можна знехтувати.

Збираючи розраховані суми, запишемо розклад для критичної температур
иN-частинкової системи $T_c^{(N)}=T_0^{(N)}N^{1/D}$:

$$T_0^{(N)} = \left[\frac{1}{\zeta(D)}\right]^{1/D} \left\{1 - B_D N^{1/D-1} + o(N^{1/D-1})\right\}, \qquad (3.25)$$

де

$$B_D = \left(\frac{1}{\zeta(D)}\right)^{1/D} \frac{1}{2\Gamma(D+1)} \times \left[1 - \frac{2}{D-1} + D(D-1)\zeta(3-D) + \dots\right].$$
 (3.26)

3.2.5. Числові розрахунки. Числовий аналіз проведено для випадку килимка Серпінського, об'єкта із гаусдорфівською вимірністю $D = \ln 8 / \ln 3 = 1.892789 \dots$ Результати наведено на рис. 3.2.



Рис. 3.2. Конденсатна фракція (вгорі) та теплоємність (внизу) системи бозонів у просторі з дробовою вимірністю D = 1.892789..., що відповідає фракталові «килимок Серпінського». Суцільними лініями показано результати напівкласичного наближення (3.19) і (3.21). На врізці наведено окіл температури фазового переходу T_c . Одиниці вимірювання зафіксовано умовою $\hbar\omega N^{1/D} = 1$

3.3. Метод наближеного вторинного квантування для бозонів у пастці

У цьому підрозділі викладено метод, який є узагальненням підходу Боголюбова [10] на випадок слабковзаємодіючого *D*-вимірного бозе-газу у гармонічному зовнішньому потенціалі. З цією метою до гамільтоніана вихідної системи застосовано метод наближеного вторинного квантування на власних функціях *D*-вимірного гармонічного осцилятора. Унаслідок діагоналізації гамільтоніана отримано систему матричних рівнянь, що дало змогу врешті розрахувати конденсатну фракцію та енергію [309].

3.3.1. Діагоналізація гамільтоніана. Розглядатимемо *D*вимірну систему *N* слабковзаємодіючих бозонів масою *m* кожен, які перебувають у гармонічному зовнішньому потенціалі (пастці)

$$V(x_1, \dots, x_D) = \frac{m}{2} \left(\omega_1^2 x_1^2 + \dots + \omega_D^2 x_D^2 \right).$$
(3.27)

Потенціал міжатомної взаємодії має вигляд $U(x_1, \ldots, x_D) = g\delta(\mathbf{x})$, який відповідає борнівському наближенню в моделі твердих сфер, де вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_D)$, а g — параметр взаємодії.

Гамільтоніан задачі має вигляд

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}_{j}^{2}}{2m} + V(\mathbf{x}_{j}) \right] + \sum_{1 \le j < l \le N} U(\mathbf{x}_{j} - \mathbf{x}_{l}) = \hat{H}_{0} + \hat{U}.$$
 (3.28)

У цьому виразі $\hat{\mathbf{p}}_j$ — оператор імпульсу j-ї частинки, \mathbf{x}_j — її координата.

Вторинне квантування можна побудувати з використанням власних функцій $|\mathbf{n}\rangle = |n_1, \ldots, n_D\rangle$ оператора \hat{H}_0 , що відповідає звичайному *D*-вимірному гармонічному осциляторові. Для спрощення вимагатимемо, щоб відношення частот $\omega_1, \ldots, \omega_D$ не було раціональним числом — цим уникнемо випадкового виродження енерґетичних рівнів. Нехай $\hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger}, \hat{a}_{\mathbf{n}}$ — оператори породження—знищення стану $|\mathbf{n}\rangle$. Відповідні енерґетичні рівні $\varepsilon_{\mathbf{n}} = \hbar (\omega_1 n_1 + \ldots + \omega_D n_D)$. У такому зображенні гамільтоніан (3.28) дорівнює

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{n}} \varepsilon_n \hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{n}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{m}', \mathbf{n}, \mathbf{n}'} \langle \mathbf{mn} | U | \mathbf{m'n'} \rangle \hat{a}_{\mathbf{m}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{m}'} \hat{a}_{\mathbf{n}'}.$$
(3.29)

Оператори задовольняють стандартні бозонні комутаційні співвідношення:

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{n}'}, \hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger}\right] = \delta_{\mathbf{n}\mathbf{n}'}.$$
(3.30)

Застосуємо наближене вторинне квантування відповідно до [10]. Нехай N_0 — кількість частинок на найнижчому енерґетичному рівні ε_0 . Оскільки взаємодія слабка, то поведінка бозонів не буде суттєво відрізнятися від ідеальної системи. Тобто за низьких температур можна очікувати конденсації Бозе–Айнштайна, отже, N_0 — макроскопічна величина. Враховуючи, що вона є власним значенням оператора $\hat{a}_0^{\dagger}\hat{a}_0$, можемо вважати \hat{a}_0^{\dagger} і \hat{a}_0 *с*-числами: $\hat{a}_0^{\dagger}\hat{a}_0 = N_0$, $\hat{a}_0\hat{a}_0^{\dagger} = N_0 + 1 \simeq N_0$, $\hat{a}_0^{\dagger} \simeq \sqrt{N_0}$, $\hat{a}_0 \simeq \sqrt{N_0}$. З метою отримання загальніших фізичних результатів ми не покладатимемо $N_0 = N$. Зауважмо ще, що при D < 3 бозе-конденсація можлива лише в пастках [296].

Далі, за Боголюбовим, знехтуємо доданками, що мають більше ніж два оператори з ненульовим індексом. Оскільки власні функції $|\mathbf{n}\rangle$ дійсні, то матричні елементи у другому доданку (3.29) при різних комбінаціях операторів збігаються: $\langle \mathbf{m0} | U | \mathbf{n0} \rangle = \langle \mathbf{mn} | U | \mathbf{00} \rangle =$ $= \langle \mathbf{00} | U | \mathbf{mn} \rangle \equiv g c_{\mathbf{mn}}$, де

$$c_{\mathbf{mn}} = \left(\frac{m\omega}{2\pi^2\hbar}\right)^{D/2} \prod_{j=1}^{D} \frac{(-1)^{(3m_j + n_j)/2}}{\sqrt{m_j! n_j!}} \Gamma\left(\frac{m_j + n_j + 1}{2}\right), \quad (3.31)$$

якщо $m_j + n_j$ парне для всіх j і $c_{\mathbf{mn}} = 0$ в іншому випадку. Тут використано позначення $\omega = (\omega_1 \dots \omega_D)^{\frac{1}{D}}$.

Матричні елементи з трьома нулями дорівнюють

$$\langle \mathbf{n0} | U | \mathbf{00} \rangle \equiv g \, d_{\mathbf{n}} = g \left(\frac{m\omega}{2\pi^2 \hbar} \right)^{D/2} \prod_{j=1}^{D} \frac{(-1)^{n_j/2}}{\sqrt{n_j!}} \, \Gamma\left(\frac{n_j + 1}{2} \right), \quad (3.32)$$

якщо n_j парне для всіх j.

Гамільтоніан (3.29) набуває вигляду

$$\hat{H} = \text{const} + \sum_{\mathbf{n}} \varepsilon_{\mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{n}} + g N_0^{3/2} \sum_{\mathbf{n}} d_{\mathbf{n}} \left(\hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{n}} \right) + g \frac{N_0}{2} \sum_{\mathbf{m},\mathbf{n}} c_{\mathbf{mn}} \left(4 \hat{a}_{\mathbf{m}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{n}} + \hat{a}_{\mathbf{m}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{m}} \hat{a}_{\mathbf{n}} \right), \qquad (3.33)$$

де «const» позначає доданки неоператорного типу, які ми далі відкинемо. Для скорочення запису умову $\mathbf{n} \neq 0, \mathbf{m} \neq 0$ не виписано явно. Зауважмо появу лінійних доданків $\sim \hat{a}^{\dagger}, \sim \hat{a}$, яких не було у боголюбівському підході [10] через закон збереження імпульсу.

Нехай індекси *m*, *n* нумерують усі стани, які позначали векторні індекси **m**, **n**. Для отримання енерґетичного спектра гамільтоніана (3.33) застосуємо процедуру діагоналізації. Для цього зобразимо гамільтоніан (3.33) у такій матричній формі:

$$\hat{H} = \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \mathcal{E} \hat{\mathbf{a}} + 2\lambda \sqrt{N_0} \left(\hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \mathbf{d} + \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{d} \right) + \lambda \left(4\hat{\mathbf{a}}^{\dagger} C \hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} C \hat{\mathbf{a}}^{\dagger T} + \hat{\mathbf{a}}^T C \hat{\mathbf{a}} \right), \qquad (3.34)$$

де $\hat{\mathbf{a}}$ та \mathbf{d} — вектори безмежної розмірності:

$$\hat{\mathbf{a}}^{T} = (\hat{a}_{1}, \, \hat{a}_{2} \, \dots), \qquad \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} = \left(\hat{a}_{1}^{\dagger}, \, \hat{a}_{2}^{\dagger}, \, \dots\right), \quad \mathbf{d}^{T} = (d_{1}, \, d_{2}, \, \dots),$$

діагональна матриця

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \end{pmatrix},$$

а елементами матриці C є коефіцієнти c_{mn} . Також для скорочення запису введено позначення $g N_0/2 = \lambda$.

Щоб отримати гамільтоніан в діагональному вигляді

$$\hat{H} = \sum_{n} \epsilon_n \hat{\alpha}_n^{\dagger} \hat{\alpha}_n = \hat{\alpha}^{\dagger} \mathfrak{E} \hat{\alpha}, \qquad (3.35)$$

де \mathfrak{E} — діагональна матриця з елементами ϵ_n , можна застосувати узагальнення відомих u-v перетворень Боголюбова у такій формі:

$$\hat{\mathbf{a}} = X\hat{\boldsymbol{\alpha}} + Y\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\dagger T} + \mathbf{z}, \qquad \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\dagger}X + \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{T}Y + \mathbf{z}^{T}.$$
 (3.36)

Тут X та Y — квадратні матриці безмежної розмірності, вимагатимемо, щоби вони були ермітовими (симетричними й дійсними), а \mathbf{z} — вектор з дійсними компонентами. З комутаційних співвідношень (3.30) випливає, що X та Y задовольняють таку умову:

$$X^2 - Y^2 = I, (3.37)$$

де *I* — одинична матриця.

Легко показати, що лінійні доданки (вирази в перших дужках) у рівнянні (3.34) спричиняють лише зсув енерґетичних рівнів, не змінюючи відстані між ними. Тому далі братимемо до уваги лише квадратичні за $\hat{\mathbf{a}}$ й $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ доданки в гамільтоніані.

Щоб занулити лінійні за $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ члени в $\hat{H},$ вектор \mathbf{z} мусить дорівнювати

$$\mathbf{z} = -2\lambda\sqrt{N_0} \left(\mathcal{E} + 6\lambda C\right)^{-1} \mathbf{d}.$$
 (3.38)

Вимагаючи відсутності в гамільтоніані членів типу $\hat{\alpha}_m^{\dagger} \hat{\alpha}_n^{\dagger}$ і $\hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_n$, отримаємо такі матричні рівняння:

$$X\mathcal{E}Y + 4\lambda XCY + \lambda XCX + \lambda YCY = 0, \qquad (3.39)$$

$$Y\mathcal{E}X + 4\lambda YCX + \lambda XCX + \lambda YCY = 0. \tag{3.40}$$

Матриця & дорівнює

$$\mathfrak{E} = X\mathcal{E}X + Y\mathcal{E}Y + 4\lambda(XCX + YCY) + 2\lambda(XCY + YCX), \quad (3.41)$$

а її власні значення визначають шуканий енерґетичний спектр.

Якщо у системі вимкнути міжатомну взаємодію (g = 0), то розв'язки матимуть вигляд X = I, Y = 0. Тому розкладемо матриці X та Y в ряд за параметром λ :

$$X = I + 2\lambda^2 \chi^2 + \dots, \qquad Y = \lambda \upsilon + \lambda^2 \upsilon_1 + \dots$$
 (3.42)

Матриці χ, v, v_1 можна знайти з рівнянь (3.37)–(3.40):

$$v = 2\chi;$$
 $\chi = -\mathcal{E}^{-1}C/2;$ $v_1 = 4\mathcal{E}^{-1}C\mathcal{E}^{-1}C.$ (3.43)

З точністю до λ^2 отримаємо для матриці \mathfrak{E} :

$$\mathfrak{E} = \mathcal{E} + 4\lambda C + \frac{\lambda^2}{2} \left\{ \left(\mathcal{E}^{-1}C \right)^2 \mathcal{E} - 3C\mathcal{E}^{-1}C - 2\mathcal{E}^{-1}C^2 \right\}, \quad (3.44)$$

а енерґетичні рівні $\epsilon_n = \varepsilon_n + 4\lambda c_{nn} + \mathcal{O}(\lambda^2)$, як і треба очікувати з (3.33).

Систему рівнянь (3.37)–(3.40) у загальному випадку розв'язувати складно, оскільки вони є нелінійними щодо безмежних матриць. Їх можна трактувати як систему матричних рівнянь Ріккаті:

$$XAY + XBX + YBY = 0, (3.45)$$

$$YAX + XBX + YBY = 0, (3.46)$$

$$X^2 - Y^2 - I = 0, (3.47)$$

де $A = \mathcal{E} + 4\lambda C$, $B = \lambda C$. Чисельне (непертурбативне) розв'язування такої задачі потребує спеціальних підходів [310–312].

3.3.2. Результати розрахунків. При бозе-конденсації хімічний потенціал *µ* системи наближається до нуля, а повне число частинок визначається виразом:

$$N = N_0 + \sum_{n>0} \frac{1}{\exp(\epsilon_n/T) - 1},$$
(3.48)

де N_0 — заповнення найнижчого енерґетичного рівня. Тому, знаючи N та енерґетичний спектр $\epsilon_n = \epsilon_n(\lambda) = \epsilon_n(gN_0)$ з власних значень (3.44), можна розрахувати N_0 як функцію температури T. Отже, приходимо до самоузгодженої задачі, розв'язки якої дають змогу розрахувати енерґію

$$E = E_0 + \sum_{n>0} \frac{\epsilon_n}{\exp(\epsilon_n/T) - 1}$$
(3.49)

та інші термодинамічні функції.

На рис. 3.3 наведено температурні залежності конденсатної фракції N_0/N та енерґії $(E - E_0)/N$ для одновимірного газу. Для простоти розрахунки зроблено для модельної системи з такими параметрами: $\hbar = \omega = 1, m = 2\pi^2, N = 1000, g = 0.0002.$



Рис. 3.3. (Ліворуч) — конденсатна фракція N_0/N як функція температури T; (праворуч) — енергія як функція температури. Штрихова лінія відповідає взаємодіючій системі, суцільна — ідеальному бозе-газові

Оскільки $c_{nn} > 0$, то взаємодія зсуває енерґетичні рівні вгору, що ефективно відповідає легшим частинкам. Отже, температура бозе-конденсації зростає. Проте варто зазначити, що запропонований підхід не є коректним для вищих температур — у цьому випадку потрібно враховувати більше доданків у гамільтоніані (3.33).

3.4. Ефективний гамільтоніан і спектр елементарних збуджень бозонів у гармонічній пастці

Головна ідея цього підрозділу полягає в тому, щоби запропонувати математично просте наближення для врахування поправок вищих порядків у гамільтоніані бозонів у гармонічній пастці. Цього можна досягти, пов'язавши певним феноменологічним способом добутки операторів породження–знищення з відповідними числами заповнення [313]. Як показано в попередньому підрозділі, доданки, лінійні за операторами \hat{a}^{\dagger} чи \hat{a} , дають лише сталий зсув енерґетичних рівнів [309], тому їх можна не враховувати в подальшому аналізі. Відкидаючи також неоператорні доданки, отримаємо з (3.29) такий гамільтоніан:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{j}\neq 0} \varepsilon_{\mathbf{j}} \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{j}} + \frac{N_0}{2} \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k}\neq 0} c_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \left(4 \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{j}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \right) +$$

$$(3.50)$$

$$+ N_0^{1/2} \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{l}\neq0} c_{\mathbf{j}\mathbf{k}\mathbf{l}} \Big(\hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{l}} + \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{l}} \Big) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{l},\mathbf{m}\neq0} c_{\mathbf{j}\mathbf{k}\mathbf{l}\mathbf{m}} \, \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{l}} \hat{a}_{\mathbf{m}},$$

де, враховуючи дійсність власних функцій гармонічного осцилятора,

$$c_{\mathbf{jk}} = \langle \mathbf{j0} | U | \mathbf{k0} \rangle = \langle \mathbf{jk} | U | \mathbf{00} \rangle = \langle \mathbf{00} | U | \mathbf{jk} \rangle, \qquad (3.51)$$

$$c_{\mathbf{jkl}} = \langle \mathbf{jk} | U | \mathbf{l0} \rangle = \langle \mathbf{j0} | U | \mathbf{kl} \rangle, \qquad (3.52)$$

$$c_{\mathbf{jklm}} = \langle \mathbf{jk} | U | \mathbf{lm} \rangle. \tag{3.53}$$

3.4.1. Процедура діагоналізації. Щоб отримати з (3.50) квадратичну форму за операторами \hat{a}^{\dagger} , \hat{a} , придатну для подальшої діагоналізації, можна застосувати таку процедуру [313]. Число заповнення, що відповідає станові **ј**, дорівнює

$$n_{\mathbf{j}} = \langle \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{j}} \rangle. \tag{3.54}$$

На цій підставі пропонуємо замінити оператори в доданках, що містять добутки трьох і чотирьох $\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}$:

$$\hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \to n_{\mathbf{j}}^{x}, \qquad \hat{a}_{\mathbf{j}} \to n_{\mathbf{j}}^{1-x},$$

$$(3.55)$$

де параметр x визначатимемо згодом.

Після цієї процедури отримаємо задачу про діагоналізацію квадратичної форми загального вигляду

$$\sum_{j,k} \left(A_{jk} \hat{a}_j^{\dagger} \hat{a}_k + B_{jk} \hat{a}_j^{\dagger} \hat{a}_k^{\dagger} + B_{jk}^* \hat{a}_j \hat{a}_k \right), \qquad (3.56)$$

яку розглядали в деяких працях [309, 314-316].

Певного математичного спрощення вдається досягти, застосовуючи подальші наближення, а саме пов'язуючи оператори породження-знищення з різними індексами через деякий множник,

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{j}}, \qquad \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} = f_{\mathbf{k}\mathbf{j}}^{*}\hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger}.$$
 (3.57)

Беручи до уваги (3.55), отримаємо:

$$f_{\mathbf{kj}} = \left(\frac{n_{\mathbf{k}}}{n_{\mathbf{j}}}\right)^{1-x}, \qquad f_{\mathbf{kj}}^* = \left(\frac{n_{\mathbf{k}}}{n_{\mathbf{j}}}\right)^x.$$
 (3.58)

Оскільки числа заповнення $n_{\mathbf{j}}$ — дійсні і додатні, то $f_{\mathbf{kj}}^* = f_{\mathbf{kj}}$ і тому x = 1/2. Для спрощення далі застосовуватимемо також позначення:

$$h_{\mathbf{j}} = n_{\mathbf{j}}^x = \sqrt{n_{\mathbf{j}}}.\tag{3.59}$$

Триоператорні доданки замінимо так:

$$c_{\mathbf{jkl}} \left(\hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{l}} + \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{l}} \right) \rightarrow \frac{c_{\mathbf{jkl}}}{3} \left(\hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} h_{\mathbf{l}} + \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{l}} h_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{l}} h_{\mathbf{j}} \right) + \frac{c_{\mathbf{jkl}}}{3} \left(\hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{l}} + \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{l}} h_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{l}} h_{\mathbf{j}} \right), \quad (3.60)$$

а для чотириоператорних будемо мати, відповідно,

$$c_{\mathbf{jklm}} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{l}} \hat{a}_{\mathbf{m}} \rightarrow \frac{c_{\mathbf{jklm}}}{6} \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{l}} h_{\mathbf{m}} + \hat{a}_{\mathbf{l}} \hat{a}_{\mathbf{m}} h_{\mathbf{j}} h_{\mathbf{k}} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}} \hat{a}_{\mathbf{l}} h_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{m}} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{m}} h_{\mathbf{j}} h_{\mathbf{k}} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}} \hat{a}_{\mathbf{l}} h_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{m}} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{m}} h_{\mathbf{j}} h_{\mathbf{l}} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{l}} h_{\mathbf{j}} h_{\mathbf{m}} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}} \hat{a}_{\mathbf{m}} h_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{l}} \right).$$
(3.61)

Зважаючи на симетрію коефіцієнтів c_{jk} , c_{jkl} і c_{jklm} за всіма індексами, після нескладних перетворень, описаних вище, отримаємо ефективний гамільтоніан у вигляді [313]:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{\mathbf{j}\neq\mathbf{0}} \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{j}} \bigg[\varepsilon_{\mathbf{j}} + 2N_0 \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} f_{\mathbf{k}\mathbf{j}} c_{\mathbf{j}\mathbf{k}} + \frac{4}{3} \sqrt{N_0} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{l}\neq\mathbf{0}} f_{\mathbf{k}\mathbf{j}} c_{\mathbf{j}\mathbf{k}\mathbf{l}} h_\mathbf{l} + \frac{1}{3} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{l},\mathbf{m}\neq\mathbf{0}} f_{\mathbf{k}\mathbf{j}} c_{\mathbf{j}\mathbf{k}\mathbf{l}\mathbf{m}} h_\mathbf{l} h_\mathbf{m} \bigg] + \sum_{\mathbf{j}\neq\mathbf{0}} \left(\hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{j}} \hat{a}_{\mathbf{j}} \right) \bigg[\frac{N_0}{2} \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} f_{\mathbf{k}\mathbf{j}} c_{\mathbf{j}\mathbf{k}} + \frac{1}{3} \sqrt{N_0} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{l}\neq\mathbf{0}} f_{\mathbf{k}\mathbf{j}} c_{\mathbf{j}\mathbf{k}\mathbf{l}} h_\mathbf{l} + \frac{1}{12} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{l},\mathbf{m}\neq\mathbf{0}} f_{\mathbf{k}\mathbf{j}} c_{\mathbf{j}\mathbf{k}\mathbf{l}\mathbf{m}} h_\mathbf{l} h_\mathbf{m} \bigg]. \quad (3.62)$$

Запропоновані перетворення зручно проілюструвати за допомогою формалізму функцій Ґріна. Розгляньмо рівняння руху для двочасових температурних функцій Ґріна $\langle \langle \hat{a}_{\mathbf{q}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle \rangle$:

$$\begin{split} \hbar\omega \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{q}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle &= \frac{1}{2\pi} + \langle\!\langle [\hat{a}_{\mathbf{q}}, \hat{H}] | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} + \varepsilon_{q} \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{q}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle + N_{0} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} c_{\mathbf{q}\mathbf{k}} \left(2 \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{k}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle \right) + \\ &+ \sqrt{N_{0}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l} \neq 0} c_{\mathbf{q}\mathbf{k}\mathbf{l}} \left(2 \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{l}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{l}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle \right) + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m} \neq 0} c_{\mathbf{q}\mathbf{k}\mathbf{l}\mathbf{m}} \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{l}} \hat{a}_{\mathbf{m}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle. \end{split}$$

Використовуючи ефективний гамільтоніан (3.62), отримаємо натомість:

$$\begin{split} &\hbar\omega \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{q}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle = \frac{1}{2\pi} + \langle\!\langle [\hat{a}_{\mathbf{q}}, \hat{H}_{\mathrm{eff}}] | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} + \varepsilon_{q} \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{q}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle + N_{0} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} c_{\mathbf{q}\mathbf{k}} \left(2f_{\mathbf{k}\mathbf{q}} \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{q}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle + f_{\mathbf{k}\mathbf{q}} \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle \right) + \\ &+ \frac{2}{3} \sqrt{N_{0}} \sum_{\mathbf{k}, l \neq 0} c_{\mathbf{q}\mathbf{k}\mathbf{l}} \left(2f_{\mathbf{k}\mathbf{q}} h_{\mathbf{l}} \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{q}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle + f_{\mathbf{k}\mathbf{q}} h_{\mathbf{l}} \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle \right) + \\ &+ \frac{1}{12} \sum_{\mathbf{k}, l, \mathbf{m} \neq 0} c_{\mathbf{q}\mathbf{k}l\mathbf{m}} f_{\mathbf{k}\mathbf{q}} h_{\mathbf{l}} h_{\mathbf{m}} \left(\langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{q}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle \right). \end{split}$$

Отже, пропонована заміна операторів приводить до замкненої системи рівнянь руху (для $\langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{q}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle$ і $\langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle$) внаслідок того, що вдалося позбутися позадіагональних функцій

$$\sum_{\mathbf{k}\neq 0} c_{\mathbf{qk}} \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{k}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle \quad \rightarrow \quad \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{q}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle \sum_{\mathbf{k}\neq 0} c_{\mathbf{qk}} f_{\mathbf{kq}} \equiv G_0(\mathbf{q}) \langle\!\langle \hat{a}_{\mathbf{q}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\!\rangle,$$

а також розщепити функції вищих порядків

$$\sum_{\mathbf{k},l\neq 0} c_{\mathbf{qkl}} \langle \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{l}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle \rangle \rightarrow G_{1}(\mathbf{q}) \langle \langle \hat{a}_{\mathbf{q}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle + G_{2}(\mathbf{q}) \langle \langle \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle \quad \text{тощо},$$

де коефіцієнти $G_{1,2}(\mathbf{q})$ пов'язані з $f_{\mathbf{kq}}$ і $h_{\mathbf{l}}$. Перше з наведених співвідношень можна до певної міри пов'язати з так званою умовою збереження квантового числа [317]

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \langle \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle,$$

тоді як друге є наближенням типу середнього поля. Подібний підхід успішно застосовано для моделювання спектра сильновзаємодіючої бозе-системи у розділі 2, див. також [275]. Нижче ми використовуватимемо такі позначення:

$$\gamma_{\mathbf{j}} = \frac{N_0}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} f_{\mathbf{k}\mathbf{j}} c_{\mathbf{j}\mathbf{k}}; \qquad (3.63)$$

$$\eta_{\mathbf{j}} = \frac{1}{3}\sqrt{N_0} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l} \neq \mathbf{0}} f_{\mathbf{k}\mathbf{j}} c_{\mathbf{j}\mathbf{k}\mathbf{l}} h_{\mathbf{l}}; \qquad (3.64)$$

$$\varphi_{\mathbf{j}} = \frac{1}{12} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m} \neq \mathbf{0}} f_{\mathbf{k}\mathbf{j}} c_{\mathbf{j}\mathbf{k}\mathbf{l}\mathbf{m}} h_{\mathbf{l}} h_{\mathbf{m}}.$$
 (3.65)

Гамільтоніан відповідно запишемо у вигляді

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{\mathbf{j}\neq\mathbf{0}} \left\{ \left(\varepsilon_{\mathbf{j}} + 4Q_{\mathbf{j}} \right) \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{j}} + Q_{\mathbf{j}} \left(\hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{j}} \hat{a}_{\mathbf{j}} \right) \right\},$$
(3.66)

де

$$Q_{\mathbf{j}} = \gamma_{\mathbf{j}} + \eta_{\mathbf{j}} + \varphi_{\mathbf{j}}.\tag{3.67}$$

До цієї квадратичної форми далі застосуємо стандартн
е $u\!-\!v$ перетворення Боголюбова.

Оператори кожної моди (стану) виразимо так:

$$\hat{a}_{\mathbf{j}} = u_{\mathbf{j}}\hat{b}_{\mathbf{j}} + v_{\mathbf{j}}\hat{b}_{\mathbf{j}}^{\dagger}, \qquad \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} = u_{\mathbf{j}}^{*}\hat{b}_{\mathbf{j}}^{\dagger} + v_{\mathbf{j}}^{*}\hat{b}_{\mathbf{j}}.$$
(3.68)

З бозонного комутатора

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{j}}, \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger}\right] = 1, \qquad (3.69)$$

вимагаючи відсутності позадіагональних добутків $\hat{b}_{\mathbf{j}}\hat{b}_{\mathbf{j}}$ і $\hat{b}_{\mathbf{j}}^{\dagger}\hat{b}_{\mathbf{j}}^{\dagger}$ в остаточних виразах, отримаємо гамільтоніан у вигляді

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{\mathbf{j}\neq\mathbf{0}} E_{\mathbf{j}} \hat{b}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{j}}, \qquad (3.70)$$

де спектр елементарних збуджень

$$E_{\mathbf{j}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{j}}^2 + 8\varepsilon_{\mathbf{j}}Q_{\mathbf{j}} + 12Q_{\mathbf{j}}^2}.$$
(3.71)

Подальші розрахунки не можна провести без конкретизації функціональних залежностей f_{j} і h_{j} . З іншого боку, коефіцієнти c (матричні елементи оператора потенціальної енергії) мають вигляд:

$$c_{\mathbf{jk}} = c_{j_1k_1} \dots c_{j_Dk_D}, \qquad c_{\mathbf{jkl}} = c_{j_1k_1l_1} \dots c_{j_Dk_Dl_D},$$
$$c_{\mathbf{jklm}} = c_{j_1k_1l_1m_1} \dots c_{j_Dk_Dl_Dm_D} \qquad (3.72)$$

завдяки тому, що власні функції *D*-вимірного гармонічного осцилятора факторизуються на одновимірні.

3.4.2. Одновимірна задача. Як приклад розрахунків із запропонованим ефективним гамільтоніаном, розглянемо одновимірну задачу. Власні функції гармонічного осцилятора з масою m і частотою ω мають вигляд:

$$|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{j}j!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^{2}/2\hbar} H_{j}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right),$$
$$j = 0, 1, 2, \dots, \qquad (3.73)$$

де $H_j(\xi)$ — поліноми Ерміта.

Використовуючи природну в цій задачі одиницю довжини

$$a_{\rm ho} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$
 (3.74)

яку ще називають довжиною гармонічного осцилятора, для матричних елементів (3.51)–(3.53) отримаємо:

$$c_{jk} = \frac{g}{a_{\rm ho}} \frac{1}{\sqrt{2^{j+k}j!\,k!}} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} = e^{-2\xi^2} H_j(\xi) H_k(\xi) \, d\xi =$$
$$= \frac{g}{a_{\rm ho}} \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{(-1)^{(j-k)/2}}{\sqrt{j!\,k!}} \Gamma\left(\frac{j+k+1}{2}\right). \tag{3.75}$$

$$c_{jkl} = \frac{g}{a_{\rm ho}} \frac{1}{\sqrt{2^{j+k+l}j!\,k!\,l!}} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\xi^2} H_j(\xi) H_k(\xi) H_l(\xi) \, d\xi =$$
$$= \frac{g}{a_{\rm ho}} \frac{1}{\pi^2 \sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{j!\,k!\,l!}} \Gamma\left(\frac{j+k-l+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{j-k+l+1}{2}\right) \times \\\times \Gamma\left(\frac{k-j+l+1}{2}\right), \qquad (3.76)$$

$$c_{jklm} = \frac{g}{a_{ho}} \frac{1}{\sqrt{2^{j+k+l+m}j! \, k! \, l! \, m!}} \frac{1}{\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\xi^2} H_j(\xi) H_k(\xi) H_l(\xi) H_m(\xi) \, d\xi =$$

$$= \frac{g}{a_{\rm ho}} \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{(-1)^{(k-j+m-l)/2}}{\sqrt{j! \, k! \, l! \, m!}} \frac{\Gamma\left(\frac{j+k+l-m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{j-k+l+m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j-k+l-m+1}{2}\right)} \times {}_{3}F_{2}\left(\begin{array}{c} -j, \quad -l, \quad \frac{k-j+m-l+1}{2};\\ \frac{m-j-k-l+1}{2}, \quad \frac{k-j-l-m+1}{2}; \end{array}\right).$$
(3.77)

Інтеґрування цих виразів у замкненій формі можна виконати, як показано, наприклад, у працях [206, 318–320]. У наведених формулах $\Gamma(z)$ — це гамма-функція Ейлера, а $_{3}F_{2}(a_{1}, a_{2}, a_{3}; b_{1}, b_{2}; z)$ — гіпергеометрична функція. Потрібно також зазначити, що суми індексів у коефіцієнтах c (тобто j + k, j + k + l та j + k + l + m) мусять бути парними числами, інакше відповідні інтеґрали дорівнюють нулеві завдяки властивостям поліномів Ерміта.

Моделі множників f_{kj} і h_j використовують числа заповнення n_j :

$$f_{kj} = \sqrt{\frac{n_k}{n_j}}, \qquad h_j = \sqrt{n_j}. \tag{3.78}$$

Загалом, для гармонічних осциляторів

$$n_j = \frac{1}{z^{-1} e^{\hbar \omega j/T} - 1},\tag{3.79}$$

а активність *z* можна наближено вважати рівною одиниці за малих температур, що відповідають режимові бозе-конденсації.

У границі $\hbar\omega\gg T$ матимемо

$$n_j \simeq e^{-\hbar\omega j/T}.$$
(3.80)

Натомість більшість експериментів із холодними атомними газами відбуваються за протилежних умов, $\hbar\omega \ll T$ [204, 321]. Тобто

$$n_j \simeq \frac{T}{\hbar\omega j}.\tag{3.81}$$

На підставі цих простих виразів зробимо числові розрахунки. Залежності f_{kj} і h_j набудуть вигляду:

$$f_{kj} = \sqrt{\frac{j}{k}}, \qquad h_j = \sqrt{\frac{T}{\hbar\omega j}}.$$
 (3.82)

Це означає зокрема відсутність температурної залежності в γ_j , проте поправки η_j та φ_j будуть пропорційними відповідно до \sqrt{T} і T.

У стані бозе-конденсації заповнення найнижчого рівня N_0 наближається до загальної кількості частинок N, тому покладемо $N_0 = N$ у виразах для γ_i і η_i :

$$\gamma_j = \frac{gN}{a_{\rm ho}} \,\bar{\gamma}_j,\tag{3.83}$$

$$\eta_j = \frac{g}{a_{\rm ho}} \sqrt{\frac{NT}{\hbar\omega}} \,\bar{\eta}_j,\tag{3.84}$$

$$\varphi_j = \frac{g}{a_{\rm ho}} \frac{T}{\hbar\omega} \,\bar{\varphi}_j,\tag{3.85}$$

де $\bar{\gamma}_j$, $\bar{\eta}_j$ і $\bar{\varphi}_j$ — безрозмірні коефіцієнти, отримані внаслідок підстановки (3.75)–(3.77) з f_{kj} і h_j із (3.78) в одновимірні аналоги рівнянь (3.63)–(3.65).



Рис. 3.4. Енергії перших трьох збуджених рівнів E_1, E_2, E_3 (вертикальна вісь, в одиницях $\hbar \omega$) з рівняння (3.88) як функції параметрів x та y (3.87). Червона поверхня — E_1 ; зелена — E_2 ; синя — E_3 . Сірі площини відповідають енергіям невзаємодіючих осциляторів $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4$ [313]

Спектр (3.71) в одновимірному випадку з $\varepsilon_j = \hbar \omega j$ буде

$$E_j = \hbar\omega j \sqrt{1 + 8\frac{\gamma_j + \eta_j + \varphi_j}{\hbar\omega j} + 12\left(\frac{\gamma_j + \eta_j + \varphi_j}{\hbar\omega j}\right)^2}.$$
 (3.86)

Уводячи безрозмірні параметри

$$x = \frac{gN}{a_{\rm ho}} \frac{1}{\hbar\omega}, \qquad y = \frac{T}{\hbar\omega N},$$
 (3.87)

отримаємо

$$E_j = \hbar \omega j \sqrt{1 + 8 \frac{x \bar{\gamma}_j + x \sqrt{y} \bar{\eta}_j + y \bar{\varphi}_j}{j}} + 12 \left(\frac{x \bar{\gamma}_j + x \sqrt{y} \bar{\eta}_j + y \bar{\varphi}_j}{j}\right)^2.$$
(3.88)

Числові значення $\bar{\gamma}_j$, $\bar{\eta}_j$, і $\bar{\varphi}_j$ наведено в табл. 3.1. Залежності енергій перших трьох рівнів j = 1, 2, 3 від значень x та y показано на рис. 3.4.

Зауважмо, що коли x досягає значень понад 2, то виникає перетин енергій E_2 і E_3 . Подібна поведінка можлива для деяких інших рівнів, оскільки $\bar{\gamma}_j$ і $\bar{\eta}_j$ можуть бути як додатними, так і від'ємними.

j	$ar{\gamma}_j$	$ar\eta_j$	$ar{arphi}_j$
1	0.074987	0.020906	0.041237
2	0.049719	0.047775	0.073939
3	-0.067169	0.045062	0.087680
4	-0.044015	-0.022696	0.081353
5	0.041606	-0.044378	0.056191
6	0.030211	0.005830	0.036522
7	-0.023169	0.030029	0.039952
8	-0.018589	0.000509	0.049381
9	0.012314	-0.017838	0.045257
10	0.010780	-0.001987	0.035160
11	-0.006394	0.009961	0.033071
12	-0.006034	0.001827	0.036096
13	0.003288	-0.005385	0.035395
14	0.003311	-0.001339	0.031684
15	-0.001702	0.002872	0.029970
16	-0.001815	0.000955	0.030215
17	0.000926	-0.001549	0.029776
18	0.001035	-0.000784	0.028471
19	-0.000590	0.000883	0.027376
20	-0.000678	0.000844	0.026641
25	0.000843	-0.000360	0.023545
30	0.001743	-0.004430	0.023388
50	0.007818	0.000009	0.025675
100	-0.000160	0.000125	0.000214

Таблиця 3.1. Значення безрозмірних коефіцієнтів у рівняннях (3.83)–(3.85) залежно від номера рівня j

Зрозуміло, що правильність наближення зменшується для доданків, що містять η_j і ще більше у випадку φ_j . Це пов'язано з кількістю застосованих спрощень порівняно з доданками, які містять γ_j .

Більш послідовний підхід може полягати в отриманні виразів для $h_{\mathbf{j}}$ та $f_{\mathbf{kj}}$, що вимагає розв'язування варіаційної задачі типу Ґросса-Пітаєвського, однак вищого порядку. Так, оператор \hat{a} можна розбити на суму неоператорної частини h і малої поправки $\hat{\alpha}$, тобто $\hat{a} = h + \hat{\alpha}$. Відповідний аналіз спричиняє значні математичні ускладнення порівняно з наведеним підходом, отже, суперечить початковій ідеї ефективного спрощення проблеми діагоналізації.

3.4.3. Двосортова бозе-суміш. Слабковзаємодіючі бозесуміші в гармонічних пастках протягом останнього часу стали предметом активних експериментальних і теоретичних досліджень, зокрема, йдеться про суміші ізотопів іттербію [217, 322] або рубідію з деякими іншими елементами [322, 323], див. також [324].

Нехай система містить два сорти бозонів, *a* і *b*, які характеризуються параметрами взаємодії *g*_a, *g*_b і *g*_{ab}, причому останній відповідає міжсортовій взаємодії. Одночастинкові задачі будуть однаковими для кожного сорту:

$$\hat{H}_{1a} = \hat{H}_{0a} + U_a; \qquad \hat{H}_{1b} = \hat{H}_{0b} + U_b,$$
(3.89)

де невзаємодіючі гамільтоніани дорівнюють

$$\hat{H}_{0a} = \hat{K}_a + V_a; \qquad \hat{H}_{0b} = \hat{K}_b + V_b$$
(3.90)

із потенціалами пасток

$$V_{a,b}(\mathbf{x}) = \frac{m_{a,b}}{2} \left(\omega_1^2 x_1^2 + \ldots + \omega_D^2 x_D^2 \right).$$
(3.91)

Доданки взаємодії будуть

$$U_a = g_a \delta(\mathbf{x});$$
 $U_b = g_b \delta(\mathbf{x});$ $U_{ab} = g_{ab} \delta(\mathbf{x}).$ (3.92)

У формалізмі чисел заповнення отримаємо:

$$\hat{H} = \sum \hat{H}_{1a} + \sum \hat{H}_{1b} + \sum U_{ab} =$$

$$= \sum_{n_a} \varepsilon_{n_a} \hat{a}^{\dagger}_{n_a} \hat{a}_{n_a} + \sum_{n_a} \varepsilon_{n_b} \hat{b}^{\dagger}_{n_b} \hat{b}_{n_b} + U, \qquad (3.93)$$

де суми пробігають усі відповідні частинки, а U — повна потенціальна енерґія системи. Отже, нас особливо цікавитиме такий гамільтоніан:

$$\hat{H}' = \sum_{mn} \left(A_{mn} \hat{a}_m^{\dagger} \hat{a}_n + B_{mn} \hat{b}_m^{\dagger} \hat{b}_n + C_{mn} \hat{a}_m^{\dagger} \hat{a}_n^{\dagger} + C_{mn}^* \hat{a}_m \hat{a}_n + D_{mn} \hat{b}_m^{\dagger} \hat{b}_n^{\dagger} + D_{mn}^* \hat{b}_m \hat{b}_n + F_{mn} \hat{a}_m^{\dagger} \hat{b}_n^{\dagger} + F_{mn}^* \hat{a}_m \hat{b}_n + G_{mn} \hat{a}_m^{\dagger} \hat{b}_n + G_{mn}^* \hat{b}_m^{\dagger} \hat{b}_n + G_{mn}^* \hat{b}_m^{\dagger} \hat{a}_n \right).$$
(3.94)

Його отримуємо відкиданням три- і чотириоператорних доданків, як показано в попередньому пункті. Діагоналізований гамільтоніан

$$\hat{H}'' = \sum_{j} E_{j} \hat{\xi}_{j}^{\dagger} \hat{\xi}_{j} = \sum_{m} E_{m}^{(\alpha)} \hat{\alpha}_{m}^{\dagger} \hat{\alpha}_{m} + \sum_{n} E_{n}^{(\beta)} \hat{\beta}_{n}^{\dagger} \hat{\beta}_{n} \qquad (3.95)$$

можна отримати, безпосередньо застосовуючи процедуру діагоналізації, подібну до описаної у працях [309, 314–316]. Вона є досить складною технічно і потребує розв'язування нелінійних рівнянь для безмежних матриць; доброю альтернативою може бути пертурбативний розв'язок.

З іншого боку, можна застосувати описану вище процедуру й отримати гамільтоніан у вигляді

$$\hat{H}'' = \sum_{j} \hat{h}_j, \qquad (3.96)$$

де діагоналізація квадратичної форми у кожній моді \hat{h}_j просто зводиться до розв'язування біквадратного рівняння.

Для спрощеного одномодового виразу

$$\hat{h} = \varepsilon_a \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \varepsilon_b \hat{b}^{\dagger} \hat{b} +$$

$$+ \lambda_a (4 \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \hat{a}^{\dagger} \hat{a}^{\dagger} + \hat{a} \hat{a}) + \lambda_b (4 \hat{b}^{\dagger} \hat{b} + \hat{b}^{\dagger} \hat{b}^{\dagger} + \hat{b} \hat{b}) +$$

$$+ \lambda_{ab} (\hat{a}^{\dagger} \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^{\dagger}), \qquad (3.97)$$

де λ_a , λ_b та λ_{ab} пов'язані з параметрами взаємодії g_a , g_b та g_{ab} і також містять певні ефективні внески, пов'язані зі спрощеннями

вихідного гамільтоніана, можна отримати такі дві гілки спектра елементарних збуджень:

$$E^{(1,2)} = \sqrt{\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}},$$
(3.98)

де

$$p = (\varepsilon_a + 4\lambda_a)^2 + (\varepsilon_b + 4\lambda_b)^2 - \lambda_a^2 - \lambda_b^2 + 2\lambda_{ab}^2$$
(3.99)

i

$$q = (\varepsilon_a + 4\lambda_a)^2 (\varepsilon_a + 4\lambda_a)^2 - \lambda_a^2 (\varepsilon_b + 4\lambda_b)^2 - \lambda_b^2 (\varepsilon_a + 4\lambda_a)^2 - \lambda_a^2 \lambda_b^2 - 2\lambda_{ab}^2 (\varepsilon_a + 4\lambda_a) (\varepsilon_b + 4\lambda_b) - 2\lambda_a \lambda_b \lambda_{ab}^2 - \lambda_{ab}^4.$$
(3.100)

3.5. Одновимірні слабковзаємодіючі гармонічні осцилятори зі статистикою Джентіле

У цьому підрозділі розглядатимемо одновимірну систему гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле [93] (див. пункт 1.3.1 на стор. 25). Для неї є характерним особливе заповнення енерґетичних рівнів: кількість частинок на певному енерґетичному рівні обмежена деяким скінченним числом M, яке називають порядком статистики. Виявляється, зокрема, що можна показати зв'язок між властивостями такої системи та скінченної системи бозонів [158].

Аналіз проводитимемо за близької до нуля температури. Інтерес до системи гармонічних осциляторів пов'язаний зокрема з тим, що тепер досить активно вивчають властивості бозонів у зовнішньому полі (так звана гармонічна пастка) [9]. Використовуючи зв'язок функції розподілу частинок із термодинамічними величинами, дослідимо термодинаміку системи для ідеального випадку та при включенні слабкої міжчастинкової взаємодії. **3.5.1. Вихідні вирази.** Вираз для чисел заповнення у статистиці Джентіле має вигляд [33, 93, 99]:

$$f_M(\varepsilon_i, \mu) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_i - \mu)/T} - 1} - \frac{M + 1}{e^{(M+1)(\varepsilon_i - \mu)/T} - 1},$$
 (3.101)

де ε_i — енергія *i*-го рівня, μ — хімічний потенціал, T — температура системи. Як зазначено вище, на кожному рівні може перебувати не більше ніж M частинок. Легко показати, що в граничних випадках M = 1 та $M \to \infty$ він переходить у функції розподілу Фермі– Дірака $f_{\rm FD}(\varepsilon, \mu)$ та Бозе–Айнштайна $f_{\rm BE}(\varepsilon, \mu)$, відповідно:

$$f_M(\varepsilon,\mu) = \begin{cases} f_{\rm FD}(\varepsilon,\mu), & M = 1, \\ f_{\rm BE}(\varepsilon,\mu), & M \to \infty. \end{cases}$$
(3.102)

Цікавою є поведінка функції $f_M(\varepsilon,\mu)$ у границях $(\varepsilon-\mu)/T \to 0$ та $T \to 0$. У першому випадку одержуємо співвідношення:

$$\lim_{\substack{\varepsilon = -\mu \\ T \to 0}} f_M(\varepsilon, \mu) = \frac{M}{2}.$$
(3.103)

Для другої границі $T \to 0$ після нескладних перетворень маємо:

$$\lim_{T \to 0} f_M(\varepsilon_i, \mu) = \begin{cases} M, & \varepsilon < \mu_0, \\ 0, & \varepsilon > \mu_0. \end{cases}$$
(3.104)

Ця «сходинка» розмивається з підвищенням температури подібно до функції розподілу Фермі–Дірака. За низьких температур $(T \rightarrow 0)$ хімічний потенціал μ практично дорівнює енерґії μ_0 , яка відіграє роль аналога рівня Фермі.

Далі покажемо, як можна врахувати слабку взаємодію в системі осциляторів. Нехай потенціал взаємодії має вигляд

$$U(x) = g\delta(x), \qquad (3.105)$$

де x — координата частинки в одновимірному просторі, а g — параметр взаємодії; при g = 0 взаємодії немає.

Тоді запишемо вираз для гамільтоніана нашої системи:

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\hat{p}_j}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 x_j^2 \right] + \sum_{1 \le j < l \le N}^{N} U\left(x_j - x_l \right) = \hat{H}_0 + \hat{U}, \quad (3.106)$$

де \hat{p}_j — імпульс *j*-ї частинки, *m* — маса однієї частинки, ω — частота осциляцій, що відповідає зовнішньому потенціалу пастки. \hat{H}_0 — це гамільтоніан ідеальної системи за відсутності міжчастинкової взаємодії, а \hat{U} — оператор взаємодії.



Рис. 3.5. Енерґетичний спектр (3.107) при $\lambda=0.5$

Енергетичний спектр системи ε_n такий:

$$\varepsilon_n = \hbar \omega n + \lambda c_n, \qquad (3.107)$$

тут n — номер енерґетичного рівня, \hbar — стала Планка, λ — параметр взаємодії, пропорційний до g, а параметр c_n — функція складної структури [309] (див. рис. 3.5). Відраховуватимемо рівні від $\hbar\omega/2$ та покладемо $\hbar\omega$ рівним одиниці. Щоб знайти енерґетичний спектр системи, можна також скористатися звичайною стаціонарною теорією збурень.

Коефіцієнт c_n дорівнює

$$c_n = \frac{1}{n!} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{3.108}$$

За великих *n*, використовуючи формулу Стірлінґа, матимемо:

$$c_n \to \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad n \to \infty.$$
 (3.109)

Зазначмо, що для систем із дробовою статистикою можливий дещо інший підхід до розрахунку енерґетичного спектра на підставі квантовомеханічних міркувань [325]. Автори цієї праці розглядали гармонічний осцилятор як систему, гамільтоніан якої є квадратичною формою

$$\hat{H} = \frac{1}{4} \left[\hat{a}^{\dagger} \hat{b} + e^{-2\pi i/(M+1)} \hat{b} \hat{a}^{\dagger} + \hat{b}^{\dagger} \hat{a} + e^{2\pi i/(M+1)} \hat{a} \hat{b}^{\dagger} \right]$$

за операторами породження \hat{a}^{\dagger} і знищення \hat{b} , що задовольняють таке комутаційне співвідношення:

$$[\hat{b}, \hat{a}^{\dagger}]_{M} \equiv \hat{b}\hat{a}^{\dagger} - e^{2\pi i/(M+1)}\hat{a}^{\dagger}\hat{b} = 1.$$

У наведених формулах збережено позначення M для порядку статистики. Вирази для енерґетичних рівнів матимуть досить громіздкий вигляд, проте числові розрахунки, зроблені в нашій праці, нескладно провести і для іншої функціональної форми спектра.

3.5.2. Розрахунок термодинамічних функцій. Повну кількість частинок у системі задає співвідношення:

$$N = \sum_{n} f_M(\varepsilon_n, \mu), \qquad (3.110)$$

а енергія системи пов'язана з $f_M(\varepsilon_i, \mu)$ так:

$$E = \sum_{n} \varepsilon_{n} f_{M} \left(\varepsilon_{n}, \mu \right).$$
(3.111)

Із формули (3.110) можна отримати залежність хімічного потенціалу від температури T та від кількості частинок у системі N.
Розгляньмо низькотемпературну границю виразу (3.110) для системи невзаємодіючих гармонічних осциляторів, енерґетичний спектр якої $\varepsilon_n = n$. Щоб спростити аналіз, зручно перейти від дискретної суми до інтеґрування за формулою Ейлера–Маклорена

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) \approx \int_{a}^{b} f(t) dt + \frac{1}{2} [f(b) + f(a)] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \Big[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \Big], \quad (3.112)$$

де B_{2k} — числа Бернуллі; $B_2 = 1/6, B_4 = -1/30, \dots$

Унаслідок нескладних обчислень матимемо для N

$$N = M\mu - T \ln \frac{1 - e^{-\mu/T}}{1 - e^{-\mu(M+1)/T}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{-\mu/T} - 1} - \frac{M+1}{e^{-\mu(M+1)/T} - 1} \right) + \dots$$
(3.113)

Зокрема, у границі низьких температур буде такий зв'язок:

$$N = M\mu + M/2 + \dots,$$

а при T=0це наближення дає

$$\mu(T=0) = \frac{N}{M} - \frac{1}{2}.$$
(3.114)

Далі розгляньмо термодинамічні величини системи гармонічних осциляторів зі слабкою міжчастинковою взаємодією. Розрахуймо перші поправки за параметром взаємодії λ у виразах для термодинамічних функцій. З цією метою зобразимо хімічний потенціал у вигляді

$$\mu = \mu_{\rm id} + \Delta \mu, \tag{3.115}$$

де μ_{id} — хімічний потенціал системи невзаємодіючих осциляторів, а $\Delta \mu$ — поправка, спричинена взаємодією. Використовуючи розклади в ряд за величинами λ і $\Delta \mu$, отримаємо для кількості частинок

у першому порядку за поправками:

$$N = \sum_{n} \left[\frac{1}{e^{(n-\mu_{\rm id})/T} - 1} - \frac{M+1}{e^{(M+1)(n-\mu_{\rm id})/T} - 1} \right] + \sum_{n} (\Delta \mu - \lambda c_n) \frac{e^{(n-\mu_{\rm id})/T}}{T} \left[\frac{1}{(e^{(n-\mu_{\rm id})/T} - 1)^2} - \frac{(M+1)^2 e^{M(n-\mu_{\rm id})/T}}{(e^{(M+1)(n-\mu_{\rm id})/T} - 1)^2} \right], \quad (3.116)$$

тут вираз під першою сумою — не що інше, як функція розподілу з енерґією невзаємодіючих осциляторів $\varepsilon_n = n \ (\lambda = 0)$

$$f_M^{\rm id}(n,\mu) = \frac{1}{e^{(n-\mu)/T} - 1} - \frac{M+1}{e^{(M+1)(n-\mu)/T} - 1},$$
(3.117)

тому зрозуміло, що перший доданок у правій частині дорівнює N і відповідні величини знищуються. Зручно ввести позначення для множника у другій сумі:

$$h_M(n) = e^{(n-\mu_{\rm id})/T} \left[\frac{1}{\left(e^{(n-\mu_{\rm id})/T} - 1\right)^2} - \frac{(M+1)^2 e^{M(n-\mu_{\rm id})/T}}{\left(e^{(M+1)(n-\mu_{\rm id})/T} - 1\right)^2} \right].$$
(3.118)

Тоді поправка $\Delta \mu$ (у першому наближенні) матиме вигляд:

$$\Delta \mu = \lambda \frac{\sum_{n} c_n h_M(n)}{\sum_{n} h_M(n)}.$$
(3.119)

Для оцінки значення $\Delta \mu$ можна, взагалі кажучи, знехтувати другим доданком у виразі (3.118).

Енергія після аналогічних перетворень буде:

$$E = \sum_{n} n f_M^{id}(n,\mu) + \lambda \sum_{n} c_n \left[f_M^{id}(n,\mu) - \frac{n}{T} h_M(n) \right] + \dots =$$
$$= E_{id} + \lambda \sum_{n} c_n \left[f_M^{id}(n,\mu) - \frac{n}{T} h_M(n) \right] + \dots \qquad (3.120)$$

Розрахувавши енерґію, можна обчислити й інші термодинамічні функції, наприклад, теплоємність системи:

$$C = \frac{dE}{dT}.$$
(3.121)

3.5.3. Хімічний потенціал при T = 0. Проаналізуймо значення μ_0 хімічного потенціалу при T = 0. Розгляньмо два випадки, коли $\varepsilon_n > \mu_0$ та $\varepsilon_n < \mu_0$.

1) $\varepsilon_n > \mu_0$, дослідимо

$$f_M^{\mathrm{id}}(\varepsilon_n,\mu) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_n-\mu)/T}-1} - \frac{M+1}{e^{(M+1)(\varepsilon_n-\mu)/T}-1}.$$

Тоді показники експонент у знаменнику дорівнюватимуть $+\infty$, а сам вираз — нулеві.

Нагадаймо, що енерґетичний рівень ε_n модельної системи дорівнює $\varepsilon_n = n + \lambda c_n$, тож можемо зробити висновок, що при *n*, які задовольнятимуть умову $n + \lambda c_n > \mu_0$, вираз під сумою у формулі (3.110) дорівнюватиме нулеві.

2) $\varepsilon_n < \mu_0$, за такої умови експоненти матимуть показник $-\infty$, тож вони дорівнюватимуть нулеві, отже:

$$f_M^{\rm id}(\varepsilon_n,\mu) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_n-\mu)/T}-1} - \frac{M+1}{e^{(M+1)(\varepsilon_n-\mu)/T}-1} = -1 - \frac{M+1}{-1} = M.$$
(3.122)

Тобто для всіх значень n, таких, що $n + \lambda c_n \leq \mu_0$, вираз під сумою у формулі (3.110) дорівнює M.

Можна показати [160], що без увімкнення взаємодії ($\lambda = 0$) хімічний потенціал μ_0 (аналог рівня Фермі) матиме вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = \frac{N}{M} - 1 + x, \quad \left\{ \frac{N}{M} \right\} = 0, \\ \mu_0 = \left[\frac{N}{M} \right] + x, \quad \left\{ \frac{N}{M} \right\} \neq 0, \end{array} \right.$$

де x < 1, дужки [...] позначають цілу, а $\{...\}$ — дробову частини числа, відповідно. Якщо загальна кількість частинок у системі N

ділиться на M без остачі, тобто $\{N/M\} = 0$, то числовий аналіз поведінки μ при $T \to 0$ дає для ідеальної системи x = 1/2. Цікаво, що таке значення x точно отримуємо, якщо в розрахунках замінити суму на інтеґрал і застосувати формулу Ейлера–Маклорена.

3.5.4. Результати числових розрахунків. Використовуючи зв'язок функції розподілу з повним числом частинок у системі *N* (див. формулу (3.110)), ми розрахували хімічний потенціал μ як функцію температури.

У нашій задачі немає такого параметра, як об'єм, тому звичну умову термодинамічної границі N/V = const застосувати не можна. Для системи *D*-вимірних осциляторів роль термодинамічної границі виконує умова $N^{1/D} = \text{const.}$ Її можна отримати на підставі різних міркувань [158, 297]. Тому такі величини, як енергія чи температура, в одновимірному випадку зручно нормувати з множником 1/N.



Рис. 3.6. Температурні залежності хімічного потенціалу μ для $\lambda=0.1$ (квадратики), $\lambda=0.5$ (пунктирна лінія) та $\lambda=0$ (суцільна лінія)

Числові розрахунки для N = 100, M = 20 і $\lambda = 0.1$ та 0.5 наведено на рис. 3.6–3.9. Суцільною лінією показано залежність для ідеального газу ($\lambda = 0$). Дані, за якими побудовано графіки, подано у табл. 3.2. Як бачимо, з графіка важко якісно судити про відмінності в поведінці μ з температурою для випадків ідеального газу та наявності взаємодії. Графічно відмінність між двома кривими натомість можна побачити лише на масштабованій залежності (рис. 3.7), де включено лише низькотемпературну область. Проте й тут чітко не видно особливості, яка простежується за табличними даними.

T/N	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 0.5$
0.000	4.50000	4.54604	4.73021
0.005	4.49995	4.54619	4.73107
0.007	4.49981	4.54626	4.73184
0.008	4.49969	4.54622	4.73217
0.009	4.49951	4.54609	4.73240
0.010	4.49927	4.54585	4.73249
0.012	4.49830	4.54502	4.73225
0.015	4.49596	4.54285	4.73083
0.020	4.48962	4.53677	4.72588
0.050	4.38206	4.43113	4.62871
0.100	3.99287	4.04626	4.26267
0.200	2.60124	2.66193	2.90680
0.300	0.32952	0.39042	0.63345
0.310	0.04907	0.10968	0.35133
0.320	-0.24153	-0.18126	0.05886
0.350	-1.17535	-1.11633	-0.88161
0.400	-2.94485	-2.88847	-2.66472
0.500	-7.32411	-7.27408	-7.07579
1.000	-46.3626	-46.3354	-46.2273

Таблиця 3.2. Залежність хімічного потенціалу µ від температури

З таблиці 3.2 бачимо, що для ідеального газу ми маємо спадну функцію, а для значень $\lambda = 0.1, 0.5$ — незначне відхилення, а саме зростання μ для малих температур (виділено жирним шрифтом у таблиці).

112



Рис. 3.7. Температурні залежності хімічного потенціалу μ для $\lambda = 0.1$ (штрихова лінія), $\lambda = 0.5$ (пунктирна лінія) та $\lambda = 0$ (суцільна лінія) в області низьких температур



Рис. 3.8. Температурна залежність повної енергії системи слабковзаємодіючих одновимірних гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле (кружечками позначено взаємодіючу систему, суцільною лінією — ідеальну систему)

Т	$E_{\rm id}$	$E(\lambda = 0.1)$	$C_{\rm id}$	$C(\lambda=0.1)$	$C(\lambda=0.5)$
0.0	200.00	208.71	0.0000	0.0000	0.0000
0.05	200.00	208.72	0.0098	0.0102	0.0119
0.1	200.01	208.73	0.3469	0.3520	0.3733
0.2	200.09	208.82	1.2850	1.2925	1.3229
0.3	200.25	208.98	1.9756	1.9859	2.0289
0.4	200.49	209.21	2.6349	2.6497	2.7133
0.5	200.78	209.51	3.2907	3.3111	3.4018
0.7	201.57	210.30	4.5732	4.6059	4.7516
0.8	202.06	210.79	5.1859	5.2234	5.3885
0.9	202.60	211.34	5.7723	5.8132	5.9907
1.0	203.21	211.95	6.3298	6.3728	6.5565
2.0	211.82	220.60	10.549	10.583	10.717
5.0	257.00	265.87	19.363	19.391	19.506
10.0	387.24	396.27	32.452	32.486	32.619
20.0	822.87	832.01	53.586	53.565	53.450
30.0	1439.7	1448.4	68.949	68.875	68.568
40.0	2186.8	2194.6	79.795	79.701	79.330
50.0	3023.4	3030.2	86.983	86.890	86.528
100.0			97.266	97.234	97.105

Таблиця 3.3. Залежність енергії й теплоємності від температури

Розрахувавши енерґію, можемо отримати графік температурної поведінки теплоємності, для цього беремо похідну у виразі (3.121) різницевим методом, тобто

$$C = \frac{dE}{dT} \approx \frac{E(T + \Delta T) - E(T)}{\Delta T}$$

за малого значення ΔT . Аналітично робити ці розрахунки немає сенсу, оскільки залежність хімічного потенціалу μ від температури можна одержати лише чисельно. Результати наведено на рис. 3.9.



Рис. 3.9. Температурна поведінка теплоємності в системі слабковзаємодіючих одновимірних гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле

За великих температур графік функції теплоємності слабковзаємодіючих осциляторів має асимптоту C/N = 1, для прикладу, D-вимірний ідеальний газ має асимптоту D/2 (в одновимірному випадку матимемо 1/2). Така особливість виникає внаслідок різної кількості ступенів вільності в системах; система гармонічних осциляторів має вдвічі більше ступенів вільності, ніж система ідеального газу, тож для системи D-вимірних гармонічних осциляторів при $T \to \infty$ теплоємність системи C/N дорівнює D. Енергія системи за великих температур є лінійною функцією температури.

3.6. Висновки до розділу 3

Підхід наближеного вторинного квантування Боголюбова узагальнено на випадок слабковзаємодіючого бозе-газу в гармонічній пастці. Внаслідок цього задачу про діагоналізацію гамільтоніана зведено до системи нелінійних матричних рівнянь типу Ріккаті. Розв'язки для модельної одновимірної системи отримано пертурбативним способом та чисельно розраховано температурні залежності конденсатної фракції й енерґії.

Запропоновано спосіб отримання ефективного гамільтоніана бозе-системи в гармонічній пастці. Наближення, що полягає в заміні недіагональних добутків операторів породження–знищення, $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{j}} \rightarrow f_{\mathbf{k}\mathbf{j}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{j}}$ тощо, дало змогу діагоналізувати гамільтоніан простими математичними способами та розрахувати спектр елементарних збуджень. При цьому множники $f_{\mathbf{k}\mathbf{j}}$ пов'язано з числами заповнення. Числові розрахунки продемонстровано на прикладі одновимірної системи. Також показано, як пропонований підхід можна застосувати до двосортових бозонних сумішей.

Досліджено термодинамічні функції ідеального бозе-газу в гармонічному потенціалі у загальному випадку D-вимірного простору із дробовим 1 < D < 2, що може відповідати пористому середовищу. Встановлено поведінку теплоємності в околі критичної температури, зокрема вивчено вплив дискретності спектра та скінченності кількості частинок у системі. Числові розрахунки проведено для вимірності $D = \ln 8 / \ln 3$, яка відповідає так званому килимкові Сєрпінського.

Розглянуто систему одновимірних слабковзаємодіючих гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле. Аналітично проаналізовано низькотемпературну границю хімічного потенціалу та поправки, пов'язані зі взаємодією. Чисельно розраховано температурні залежності хімічного потенціалу, енерґії та теплоємності ідеальної системи та системи зі слабкою взаємодією. Виявлено незначне зростання температурної залежності хімічного потенціалу в області низьких температур за наявності слабкої міжчастинкової взаємодії. Відповідні результати можна застосовувати під час аналізу фізичних систем, для яких дробова статистика Джентіле виникає ефективно, зокрема внаслідок скінченної кількості частинок [158] або врахування міжчастинкових взаємодій.

Розділ 4

СТАТИСТИКА ПОЛІХРОНАКОСА З КОМПЛЕКСНИМ ПАРАМЕТРОМ

"What a strange world we live in... Said Alice to the Queen of hearts."

(Lewis Carroll, «Alice in Wonderland», 1865)

4.1. Вступ

Протягом останніх десятиліть запропоновано чимало модифікацій звичайних статистик Бозе–Айнштайна та Фермі–Дірака. Квантовомеханічні узагальнення включають еніони [31, 326, 327], а також так звані *q*-деформовані алґебри [101, 328]. Підходи, що ґрунтуються на статистичній механіці, представлено, наприклад, у працях [113, 114, 329].

У цьому розділі розглянуто узагальнення статистики Поліхронакоса [98, 179, 181]. Параметр статистики вважатимемо комплексним числом [182]. Узагалі кажучи, комплекснозначні фізичні величини можуть ефективно виникати в різних фізичних системах, насамперед у зв'язку з дисипативними процесами, що найкраще демонструє комплексний показник заломлення у класичній фізиці. Поняття комплексного хімічного потенціалу виникло у квантовій хромодинаміці [330, 331] і згодом було застосоване також в деяких інших областях [332, 333], зокрема для вивчення розпаду бозе-конденсату [334]. Поняття комплексної температури використовували в працях [335, 336], а деякі аспекти застосування комплекснозначної енергії відображено в [337, 338]. За допомогою комплексного зовнішнього потенціалу можна описувати взаємодію лазерного світла з атомами, які рухаються в кристалі [339, 340], також комплексні потенціали використовують для аналізу порушення *PT*-симетрії [341]. У праці [342] використано уявні доданки в дискретному нелінійному рівнянні Шрьодінґера для опису бозе-конденсату в оптичних ґратках з витіканням. Автори праці [343], вивчаючи деформований газ p, q-бозонів, запропонували пов'язати комплексні параметри деформації з міжчастинковими взаємодіями. Переважно саме параметри дробових статистик, пов'язаних із q-деформованими алґебрами, покладають комплексними [145, 177, 344]. За певних умов такі статистики [153] безпосередньо пов'язані зі статистикою Джентіле [93], в якій числа заповнення обмежені деяким скінченним числом d > 1. Отже, розмаїття реальних систем, для яких використовують комплекснозначні фізичні величини, дає підстави розвивати й інші підходи.

Дозволивши параметрові статистики вийти за межі дійсних значень, ми суттєво збагатимо розмаїття явищ у таких системах. Ця задача має не лише чисто академічний чи математичний інтерес. За її допомогою для опису складних фізичних процесів можна застосовувати досить прості математичні методи. Зокрема, передбачені кілька фазових переходів можуть бути математичною моделлю каскадних фазових переходів [345–347] або двох фазових переходів у рідкому гелії [348].

У наступних підрозділах буде розраховано термодинамічні функції системи *D*-вимірних ізотропних гармонічних осциляторів, які підкоряються статистиці Поліхронакоса з комплексним параметром, та докладно проаналізовано особливості їх поведінки в різних температурних областях.

4.2. Вихідні вирази

У статистиці Поліхронакоса [98, 179] вираз для чисел заповнення j-го рівня з енерґією ε_i має вигляд

$$n_j = \frac{1}{z^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - \alpha},\tag{4.1}$$

де *z* — активність, а *T* — температура системи. Варто зауважити, що таку ж форму для чисел заповнення *a priori* запропонували Ачар'я та Нараяна Свамі для опису еніонів [176].

З метою узагальнення параметр статистики $\alpha = e^{i\pi\nu} = \alpha' + i\alpha''$ вважатимемо комплексним числом. Зміна в діапазоні значень $\nu = 0 \div 1$ забезпечує гладкий перехід між бозонною та ферміонною границями, водночас даючи змогу уникнути точки $\alpha = 0$, що відповідає класичній статистиці Больцмана, див. рис. 4.1 [182].



Рис. 4.1. Ілюстрація значень комплексного параметра статистики

Зрозуміло, що загальнішим був би підхід, у якому комплексний параметр статистики має вигляд $\alpha = a + ib$ (порівн. [145, 344]), проте саме одиничне коло є зручним способом зображення фізично цікавих границь $\alpha \to \pm 1$, які відповідають статистикам Бозе– Айнштайна і Фермі–Дірака. До того ж, це скорочує кількість параметрів до одного ν замість пари a, b.

Особливу увагу в подальших розрахунках приділено «бозонній» стороні значень параметра статистики $0 \leq \nu \leq 1/2$ та зокрема границі $\nu \to 0$, яка відповідає статистиці Бозе–Айнштайна.

Розрахунки зроблено за такою простою схемою. Вираз для кількості частинок N має вигляд

$$N = \sum_{j} g_j n_j = \sum_{j} \frac{g_j}{z^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - \alpha},$$
(4.2)

де підсумовування відбувається за всіма енерґетичними рівнями, а g_j — виродження *j*-го рівня. Спектр елементарних збуджень ε_j вважатимемо дійсним. Оскільки N — також дійсне число (Im N = 0), то активність z = z' + iz'' мусить бути комплексною.

Енергію задано виразом

$$E = \sum_{j} \varepsilon_{j} g_{j} n_{j} = \sum_{j} \frac{\varepsilon_{j} g_{j}}{z^{-1} e^{\varepsilon_{j}/T} - \alpha} = \mathcal{E} + i\Gamma, \qquad (4.3)$$

у якому z = z(N, T) визначається як розв'язок рівняння (4.2). Потрібно зауважити, що лише такі значення параметра статистики ν та інших величин мають фізичний сенс, коли виконується умова $\Gamma \ll \mathcal{E}$. В іншому випадку система стає суттєво нерівноважною, що робить увесь подальший розгляд некоректним.

Дійсна й уявна частини теплоємності дорівнюють:

$$C = \frac{d\mathcal{E}}{dT}, \qquad \Theta = \frac{d\Gamma}{dT}.$$
 (4.4)

Особливості температурної поведінки фізичних величин яскравіше виражені на кривих питомої теплоємності, тому саме на неї в подальшому звернемо особливу увагу.

4.3. Бозонна і ферміонна границі

Бозонну границю визначає умова $\nu \to 0$, отже, $\alpha = e^{i\pi\nu} = 1 + i\pi\nu + \ldots$. Нехай для визначеності спектр ε_j є дійсним і хімічний потенціал $\mu = \mu' + i\mu''$, де $\mu', \mu'' \in \mathbb{R}$. У границях, які ми розглядаємо, уявна частина μ'' — мала величина. Зауважмо, що перетворення у цьому підрозділі зручніше проводити з хімічним потенціалом μ замість активності $z = e^{\mu/T}$.

Розкладаючи вираз (4.2) для кількості частинок N у ряд за малими величинами ν та μ'' , у першому порядку отримаємо:

$$N = \sum_{j} \frac{g_{j}}{e^{(\varepsilon_{j} - \mu')/T} - 1} + i \sum_{j} \frac{g_{j}}{\left(e^{(\varepsilon_{j} - \mu')/T} - 1\right)^{2}} \left(\pi\nu + \frac{\mu''}{T}e^{(\varepsilon_{j} - \mu')/T}\right).$$

Відкидаючи уявну частину, легко зауважити, що μ' — це ніщо інше як хімічний потенціал системи N бозонів зі спектром ε_j , тобто $\mu' = \mu_{\text{Bose}}$, де

$$N = \sum_{j} \frac{g_j}{e^{(\varepsilon_j - \mu_{\text{Bose}})/T} - 1}.$$
(4.5)

Після нескладних розрахунків з умови ${\rm Im}\,N=0$ отримаємо такий вираз для μ'' :

$$\mu'' = -\pi\nu T \frac{p}{N+p}, \qquad \text{ge} \quad p = \sum_{j} \frac{g_j}{\left(e^{(\varepsilon_j - \mu')/T} - 1\right)^2}.$$
 (4.6)

Якщо ж спектр є комплексним, $\varepsilon_j = \epsilon_j + i\gamma_j$, а частинки підкоряються звичайній статистиці Бозе, то малу дисипативну поправку γ_j можна отримати подібним до викладеного вище способом. Справді, прирівнюючи енерґію бозе-системи з комплексним спектром до енерґії системи, яка підкоряється визначеній дробовій статистиці, для достатньо великих значень j отримаємо:

$$\gamma_j \sim \pi \nu T.$$
 (4.7)

Ферміонну границю визначає умова $\nu \to 1$. Нехай $\nu = 1 - \bar{\nu}$, тобто $\alpha = e^{i\pi(1-\bar{\nu})} = -1 + i\pi\bar{\nu} + \dots$. Подальші перетворення збігаються зі зробленими у бозонній границі з точністю до заміни ν на $\bar{\nu}$. Крім того, зрозуміло, що замість хімічного потенціалу бозесистеми дійсна частина μ' природно визначатиметься його аналогом для фермі-розподілу, $\mu' = \mu_{\text{Fermi}}$, де

$$N = \sum_{j} \frac{g_j}{e^{(\varepsilon_j - \mu_{\text{Fermi}})/T} + 1},$$
(4.8)

а знак в означенні величини р, відповідно, зміниться:

$$p = \sum_{j} \frac{g_j}{\left(e^{(\varepsilon_j - \mu')/T} + 1\right)^2}.$$

Варто зауважити, що перехід між бозонною і ферміонною границями можна робити і в нижній півплощині Іт $\alpha < 0$, при цьому ферміонна границя буде $\nu \rightarrow -1$. Для визначеності, однак, в подальшому розгляді без втрати загальності обмежуватимемося проаналізованим випадком Іт $\alpha \ge 0$.

4.4. Система двовимірних осциляторів із нефіксованою кількістю частинок

Якщо кількість частинок у системі не зберігається, що, наприклад, відповідає елементарним збудженням, які можуть вільно породжуватися або знищуватися, то хімічний потенціал дорівнює нулеві. Для комплекснозначного хімічного потенціалу змодифікуємо цю умову так: $\text{Re} \mu = 0$. Таке спрощення дозволяє відразу застосувати схему розрахунків, описану вище. Насамперед, з рівняння, яке пов'язує кількість частинок N і хімічний потенціал $\mu = i\mu''$, маємо

$$N = \operatorname{Re} N + i \operatorname{Im} N = \sum_{j} \frac{g_{j}}{e^{(\varepsilon_{j} - i\mu'')/T} - (\cos \pi\nu + i \sin \pi\nu)}, \quad (4.9)$$

де параметр статистики записано явно у вигляді $\alpha = \alpha' + i\alpha'' = \cos \pi \nu + i \sin \pi \nu$. Вимагаючи, як зазначено раніше, Im N = 0, отримаємо співвідношення між уявною частиною хімічного потенціалу μ'' і параметром статистики ν .

Поки що всі вирази отримано в загальному вигляді, без конкретизації фізичної системи. Далі результати обчислень буде продемонстровано на прикладі двовимірної системи ізотропних гармонічних осциляторів. Без втрати загальності в цій задачі можна знехтувати дискретністю енерґетичних рівнів і замінити підсумовування за рівнями на інтеґрування, ввівши відповідну густину станів. Для аналізованої системи густина станів $g(\varepsilon) \propto \varepsilon$. Після нескладних перетворень з умови Im N = 0 отримаємо:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\left(e^{\varepsilon/T} \sin \frac{\mu''}{T} + \sin \pi\nu\right) \varepsilon \, d\varepsilon}{e^{2\varepsilon/T} + 2e^{\varepsilon/T} \left(\sin \pi\nu \sin \frac{\mu''}{T} - \cos \pi\nu \cos \frac{\mu''}{T}\right) + 1} = 0.$$
(4.10)



Рис. 4.2. Графічне розв'язування рівняння (4.10). Величину Im N (вертикальна вісь) зображено як функцію sin $\frac{\mu''}{T}$ (горизонтальна вісь) для $\nu = 0.02$. Два розв'язки відповідають двом різним можливим знакам величини соз $\frac{\mu''}{T}$ залежно від значення температури T

Розв'язки цього рівняння зручно зобразити графічно, як показано на рис. 4.2.

Дійсна частина \mathcal{E} енерґії $E = \mathcal{E} + i\Gamma$, яку в загальному вигляді визначає формула (4.3), у нашому випадку стає такою:

$$\mathcal{E} = \int_{0}^{\infty} \frac{\left(e^{\varepsilon/T} \cos \frac{\mu''}{T} - \cos \pi\nu\right) \varepsilon^2 d\varepsilon}{e^{2\varepsilon/T} + 2e^{\varepsilon/T} \left(\sin \pi\nu \sin \frac{\mu''}{T} - \cos \pi\nu \cos \frac{\mu''}{T}\right) + 1}.$$
 (4.11)

Для спрощення за одиницю енерґії і температури взято $\hbar\omega$, де ω — частота осцилятора, а наступним кроком покладено $\hbar\omega = 1$.

Температурну залежність енерґії \mathcal{E} зображено на рис. 4.3 у порівнянні з фермі- та бозе-системами з тими самими значеннями параметрів.

Як бачимо з рис. 4.3, розрахована енергія модельної двовимірної системи ізотропних гармонічних осциляторів дає підстави стверджувати, що запропонована статистика Поліхронакоса з комплексним параметром забезпечує плавну інтерполяцію між статистиками Бозе–Айнштайна і Фермі–Дірака.



Рис. 4.3. Енергія (4.11) (вертикальна вісь) як функція температури T (горизонтальна вісь) для різних значень параметра статистики ν . Відповідність ліній (згори донизу): бозе-система (чорна штрихова, тонка); $\nu = 0.2$ (синя суцільна, товста); $\nu = 0.5$ (чорна суцільна, товста); $\nu = 0.7$ (зелена штрихова, товста); фермісистема (червона суцільна, тонка). Одиниці умовні

4.5. Одновимірні гармонічні осцилятори

У цьому підрозділі розглядатимемо систему одновимірних гармонічних осциляторів з частотою ω . Виродження *j*-го рівня дорівнює одиниці, $g_j = 1$. Спектр елементарних збуджень буде

$$\varepsilon_j = \hbar \omega j, \qquad j = 0, 1, 2, 3, \dots$$
(4.12)

Як і раніше, величину $\hbar \omega$ використовуватимемо також як одиницю температури.

Одновимірні системи осциляторів можна фізично реалізувати у сильно анізотропних гармонічних пастках [14] або в оптичних ґратках [349, 350].

З метою отримання результатів ув аналітичному вигляді замінимо в рівняннях (4.2)–(4.3) суму на інтеґрал, увівши функцію густини станів $g(\varepsilon): \sum_{j} \longrightarrow \int d\varepsilon \, g(\varepsilon)$. Точність такого наближення зростає, якщо кількість частинок у системі є великою і якщо тем-

пература значно перевищує відстань між рівнями, $T \gg \hbar \omega$. Чисельне порівняння результатів, отриманих з використанням точного підсумовування, з результатами інтеґрування свідчить про дуже добре узгодження вже при кількості частинок N = 1000.

Для одновимірної системи гармонічних осциляторів густина станів $g(\varepsilon) = \text{const}$, тому вона еквівалентна, наприклад, до системи вільних частинок в зовнішньому одновимірному гармонічному потенціалі (у напівкласичному наближенні [296]) або до двовимірної системи вільних частинок у скриньці.

В аналізованому випадку $g(\varepsilon)=1/\hbar\omega.$ Кількість частинок тоді дорівнює

$$N = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{0}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{z^{-1}e^{\varepsilon/T} - \alpha} = -\frac{T}{\hbar\omega\alpha} \ln(1 - z\alpha), \qquad (4.13)$$

що для активності дає

$$z = \frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{-\hbar\omega N\alpha/T} \right). \tag{4.14}$$

Енергія дорівнює

$$E = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{0}^{\infty} \frac{\varepsilon d\varepsilon}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - \alpha} = \frac{T^2}{\hbar\omega\alpha} \operatorname{Li}_2(z\alpha) =$$
$$= \frac{T^2}{\hbar\omega\alpha} \operatorname{Li}_2\left(1 - e^{-\hbar\omega N\alpha/T}\right), \qquad (4.15)$$

де $Li_s(x)$ — полілогарифм (2.55):

$$\operatorname{Li}_s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^s}.$$

Це означення у вигляді ряду правильне для всіх комплексних s і комплексних x з |x| < 1; для інших значень x використовують певне аналітичне продовження.

За допомогою очевидної властивості

$$\frac{d\operatorname{Li}_s(x)}{dx} = \frac{1}{x}\operatorname{Li}_{s-1}(x)$$

і беручи до уваги, що $\mathrm{Li}_1(x) = -\ln(1-x),$ для теплоємності отримаємо

$$C + i\Theta = \frac{dE}{dT} =$$
$$= N \frac{\hbar\omega N\alpha/T}{1 - e^{\hbar\omega N\alpha/T}} + N \frac{2T}{\hbar\omega N\alpha} \operatorname{Li}_2\left(1 - e^{-\hbar\omega N\alpha/T}\right). \quad (4.16)$$

Як і треба очікувати для екстенсивних величин, $E \propto N$ і $C \propto N$, що не є очевидним із виразів (4.15) та (4.16). Щоб забезпечити екстенсивність енерґії та теплоємності, потрібно взяти до уваги термодинамічну границю. Відповідна умова для системи одновимірних гармонічних осциляторів має вигляд $\omega N = \text{const.}$ Такий результат можна отримати різними способами [14, 158], див. також [297]. Найпростіша інтерпретація цієї умови для термодинамічної границі така. Для *D*-вимірної системи в зовнішньому гармонічному потенціалі з частотою ω класичні точки повороту утримують частинки в межах певної характерної довжини $r \propto 1/\omega$. Щоб забезпечити сталість середньої концентрації N/r^D , потрібно забезпечити виконання умови $N\omega^D = \text{const.}$

Тому в аналізованому випадку

$$\frac{T}{\hbar\omega} = \frac{NT}{\hbar\omega N} = \frac{NT}{\text{const}}$$
 i $\frac{\hbar\omega N}{T} = \frac{\text{const}}{T}$,

отже, умови $E \propto N$ та $C \propto N$ виконано.

4.5.1. Критична температура і поведінка термодинамічних функцій. На розрахованих температурних залежностях енергії та теплоємності виявлено розриви. Вони пов'язані з $\text{Li}_2(z\alpha)$, якщо уявна частина арґумента функції змінює знак.

Справді, при обчисленні інтеґрала натрапляємо на синґулярність виду «1/0», коли:

$$e^{\varepsilon/T} - z\alpha = 0 = e^{\varepsilon/T} - 1 + e^{-\hbar\omega N\alpha/T} =$$
$$= e^{\varepsilon/T} - 1 + e^{-\frac{\hbar\omega N}{T}\alpha'} \left(\cos\frac{\hbar\omega N}{T}\alpha'' - i\sin\frac{\hbar\omega N}{T}\alpha''\right), \qquad (4.17)$$

якщо

$$\frac{\hbar\omega N}{T}\alpha'' = \pi n \quad \text{ta} \quad \cos\pi n = (-1)^n < 0.$$

Отже, множину значень критичних температур визначають так:

$$T_c^{(k)} = \hbar\omega N \frac{\alpha''}{(2k+1)\pi}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$
(4.18)

див. рис. 4.4. Для спрощення в подальших перетвореннях індекси «(k)» не буде виписано.



Рис. 4.4. Дійсна частина питомої теплоємності C/N при $\nu = 0.25$. Вертикальними лініями показано критичні температури. Крайня права лінія відповідає k = 0

Щоб оцінити внесок синґулярності в термодинамічні функції, можна застосувати таку процедуру. Нехай синґулярність відповідає такій енерґії ε_0 , для якої виконується умова $e^{\varepsilon_0/T} = z\alpha$. Тоді енергію Е можна подати у вигляді:

$$E = \frac{z}{\hbar\omega} \int_{0}^{\infty} \frac{\varepsilon \, d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - z\alpha} = \frac{z}{\hbar\omega} \int_{0}^{\varepsilon_0 - \Delta} \frac{\varepsilon \, d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - z\alpha} + \frac{z}{\hbar\omega} \int_{\varepsilon_0 + \Delta}^{\infty} \frac{\varepsilon \, d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - z\alpha} + \frac{z}{\hbar\omega} \int_{\varepsilon_0 - \Delta}^{\infty} \frac{\varepsilon \, d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - z\alpha} + \frac{z}{\hbar\omega} \int_{\varepsilon_0 - \Delta}^{\infty} \frac{\varepsilon \, d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - e^{\varepsilon_0/T}},$$
(4.19)

де Δ — мале додатне число. У границі $\Delta \rightarrow 0$ перші два доданки дають гладку функцію температури E_{smooth} , а останній доданок достатньо виписати лише в першому порядку за ($\varepsilon - \varepsilon_0$):

$$E = E_{\text{smooth}}(T) + \frac{zT}{\hbar\omega} e^{-\varepsilon_0/T} \int_{\varepsilon_0 - \Delta}^{\varepsilon_0 + \Delta} \frac{\varepsilon \, d\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0}.$$
 (4.20)

Значення ε_0 дійсне в точці $T = T_c$, але стає комплексним, щойно *T* відхиляється від критичної точки. Знак уявної частини визначає вираз sin $\frac{N}{T}\alpha''$, див. (4.17). Отже, знаменник ($\varepsilon - \varepsilon_0$) потрібно замінити на ($\varepsilon - \varepsilon_0 \mp i\eta$) для $T = T_c \pm 0$, де $\eta \to +0$. За допомогою формул Сохоцького [351, р. 75–76] отримаємо

$$\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0 \mp i\eta} = v. p. \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0} \pm i\pi \delta(\varepsilon - \varepsilon_0), \qquad (4.21)$$

де «v. p.» позначає головне значення, а $\delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$ — це дельта-функція Дірака.

Отже, в околі критичних точок енергія дорівнюватиме:

$$E(T_c \pm 0) = E_{\text{smooth}}(T_c) \pm i\pi \frac{T_c}{\hbar\omega} z(T_c) \varepsilon_0 e^{-\varepsilon_0/T_c}.$$
(4.22)

Для дійсної частини матимемо

$$\Delta \mathcal{E}(T_c) = \mathcal{E}(T_c + 0) - \mathcal{E}(T_c - 0) = -2\pi \frac{T_c}{\hbar\omega} z''(T_c)\varepsilon_0 e^{-\varepsilon_0/T_c}.$$
 (4.23)

Беручи до уваги означення критичної температури (4.18) і записуючи параметр статистики у вигляді $\alpha = \cos \pi \nu + i \sin \pi \nu$, після простих перетворень отримаємо такі вирази для стрибків значень дійсних частин енергії і теплоємності:

$$\frac{1}{N} \frac{\Delta \mathcal{E}(T_c)}{\hbar \omega N} = \frac{2 \sin^3 \pi \nu}{(2k+1)^2 \pi} \ln \left(1 + e^{-(2k+1)\pi \cot \pi \nu} \right), \qquad (4.24)$$

$$\frac{1}{N}\Delta C(T_c) = \frac{4\sin^2 \pi\nu}{(2k+1)} \ln\left(1 + e^{-(2k+1)\pi \cot \pi\nu}\right).$$
(4.25)

У бозонній границі $\nu \to 0$ матимемо:

$$\frac{1}{N} \frac{\Delta \mathcal{E}(T_c)}{\hbar \omega N} = \frac{2\pi^2 \nu^3}{(2k+1)^2} e^{-(2k+1)/\nu}, \qquad (4.26)$$

$$\frac{1}{N}\Delta C(T_c) = \frac{4\pi^2 \nu^2}{(2k+1)} e^{-(2k+1)/\nu}.$$
(4.27)

Ці стрибки — скінченні для всіх $\nu > 0$, однак найвиразнішим є той, якому відповідає k = 0, а наступні значення дуже швидко спадають при k > 0, як показано в табл. 4.1. Варто зазначити, що для $\nu \gtrsim 0.35$ осциляції функції C(T) в низькотемпературній області зростають і спричиняють появу нефізичних результатів з від'ємною теплоємністю.

Низько- і високотемпературні границі теплоємності легко розрахувати, використовуючи розклади у формулах (4.15) або (4.16). Спостережувана на рис. 4.5 та 4.6 в низькотемпературній області лінійна залежність $C \propto T$ є такою:

$$\frac{C+i\Theta}{N} = \frac{2T}{\hbar\omega N\alpha} \operatorname{Li}_2(1) = \frac{T}{\hbar\omega N} \frac{\pi^2}{3} (\cos \pi\nu - i\sin \pi\nu), \qquad (4.28)$$

де використано зв'язок між полілогарифмом і дзета-функцією Рімана: $\text{Li}_2(1) = \zeta(2) = \pi^2/6.$

Різне прямування до асимптотичного значення $C/N \to 1$ (знизу при $\nu < 1/4$ і згори при $\nu > 1/4$) визначається такою граничною поведінкою питомої теплоємності:

$$\frac{C+i\Theta}{N} = 1 - \frac{\cos 2\pi\nu}{36} \left(\frac{\hbar\omega N}{T}\right)^2 - i\frac{\sin 2\pi\nu}{36} \left(\frac{\hbar\omega N}{T}\right)^2, \quad (4.29)$$

Таблиця 4.1. Стрибки питомої теплоємності C/N за критичних температур. Зрозуміло, що значення 10^{-14} і менші не можна спостерігати експериментально, однак вони наведені з метою демонстрації дуже швидкого спадання ΔC , коли $\nu \to 0$ і/або k зростає

ν	k = 0	k = 1	k = 2
0.01	1.5×10^{-46}	7.5×10^{-134}	6.6×10^{-221}
0.05	2.4×10^{-10}	4.7×10^{-28}	1.7×10^{-45}
0.10	2.4×10^{-5}	3.2×10^{-14}	7.7×10^{-23}
0.15	1.7×10^{-3}	2.6×10^{-9}	6.7×10^{-15}
0.20	1.8×10^{-2}	$1.1 imes 10^{-6}$	1.1×10^{-10}
0.25	8.5×10^{-2}	5.4×10^{-5}	6.0×10^{-8}
0.30	2.5×10^{-1}	9.3×10^{-4}	5.8×10^{-6}
0.34	$5.0 imes 10^{-1}$	$5.7 imes 10^{-3}$	$1.1 imes 10^{-4}$

де залежний від температури доданок у дійсній частині змінює знак у точці $\nu = 1/4$, а уявна частина залишається від'ємною для всіх ν , як показано на рис. 4.5 і 4.6.

При $\nu=1/4$ відхилення дійсної частини теплоємності від асимптотичного значення має вигляд:

$$\frac{C}{N} = 1 - \frac{1}{1200} \left(\frac{\hbar\omega N}{T}\right)^4.$$
(4.30)

4.5.2. Можливості експериментальної перевірки. Оскільки вже енерґія як функція температури має розриви, то можна стверджувати, що точки $T_c^{(k)}$ відповідають фазовим переходам першого роду. Цікаво оцінити принципову можливість експериментальної перевірки цього ефекту.

Як уже згадувалося в підрозділах 4.1 і 4.2, комплексний параметр статистики можна отримати внаслідок зовнішнього впливу на



Рис. 4.5. Дійсна частина питомої теплоємності C/N для різних значень параметра статистики: $\nu = 0.0$ (чорна, ——); 0.1 (червона, ——); 0.2 (зелена, …); 0.25 (синя, ——); 0.3 (бузкова, -- --); 0.34 блакитна, — …—)

систему лазером або через ефективне врахування дисипації елементарних збуджень. Це означає, що варто очікувати малих значень ν , тобто $\nu \ll 1$. Отже, лише найбільша критична температура, що відповідає k = 0,

$$T_c = \hbar\omega N \frac{\sin \pi\nu}{\pi},\tag{4.31}$$

виявляється релевантною для аналізу, оскільки стрибки теплоємності стають експериментально неспостережуваними, якщо k > 1 (див. табл. 4.1).

Відтворюючи сталу Больцмана $k_{\rm B},$ щоб отримати значення T_c в кельвінах,

$$k_{\rm B}T_c = \hbar\omega N \frac{\sin \pi\nu}{\pi},\tag{4.32}$$

можна таким способом зробити просту оцінку. Припустимо, що точність експериментального вимірювання теплоємності становить



Рис. 4.6. Уявна частина питомої теплоємності C/Nдля різних значень параметра статистики: $\nu=0.0$ (чорна, ——); 0.1 (червона, ——–); 0.2 (зелена, …); 0.25 (синя, —––); 0.3 (бузкова, --–-); 0.34 (блакитна, – …–)

0.01%, що відповідає $\nu = 0.10 \div 0.15$ (див. табл. 4.1). Нехай також частота зовнішнього гармонічного потенціалу-пастки дорівнює $\omega = 1 \,\mathrm{k}\Gamma \mathrm{I}_{\mathrm{I}}$, а кількість частинок $N = 10^4$. За таких параметрів отримаємо критичну температуру $T_c \sim 10^{-5} \,\mathrm{K}$. Це означає, що відповідний ефект можна буде спостерігати експериментально, щойно вдається приготувати систему, яку можна було б описувати статистикою Поліхронакоса з комплексним параметром.

Цікаво з наведених вище результатів отримати певні оцінки щодо однорідної двовимірної системи. Для частинок з нульовим спіном і масою m на площі S густину станів легко розрахувати у вигляді $g(\varepsilon) = mS/2\pi\hbar^2 = \text{const}$, що можна порівняти з результатом для осциляторів $g(\varepsilon) = 1/\hbar\omega$ і, як наслідок, встановити таку ефективну відповідність:

$$\omega N = \frac{2\pi\hbar}{m^2} \frac{mN}{S}.$$
(4.33)

Отриманий вираз для критичної температури, як виявляється, має структуру, подібну до температури переходу Костерліца–Таулеса

 $T_{\rm KT}$ [352]:

$$k_{\rm B}T_c = \frac{\pi\hbar^2}{2m^2}\rho_2 \frac{2\sin\pi\nu}{\pi} \quad \text{порівняно з} \quad k_{\rm B}T_{\rm KT} = \frac{\pi\hbar^2}{2m^2}\rho_{2\rm s}, \quad (4.34)$$

де $\rho_2 = mN/S$ — двовимірна густина, а ρ_{2s} — густина надплинної компоненти. Враховуючи значення двовимірної концентрації $\simeq 8 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-2}$, яке відповідає нормальній густині об'ємного гелію 0.146 г/см³ [353], для критичної температури матимемо $T_c \leq 1$ К. Треба зазначити, що ця оцінка правильна для ідеального однорідного бозе-газу з параметрами рідкого гелію-4. Щоб застосувати описаний підхід до реалістичних планарних систем, потрібно керуватися аналізом фононів, тобто збуджень з лінійною дисперсією. Це означає необхідність вивчення двовимірної осциляторної задачі, а в ширшому сенсі — й задачі в просторі з довільною вимірністю D > 1, про що детальніше йтиметься у наступних підрозділах.

4.6. Термодинамічні функції *D*-вимірних осциляторів

У цьому і наступних підрозділах розглянемо систему D-вимірних ізотропних гармонічних осциляторів, які підкоряються статистиці Поліхронакоса з комплексним параметром. Як і раніше, активність z визначається кількістю частинок N з рівняння

$$N = \sum_{j} g_{j} n_{j} = \sum_{j} \frac{g_{j}}{z^{-1} e^{\varepsilon_{j}/T} - \alpha},$$
(4.35)

де g_j — виродження *j*-го рівня. Отриману залежність z = z(T, N) можна далі використати для розрахунку енерґії

$$\mathcal{E}(T,N) = \sum_{j} g_j \varepsilon_j n_j = \sum_{j} \frac{g_j \varepsilon_j}{z^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - \alpha}$$
(4.36)

та інших термодинамічних функцій.

Для системи ізотропних гармонічних осциляторів у *D*-вимірному просторі виродження *j*-го енерґетичного рівня буде [308, 354]:

$$\varepsilon_j = \hbar \omega j, \qquad g_j = \frac{\Gamma(j+D)}{\Gamma(j+1)\Gamma(D)}, \qquad j = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (4.37)$$

де вимірність простору D з міркувань загальності може бути дробовою. Зокрема, як уже зазначалося, дробові вимірності застосовують для моделювання пористих середовищ [250, 251, 355], вони також ефективно виникають внаслідок урахування зовнішніх потенціалів [296].

Щоб спростити аналіз, зручно замінити в рівняннях (4.35) і (4.36) підсумовування на інтеґрування, ввівши густину станів $g(\varepsilon)$:

$$N = \int_{0}^{\infty} \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - \alpha},$$
(4.38)

$$\mathcal{E} = \int_{0}^{\infty} \frac{\varepsilon g(\varepsilon) \, d\varepsilon}{z^{-1} e^{\varepsilon/T} - \alpha}.$$
(4.39)

Чисельне розв'язування рівнянь (4.35)–(4.36) та (4.38)–(4.39) показує, що така заміна приводить лише до незначного температурного зсуву певних характерних точок термодинамічних функцій, а якісно поведінка не залежить від того, який підхід використано дискретний чи неперервний.

Переходячи від сум до інтеґралів, важливо виокремити внесок від основного стану $\varepsilon = 0$ в явному вигляді, подібно до стандартного аналізу явища бозе-конденсації у тривимірному ідеальному газі. Справді, для вимірності простору D > 1 функція густини станів

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(D)} \frac{1}{(\hbar\omega)^D} \varepsilon^{D-1}$$
(4.40)

зникає в точці $\varepsilon=0,$ тоді як відповідний доданок у сумі — скінченний:

$$N_0 = \frac{z}{1 - z\alpha}.\tag{4.41}$$

Варто зауважити, що така процедура не була потрібна в одновимірному випадку, розглянутому в попередніх підрозділах, див. також [183]. Інтеґрали в (4.38)–(4.39) можна виразити за допомогою полілогарифма:

$$N = \frac{z}{1 - z\alpha} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \operatorname{Li}_D(z\alpha), \qquad (4.42)$$

$$\mathcal{E} = \hbar \omega \frac{D}{\alpha} \left(\frac{T}{\hbar \omega} \right)^{D+1} \operatorname{Li}_{D+1}(z\alpha).$$
(4.43)

Диференціюючи енерґію за температурою, отримаємо теплоємність у такому вигляді:

$$\mathcal{C} = \frac{d\mathcal{E}}{dT} = \tag{4.44}$$

$$= \frac{D}{\alpha} \left(\frac{1}{\hbar\omega}\right)^D \left[\frac{\partial z/\partial T}{z} T^{D+1} \operatorname{Li}_D(z\alpha) + (D+1)T^D \operatorname{Li}_{D+1}(z\alpha)\right].$$

Це рівняння можна переписати через N та E:

$$\mathcal{C} = \frac{\partial z}{\partial T} \frac{DT}{z} (N - N_0) + (D + 1) \frac{\mathcal{E}}{T}, \qquad (4.45)$$

звідки бачимо, що критична поведінка може бути пов'язана з температурними залежностями як енерґії, так і активності.

Як і раніше, використовуватимемо такі позначення для дійсної й уявної частин енерґії та теплоємності:

$$\mathcal{E} = E + i\Gamma; \qquad \mathcal{C} = C + i\Theta, \tag{4.46}$$

а також матимемо на увазі умову, що визначає термодинамічну границю для системи *D*-вимірних гармонічних осциляторів [14, 158]:

$$\omega^D N = \text{const},\tag{4.47}$$

з якої відразу бачимо, що вирази (4.43), (4.44) визначають екстенсивні величини $\mathcal{E}, \mathcal{C} \propto N$, як і треба було очікувати.

4.6.1. Високотемпературна границя. Оскільки при $T \rightarrow \infty$ значення N_0 нехтовно мале, а арґумент полілогарифма в (4.42) задовольняє умову $|z\alpha| \ll 1$, то

$$N = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \operatorname{Li}_D(z\alpha) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \left(z\alpha + \frac{(z\alpha)^2}{2^D} + \dots\right). \quad (4.48)$$

Беручи до уваги лише перший доданок ряду, можна легко отримати високотемпературну поведінку активності у такому вигляді:

$$z = N \left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^D. \tag{4.49}$$

Ця величина — дійсна. Для з'ясування першого незникаючого внеску від уявної частини активності потрібно взяти два доданки в ряді для полілогарифма в (4.48), що дасть у результаті:

$$z'' = -\frac{\alpha''}{2^D} \left[N \left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^D \right]^2.$$
(4.50)

З високотемпературної поведінки активності (4.49) відразу отримаємо енерґію та теплоємність у цій границі:

$$\mathcal{E} = E = DNT, \qquad \mathcal{C} = C = DN. \tag{4.51}$$

Це — класичні вирази для енергії і теплоємності системи *D*-вимірних гармонічних осциляторів. Як і треба було очікувати, у класичній границі немає впливу статистики.

Першу поправку до класичних результатів можна знайти, обертаючи ряд для полілогарифма (див. формулу (4.59) у наступних підрозділах). Унаслідок цього отримаємо

$$z\alpha = N\alpha \left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^D - 2^{-D} \left[N\alpha \left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^D\right]^2 + \dots$$
(4.52)

Підставивши цей вираз у (4.43), після нескладних перетворень матимемо:

$$\mathcal{E} = DNT \left[1 - 2^{-D-1} \alpha \frac{N(\hbar\omega)^D}{T^D} + \dots \right].$$
(4.53)

Цей ряд є аналогом віріального розкладу. Порівнюючи його з відповідними результатами для деяких інших типів дробової статистики [33], можна встановити наближену відповідність між аналізованим узагальненням статистики Поліхронакоса та, наприклад, еніонами або статистикою Голдейна-Ву (див. також наступний розділ). Наприклад, беручи до уваги лише дійсну частину енергії E двовимірної системи і зіставляючи її з результатами для ідеального еніонного газу, другий віріальний коефіцієнт якого $b_2 = -(1 - 4\eta + 2\eta^2)/4$, де $\eta \in [0; 1]$ — параметр статистики, або з газом Голдейна-Ву з $b_2 = (2g - 1)/4$, де g — параметр статистики, бачимо такі співвідношення:

$$\alpha' = \cos \pi \nu \simeq 1 - \frac{(\pi \nu)^2}{2} \propto \begin{cases} 1 - 4\eta + 2\eta^2 & \text{для еніонів} \\ 1 - 2g & \text{для статистики Голдейна-Ву.} \end{cases}$$

Подібні зв'язки можна встановити і для деяких інших дробових статистик, включно з кількома моделями *q*-осциляторів [343, 356–358].

4.6.2. Область фазового переходу. Критична температура. Як продемонстрував одновимірний випадок, в аналізованій задачі відбуваються фазові переходи, пов'язані з комплекснозначністю параметра статистики [183]. З математичного погляду це пов'язано з синґулярністю в знаменнику інтеґралів у формулах (4.38), (4.39), якщо уявна частина величини *z*α дорівнює нулеві:

$$\operatorname{Im}(z\alpha) = 0. \tag{4.54}$$

Для температур достатньо віддалених від абсолютного нуля внесок основного стану стає несуттєвим і рівняння (4.42) зводиться до вигляду:

$$N\alpha = \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \operatorname{Li}_D(z\alpha). \tag{4.55}$$

Його розв'язки можна формально записати через обернену до полілогарифма функцію invLi_D(w). Для активності відразу отримаємо:

$$z\alpha = \text{invLi}_D \left[\alpha N \left(\frac{\hbar \omega}{T} \right)^D \right].$$
 (4.56)

Отже, умова, з якої визначається критична температура $T_c^{(k)}$ (взагалі кажучи, це може бути набір, а не лише одне значення — як в одновимірному випадку), матиме такий вигляд:

Im invLi_D
$$\left[\alpha N \left(\frac{\hbar \omega}{T_c^{(k)}} \right)^D \right] = 0.$$
 (4.57)

На жаль, для оберненого полілогарифма не існує виразу через елементарні чи відомі спеціальні функції, тому єдиним надійним способом аналізу цієї задачі залишається чисельне розв'язування. Однак за допомогою деяких наближених виразів для invLi_D(w) вдається отримати добрі оцінки критичної температури, як показано нижче.

Нехай обернений полілогарифм invLi_D(w) визначено так:

$$\operatorname{Li}_D(x) = w \quad \Rightarrow \quad \operatorname{invLi}_D(w) = x.$$
 (4.58)

В околі точки x = 0 найпростішим способом є обертання степеневого ряду [359] для полілогарифма, що дає:

В околі точки x = 1 розклади в ряд мають різний вигляд залежно від D:

$$\operatorname{Li}_{D}(x) = \zeta(D) + \Gamma(1-D)(1-x)^{D-1} + \dots, \quad 1 < D < 2, \quad (4.60)$$

$$\operatorname{Li}_{2}(x) = \zeta(2) - (x-1)\ln(1-x) + \dots, \qquad (4.61)$$

$$\operatorname{Li}_{D}(x) = \zeta(D) + (x-1)\zeta(D-1) + \dots, \quad D > 2.$$
(4.62)

Розв'язки з точністю до першого після $\zeta(D)$ доданка будуть такими:

$$\operatorname{invLi}_{D}^{\{2\}}(w) = \begin{cases} 1 - \left[\frac{w - \zeta(D)}{\Gamma(1 - D)}\right]^{1/(D - 1)} & 1 < D < 2\\ 1 + \frac{w - \zeta(D)}{\zeta(D - 1)} & D > 2. \end{cases}$$
(4.63)

У випадку D = 2 потрібно використовувати так звану W-функцію Ламберта, що буде зроблено трохи далі.

Для цілих n існують розклади при |x| > 1 [360]:

$$\operatorname{Li}_{n}(x) = (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{n} x^{j}} - \frac{\ln^{n}(-x)}{n!} + 2 \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\operatorname{Li}_{2j}(-1) \ln^{n-2j}(-x)}{(n-2j)!}, \qquad (4.64)$$

де $\operatorname{Li}_{2j}(-1) = (2^{1-2j} - 1) \zeta(2j)$. При n = 2 цей ряд набуває простої форми:

$$\operatorname{Li}_{2}(x) = -\frac{\ln^{2}(-x)}{2} - \zeta(2) - \frac{1}{x} + \dots, \qquad (4.65)$$

звідки з урахуванням перших двох членів матимемо:

$$\operatorname{invLi}_{2}^{\{3\}}(w) = -e^{\sqrt{-2[w+\zeta(2)]}}.$$
(4.66)

Вираз для n = 3 також має замкнену аналітичну форму, проте вона дуже громіздка.

Обернений полілогарифм можна також записати через *W*-функцію Ламберта [361], яка є багатозначною функцією, за допомогою якої розв'язують таке рівняння:

$$W(z)e^{W(z)} = z, \qquad z \in \mathbb{C}.$$
(4.67)

За цілих n ряд для $\text{Li}_n(x)$ в околі точки x = 1 має вигляд [360], див. також [362, р. 30]:

$$\operatorname{Li}_{n}(x) = \zeta(n) + \frac{-\ln(-\ln x) + \psi(n) + \gamma}{(n-1)!} \ln^{n-1} x + \\ + \sum_{\substack{j=1\\ j \neq n-2}}^{\infty} \frac{\zeta(n-j)}{j!} \ln^{j} x, \qquad (4.68)$$

де $\psi(n)$ — полігамма-функція, а $\gamma = 0.57721...$ — це стала Ейлера-Маскероні. Якщо n = 2, то цей вираз спрощується до

$$\operatorname{Li}_{2}(x) = \zeta(2) - \ln x \ln[-\ln(x)] + \ln x + \dots, \qquad (4.69)$$

звідки отримуємо

$$\operatorname{invLi}_{2}^{\{4\}}(w) = \exp\left[-e^{W_{k}\left(-\frac{\zeta(2)+w}{e}\right)+1}\right], \qquad (4.70)$$

причому значення k потрібно вибирати на підставі додаткових міркувань. Автори праці [361], наприклад, запропонували k = -1 для ідеального 4-вимірного бозе-газу.

Через функцію Ламберта також можна записати розв'язок рівняння (4.61):

invLi₂^{2}
$$(w) = 1 - \exp\left[W_k(w - \zeta(2))\right].$$
 (4.71)

Використовуючи розклад (4.59) з точністю до w^2 включно, після нескладних перетворень отримаємо такий вираз для T_c :

$$T_c = \hbar \omega \frac{(2N\cos \pi \nu)^{1/D}}{2}.$$
 (4.72)

Якщо взяти ряд до w^3 , то вийде досить громіздкий такий вираз:

$$N\left(\frac{\hbar\omega}{T_c}\right)^D = \frac{1}{2\left(2^{1-2D} - 3^{-D}\right)\sin 3\pi\nu} \left(2^{-D}\sin 2\pi\nu - \sqrt{2^{-2D}\sin^2 2\pi\nu - 4\left(2^{1-2D} - 3^{-D}\right)\sin \pi\nu\sin 3\pi\nu}\right).$$
(4.73)

Потрібно сказати, що за деяких значень параметра статистики ν звідси отримуємо комплексні значення критичної температури T_c , як показано в табл. 4.3–4.4. Це, однак, є виключно наслідком застосованого наближення — у задачі, яку ми розглядаємо, комплексні температури не використовують.

З рівняння (4.66) для критичної температури отримуємо вираз:

$$N\left(\frac{\hbar\omega}{T_c}\right)^2 = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\nu} \left(\sqrt{\frac{5+\cos 2\pi\nu}{6}} - \cos \pi\nu\right). \tag{4.74}$$

Інші наведені вище наближення оберненого полілогарифма не вдається звести до замкненого виразу для критичної температури. З формул (4.63), (4.71) розв'язок рівняння

Im invLi_D^{2}
$$\left[\alpha N \left(\frac{\hbar \omega}{T_c} \right)^D \right] = 0$$
 (4.75)

існує лише для $D \leq 2$. Якщо вимірність простору можна подати у вигляді D = 1 + 1/n, де n — натуральне число (n > 1), то (4.75) є алґебричним рівнянням n-го порядку стосовно $1/T_c^D$. Зокрема, для D = 3/2 критична температура T_c збігається (4.95).

Нарешті, ще одне значення T_c можна отримати внаслідок чисельного розв'язування рівняння (4.70):

Im invLi₂^{4}
$$\left[\alpha N \left(\frac{\hbar \omega}{T_c} \right)^2 \right] = 0.$$
 (4.76)

Порівняння значень критичної температури, отриманих з різних наближень, із точними результатами, розрахованими чисельно, наведено в табл. 4.2–4.5.

Таблиця 4.2. Оцінки критичної температури з різних наближень для оберненого полілогарифма, D=2.Значення подано для N=1000 в одиницях $\hbar\omega$

ν	точно	р-ня (4.72)	(4.73)	(4.75)	(4.74)	(4.76)	(4.95)
0.05	22.5	22.2	19.8	17.4	23.0	22.4	24.5
0.10	20.9	21.8	19.5	17.1	22.0	20.8	24.0
0.20	18.2	20.1	18.4	16.3	20.1	17.8	22.2
0.25	17.0	18.8	17.6	15.7	19.1	16.4	20.7
0.30	15.8	17.1	16.6	15.0	18.0	15.0	18.9
0.40	13.5	12.4	14.1	13.2	15.4	11.9	13.7
0.50	11.2	0	10.9	11.1	12.2	8.9	0

Таблиця 4.3. Оцінки критичної температури з різних наближень для оберненого полілогарифма, D=1.1.Значення подано для N=1000в одиницях $\hbar\omega$

ν	точно	р-ня (4.72)	(4.73)	(4.75)	(4.95)
0.16	142	444	$\in \mathbb{C}$	136	55.4
0.20	152	413	$\in \mathbb{C}$	150	51.5
0.30	175	309	246	174	38.5
0.40	186	172	268	181	21.5
0.50	183	0	216	174	0

Таблиця 4.4. Оцінки критичної температури з різних наближень для оберненого полілогарифма, D=1.5.Значення подано для N=1000 в одиницях $\hbar\omega$

ν	точно	р-ня (4.72)	(4.73)	(4.75) або (4.95)
0.10	52.7	76.8	$\in \mathbb{C}$	51.0
0.20	50.2	68.9	$\in \mathbb{C}$	45.8
0.30	46.8	55.7	50.0	37.0
0.40	42.3	36.3	47.5	24.1
0.50	36.8	0	38.6	0

Таблиця 4.5. Оцінки критичної температури з різних наближень для оберненого полілогарифма, D=3. Значення подано для N=1000 в одиницях $\hbar\omega$

ν	точно	р-ня (4.72)	(4.73)	(4.95)
0.05	7.63	6.27	6.71	9.37
0.10	6.83	6.20	6.62	9.25
0.20	5.65	5.87	6.22	8.76
0.30	4.73	5.28	5.44	7.88
0.40	3.91	4.26	$\in \mathbb{C}$	6.36
0.50	3.19	0	$\in \mathbb{C}$	0

Зауважмо, що для D = 2 кілька наближень дають задовільну оцінку за різних значень параметра статистики. Можна використовувати навіть найпростіший вигляд, заданий формулою (4.72).

Для 1 < D < 2рівняння (4.75) видається найбільш прийнятною оцінкою критичної температури. Дя вимірностей простору D > 2 можна використовувати вирази (4.72)–(4.73).

4.6.3. Критичне значення параметра статистики. Можна показати, що у границі малих ν уявна частина $\text{Im}(z\alpha)$ залишається додатною для всіх значень температури, тобто не простежуємо ніякої критичної точки T_c в цьому разі. Розв'язки рівняння (4.42) свідчать про існування певного критичного значення статистичного параметра ν_c , такого, що при $\nu < \nu_c$ не існує T_c , натомість для $\nu > \nu_c$ можна знайти температуру, за якої $\text{Im}(z\alpha)$ перетворюється в нуль. Якщо параметр статистики менший за ν_c , то енергія й теплоємність залишаються неперервними за умови скінченності N, а вище за ν_c існують розриви, які відповідають за фазові переходи.

За фіксованої вимірності простору D значення ν_c прямує до нуля, коли кількість частинок N зростає. З іншого боку, за фіксованого N значення ν_c збільшується зі зменшенням D, див. табл. 4.6.

D	$N = 10^{2}$	$N = 10^{3}$	$N = 10^{4}$	$N = 10^{5}$	$N = 10^6$
3.0	0.07355	0.02340	0.007241	0.001510	0.0002819
2.0	0.1013	0.03592	0.01256	0.004326	0.001471
1.5	0.1508	0.06674	0.03026	0.01389	0.006413
1.4	0.1687	0.07994	0.03936	0.01982	0.01012
1.3	0.1912	0.09781	0.05279	0.02947	0.01680
1.2	0.2199	0.1223	0.07280	0.04538	0.02915
1.1	0.2566	0.1560	0.1028	0.07171	0.05198

Таблиця 4.6. Критичні значення параметра статистик
и ν_c для різної кількості частинокNта вимірності простор
уD
Значення критичного параметра статистики отримано на підставі чисельних розрахунків. Найпростішою формулою, якою можна описати ці дані, є степенева залежність:

$$\nu_c = a N^b. \tag{4.77}$$

Обчислення для різних значень вимірності простору в діапазоні значень $N = 10^2 \div 10^6$ дали такі результати:

$$D = 1.1: \qquad \nu_c = (0.60 \pm 0.04) N^{-0.19 \pm 0.01}, \qquad (4.78)$$

$$D = 1.5: \qquad \nu_c = (0.76 \pm 0.01) N^{-0.35 \pm 0.003}, \qquad (4.79)$$

$$D = 2.0: \qquad \nu_c = (0.81 \pm 0.01) N^{-0.45 \pm 0.002}, \qquad (4.80)$$

$$D = 3.0: \qquad \nu_c = (0.75 \pm 0.03) N^{-0.50 \pm 0.01}. \tag{4.81}$$

Отримані значення показника b можуть вказувати на складнішу залежність ν_c від кількості частинок порівняно з простою моделлю (4.77), наприклад, $N \ln N$ або й інші комбінації.

Незважаючи на те, що поки не вдалося знайти аналітично виразу для ν_c , виявляється можливим проаналізувати запропоновану статистику в бозонній границі малих ν з метою перевірки твердження про неперервність термодинамічних функцій.

Рівняння (4.42), що пов'язує активність, температуру і кількість частинок, у головному порядку дає

$$N\alpha = \frac{z\alpha}{1 - z\alpha} + \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D).$$
(4.82)

У границі $\nu\to 0$ параметр статистики дорівнює $\alpha\simeq 1+i\pi\nu,$ а низькотемпературну залежність активності можна подати як

$$z = 1 + \Delta z = 1 + \Delta z' + i\Delta z'', \qquad \Delta z' < 0, \tag{4.83}$$

де $\Delta z'$ і $\Delta z''$ — малі поправки до дійсної й уявної частинz, відповідно. Отже,

$$z\alpha = 1 + \Delta z' + i\Delta z'' + i\pi\nu, \qquad (4.84)$$

$$\frac{z\alpha}{1-z\alpha} = -\frac{1}{\Delta z' + i(\Delta z'' + \pi\nu)}.$$
(4.85)

Для дійсної й уявної частин рівняння Eq. (4.82) отримаємо:

$$N - \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D) = -\frac{\Delta z'}{(\Delta z')^2 + (\Delta z'' + \pi\nu)^2}, \qquad (4.86)$$

$$\pi\nu N = \frac{\Delta z'' + \pi\nu}{(\Delta z')^2 + (\Delta z'' + \pi\nu)^2}.$$
(4.87)

Розв'язки мають вигляд:

$$\Delta z' = -\frac{1}{\left[N - \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D)\right] + (\pi\nu N)^2 / \left[N - \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D)\right]}, \quad (4.88)$$

$$\Delta z'' + \pi \nu = \frac{\pi \nu N}{\left[N - \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D)\right]^2 + (\pi \nu N)^2} = \operatorname{Im}(z\alpha).$$
(4.89)

Порівняння цих виразів із точними розрахунками показано на рис. 4.7, де видно дуже добре узгодження в низькотемпературній області.

Як можна зауважити, у цьому наближенні уявна частина Im $(z\alpha)$ залишається додатною, отже, ніякої критичної температури в бозонній границі $\nu \to 0$ немає. Це підтверджують і чисельні розрахунки, які дають гладкі залежності термодинамічних функцій від температури при $\nu < \nu_c$.

4.6.4. Поведінка термодинамічних функцій. На рис. 4.8 показано температурні залежності уявної і дійсної частин величини $z\alpha$ в околі точки переходу для значень параметра статистики безпосереднью нижче і вище критичним ν_c у двовимірному просторі. Результати для деяких інших просторових вимірностей наведено на рис. 4.9, 4.10. Цікаво зауважити, що обчислення з дискретним підсумовуванням (4.35), (4.36) замість неперервного підходу з інтеґруванням приводять лише до зсуву температурних залежностей, зберігаючи якісно таку саму картину. Цей зсув пропорційний до $N^{-1/D}$, порівн. аналіз для бозе-систем у праці [363].



Рис. 4.7. Re z (вгорі) та Im z (внизу) двовимірної системи порівняно з наближеннями (4.88) і (4.89). Дані розраховано для N = 1000, $\nu = 0.01$ (зелені кружечки) і $\nu = 0.02$ (червоні квадратики). Наближення показано зеленою та червоною лініями, відповідно



Рис. 4.8. Уявна (вгорі) і дійсна (внизу) частини $z\alpha$ для двовимірної системи з N = 1000 за значень параметра статистики ν , близьких до критичного $\nu_c = 0.035917...$. Температуру T подано в одиницях $\hbar\omega$. Штрихові лінії відповідають дискретним підсумовуванням. Вертикальними лініями позначено температури бозе-конденсації без урахування скінченності кількості частинок ($T \simeq 24.7$) та з її врахуванням ($T \simeq 23.6$). Відповідність кольорів: зелений — $\nu = 0.03$; червоний — $\nu \rightarrow \nu_c - 0$; синій — $\nu \rightarrow \nu_c + 0$; бузковий — $\nu = 0.037$; чорний — $\nu = 0.04$. Тут і далі вертикальні лінії, що з'єднують різні гілки графіків за критичних температури, показано для кращої візуалізації



Рис. 4.9. Величина Im $(z\alpha)$ для D = 1.1 (вгорі), D = 1.5 (внизу) за значень параметра статистики ν , близьких до критичного ν_c . Кількість частинок N = 1000. Відповідність кольорів: зелений — $\nu < \nu_c$; червоний — $\nu \rightarrow \nu_c - 0$; синій — $\nu \rightarrow \nu_c + 0$; бузковий — $\nu > \nu_c$. Вертикальні лінії, що не збігаються з сіткою, позначають температури бозе-конденсації



Рис. 4.10. Величина Im $(z\alpha)$ для D = 3 за значень параметра статистики ν , близьких до критичного ν_c . Кількість частинок N = 1000. Відповідність кольорів: зелений — $\nu < \nu_c$; червоний — $\nu \rightarrow \nu_c - 0$; синій — $\nu \rightarrow \nu_c + 0$; бузковий — $\nu > \nu_c$. Вертикальні лінії, що не збігаються з сіткою, позначають температури бозе-конденсації



Рис. 4.11. Величина $\operatorname{Re}(z\alpha)$ в околі критичного параметра статистики ν_c при D = 2 порівняно з аналітичним наближенням з рівняння (4.94) (чорні пунктирні лінії). Інші кольори — як на рис. 4.8

В околі Т_с можна використати таке наближення:

$$z\alpha = 1 + x + iy, \tag{4.90}$$

так що

$$\frac{z\alpha}{1-z\alpha} = -1 - \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2},\tag{4.91}$$

де x, y — малі величини. Подібним способом для полілогарифма отримаємо:

$$\operatorname{Li}_D(z\alpha) = \operatorname{Li}_D(1 + x + iy) = \zeta(D) + \Delta' + i\Delta'', \qquad (4.92)$$

де Δ', Δ'' позначають малі поправки до дійсної й уявної частин, відповідно; $\Delta', \Delta'' \propto x^{D-1}$ або $\Delta' \propto x \ln x$ для D = 2.

При $T \to T_c$ поправка $y \to 0$, тому в цьому випадку з рівняння (4.42), відкидаючи нехтовно малу одиницю в (4.91), отримаємо:

$$N\alpha' + \frac{1}{x} = \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D), \qquad N\alpha'' = \frac{y}{x^2}.$$
 (4.93)

Отже, в головному наближенні дійсна частина $\operatorname{Re}(z\alpha)$ буде

$$\operatorname{Re}(z\alpha) = 1 + x = 1 + \frac{1}{\left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D) - N\alpha'},$$
(4.94)

тоді як $\text{Im}(z\alpha) = y$ залишається малою додатною величиною. Цей розв'язок правильно відтворює спостережувану зміну знака поправки x (див. рис. 4.11). Також звідси бачимо, що для критичної температури можна взяти грубе наближення у вигляді:

$$T_c = \hbar \omega \left(\frac{N\alpha'}{\zeta(D)}\right)^{1/D}.$$
(4.95)

Очевидно, що розв'язок, який визначається рівнянням (4.94), дає добре наближення лише для температур, що задовольняють умову

$$\left| \left(\frac{T}{\hbar \omega} \right)^D \zeta(D) - N\alpha' \right| > 1.$$
(4.96)



Рис. 4.12. Дійсна частина питомої теплоємності C/N для D = 2 за значень статистичного параметра ν , близьких до критичного ν_c . Відповідність кольорів, як на рис. 4.8

Розрив функції *z* призводить до розриву на температурній залежності енерґії, звідки маємо натяк на критичну точку, що відповідає фазовому переходу першого роду.

Як бачимо з рис. 4.8, за критичного значення параметра статистики ν_c на температурній залежності $\text{Im}(z\alpha)$ є пік за певної температури $T_p > T_c$. Він повинен відповідати іншому фазовому переходові, цього разу вже другого роду (див. рис. 4.12).

Треба також взяти до уваги, що гранична бозе-система $(\nu=0)$ має єдиний фазовий перехід — бозе-конденсацію — у границі $N\to\infty$ за температури

$$T_{\rm BEC} = \hbar \omega \left(\frac{N}{\zeta(D)}\right)^{1/D},\tag{4.97}$$

де D > 1. Проте лише для D > 3/2, що відповідає умові D > 3 у випадку однорідної системи, спостерігаємо розрив на кривій C(T) (пік при D = 3), порівн. рис. 4.13–4.14.



Рис. 4.13. Питома теплоємність бозе-системи осциляторів у просторах вимірності D=1.3 (вгорі) та D=3/2 (внизу) з різною кількістю частинок N.Чорні лінії — $N=10^2;$ червоні — $N=10^3;$ зелені — $N=10^4;$ сині — $N=10^5;$ бузкові — $N=10^6$



Рис. 4.14. Питома теплоємність бозе-системи осциляторів у просторах вимірності D=2 (вгорі) і D=3 (внизу) з різною кількістю частинок N.У границі $N\to\infty$ маємо розрив з $C\big|_{T\to T_c-0}>C\big|_{T\to T_c+0}.$ Чорні лінії — $N=10^2;$ червоні — $N=10^3;$ зелені — $N=10^4;$ сині — $N=10^5;$ бузкові — $N=10^6$

Отже, для вимірностей простору D > 1 повинна існувати ще третя точка переходу, оскільки в означеній дробовій статистиці у границі $N \to \infty$ критичний параметр $\nu_c \to 0$. Ця проблема ще потребує окремого детального аналізу. Цікаво зауважити, що про аналог конденсації Бозе–Айнштайна у системах зі звичайною статистикою Поліхронакоса (з дійсним параметром) повідомляли у праці [179].

4.6.5. Низькотемпературна область й узагальнення результатів. У низькотемпературній області активність залишається майже сталою, причому $z\alpha$ близьке до одиниці, а полілогарифм можна замінити на дзета-функцію Рімана

$$\operatorname{Li}_D(z\alpha) \simeq \zeta(D) \tag{4.98}$$

з точністю до поправок порядку 1/N у дійсній та уявній частині.

Тому енергія з доброю точністю набуде вигляду:

$$\mathcal{E} = (\alpha' - i\alpha'')\hbar\omega D\left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^{D+1}\zeta(D), \qquad (4.99)$$

а будь-які суттєві відхилення від цього наближення можливі лише в безпосередньому околі критичної температури.

Низькотемпературна поведінка теплоємності аналізованої системи відтворює результати для D-вимірного ідеального бозе-газу гармонічних осциляторів з точністю до множника α^* :

$$\mathcal{C} = (\alpha' - i\alpha'')D(D+1)\left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \zeta(D).$$
(4.100)

На рис. 4.15 показано дійсну та уявну частини питомої теплоємності для D = 2, N = 1000 у широкому діапазоні температур, включно з високотемпературною областю (вище від температури фазового переходу) і областю низьких температур. Результати для деяких інших вимірностей простору наведено на рис. 4.16, 4.17.



Рис. 4.15. Дійсна (вгорі) та уявна (внизу) частини питомої теплоємності C/N двовимірної системи, N = 1000, для різних значень параметра статистики. Чорна лінія — $\nu = 0.0$; червона — $\nu = 0.1$; світло-зелена — $\nu = 0.2$; синя — $\nu = 0.3$; блакитна — $\nu = 0.5$. Пунктирні лінії відповідають значенням, близьким до ν_c : $\nu = 0.03591 < \nu_c$ (темно-зелена) і $\nu = 0.03592 > \nu_c$ (бузкова)



Рис. 4.16. Дійсна частина питомої теплоємності C/N *D*-вимірної системи, N = 1000, для різних значень параметра статистики. Верхній графік — D = 1.1, нижній — D = 1.5. Чорна лінія — $\nu = 0.0$; червона — $\nu = 0.1$; світло-зелена — $\nu = 0.2$; синя — $\nu = 0.3$; блакитна — $\nu = 0.5$. Пунктирні лінії відповідають значенням, близьким до ν_c : $\nu = < \nu_c$ (темно-зелена) і $\nu > \nu_c$ (бузкова)



Рис. 4.17. Дійсна частина питомої теплоємності C/N тривимірної системи, N = 1000, для різних значень параметра статистики. Чорна лінія — $\nu = 0.0$; червона — $\nu = 0.1$; світло-зелена — $\nu = 0.2$; синя — $\nu = 0.3$; блакитна — $\nu = 0.5$. Пунктирні лінії відповідають значенням, близьким до ν_c : $\nu = < \nu_c$ (темно-зелена) і $\nu > \nu_c$ (бузкова)

Зрозуміло, що фізично цікавими є лише ті системи, де уявна частина енергії мала, а отже, розсіювання все ще дозволяє трактувати систему як майже рівноважну. З рівняння (4.99) бачимо, що у низькотемпературній області відповідна умова $|\Gamma/E| \ll 1$ виконується, якщо $\pi\nu \ll 1$, тоді як для високих температур уявна частина енергії прямує до нуля, див. підрозділ 4.6.1. Як демонструє рис. 4.18, відношення $|\Gamma/E|$ насправді контролюється низькотемпературною поведінкою енергії, порівн. вираз (4.99), отже,

$$\left|\frac{\Gamma}{E}\right| \lesssim \frac{\alpha''}{\alpha'} = \operatorname{tg} \pi \nu. \tag{4.101}$$



Рис. 4.18. Відношення уявної частини енерґії до дійсної Γ/E при D = 1.8 для різних значень параметра статистики. Відповідність кольорів (лінії впорядковано згори донизу): червоний — $\nu = 0.05$; зелений — $\nu = 0.1$; синій — $\nu = 0.15$; бузковий — $\nu = 0.2$; блакитний — $\nu = 0.25$

4.7. Висновки до розділу 4

У цьому розділі зроблено докладний аналіз термодинамічних властивостей системи D-вимірних ізотропних гармонічних осциляторів, які підкоряються статистиці Поліхронакоса з комплексним параметром. Окремо досліджено задачу в одновимірному просторі, в якій усі результати можна отримати аналітично, та випадок D > 1, де потрібно робити чисельні розрахунки.

У високотемпературній границі, як і потрібно очікувати, отримано класичні результати, які не залежать від параметра статистики ν . Зі зниженням температури в системі передбачено існування фазового переходу першого роду за температури T_c , що визначається з умови $\text{Im}(z\alpha) = 0$. В одновимірному випадку це приводить до множини значень критичних температуру $T_c^{(k)}$, з яких лише найвища $T_c^{(0)}$ відповідає фазовому переходу, який у принципі можна спостерігати експериментально в межах досяжних точностей вимірювань [183].

У просторі з D > 1 відповідний фазовий перехід відбувається лише тоді, коли значення ν більше за деяке критичне ν_c , що визначається кількістю частинок і вимірністю простору. У таких системах критична температура T_c зменшується зі зростанням значення параметра статистики ν для більшості проаналізованих вимірностей простору. Це співвідношення змінюється лише з наближенням до D = 1 (у розрахунках D = 1.1). Відповідні аналітичні оцінки можна зробити на підставі рівняння (4.75).

Якщо $\nu = \nu_c$, то з неаналітичності температурної поведінки активності можна зробити висновок про існування ще одного фазового переходу (другого роду) за температури $T_p > T_c$.

У низькотемпературній границі спостерігаємо бозе-подібну поведінку термодинамічних функцій з точністю до множника $\alpha^* = e^{-i\pi\nu}$. На підставі цієї границі можна також встановити умову застосовності запропонованої статистики у вигляді $\pi\nu \ll 1$, яка забезпечує малі значення уявної частини енерґії системи.

Деякі питання сьогодні залишаються відкритими. Зокрема, до них належить послідовне аналітичне вивчення критичного значення параметра статистики та поведінки термодинамічних функцій в околі точки фазового переходу. З першим безпосередньо пов'язане означення критичної температури T_p передбаченого переходу за типом бозе-конденсації. Са́ме з'ясування аналітичних властивостей ν_c дасть змогу прояснити деталі цього фазового переходу. Крім того, уточнення поведінки термодинамічних функцій поблизу T_c вимагає точніших виразів для оберненого полілогарифма.

Можливості експериментальної перевірки явищ, передбачених у цій праці, впираються в проблему приготування реальної фізичної системи, яку може описувати запропонована статистика Поліхронакоса з комплексним параметром.

Як уже було зазначено, явища, описані в цьому розділі, мають стосунок до реальних фізичних систем з малою дисипацією. Тут цікаво згадати нещодавню працю, в якій вивчали фазовий перехід першого роду в нерівноважній квантовій системі [364]. Кандидатами ж на безпосередню перевірку проаналізованої теоретичної моделі можуть бути бозони в зовнішньому потенціалі, форма якого визначає ефективну вимірність простору D [296]: бозе-система з квадратичним спектром в S-вимірному просторі, поміщена в поле $V(r) \propto r^{\eta}$, через функцію густини станів еквівалентна до системи гармонічних осциляторів у просторі з ефективною вимірністю $D = S(1 + 2/\eta)/2$. В експериментах найчастіше застосовують гармонічні пастки ($\eta = 2$), отже, D = S, і тому найбільший інтерес становлять випадки D = 3 та особливо D = 2.

До такої ж умови D = S приводять і системи з лінійним спектром, який відповідає, наприклад, фононній гілці спектра елементарних збуджень рідкого гелію-4. На додаток, зміну значення 2 < D < 3 можна розглядати як плавний перехід між плоскою й об'ємною геометріями для моделювання плівок різної товщини з метою вивчення процесів та критичних явищ у гелієвих плівках [243, 353, 365] або поверхневих електронних системах [366].

Дробова просторова вимірність 2 < S < 3 також слугує як модель пористого середовища [251], а тому бозонні системи з квадратичним енерґетичним спектром відповідають гармонічним осциляторам із 1 < D < 3/2.

Крім того, виявляється можливим встановити наближену відповідність між запропонованою статистикою та деякими іншими типами статистик, зокрема, з еніонами, статистикою Голдейна–Ву, а також *q*-деформованими бозонами.

Розділ 5

ДВОПАРАМЕТРИЧНІ ДРОБОВІ СТАТИСТИКИ

... wczorajsza niezwykłość staje się dzisiejszym banałem, a dzisiejsza skrajność jutrzejszą normą.

(Stanisław Lem, «Katar»)

5.1. Вступ

Після відкриття дробового квантового ефекту Голла [108], для пояснення цього явища було запропоновано низку теорій. Зокрема, моделі збуджень із дробовим зарядом розглядали Лафлін [109], Галперін [110], Аровас *та ін.* [112]. Еніони вважали за можливих кандидатів у такі квазічастинки [110, 112].

Узагальнений принцип Паулі, запропонований Голдейном [113], і подальше виведення функції розподілу в такій новій статистиці, яке зробив Ву [114], започаткували вивчення так званої дробової виключної статистики (ДВС; англ. fractional exclusion statistics — FES). Виявилося, що вона описує еніони на найнижчому рівні Ландау [115], проте повної відповідності між ДВС та еніонною статистикою встановити не вдається.

Опис еніонів у межах статистичної механіки поки що не можна вважати повним. Труднощі виникають навіть у системі невзаємодіючих еніонів через присутність статистичної взаємодії [367]. Питання знаходження виразу для функції розподілу в еніонній статистиці залишається відкритим: вдається встановити певну наближену відповідність з кількома відомими типами дробової статистики на підставі виразу для другого віріального коефіцієнта, однак усі вони не дають коректного результату вже на рівні третього віріального коефіцієнта [33, Chap. 5]. Тому двопараметрична статистика видається доброю альтернативою для побудови точнішої статистикомеханічної моделі. Варто зауважити, що двопараметричні узагальнення статистики недостатньо широко відображені в літературі. Переважно вони ґрунтуються на так званих *q*-деформаціях комутаційних співвідношень між операторами породження і знищення, порівн. [343, 368–372]. Деякі узагальнення, що мають спільні риси із запропонованими в цьому розділі, коротко проаналізував Каніадакіс [373], проте на підставі дещо інших міркувань.

Розглянуту в цьому розділі двояку модифікацію статистики отримують так. Насамперед, до підрахунку кількості мікростанів використано підходи Поліхронакоса [98] та ДВС Голдейна–Ву [113, 114]. Це приводить до зміни форми функції розподілу порівняно зі статистикою Бозе або Фермі і дає один параметр моделі. Наступним кроком виконано деформацію ґіббсівського множника, що забезпечує другий параметр статистики. З цією метою можна використати *q*-експоненту Цалліса. Справді, неекстенсивну статистичну механіку Цалліса [119] застосовують зокрема до систем із далекосяжними взаємодіями [120], — а саме така статистична взаємодія наявна в системі еніонів [31]. Зауважмо, однак, що деформація експоненти тут феноменологічна і на додаток також розглянуто так звану неповну статистику [187, 188].

Так звані неекстенсивні узагальнення статистик Бозе–Айнштайна та Фермі–Дірака відомі досить давно [184, 185, 374, 375]. Проте тут варто звернути увагу на тривале термінологічне непорозуміння щодо неекстенсивності та неадитивності, про яке детально сказано в [376]. Вживаючи надалі термін «неекстенсивність» та похідні від нього матимемо на увазі переважно неадитивну природу ентропії і пов'язані з нею *q*-експоненти Цалліса. На загал, однак, терміни *неекстенсивна статистика* та *неадитивна статистика*, продовжують співіснувати у науковій літературі як взаємозамінні, порівн. [377].

5.2. Віріальне і кластерне розвинення

Для зручності викладу варто нагадати зв'язок між віріальним і кластерним розвиненнями у статистичній механіці для конкретного випадку двовимірної системи.

Рівняння стану двовимірної системи у границі малих густин і високих температур можна записати у вигляді такого віріального розвинення:

$$\frac{p}{T} = \rho_2 \left[1 + b_2 \,\rho_2 \lambda^2 + b_3 \,(\rho_2 \lambda^2)^2 + \dots \right],\tag{5.1}$$

де p — тиск, T — абсолютна температура, $\rho_2 = N/V_2$ — двовимірна густина (концентрація) системи, причому тут N — кількість частинок, а V_2 — площа, яка є аналогом об'єму. Величина

$$\lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{1/2}$$

— довжина теплової хвилі де Бройля частинки з масою *m*. Множники *b_i* — знерозмірені *j*-ті віріальні коефіцієнти.

З іншого боку, велику статистичну суму Ξ можна записати у вигляді кластерного розвинення, тобто ряду за активністю $z = e^{\mu/T}$, де μ — хімічний потенціал [33, Ch. 4]:

$$\frac{1}{V_2}\ln\Xi = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{B}_{\ell} z^{\ell}.$$
(5.2)

Коефіцієнти розкладу \mathcal{B}_{ℓ} називають кластерними інтеґралами. За їх допомогою можна розрахувати віріальні коефіцієнти завдяки термодинамічним співвідношенням, що пов'язують тиск і густину з великою статистичною сумою, а саме:

$$\frac{p}{T} = \frac{1}{V_2} \ln \Xi(z, V_2, T), \tag{5.3}$$

i

$$\rho_2 = \frac{N}{V_2} = z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{V_2} \ln \Xi \right)_{V_2, T}.$$
(5.4)

Застосовуючи кластерне розвинення (5.2) до рівняння стану (5.3), отримаємо:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{B}_{\ell} z^{\ell} = \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \mathcal{B}_{\ell} z^{\ell}\right) \left[1 + b_2 \lambda^2 \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \mathcal{B}_{\ell} z^{\ell}\right) + \dots\right].$$
 (5.5)

Звідси відразу маємо зв'язок:

. . . .

$$b_2 \lambda^2 = -\frac{\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_1^2},\tag{5.6}$$

і для вищих віріальних коефіцієнтів можна аналогічно отримати результати, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z [378]:

$$b_3 \lambda^4 = -2\frac{\mathcal{B}_3}{\mathcal{B}_1^3} + 4\frac{\mathcal{B}_2^2}{\mathcal{B}_1^4},\tag{5.7}$$

$$b_4 \lambda^6 = -3\frac{\mathcal{B}_4}{\mathcal{B}_1^4} + 18\frac{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3}{\mathcal{B}_1^5} - 20\frac{\mathcal{B}_2^3}{\mathcal{B}_1^6},\tag{5.8}$$

Щоб знайти вираз для функції розподілу (чисел заповнення) е
ніонів n_j , такий що

$$N = \sum_{j} g_j n_j, \tag{5.9}$$

де сума пробігає за всіма можливими рівнями енергії з виродженнями g_j , перепишемо це рівняння у вигляді:

$$\frac{N}{V_2} = \frac{1}{V_2} \sum_j g_j n_j = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \mathcal{B}_{\ell} z^{\ell}.$$
 (5.10)

Оскільки функціональна залежність n_j від енерґії рівня ε_j невідома, ми розглядатимемо кілька модифікацій статистики, перевіряючи придатність моделі для опису еніонів на підставі виразів для другого і третього віріальних коефіцієнтів. Перед цим, однак, проаналізуємо однопараметричні дробові статистики.

5.3. Зв'язок між різними типами дробової статистики

5.3.1. Віріальне розвинення для еніонів. Для подальшого викладу корисно пригадати віріальне розвинення ідеального двовимірного газу зі статистикою Фермі або Бозе:

$$\frac{p}{T} = \rho_2 \left(1 \pm \frac{1}{4} \rho_2 \lambda^2 + \dots \right), \qquad (5.11)$$

де верхній знак відповідає ферміонам, а нижній — бозонам, тобто другі віріальні коефіцієнти будуть відповідно:

$$b_2^{\rm F} = +\frac{1}{4}, \qquad b_2^{\rm B} = -\frac{1}{4}.$$
 (5.12)

Зобразивши велику статистичну суму через статистичні суми \mathbb{Z}_N системи Nчастинок

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N, \qquad Z_0 \equiv 1, \tag{5.13}$$

із кластерного розвинення (5.2) матимемо:

$$\mathcal{B}_1 = \frac{Z_1}{V_2}, \qquad \mathcal{B}_2 = \frac{2Z_2 - Z_1^2}{2V_2}, \qquad \dots, \qquad (5.14)$$

де враховано розклад логарифма $\ln(1+x) = x - x^2/2 \pm \ldots$, або для другого віріального коефіцієнта:

$$b_2 = -\frac{V_2}{\lambda^2} \frac{2Z_2 - Z_1^2}{2Z_1^2}.$$
(5.15)

Ідеальний еніонний газ можна розглядати як взаємодіючий бозегаз. Зважаючи на те, що одночастинкова статистична сума Z_1 не залежить від статистики, перепишемо b_2 у вигляді:

$$b_2(\alpha) = b_2(0) - \frac{V_2}{\lambda^2} \frac{Z_2(\alpha) - Z_2(0)}{Z_1^2},$$
(5.16)

де $b_2(0)$, $Z_2(0)$ відповідають ідеальному бозе-газові, а параметр $\alpha \in [0; 1]$. Варто зазначити, що усі ці вирази мають сенс лише в термодинамічній границі $V_2 \to \infty$.

Задачу далі зручно розглядати, помістивши систему в осциляторний потенціал із частотою ω як реґулятор. Одночастинкову статистичну суму легко рахуємо, зважаючи на спектр $E_n = (n+1)\hbar\omega$, причому виродження *n*-го рівня дорівнює n + 1:

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)e^{-(n+1)\beta\hbar\omega} = \frac{1}{4\operatorname{sh}^2\frac{\beta\hbar\omega}{2}}.$$
 (5.17)

У двочастинковій задачі перейдемо до системи центра мас, записавши зовнішній потенціал як

$$\omega^{2}(\mathbf{r}_{1}^{2} + \mathbf{r}_{2}^{2}) = 2\omega^{2}\mathbf{R}^{2} + \frac{\omega^{2}}{2}\mathbf{r}^{2}, \qquad (5.18)$$

де радіус-вектор центра мас $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1)/2$, а $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ — відносна віддаль.

У двочастинковій статистичні сумі можна виділити внесок центра мас:

$$Z_2 = Z_1 \tilde{Z}_2, (5.19)$$

причому Z_1 тут уже відповідає одночастинковій задачі з частотою $\omega_{\rm c.m.}^2 = 2\omega^2$, див. (5.18). Зважаючи на те, що енерґетичний спектр задачі двох еніонів має дві гілки,

$$E_n^{(1)} = (2n+1+\alpha)\hbar\omega$$
 з виродженням $n+1,$
 $E_n^{(2)} = (2n+1-\alpha)\hbar\omega$ з виродженням $n, \text{ де } n = 0, 1, 2, 3...,$
(5.20)

отримаємо статистичну суму:

$$\tilde{Z}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)e^{-(2n+1+\alpha)\beta\hbar\omega} + ne^{-(2n+1-\alpha)\beta\hbar\omega} \right] =$$
$$= \frac{\operatorname{ch}(1-\alpha)\beta\hbar\omega}{2\operatorname{sh}^2\beta\hbar\omega}.$$
(5.21)

Вираз (5.16) можна тепер переписати так:

$$b_2(\alpha) = b_2(0) - \frac{V_2}{\lambda^2} \frac{\tilde{Z}_2(\alpha) - \tilde{Z}_2(0)}{Z_1}.$$
 (5.22)

Далі для спрощення перейдемо до термодинамічної границі, що відповідає $\omega \to 0$. Ураховуючи, що з одночастинкової задачі можна встановити зв'язок між статистичною сумою $Z_1 = V_2/\lambda^2$ і частотою зовнішнього потенціалу, матимемо з (5.17):

$$\frac{V_2}{\lambda^2} = \frac{1}{\beta^2 \hbar^2 \omega^2} = \frac{2}{\beta^2 \hbar^2 2 \omega^2} = 2Z_1,$$
(5.23)

де через Z_1 вже позначено відповідник у двочастинковій задачі. Треба зазначити, що внаслідок реґуляризації осциляторним потенціалом у кластерних інтеґралах потрібно робити перехід $\mathcal{B}_{\ell} \to \ell \mathcal{B}_{\ell}$ [33, Chap. 4].

Після елементарних перетворень, беручи до уваги другий віріальний коефіцієнт ідеального бозе-газу (5.12) $b_2(0) = -1/4$, остаточно матимемо для другого ідеального еніонного газу:

$$b_2(\alpha) = -\frac{1}{4}(1 - 4\alpha + 2\alpha^2).$$
 (5.24)

Цікаво, що для $\alpha = 1$ отримуємо правильну ферміонну границю (5.12) $b_2(1) = +1/4$.

Для вищих віріальних коефіцієнтів аналітичні результати невідомі через складність задачі $N \ge 3$ еніонів [379]. Варто зазначити, наприклад, таке точне співвідношення симетрії для третього віріального коефіцієнта [33, 380, 381]:

$$b_3(\alpha) = b_3(1 - \alpha). \tag{5.25}$$

Отримані вирази для віріальних коефіцієнтів можна використати з метою встановлення відповідності між еніонною статистикою та іншими видами дробових статистик. Виявляється, що жодне із описаних узагальнень квантової статистики не дає точної відповідності [33], і вдається зіставити лише деякі види статистик з певною точністю. Наприклад, ідеальний двовимірний газ, що підкоряється статистиці Джентіле з $d \ge 2$, має другий віріальний коефіцієнт (1.41), (5.12)

$$b_2^{\rm G} = b_2^{\rm B} = -\frac{1}{4},$$
 (5.26)

що ніяк не вдається зіставити з віріальним коефіцієнтом еніонів (5.24) $b_2(\alpha) = -\frac{1}{4}(1 - 4\alpha + 2\alpha^2)$, за винятком хіба що тривіального значення $\alpha = 0$.

З рівняння (1.51) другий віріальний коефіцієнт ідеального двовимірного газу зі статистикою Голдейна–Ву дорівнює:

$$b_2^{\text{HW}} = \frac{1}{4}(2g-1).$$
 (5.27)

Порівнюючи його з другим віріальним коефіцієнтом еніонів (5.24), отримаємо зв'язок між параметрами статистик g та α :

$$g = 2\alpha - \alpha^2. \tag{5.28}$$

Подібно до цього, зіставляючи віріальний розклад еніонів із результатом для статистики Поліхронакоса (1.56)

$$b_2^{\rm P} = -\frac{1}{4}|\gamma|, \qquad (5.29)$$

де взято до уваги бозоноподібний тип статистики з $\gamma < 0$, отримаємо зв'язок між параметрами γ й α :

$$\gamma = 4\alpha - 2\alpha^2 - 1. \tag{5.30}$$

Проте наведені результати не дають змоги повністю ототожнити статистику еніонів ні зі статистикою Голдейна–Ву, ні зі статистикою Поліхронакоса: вже третій віріальний коефіцієнт у них не буде збігатися [33, Chap. 5].

Також не вдається знайти повну аналогію статистик, описаних у розділі 1.3. Так, у високотемпературній границі рівняння стану у статистиці Джентіле має лише бозоноподібну поправку, на відміну від статистик Голдейна–Ву чи Поліхронакоса [178]. Наближено можна зіставляти статистики на підставі значень аналога рівня Фермі, що не забезпечує відповідності в усьому температурному інтервалі. Цікаво, що в певному наближенні все ж можна знайти відповідність статистики Голдейна–Ву і статистики Джентіле на підставі поведінки чисел заповнення [162].

5.3.2. Розклади за параметром статистики. Зв'язок між різними типами дробової статистики можна встановити, досліджуючи малі відхилення від певної традиційної статистики (Бозе або Фермі). Для визначеності далі відштовхуватимемося від статистики Бозе. Нехай аналізована система характеризується одночастинковим спектром ε_j , а G_j означає виродження *j*-го рівня. Хімічний потенціал відповідної бозе-системи $\mu_{\rm B}$ пов'язаний з кількістю частинок N і температурою T так:

$$N = \sum_{j} \frac{G_{j}}{e^{(\varepsilon_{j} - \mu_{\rm B})/T} - 1}.$$
 (5.31)

Розгляньмо далі систему, що підкоряється статистиці Поліхронакоса (1.55), у якій параметр $\gamma = a - 1$, де $a \to 0$. Хімічний потенціал такої системи $\mu_{\rm P}$ визначає рівняння

$$N = \sum_{j} \frac{G_j}{e^{(\varepsilon_j - \mu_{\rm P})/T} - 1 + a},\tag{5.32}$$

і його можна записати, увівши мале відхилення від хімічного потенціалу бозе-системи:

$$\mu_{\rm P} = \mu_{\rm B} + \Delta \mu_{\rm P}. \tag{5.33}$$

Розкладаючи далі вираз під сумою в рівнянні (5.32) в ряд за малими величинами a та $\Delta \mu_{\rm P}$ з точністю до лінійних поправок, отримаємо:

$$N = \sum_{j} \frac{G_{j}}{e^{(\varepsilon_{j} - \mu_{\rm P})/T} - 1 + a} = \sum_{j} \frac{G_{j}}{e^{(\varepsilon_{j} - \mu_{\rm B})/T} - 1} + \sum_{j} \frac{G_{j}}{\left[e^{(\varepsilon_{j} - \mu_{\rm B})/T} - 1\right]^{2}} \left\{ \frac{\Delta\mu_{\rm P}}{T} e^{(\varepsilon_{j} - \mu_{\rm B})/T} - a \right\}.$$
 (5.34)

Звідси, з урахуванням (5.31), матимемо:

$$\frac{\Delta\mu_{\rm P}}{T} = a \frac{P}{N+P}, \qquad \text{de} \quad P = \sum_{j} \frac{G_j}{\left[e^{(\varepsilon_j - \mu_{\rm B})/T} - 1\right]^2}, \qquad (5.35)$$

див. також [182].

Подібним способом можна встановити поправку до хімічного потенціалу системи з аналогом бозе-статистики в підході Цалліса (1.73):

$$N = \sum_{j} \frac{G_{j}}{e_{q}^{(\varepsilon_{j} - \mu_{\rm Ts})/T} - 1} = \sum_{j} \frac{G_{j}}{e^{(\varepsilon_{j} - \mu_{\rm B})/T} - 1} + \sum_{j} \frac{G_{j}e^{(\varepsilon_{j} - \mu_{\rm B})/T}}{\left[e^{(\varepsilon_{j} - \mu_{\rm B})/T} - 1\right]^{2}} \left\{ \frac{\Delta\mu_{\rm Ts}}{T} - \left(\frac{\varepsilon_{j} - \mu_{\rm B}}{T}\right)^{2} \frac{q - 1}{2} \right\}, \quad (5.36)$$

де $q \to 1,$ а хімічний потенціал

$$\mu_{\rm Ts} = \mu_{\rm B} + \Delta \mu_{\rm Ts}. \tag{5.37}$$

Такі самі розклади можна записати для бозе-системи зі спектром $\varepsilon_j + \Delta \varepsilon_j$, де мала поправка $\Delta \varepsilon_j$ може бути, наприклад, спричинена взаємодією. Відповідний хімічний потенціал μ буде мало відрізнятися від $\mu_{\rm B}$:

$$\mu = \mu_{\rm B} + \Delta \mu, \tag{5.38}$$

причому

$$N = \sum_{j} \frac{G_{j}}{e^{(\varepsilon_{j} + \Delta\varepsilon_{j} - \mu)/T} - 1} =$$
$$= \sum_{j} \frac{G_{j}}{e^{(\varepsilon_{j} - \mu_{\rm B})/T} - 1} + \sum_{j} \frac{G_{j}e^{(\varepsilon_{j} - \mu_{\rm B})/T}}{\left[e^{(\varepsilon_{j} - \mu_{\rm B})/T} - 1\right]^{2}} \frac{\Delta\mu - \Delta\varepsilon_{j}}{T}.$$
 (5.39)

Беручи до уваги останній результат і порівнюючи його з виразами (5.34) і (5.36), можна говорити про те, що взаємодіючій бозе-системі з певною точністю вдається поставити у відповідність системи із дробовими статистиками, параметри яких пов'язані з поправкою до спектра $\Delta \varepsilon_j$. Для отримання цього зв'язку, вимагатимемо, наприклад, щоб енерг'ї різних систем, розраховані через числа заповнення n_i у відповідних статистиках, збігалися:

$$E = \sum_{j} \epsilon_j G_j n_j = E_{\rm B} + \Delta E, \qquad (5.40)$$

де $E_{\rm B}$ — енергія бозе-системи зі спектром ε_i :

$$E_{\rm B} = \sum_{j} \frac{\varepsilon_j G_j}{e^{(\varepsilon_j - \mu_{\rm B})/T} - 1},$$
(5.41)

 ϵ_j — одночастинковий спектр (у розглянутих випадках він дорівнює просто ε_j або $\varepsilon_j + \Delta \varepsilon_j$), а ΔE — це й буде поправка, вирази для якої потрібно зіставляти. Через громіздкість остаточні результати тут не наведено, однак описаний ланцюжок міркувань є достатнім для їх отримання, а також для поширення на деякі інші типи статистик.

5.4. Двопараметричні модифікації статистики

Розглядатимемо модифікації дробової статистики на підставі таких двох загальних виразів. Перший,

$$n_j^{\mathrm{P}} = \frac{1}{z^{-1}X(\varepsilon_j) + Y},\tag{5.42}$$

узагальнює стандартну статистику Бозе (Фермі), яка визначається $X(\varepsilon_j) = e^{\varepsilon_j/T}$ і Y = -1 (Y = +1), а також дробову статистику Поліхронакоса з $Y = -\gamma = \text{const} \neq \pm 1$.

Другу модифікацію отримаємо на підставі статистики Голдейна– Ву:

$$n_j^{\rm HW} = \frac{1}{w[z^{-1}X(\varepsilon_j)] + g},$$
 (5.43)

де функція $w(\xi)$ є розв'язком такого трансцендентного рівняння:

$$w^g (1+w)^{1-g} = \xi, (5.44)$$

яке отримують з виразу для кількості мікростанів квантової багаточастинкової системи, що є простою інтерполяцією між бозонами і ферміонами [114].

На додаток до параметра γ у статистиці Поліхронакоса (5.42) та параметра g у статистиці Голдейна–Ву (5.43) другий параметр моделі можна ввести, деформуючи експоненту в залежності Xу рівняннях (5.42)–(5.43). Розглядатимемо такі дві деформації: q-експонента Цалліса e_q^x замість звичайної e^x (як у неекстенсивній/неадитивній статистиці) і заміна e^x на e^{qx} , відома в неповній статистиці [187, 188].

Хоча, як уже було сказано, сама деформація гіббсівського множника $X = e^{\varepsilon_j/T}$ за допомогою параметра q тут є феноменологічною, можна навести певне фізичне обґрунтування цієї процедури. Справді, далекосяжна статистична взаємодія в системі еніонів [31] може спричиняти неадитивність, яку враховують у межах підходу Цалліса [119, 376, 382]; з іншого боку, між статистикою Цалліса і неповною статистикою можна встановити певну відповідність [383].

q-експонента Цалліса визначається виразом [382]:

$$e_q^x = [1 + (1 - q)x]^{1/(1 - q)}$$
 для $1 + (1 - q)x \ge 0$ (5.45)
і $e_q^x = 0$ в іншому випадку.

Властивості цієї та інших споріднених функцій добре описано у працях [185, 384, 385].

У неповній статистиці нормування ймовірностей p_i записують у вигляді [187, 188]:

$$\sum_{i} p_i^q = 1 \qquad \text{замість} \qquad \sum_{i} p_i = 1. \tag{5.46}$$

Легко бачити, що обидва випадки модифікацій зводяться до стандартних експонент, якщо q = 1.

За малих z розклади рівнянь (5.42) і (5.43) мають вигляд:

$$n_j^{\rm P} = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell-1} \frac{Y^{\ell-1}}{X^{\ell}} z^{\ell} = \frac{1}{X} z - \frac{Y}{X^2} z^2 + \frac{Y^2}{X^3} z^3 \mp \dots, \qquad (5.47)$$

$$n_{j}^{\text{HW}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m} \frac{\Gamma[g(m+1)]}{m! \Gamma[g(m+1) - m]} \frac{z^{m+1}}{X^{m+1}} = \frac{1}{X} z - \frac{(2g-1)}{X^{2}} z^{2} + \frac{(3g-2)(3g-1)}{2! X^{3}} z^{3} \mp \dots, \qquad (5.48)$$

де для функції w у статистиці Голдейна–Ву використано розклади з [386].

З метою спрощення замінимо в рівняннях (5.9)–(5.10) підсумовування за рівнями на інтеґрування за енерґіями, ввівши функцію густини станів $G(\varepsilon)$, яка для двовимірного ідеального газу частинок з масою m дорівнює $G(\varepsilon) = mV_2/2\pi\hbar^2 = \text{const:}$

$$\sum_{j} \dots = \int_{0}^{\infty} d\varepsilon \, G(\varepsilon) \dots$$
 (5.49)

Використовуючи різні вирази для функції X, можна безпосереднью розрахувати кластерні інтеґрали \mathcal{B}_{ℓ} з розкладів (5.47)–(5.48), що своєю чергою дає віріальні коефіцієнти на підставі співвідношень (5.6)–(5.8).

5.4.1. Неповна статистика Поліхронакоса. Для цього типу статистики, яку позначатимемо скороченням IPS (від англ. *incomplete Polychronakos statistics*), величина $X(\varepsilon) = e^{q\varepsilon/T}$, $Y = -\gamma$ дає для кластерних інтеґралів:

$$\mathcal{B}_1 \lambda^2 = \frac{1}{q}, \qquad \mathcal{B}_2 \lambda^2 = \frac{\gamma}{4q}, \qquad \mathcal{B}_3 \lambda^2 = \frac{\gamma^2}{9q}, \qquad \dots, \qquad (5.50)$$

а другий та третій віріальні коефіцієнти дорівнюють:

$$b_2^{\text{IPS}} = -\frac{\gamma q}{4}, \qquad b_3^{\text{IPS}} = \frac{\gamma^2 q^2}{36}.$$
 (5.51)

5.4.2. Неадитивна статистика Поліхронакоса. Для цієї модифікації використовуватимемо скорочення NAPS (від англ. nonadditive Polychronakos statistics). У цій статистиці $X(\varepsilon) = e_q^{\varepsilon/T}$, $Y = -\gamma$, що дає кластерні інтеґрали:

$$\mathcal{B}_1\lambda^2 = \frac{1}{q}, \quad \mathcal{B}_2\lambda^2 = \frac{\gamma}{2(1+q)}, \quad \mathcal{B}_3\lambda^2 = \frac{\gamma^2}{3(2+q)}, \quad \dots, \qquad (5.52)$$

звідки другий і третій віріальні коефіцієнти дорівнюють:

$$b_2^{\text{NAPS}} = -\frac{\gamma q^2}{2(1+q)}, \quad b_3^{\text{NAPS}} = \gamma^2 q^4 \left[\frac{1}{(1+q)^2} - \frac{1}{3q(2+q)}\right].$$
 (5.53)

Зазначимо, що таку статистику у границях слабкої неадитивності $q \rightarrow 1$ і $\gamma \rightarrow 1$ можна застосувати для моделювання скінченної слабковзаємодіючої бозе-системи [387], яку буде проаналізовано в наступних розділах.

5.4.3. Неповна статистика Голдейна–Ву. Для цієї статистики використовуватимемо скорочення IHWS (від англ. *incomplete* Haldane–Wu statistics). У цій статистиці $X(\varepsilon) = e^{q\varepsilon/T}$, звідки отримуємо кластерні інтеґрали

$$\mathcal{B}_1 \lambda^2 = \frac{1}{q}, \quad \mathcal{B}_2 \lambda^2 = -\frac{(2g-1)}{2! \cdot 2q},$$
$$\mathcal{B}_3 \lambda^2 = \frac{(3g-2)(3g-1)}{3! \cdot 3q}, \dots,$$
(5.54)

а другий та третій віріальні коефіцієнти дорівнюють:

$$b_2^{\text{IHWS}} = \frac{(2g-1)q}{4}, \qquad b_3^{\text{IHWS}} = \frac{q^2}{36}.$$
 (5.55)

5.4.4. Неадитивна статистика Голдейна–Ву. Для цієї статистики використовуватимемо скорочення NAHWS (від англ. *non-additive Haldane–Wu statistics*). У цій статистиці $X(\varepsilon) = e_q^{\varepsilon/T}$, звідки маємо кластерні інтеґрали

$$\mathcal{B}_1 \lambda^2 = \frac{1}{q}, \qquad \mathcal{B}_2 \lambda^2 = -\frac{(2g-1)}{2(1+q)},$$
$$\mathcal{B}_3 \lambda^2 = \frac{(3g-2)(3g-1)}{6(2+q)}, \dots, \qquad (5.56)$$

а другий та третій віріальні коефіцієнти дорівнюють:

$$b_2^{\text{NAHWS}} = \frac{2g-1}{2} \frac{q^2}{1+q},$$

$$b_3^{\text{NAHWS}} = q^4 \left[\frac{(2g-1)^2}{(1+q)^2} - \frac{(3g-2)(3g-1)}{3q(2+q)} \right].$$
(5.57)

5.4.5. Зв'язок із еніонною статистикою. Щоб визначити дробову статистику, у якій функція розподілу найкраще підходить для опису еніонів, порівняємо отримані вище у кожній статистиці вирази для b_2 і b_3 , що містять два параметри, із відповідними віріальними коефіцієнтами системи еніонів, унаслідок чого будемо мати системи двох рівнянь. Їхні розв'язки дозволять з'ясувати, яка з запропонованих чотирьох моделей є найбільш прийнятною.

Другий і третій віріальні коефіцієнти ідеального еніонного газу дорівнюють [379]:

$$b_2^{\text{anyon}} = -\frac{1}{4}(1 - 4\alpha + 2\alpha^2),$$

$$b_3^{\text{anyon}} = \frac{1}{36} + \frac{\sin^2 \pi \alpha}{12\pi^2} + c_3 \sin^4 \pi \alpha,$$

$$c_3 = -(1.652 \pm 0.012) \cdot 10^{-5},$$
(5.58)

де статистичний параметр $\alpha \in [0; 1]$ забезпечує інтерполяцію між статистикою Бозе ($\alpha = 0$) і статистикою Фермі ($\alpha = 1$). Наведений тут вираз для другого віріального коефіцієнта є точним, тоді як у b_3^{anyon} відкинуто вищі гармоніки ($\sin^6 \pi \alpha$ тощо).

Для найпростішої з розглянутих моделей, неповної статистики Поліхронакоса, розв'язки системи

$$b_2^{\text{IPS}} = b_2^{\text{anyon}}, \qquad b_3^{\text{IPS}} = b_3^{\text{anyon}}$$

існують лише у тривіальних випадках $\alpha = 0$ та 1, які відповідають статистикам Бозе та Фермі.

Ширший діапазон значень параметра α , однак не цілий відрізок [0; 1], вдається відтворити за допомогою неадитивної статистики Поліхронакоса. З рівняння (5.53), розглядаючи границю $q \rightarrow \infty$,

можна отримати умову, що визначає недосяжні значення еніонного статистичного параметра $\alpha \in (\alpha_1; \alpha_2)$ у такому вигляді:

$$\frac{b_3^{\text{anyon}}(\alpha_{1,2})}{\left[b_2^{\text{anyon}}(\alpha_{1,2})\right]^2} = \frac{4}{3}.$$
(5.59)

Числові значення кінців цього відрізка дорівнюють

$$\alpha_1 = 0.109\ldots; \qquad \alpha_2 = 0.584\ldots.$$
 (5.60)

Отже, неадитивну статистику Поліхронакоса можна використовувати для моделювання еніонів з бозонного боку, $0 \le \alpha < \alpha_1$, а також із ферміонного боку, $\alpha_2 < \alpha \le 1$. Відповідність між параметрами γ, q та α наведено в табл. 5.1.

Виявляється, що запропоновані модифікації статистики Голдейна–Ву краще підходять для моделювання еніонів порівняно з проаналізованими вище модифікаціями статистики Поліхронакоса. Фізична причина цього може бути пов'язана з тим, що для опису деяких еніонних систем можна застосовувати саме (немодифіковану) ДВС, як було зазначено у вступі до цього розділу.

У неповній модифікації статистики Голдейна–Ву, див. (5.55), співвідношення між статистичними параметрами g та q й еніонним параметром α досить прості:

$$q = \left(1 + \frac{3}{\pi^2} \sin^2 \pi \alpha + 36c_3 \sin^4 \pi \alpha\right)^{1/2},$$

$$1 - 2g = \frac{1}{a}(1 - 4\alpha + 2\alpha^2).$$
(5.61)

У неадитивній модифікації, див. (5.57), аналітичні вирази є громіздкими, проте зв'язок між g, q та α легко встановити на підставі чисельних розрахунків, див. рис. 5.1, 5.2. Відповідність між значеннями параметрів g, q та α в обидвох модифікаціях статистики Голдейна–Ву наведено в табл. 5.1.



Рис. 5.1. Параметр g неадитивної статистики Голдейна–Ву (кружечки) та відповідне поліноміальне наближення (суцільна лінія) у вигляді: $f(\alpha) = a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + a_3 \alpha^3 + (1 - a_1 - a_2 - a_3) \alpha^4$ з такими значеннями коефіцієнтів: $a_1 = 2.21 \pm 0.01$, $a_2 = -2.26 \pm 0.05$, $a_3 = 1.88 \pm 0.09$



Рис. 5.2. Параметр q неадитивної статистики Голдейна–Ву (кружечки) та відповідне наближення (суцільна лінія), розраховане за даними на відрізку $\alpha \in [0; 0.5]$ у вигляді $f(\alpha) = 1 + b \sin^k(\pi \alpha^s)$ з такими значеннями параметрів: $b = 0.09096 \pm 0.00009$, $s = 0.820 \pm 0.001$, $k = 3.18 \pm 0.02$

Таблиця 5.1. Залежність параметрів неадитивної статистики Поліхронакоса (NAPS), неповної (IHWS) та неадитивної (NAHWS) статистик Голдейна–Ву від еніонного параметра α

α	NAPS		IHWS		NAHWS	
	γ	q	g	q	g	q
0.00	1.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
0.01	0.91469	1.03299	0.01997	1.00015	0.01994	1.00006
0.05	0.56672	1.26962	0.09899	1.00371	0.09847	1.00161
0.10	0.11697	3.42415	0.19440	1.01441	0.19349	1.00758
0.20	_	_	0.36681	1.05116	0.36709	1.03536
0.30	_	_	0.50913	1.09485	0.50903	1.07051
0.40	_	_	0.62401	1.12892	0.62325	1.08934
0.45	_	—	0.67349	1.13840	0.67369	1.09008
0.50	_	—	0.71898	1.14165	0.72115	1.08580
0.55	_	—	0.76133	1.13840	0.76612	1.07765
0.60	-0.10436	4.06034	0.80117	1.12892	0.80869	1.06690
0.65	-0.30776	1.87929	0.83888	1.11397	0.84859	1.05479
0.70	-0.48484	1.43495	0.87448	1.09485	0.88532	1.04241
0.80	-0.76642	1.13091	0.93761	1.05116	0.94643	1.02020
0.90	-0.94088	1.02760	0.98304	1.01441	0.98618	1.00524
0.95	-0.98517	1.00664	0.99566	1.00371	0.99652	1.00132
0.99	-0.99941	1.00026	0.99983	1.00015	0.99986	1.00005
1.00	-1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Точність запропонованих моделей можна оцінити, використовуючи четвертий віріальний коефіцієнт. Для еніонів він дорівнює [388]:

$$b_4^{\text{anyon}} = \frac{\sin^2 \pi \alpha}{16\pi^2} \left(\frac{\ln(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}} + \cos \pi \alpha \right) + (c_4 + d_4 \cos \pi \alpha) \sin^4 \pi \alpha,$$

$$c_4 = -0.0053 \pm 0.0003; \qquad d_4 = -0.0048 \pm 0.0009. \tag{5.62}$$

Значення цього віріального коефіцієнта досить малі: вони лежать у діапазоні $-0.0006 < b_4^{\text{anyon}} < 0.0025$.

У неповній статистиці Голдейна–Ву $b_4^{\rm IHWS} = 0$ для всіх значень статистичних параметрів. У неадитивній модифікації

$$-0.0003 < b_4^{\text{NAHWS}} < 0.0014,$$

тобто також є малими. Однак поведінка четвертого віріального коефіцієнта між бозонною і ферміонною границями у цих статистиках некоректно відтворює еніонний b_4 , див. рис. 5.3. Це означає, що відповідність між проаналізованими двопараметричними дробовими статистиками та еніонною статистикою залишається наближеною, хоча й із вищою точністю порівняно з однопараметричним випадком.

Для двовимірного ідеального газу справедливе таке термодинамічне співвідношення між внутрішньою енерґією, тиском та об'ємом: $E = PV_2$, порівн. [33]. Звідси відразу отримуємо питому теплоємність за сталого об'єму у вигляді:

$$\frac{C_V}{N} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \sum_{\ell=1}^{\infty} (2-\ell) b_\ell \left(\rho_2 \lambda^2 \right)^{\ell-1}.$$

Поправка, пов'язана з четвертим віріальним коефіцієнтом, буде

$$\frac{C_V^{(4)}}{N} = -2b_4 \left(\rho_2 \lambda^2\right)^3.$$

З рис. 5.3 видно, що різниця між еніонним b_4 та його відповідником у неадитивній статистиці Голдейна–Ву становить $\Delta b_4 < 0.003$ для всіх значень параметра α , звідки маємо $\Delta C_V^{(4)}/N < 0.006 (\rho_2 \lambda^2)^3$.


Рис. 5.3. Четвертий віріальний коефіцієнт вільних еніонів (суцільна лінія) порівняно з неадитивними модифікаціями статистик Поліхронакоса (штрихпунктирна лінія) та Голдейна–Ву (штрихова лінія)

Зважаючи на те, що віріальне розвинення правильне за умови $(\rho_2 \lambda^2) \ll 1$, стає зрозуміло, що різниця між розрахованими питомими теплоємностями є значно меншою за 1%, а отже, перебуває на межі точності експериментальних вимірювань, порівн. [389, р. 408]. Оскільки $b_4^{\text{IHWS}} = 0$, то така оцінка залишається також правильною у випадку неповної статистики Голдейна–Ву.

5.4.6. Бозонна границя статистики Голдейна–Ву з *q*-експонентою. Як згадувалося в розділі 1, у задачах, пов'язаних із так званими *q*-деформованими комутаторами $[A, B]_q = AB - qBA$, виникають деформовані експоненти, що відрізняються від експоненти Цалліса, див. (1.66). Щоб уникнути плутанини, для однієї з цих *q*-експонент використовуватимемо позначення:

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_j}{[j]_q!},$$
(5.63)

де q-факторіал та q-числа задано формулами (1.11)–(1.12).

Загальний вигляд розкладу *q*-експоненти в ряд [104]:

$$E_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{(q-1)^n}{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q-1)} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{q-1}{q^n-1} \frac{q-1}{q^{n-1}-1} \dots \frac{q-1}{q^2-1} \frac{q-1}{q-1}.$$
(5.64)

Отже, E_q^x можна записати як

$$E_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{(1+\ldots+q^{n-1})(1+\ldots+q^{n-2})\ldots(1+q)1}$$

У границі $q \rightarrow 1$ зобразимо функцію E_q^x у вигляді ряду:

$$E_q^x = f_x(x) + (q-1)f_1(x) + (q-1)^2 f_2(x) + \dots$$
 (5.65)

Підставивши q = 1, отримаємо вираз для $f_0(x)$:

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{n!} = e^x.$$
 (5.66)

Можна також показати, що наступні члени розкладу дадуть такі коефіцієнтні функції:

$$f_1(x) = -\frac{x^2}{4}e^x,$$
(5.67)

$$f_2(x) = \frac{x^2}{8} \left(1 + \frac{17}{9}x + \frac{59}{36}x^2 + \frac{31}{36}x^3 + \frac{17}{54}x^4 + \frac{47}{540}x^5 + \frac{83}{4320}x^6 + \dots \right).$$
(5.68)

Наближення функції E_q^x у вигляді перших трьох членів розкладу, $E_q^x \simeq e^x + (q-1)f_1(x) + (q-1)^2f_2(x)$, виявляється досить точним при $x \lesssim 1$, що добре демонструє рис. 5.4.

Відхилення в діапазоні арґумента $x \in [0; 2]$ не перевищує трьох відсотків навіть за таких великих значень, як q = 1.2, див. рис. 5.5. Якщо q мало відрізняється від одиниці, то точність наближення є ще вищою, як показано в нижній частині рис. 5.5.



Рис. 5.4. Точне значення q-експоненти E_q^x (суцільна крива) порівняно з наближенням $e^x + (q-1)f_1(x) + (q-1)^2f_2(x)$ (пунктирна крива). Для наочності також зображено звичайну експоненту e^x (штрихпунктирна крива). Вгорі — q = 1.1; внизу — q = 1.2



Рис. 5.5. Відношення $[e^x + (q-1)f_1(x) + (q-1)^2 f_2(x)]/E_q^x$. Вгорі — значення q = 1.1 (суцільна крива); q = 1.2 (штрихова крива). Внизу — залежність від параметра q при x = 0.2 (суцільна крива); x = 0.5 (пунктирна крива); x = 1.0 (штрихпунктирна крива)

Модифіковану з цією експонентою статистику Голдейна–Ву визначимо так:

$$n_j^{q\text{HW}} = \frac{1}{w[z^{-1}E_q^{\varepsilon_j/T}] + g}.$$
(5.69)

Кластерні інтеґрали в цій статистиці після розкладу за малим параметром g та малим відхиленням $\theta = q - 1$ можна отримати у вигляді таких рядів:

$$\mathcal{B}_1 \lambda^2 = 1 + \frac{\theta}{54} - 1.09945 \,\theta^2, \tag{5.70}$$

$$\mathcal{B}_2 \lambda^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - g + \frac{\theta}{64} - \frac{g\theta}{32} + \frac{\theta^2}{1728} - 0.181866 \,\theta^2 \right), \tag{5.71}$$

$$\mathcal{B}_3\lambda^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{3g}{2} - \frac{3\theta}{250} + \frac{27g\theta}{500} + \frac{3g^2}{2} - 0.0604558\,\theta^2\right),\qquad(5.72)$$

$$\mathcal{B}_4\lambda^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{11g}{6} + \frac{\theta}{108} + \frac{11g\theta}{162} + 4g^2 - 0.0284194\theta^2 \right).$$
(5.73)

Звідси з такою ж точністю матимемо віріальні коефіцієнти

$$b_2^{q\text{HW}} = -\frac{1}{4} + \frac{g}{2} + 0.00144676\,\theta - 0.00289352\,g\theta - 0.459052\,\theta^2,$$
(5.74)

$$b_3^{q\rm HW} = \frac{1}{36} + 0.00145216\,\theta - 0.00798148\,g\theta + 0.225433\,\theta^2.$$
(5.75)

Прирівнюючи їх до віріальних коефіцієнтів еніонів з точністю до α^2 ,

$$b_2^{\text{series}} = -\frac{1}{4} + \alpha - \frac{\alpha^2}{2}, \qquad b_3^{\text{series}} = \frac{1}{36} + \frac{\alpha^2}{12}, \qquad (5.76)$$

отримаємо зв'язок між парою параметрів g, θ та α . Водночас матимемо для четвертого віріального коефіцієнта такий вираз:

$$b_4^{q\rm HW} = -0.000301505\,\theta - 0.00111458\,g\theta - 0.0481931\,\theta^2.$$
(5.77)

Порівняння результату в цій статистиці з еніонним, який у розглянутій границі є квадратичним за еніонним параметром,

$$b_4^{\text{series}} = 0.1100216\alpha^2, \tag{5.78}$$

показано на рис. 5.6.



Рис. 5.6. Четвертий віріальний коефіцієнт у статистиці Голдейна– Ву з q-експонентою (5.63). Суцільна лінія — результат для еніонів; пунктирна — квадратичне наближення за g, θ

Як бачимо з рис. 5.6, і в останній аналізованій статистиці четвертий віріальний коефіцієнт має знак, протилежний до еніонного b_4^{anyon} . Незважаючи на це, такі результати, подібно до отриманих у попередніх пунктах (див. також [390]), забезпечують відтворення термодинамічних функцій еніонів з точністю, яка перевищує доступні експериментальні вимірювання [389].

Цікаво зазначити, що в лінійному за малими поправками наближенні відповідні результати збігаються. Справді, з рівнянь (5.74)– (5.77) відразу бачимо, що в такій границі $\theta = 0$, тоді $g = 2\alpha$, а

$$b_4^{q\rm HW} = b_4^{\rm series} = 0.$$

Як зауважуємо з рис. 5.3–5.6 за ближчого розгляду області $\alpha \to 0$, подібною поведінкою характеризується й неадитивна модифікація статистики Голдейна–Ву.

На рис. 5.7 показано результати розрахунків у кількох модифікаціях дробової статистики, включаючи *к*-деформовані статистики Голдейна–Ву і Поліхронакоса, у яких ґіббсівський множник записують через *к*-експоненту Каніадакіса [373, 391]:

$$\exp_{\kappa}(x) = \left(\sqrt{1+\kappa^2 x^2} + \kappa x\right)^{\frac{1}{\kappa}}.$$
(5.79)

Бачимо, що правильний знак четвертого віріального коефіцієнта забезпечує лише модифікація статистики Бозе–Айнштайна. Отже, можна розвивати підхід, подібний до двопараметричних модифікацій, ґрунтуючись на розподілі Бозе–Айнштайна.



Рис. 5.7. Четвертий віріальний коефіцієнт: 1 — еніони; 2 — κ -деформована статистика Голдейна-Ву; 3 — κ -деформована статистика Поліхронакоса; 4 — статистика Джентіле з максимальним заповненням рівня d > 3 (еквівалентна тут до статистики Бозе-Айнштайна); 5 — неадитивна статистика Голдейна-Ву. Результати взято зі статті [392]

5.5. Слабконеадитивна статистика Поліхронакоса

У цьому й наступних підрозділах розглядатимемо двопараметричну модель дробової статистики, пов'язану з описом взаємодій та ефектів скінченної кількості частинок у системі бозонів. Відповідну ідеальну бозе-систему вважатимемо за вихідну, на її тлі й проводитимемо розрахунки. Особливий інтерес становлять слабковзаємодіючі скінченні системи бозонів [324, 393–396], крім того, варто також згадати деякі інші способи врахування впливу взаємодій [397–399].

Для аналізу оберемо модель, що ґрунтується на статистиці Поліхронакоса [98, 179], у якій звичайну експоненту в ґіббсівському факторі замінено на *q*-експоненту Цалліса. Як і в моделі еніонів, така заміна — чисто феноменологічна. Втім, хоча ефекти взаємодій можна враховувати через неекстенсивність/неадитивність [120], а параметр статистики Поліхронакоса пов'язаний зі способом обчислення кількості мікростанів, не потрібно очікувати, що ефекти взаємодій та скінченності системи можна буде легко розділити, відніспи їх до різних модифікацій статистики. Зокрема, як показано в попередньому розділі, саме у статистиці Поліхронакоса мала уявна частина параметра дає змогу моделювати слабку дисипативну частину спектра бозе-системи [183, 400]. Різноманітні феноменологічні аспекти статистики Цалліса також відомі [401–403].

Отже, для чисел заповнення j-го рівня системи зі спектром елементарних збуджень ε_j матимемо вираз

$$n_j = \frac{1}{z^{-1} e_q^{\varepsilon_j/T} - \gamma},$$
(5.80)

де T — температура,
аz — активність; e_q^x позначає q-експоненту Цал
ліса (5.45).

Надалі розглядатимемо малі відхилення від розподілу Бозе, тому зобразимо параметри q та γ у вигляді:

$$q = 1 - b;$$
 $\gamma = 1 + a,$ (5.81)

де а та *b* — малі поправки. Відповідну статистику називатимемо слабконеадитивною статистикою Поліхронакоса (СНАСП).

Хоча й більш природною видається деформація експоненти у вигляді $e_q^{(\varepsilon_j-\mu)/T}$ замість $z^{-1}e_q^{\varepsilon_j/T}$ із використанням хімічного потенціалу μ , порівн. [184, 374], проте вирази з активністю z виявляються математично простішими для подальшого аналізу. У границі слабкої неадитивності $q \to 1$

$$e_q^{(\varepsilon_j - \mu)/T} = e_q^{\varepsilon_j/T} e_q^{-\mu/T} \left(1 + (1 - q) \frac{\varepsilon_j \mu}{T^2} \right), \tag{5.82}$$

оскільки не існує простої факторизації *q*-експонент Цалліса [384]. Отже, активність у рівнянні (5.80) можна наближено пов'язати з хімічним потенціалом таким способом:

$$z^{-1} \simeq e_q^{-\mu/T} \left(1 + (1-q) \frac{\langle \varepsilon \rangle \mu}{T^2} \right), \qquad (5.83)$$

де залежності від j у правій стороні вдалося уникнути заміною ε_j на енергію вихідної системи (див. нижче) на одну частинку $\langle \varepsilon \rangle = E/N$.

Нехай вихідною бозе-системою є ідеальний газ зі спектром ε_j і виродженням *j*-го рівня g_j . Активність $z_{\rm B} = e^{\mu_{\rm B}/T}$, де $\mu_{\rm B}$ — хімічний потенціал, визначається з умови:

$$N = \sum_{j} \frac{g_j}{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1},$$
(5.84)

яку розумітимемо в термодинамічній границі.

Розрахунок термодинамічних функцій проведемо вже традиційним способом, описаним раніше. Насамперед, визначимо активність z як функцію температури T і кількості частинок N із рівняння

$$N = \sum_{j} g_j n_j. \tag{5.85}$$

Згодом підставимо її у вираз для енергії

$$E = \sum_{j} \varepsilon_{j} g_{j} n_{j}, \qquad (5.86)$$

з якого теплоємність можна розрахувати як похідну за температурою:

$$C = \frac{dE}{dT}.$$
(5.87)

5.5.1. Розклади за малими поправками. Оскільки ми розглядаємо малі відхилення від вихідної ідеальної бозе-системи, то можна розкласти активності в ряд в околі *z*_B. Нехай

$$z = z_{\rm B} + \Delta z_1 \tag{5.88}$$

для слабконеадитивної статистики і

$$z = z_{\rm B} + \Delta z \tag{5.89}$$

для слабковзаємодіючої скінченної бозе-системи.

У лінійному за малими поправками наближенні числа заповнення у СНАСП будуть такими:

$$m_{j} = \frac{1}{(z_{\rm B} + \Delta z_{1})^{-1} e_{1-b}^{\varepsilon_{j}/T} - (1+a)} =$$

$$= \frac{1}{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_{j}/T} - 1} + a \frac{1}{[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_{j}/T} - 1]^{2}} + \frac{b\varepsilon_{j}^{2}}{2T^{2}} \frac{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_{j}/T}}{[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_{j}/T} - 1]^{2}} + \frac{\Delta z_{1}}{z_{\rm B}} \frac{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_{j}/T} - 1}{[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_{j}/T} - 1]^{2}}.$$
(5.90)

Їх можна зіставити з числами заповнення бозе-системи зі взаємодією:

$$n_{j} = \frac{1}{(z_{\rm B} + \Delta z)^{-1} e^{(\varepsilon_{j} + \Delta \varepsilon_{j})/T} - 1} =$$
(5.91)

$$=\frac{1}{z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}-1}-\frac{\Delta\varepsilon_j}{T}\frac{z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}-1\right]^2}+\frac{\Delta z}{z_{\rm B}}\frac{z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}-1\right]^2}.$$

Порівнюючи доданки з b у рівнянні (5.90) і з $\Delta \varepsilon_j$ в (5.91), можна припустити, що саме параметр неадитивності b є (головно) відповідальним за ефективне врахування міжчастинкових взаємодій.

Наведені вище розклади запишемо в «макроскопічній» формі, використовуючи співвідношення

$$N = \sum_{j} g_{j} n_{j} = \sum_{j} \frac{g_{j}}{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_{j}/T} - 1}$$
(5.92)

та допоміжне позначення

$$Q = \sum_{j} \frac{g_{j}}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_{j}/T} - 1\right]^{2}},$$
(5.93)

отже,

$$N = N + aQ + \frac{\Delta z_1}{z_{\rm B}}(N+Q) + \frac{b}{2T^2} \sum_j g_j \varepsilon_j^2 \frac{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1\right]^2}$$
(5.94)

i

$$N = N + \frac{\Delta z}{z_{\rm B}}(N+Q) - \frac{1}{T}\sum_{j} g_{j}\Delta\varepsilon_{j} \frac{z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_{j}/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_{j}/T} - 1\right]^{2}}.$$
 (5.95)

З іншого боку, для енергії слабковзаємодіючої бозе-системи маємо

$$E = \sum_{j} (\varepsilon_j + \Delta \varepsilon_j) g_j n_j =$$

$$= E_{\rm B} + \frac{\Delta z}{z_{\rm B}} (E_{\rm B} + D_{\rm B}) + \sum_{j} g_j \Delta \varepsilon_j \frac{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} (1 - \varepsilon_j/T) - 1}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1\right]^2},$$
(5.96)

де

$$E_{\rm B} = \sum_{j} \varepsilon_j g_j n_j = \sum_{j} \frac{g_j \varepsilon_j}{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1},$$
(5.97)

$$D_{\rm B} = \sum_{j} \frac{g_j \varepsilon_j}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1\right]^2}.$$
(5.98)

Енергію системи зі СНАСП визначає вираз:

$$E = \sum_{j} \varepsilon_{j} g_{j} n_{j} = \tag{5.99}$$

$$= E_{\rm B} + aD_{\rm B} + \frac{\Delta z_1}{z_{\rm B}}(E_{\rm B} + D_{\rm B}) + \frac{b}{2T^2} \sum_j g_j \varepsilon_j^3 \frac{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1\right]^2}.$$

Щоб пов'язати параметри a, b з величинами, які характеризують скінченну слабковзаємодіючу бозе-систему (а саме з поправкою до спектра $\Delta \varepsilon_j$ і поправкою до активності Δz), можна скористатися такою системою рівнянь:

(i)
$$aQ + \frac{\Delta z_1}{z_{\rm B}}(N+Q) + \frac{b}{2}\sum_j g_j \left(\frac{\varepsilon_j}{T}\right)^2 \frac{z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_j/T} - 1\right]^2} = 0,$$

(ii)
$$\frac{\Delta z}{z_{\rm B}}(N+Q) - \frac{1}{T}\sum_{j}g_{j}\Delta\varepsilon_{j}\frac{z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_{j}/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1}e^{\varepsilon_{j}/T} - 1\right]^{2}} = 0,$$
 (5.100)

(iii)
$$aD_{\rm B} + \frac{\Delta z_1}{z_{\rm B}} (E_{\rm B} + D_{\rm B}) + \frac{b}{2} \sum_j g_j \varepsilon_j \left(\frac{\varepsilon_j}{T}\right)^2 \frac{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T}}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1\right]^2} = \frac{\Delta z}{z_{\rm B}} (E_{\rm B} + D_{\rm B}) + \sum_j g_j \Delta \varepsilon_j \frac{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} (1 - \varepsilon_j/T) - 1}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1\right]^2}.$$

Рівняння (іі) просто дає змогу пов'язати поправку Δz безпосередньо з $\Delta \varepsilon_j$ у лінійному наближенні. Тому насправді потрібно знайти ще одне рівняння, оскільки поправка до активності Δz_1 у СНАСП є третім невідомим параметром.

Перед тим, як перейти до розрахунків термодинамічних функцій систем зі СНАСП, варто оцінити значення параметрів *a*, *b* для деяких модельних або реальних фізичних систем.

5.5.2. Тривимірні гармонічні осцилятори. Далі розглянемо систему тривимірних ізотропних гармонічних осциляторів з частотою ω . Така модель описує частинки в зовнішньому ізотропному гармонічному потенціалі. Для зручності перейдемо від підсу-

мовування за станами до інтеґрування за правилом

$$\sum_{j} g_{j} \ldots = \int_{0}^{\infty} d\varepsilon \, g(\varepsilon) \ldots,$$

де густина станів

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{(\hbar\omega)^3} \frac{\varepsilon^2}{2}.$$
 (5.101)

Оскільки g(0) = 0, то внесок від основного стану j = 0 потрібно виписати явно для температур, що відповідають фазі бозе-конденсату.

Вираз (5.92) перетвориться на

$$N = n_0 + \frac{1}{(\hbar\omega)^3} \int_0^\infty d\varepsilon \, \frac{\varepsilon^2/2}{z_{\rm B}^{-1} e^{\varepsilon/T} - 1} = n_0 + \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^3 {\rm Li}_3(z_{\rm B}) \,. \quad (5.102)$$

Енергія (5.97) дорівнює

$$E_{\rm B} = \hbar \omega \left(\frac{T}{\hbar \omega}\right)^4 {\rm Li}_4(z_{\rm B}),$$
 (5.103)

причому умова, що визначає термодинамічну границю для тривимірної системи гармонічних осциляторів, має вигляд [404]:

$$\omega N^{1/3} = \text{const.} \tag{5.104}$$

Поправку до спектра за рахунок міжчастинкових взаємодій з дельта-подібним потенціалом $\Phi(\mathbf{r}) = \lambda \delta(\mathbf{r})$, де $\lambda = 4\pi \hbar^2 a_s/m$ — константа зв'язку, а m — маса атома, можна оцінити зверху таким виразом (порівн. [309] і розділ 3):

$$\Delta \varepsilon_j = \hbar \omega N \frac{\gamma}{j+1}, \qquad \text{ge} \qquad \gamma = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{a_s}{a_{\text{ho}}}.$$
 (5.105)

У наведених вище рівняннях a_s — це довжина розсіяння *s*-хвилі, а $a_{\rm ho} = \sqrt{\hbar/m\omega}$.

Виконуючи інтеґрування в (5.100), можна звести рівняння до такого вигляду:

$$a \left[\text{Li}_{2} \left(z_{\text{B}} \right) - \text{Li}_{3} \left(z_{\text{B}} \right) \right] + \frac{\Delta z_{1}}{z_{\text{B}}} \text{Li}_{2} \left(z_{\text{B}} \right) + 6b \text{Li}_{4} \left(z_{\text{B}} \right) = 0,$$
(5.106)

$$a \left[\text{Li}_{3} (z_{\text{B}}) - \text{Li}_{4} (z_{\text{B}}) \right] + \frac{\Delta z_{1}}{z_{\text{B}}} \text{Li}_{3} (z_{\text{B}}) + 10b \text{Li}_{5} (z_{\text{B}}) =$$
$$= \frac{\Delta z}{z_{\text{B}}} \text{Li}_{3} (z_{\text{B}}) + \int_{0}^{\infty} d\xi \ \xi^{2} \frac{\Delta \varepsilon(\xi)}{T} \frac{z_{\text{B}}^{-1} e^{\xi} (1 - \xi) - 1}{\left[z_{\text{B}}^{-1} e^{\xi} - 1 \right]^{2}},$$

причому

$$\frac{\Delta z}{z_{\rm B}} = \frac{1}{\rm Li_2} \left(z_{\rm B} \right) \int_0^\infty d\xi \, \xi^2 \, \frac{\Delta \varepsilon(\xi)}{T} \, \frac{z_{\rm B}^{-1} e^{\xi}}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\xi} - 1 \right]^2}.$$
 (5.107)

Звідси отримаємо

$$aA(z_{\rm B},T) + bB(z_{\rm B},T) =$$

$$= \left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^2 N\frac{\gamma}{2} \Big[X(z_{\rm B},T) + Y(z_{\rm B},T)\Big], \qquad (5.108)$$

де

$$A(z_{\rm B},T) = \frac{{\rm Li}_3(z_{\rm B})}{{\rm Li}_2(z_{\rm B})} - \frac{{\rm Li}_4(z_{\rm B})}{{\rm Li}_3(z_{\rm B})},$$
(5.109)

$$B(z_{\rm B},T) = 10 \frac{{\rm Li}_5(z_{\rm B})}{{\rm Li}_3(z_{\rm B})} - 6 \frac{{\rm Li}_4(z_{\rm B})}{{\rm Li}_2(z_{\rm B})},$$
(5.110)

$$X(z_{\rm B},T) = \frac{1}{\rm Li_2} \left(z_{\rm B} \right) \int_0^\infty d\xi \, \frac{\xi^2}{\xi + \hbar\omega/T} \, \frac{z_{\rm B}^{-1} e^{\xi}}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\xi} - 1 \right]^2},\tag{5.111}$$

$$Y(z_{\rm B},T) = \frac{1}{{\rm Li}_3\left(z_{\rm B}\right)} \int_0^\infty d\xi \, \frac{\xi^2}{\xi + \hbar\omega/T} \, \frac{z_{\rm B}^{-1} e^{\xi} (1-\xi) - 1}{\left[z_{\rm B}^{-1} e^{\xi} - 1\right]^2}.$$
 (5.112)

Варто зазначити, що у всіх виразах фіґурують звичайні полілогарифми, як у теорії бозе-систем. Натомість побудова термодинаміки *q*-деформованих модифікацій бозе-газу (в сенсі *q*-мутаторів замість звичайних комутаційних співвідношень, див. стор. 21) пов'язана з відповідними *q*-аналогами полілогарифмів [405].

Отже, параметри a, b виявляються залежними від температури. Однак коефіцієнтні функції в (5.108) достатньо гладкі, тому для розрахунків у певному температурному інтервалі значення T можна зафіксувати, як показано в наступному підрозділі.

З іншого боку, вдається безпосереднь
о показати, що у границі $T\to\infty$ активність прямує до нуля як

$$z_{\rm B}\Big|_{T\to\infty} = N\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^3.$$
 (5.113)

Коефіцієнтні функції $A(z_{\rm B},T)$ та $B(z_{\rm B},T)$ у цій границі дорівнюють

$$A(z_{\rm B},T) = -\frac{1}{16}z_{\rm B}, \qquad B(z_{\rm B},T) = 4,$$
 (5.114)

а для $X(z_{\rm B},T)$ та $Y(z_{\rm B},T)$ маємо

$$X(z_{\rm B},T), Y(z_{\rm B},T) \to \text{const.}$$
 (5.115)

Тому з рівняння (5.108) зрозуміло, що

$$-\frac{1}{16}aN\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^3 + 4b \propto \frac{1}{T^2},\tag{5.116}$$

тобто у високотемпературній границі поведінка параметрів a та b така:

$$a \propto T^{\nu}$$
 ge $\nu \le 0$, $b \propto \frac{1}{T^2}$, (5.117)

а отже, при $T \to \infty$ потрібно очікувати класичних результатів, що не відчувають ніякого впливу деформації статистики.

5.5.3. Критична температура тривимірної системи. Рівняння, яке би доповнювало систему (5.108), можна знайти, наприклад, з означення критичної температури скінченної слабковзаємодіючої бозе-системи.

У термодинамічній границі критичну температуру T_c системи зі СНАСП, яка відповідає фазовому переходу, аналогічному до бозеконденсації, визначають умовою, яка у тривимірному випадку має вигляд:

$$N = \left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^3 \int_0^\infty \frac{\xi^2/2}{(1+a)e_{1-b}^{\xi} - (1+a)} \, d\xi, \qquad (5.118)$$

де взято до уваги критичне значення активності $z_c^{-1} = 1 + a$. З точністю до лінійних поправок рівняння (5.118) стане:

$$N = \left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^3 \zeta(3) \left[1 - a + b \frac{6\zeta(4)}{\zeta(3)}\right], \qquad (5.119)$$

де $\zeta(s)$ — дзета-функція Рімана, $\zeta(s) = \text{Li}_s(1)$. Критична температура вихідної ідеальної бозе-системи дорівнює

$$T_c^{\rm B} = \hbar \omega \left(\frac{N}{\zeta(3)}\right)^{1/3},\tag{5.120}$$

тому для T_c легко отримуємо:

$$T_c = T_c^{\rm B} \left[1 + \frac{a}{3} - b \frac{2\zeta(4)}{\zeta(3)} \right].$$
 (5.121)

Зсув критичної температури скінченної бозе-системи N частинок визначає вираз [321, 363]:

$$\frac{\Delta T_c^{\text{fin}}}{T_c^{\text{B}}} = -\frac{1}{2} \frac{\zeta(2)}{[\zeta(3)]^{2/3}} N^{-1/3}, \qquad (5.122)$$

а зсув, спричинений впливом міжчастинкових взаємодій, дорівнює [321]:

$$\frac{\Delta T_c^{\text{int}}}{T_c^{\text{B}}} = -1.33 \frac{a_s}{a_{\text{ho}}} N^{1/6}, \qquad (5.123)$$

де, як і вище, довжина гармонічного осцилятора $a_{\rm ho} = \sqrt{\hbar/m\omega}$, а a_s — довжина розсіяння *s*-хвилі. Зазначмо, що в термодинамічній границі

$$\frac{a_s}{a_{\rm ho}} N^{1/6} \propto \left(\omega N^{1/3}\right)^{1/2} = \text{const}$$
(5.124)

не залежить від кількості частинок N.

Порівнюючи рівняння (5.121)–(5.123), отримаємо таке співвідношення, що пов'язує величини *a*, *b* з параметрами системи:

$$\frac{a}{3} - b \frac{2\zeta(4)}{\zeta(3)} = -\frac{1}{2} \frac{\zeta(2)}{[\zeta(3)]^{2/3}} N^{-1/3} - 1.33 \frac{a_s}{a_{\rm ho}} N^{1/6}.$$
 (5.125)

Для системи 5000 атомів Rb-87 [321] відношення $a_s/a_{\rm ho} \simeq 2.6 \cdot 10^{-3}$. Припустивши, що параметр *a* повністю відповідальний за ефекти скінченності кількості частинок, а параметр *b* — за вплив міжчастинкових взаємодій, з виразу (5.125) будемо мати такі значення:

$$a = -0.13, \qquad b = 0.022.$$
 (5.126)

З іншого боку, розв'язуючи систему (5.108) разом з (5.125), отримаємо дещо інші значення:

$$a = -0.16, \qquad b = 0.0027.$$
 (5.127)

Результати розрахунків питомої теплоємності C/N системи зі СНАСП з параметрами, що відповідають (5.127), показано на рис. 5.8.

Потрібно сказати, що гладку поведінку питомої теплоємності в околі критичної температури у випадку скінченної бозе-системи у запропонованому підході не вдається змоделювати правильно. Можливим розв'язком цієї проблеми є розгляд скінченної системи зі СНАСП, що би забезпечило відповідну залежність.

Кількість частино
к n_0 в основному стані, який у системі зі СНАСП є аналогом бозе-конденсату, можна досить просто розрахувати як

$$\frac{n_0}{N} = 1 - \frac{1}{N} \frac{1}{1+a} \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^3 \int_0^\infty \frac{\xi^2/2}{e_{1-b}^\xi - 1} \, d\xi.$$
(5.128)



Рис. 5.8. Питома теплоємність ідеального бозе-газу тривимірних гармонічних осциляторів (суцільна лінія — термодинамічна границя, пунктирна лінія — N = 5000) порівняно з системою зі СНАСП (штрихпунктирна лінія) у термодинамічній границі з параметрами (5.127). У термодинамічній границі на кривих C/N у критичній точці є розриви, однак відповідні значення з'єднано лініями для кращої візуалізації

Використовуючи параметри з (5.127), отримаємо таку температурну залежність для N = 5000:

$$\frac{n_0}{N} = 1 - \frac{1.45}{N} \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^3.$$
 (5.129)

На рис. 5.9 показано порівняння цього результату з вихідною бозесистемою. Форма залежностей дуже подібна до отриманих у праці [321, 406].

5.5.4. Теплоємність модельних систем зі СНАСП. Маючи оцінку значень параметрів статистики *a* та *b*, можна перейти до розрахунків термодинамічних функцій модельних систем зі СПАСП. Далі в цьому підрозділі проаналізовано дві модифікації статистики. У першій параметри *a*, *b* не залежать від температури.



Рис. 5.9. Частка конденсату n_0/N ідеальної бозе-системи тривимірних гармонічних осциляторів (суцільна лінія — термодинамічна границя, пунктирна лінія — N = 5000) порівняно з системою зі СНАСП (штрихпунктирна лінія) у термодинамічній границі з параметрами, заданими формулою (5.127)

У другій параметр a — сталий, однак $b = 2\eta T/\hbar\omega$, так що доданки, які містять b в рівнянні (5.90) і $\Delta \varepsilon_j$ — в (5.91), стають подібними за структурою.

Справді, якщо ми припустимо, що виконується друга модифікація статистики, то зсув спектра дорівнює

$$\Delta \varepsilon_j = -\frac{b\varepsilon_j^2}{2T} = -\eta \frac{\varepsilon_j^2}{\hbar\omega} = -\eta \hbar\omega j^2.$$
 (5.130)

Цікаво, що така залежність відповідає задачам в межах підходу деформованих алґебр Гайзенберґа. А саме, гармонічний осцилятор з комутаційними співвідношеннями між координатою та імпульсом у вигляді

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar (1 + \beta \hat{p}^2) \tag{5.131}$$

має спектр [407, 408]

$$\varepsilon_j = \hbar \bar{\omega} j + \frac{\beta}{2} j^2 + \text{const},$$
 (5.132)

де $\bar{\omega}$ позначає певну константу, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Однак через надзвичайно малі оцінки значень β вплив на термодинамічні властивості буде неспостережуваним.



Рис. 5.10. Питома теплоємність модельної системи зі СНАСП при b = const у термодинамічній границі для різних значень параметрів статистики. Штрихпунктирні лінії — b = 0.1; суцільні лінії — b = 0.05; штрихові лінії — b = 0.01. Відповідність кольорів: червоний — a = -0.1; зелений — a = +0.05; синій — a = +0.1. Суцільна чорна лінія відповідає ідеальній бозе-системі

Результати розрахунків теплоємності показано на рис. 5.10–5.11 порівняно з вихідною ідеальною бозе-системою. Значення параметрів статистики вибрано відповідно до оцінок, зроблених у попередньому підрозділі. Зауважмо, що модель з $b \propto T$ правильна лише в обмеженому температурному інтервалі, оскільки система перестає бути слабконеадитивною, коли $T \to \infty$.

Водночас цікаво зазначити, що поведінка теплоємності, наведена на рис. 5.11 (тобто в моделі $b \propto T$), якісно відповідає результатам, отриманим раніше у праці [409] для гелію-4. Це є ще одним підтвердженням можливості використання запропонованої моделі для вивчення бозе-систем зі взаємодією.



Рис. 5.11. Питома теплоємність модельної системи зі СНАСП при $b = 2\eta T/\hbar\omega$ у термодинамічній границі для різних значень параметрів статистики. Червона штрихпунктирна лінія — $a = 0, \eta = 0.0005$; зелена пунктирна — $a = -0.05, \eta = 0.001$; синя штрихова — $a = -0.01, \eta = 0.0025$. Суцільна чорна лінія відповідає ідеальній бозе-системі

У моделі з b = const асимптотичне значення питомої теплоємності при $T \to \infty$ можна визначити так. Активність прямує до нуля у цій границі, тому рівняння (5.102) у випадку задачі про гармонічні осцилятори, яку ми розглядаємо, спрощується до вигляду:

$$N = \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^3 \frac{z}{2} \int_0^\infty d\xi \, \frac{\xi^2}{e_{1-b}^\xi}.$$
(5.133)

Застосовуючи співвідношення [384]

$$\left[e_q^{f(x)}\right]^p = e_{1-(1-q)/p}^{pf(x)},\tag{5.134}$$

цей інтеґрал можна розрахувати за допомогою

$$\int_{0}^{\infty} d\xi \,\xi^{k-1} e_{1+b}^{-\xi} = \frac{b^{-k} \Gamma(1/b-k) \Gamma(k)}{\Gamma(1/b)}.$$
(5.135)

Енергія в цій границі дорівнюватиме

$$E = \hbar\omega \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^4 \frac{z}{2} \int_0^\infty d\xi \, \frac{\xi^3}{e_{1-b}^\xi}.$$
 (5.136)

Після нескладних перетворень для z отримаємо

$$z = N \left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^3 \frac{(1 - 6b + 11b^2 - 6b^3)}{2},$$
 (5.137)

а вираз для теплоємності буде

$$\left. \frac{C}{N} \right|_{T \to \infty} = \frac{3}{1 - 4b},\tag{5.138}$$

тобто параметр a не входить у високотемпературну границю C.

5.6. Висновки до розділу 5

У цьому розділі розглянуто двопараметричні моделі дробової статистики. Одним із їх застосувань є визначення функціональної форми виразу для чисел заповнення вільних еніонів. Показано, що наближену відповідність із еніонною статистикою можна встановити у випадку неадитивної статистики Поліхронакоса та неадитивної й неповної статистик Голдейна–Ву. У цих випадках досягнуто правильної поведінки другого й третього віріального коефіцієнтів, а різниця в четвертому віріальному коефіцієнті спричиняє незначну поправку в рівнянні стану. Для обидвох модифікацій статистики Голдейна–Ву зв'язок між параметрами g, q та еніонним параметром α існує в усьому діапазоні зміни останнього $\alpha \in [0; 1]$, на відміну від неадитивної статистики Поліхронакоса.

Отже, слушно шукати вирази для еніонної функції розподілу серед модифікацій статистики Голдейна–Ву. Можливі узагальнення — це різноманітні вирази для *q*-експонент [410] та *z*-деформовані експоненти [373, 391]. Крім того, узгодження до четвертого віріального коефіцієнта включно можна досягти, розглядаючи двопараметричні модифікації експонент [150, 411–413] замість однопараметричних. Також можливий аналіз *q*-деформованих статистик Бозе та Фермі [147, 414] із додатковими параметрами.

Оскільки віріальний розклад правильний за високих температур/малих густин, певний інтерес також становить аналіз співвідношень між запропонованими двопараметричними моделями статистики та еніонами в низькотемпературній області за допомогою інших підходів, що потребує додаткових досліджень.

Двопараметричну модифікацію статистики Поліхронакоса у границі слабкої неадитивності (СНАСП) також застосовано до моделювання слабковзаємодіючої скінченної бозе-системи. Показано, що параметри такої статистики можна пов'язати з ефектами взаємодій та поправками на скінченність кількості частинок.

Спрощену модель СНАСП використано для опису системи 5000 атомів Rb-87 у тривимірній гармонічній пастці. Питому теплоємність C/N системи тривимірних гармонічних осциляторів також розраховано за різних значень параметрів статистики a, b з метою демонстрації температурної залежності C/N в області, що включає точку фазового переходу, аналогічного до бозе-конденсації.

Можна очікувати, що СНАСП слугуватиме альтернативною математичною моделлю бозе-систем зі слабкими міжчастинковими взаємодіями та/або скінченною кількістю частинок. Коректне відтворення критичної поведінки в околі точки фазового переходу потребує додаткової перевірки на підставі експериментальних спостережень. Після незначних модифікацій запропоновану модель можна використовувати для ефективного опису інших споріднених систем, зокрема осциляторів у нижчих просторових розмірностях, що відповідає системам у дво- та одновимірних пастках.

Серед інших фізичних систем, для яких застосовною виглядає розглянута двопараметрична статистика, — частинки у просторах з мінімальною довжиною, що відповідають деформованій алґебрі Гайзенберґа. Крім того, можна очікувати ефективного опису систем із далекосяжними взаємодіями та іншою складною поведінкою, пов'язаною з неадитивністю ентропії.

Розділ 6

СТАТИСТИЧНА МЕХАНІКА В ЗАДАЧІ ПРО РОЗБИТТЯ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Was wir mathematisch festlegen, ist nur zum kleinen Teil ein objektives Faktum, zum größeren Teil eine Übersicht über Möglichkeiten.

(Werner Heisenberg, «Schritte über Grenzen», 1971)

6.1. Вступ

Задачу про розбиття натуральних чисел, яка походить ще з робіт Ляйбніца [415] й Ейлера [416], застосовують не лише в математиці, а й у різних галузях фізики. У математиці — це, зокрема, комбінаторика та теорія ймовірностей, в той час як у фізиці відповідні задачі належать до теорії кристалів, теорії перколяції, квантової статистики тощо, див. [417] та посилання там.

Розбиттям натурального числа n називають спосіб його запису як суми натуральних чисел (їх називають частинами), де порядок доданків несуттєвий. Кількість розбиттів називають функцією розбиття і позначають p(n) [418, Ch. 1]. Наприклад, розглянемо числа від 1 до 5. Їх можна подати так:

Отже, p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5, p(5) = 7. Насправді, функція p(n) швидко зростає: p(10) = 42, p(100) = 190569292, а p(200) = 3972999029388 [359, р. 836].

Описані розбиття називають *простими, одновимірними* або *лінійними*. У 1917 р. Гарді та Рамануджан [419, 420] навели асимптотичну оцінку кількості розбиттів натуральних чисел за великих *n* у вигляді:

$$p(n) = \frac{1}{4\sqrt{3}n} \exp\left\{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right\}.$$
(6.1)

Ці автори також отримали асимптотичний розклад функції p(n). Через двадцять років Радемахер вивів збіжний ряд для p(n) [421].

Якщо натуральне число
 nзаписувати як суму $s\mathchar`-x$ степенів натуральних чис
ел, наприклад,

$$5 = 2^2 + 1^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2,$$

то узагальненням уведеної функції p(n) буде деяка $p^{s}(n)$: $p^{2}(5) = 2$.

$$p(n) \equiv p^1(n).$$

Хоча порядок доданків у сумі не має значення (перестановка не дає нового розбиття), для зручності їх записують у незростаючому порядку, як і показано у наведених прикладах.

Розглянуті розбиття цілих чисел називають необмеженими. Однак, на частини розбиття можна накладати різні обмеження: вимагати, щоб вони були парними/непарними, перебували в певному інтервалі значень тощо. Найпростішим є обмеження на кількість частин $\leq N$, і саме такі обмежені розбиття ми далі позначатимемо $p_N(n)$.

Асимптотичний вираз для кількості розбиттів числа n на щонайбільше N частин вперше отримали Ердьош і Ленер [422] у вигляді:

$$\ln \frac{p_N(n)}{p(n)} = -\frac{\sqrt{6n}}{\pi} e^{-\pi N/\sqrt{6n}}.$$
(6.2)

Поняття розбиттів можна узагальнити на багатовимірні випадки, про що детальніше буде сказано у відповідних підрозділах.

6.2. Фізична аналогія та метод розрахунку

На зв'язок між фізичною задачею і розбиттями натуральних чисел уперше вказали Бор і Калькар 1937 р. [423], розглядаючи розрахунок густини енерґетичних рівнів важких ядер. Того ж року Ван Лір і Уленбек зауважили зв'язок між обчисленням кількості мікростанів бозе- та фермі-систем і деякими задачами про розбиття [424]. Досить ґрунтовну бібліографію про співвідношення фізичних задач і розбиттів можна знайти за адресою http://empslocal.ex.ac. uk/people/staff/mrwatkin//zeta/partitioning.htm. Короткий огляд містить також праця [425].

Вивчення розбиттів натуральних чисел із використанням підходів статистичної механіки до ансамблів квантових частинок проводили Олак і Котарі [426], Темперлі [427], Нанда [428], Дутта [429, 430] та багато інших. Останнім часом особливу увагу звертали на флюктуації у квантових ансамблях та вплив скінченності системи [58–60, 158], див. також серію праць Ґроссмана і Гольгауса [431–433]. Плоскі розбиття пов'язані з задачами теорії кристалів, випадковими блуканнями на ґратці та різними задачами статистичної фізики [417].

Використаний тут підхід переважно ґрунтується на праці [58]. Головна ідея полягає в аналогії між підрахунком кількості мікростанів квантової системи бозонних гармонічних осциляторів і кількістю розбиттів натуральних чисел, яка є досить прозорою. Розгляньмо для простоти перший нетривіальний випадок розбиття числа n = 3:

3, 2+1, 1+1+1.

Отже, як зазначено у вступі, p(3) = 3.

Далі розглянемо систему одновимірних квантових гармонічних осциляторів з частотою ω , які підкоряються статистиці Бозе. Спробуймо підрахувати, скількома способами можна розподілити енерґію $E = 3\hbar\omega$ у цій системі. Кожен осцилятор може перебувати на енерґетичних рівнях $\varepsilon_j = \hbar\omega(j + 1/2)$, де 1/2 від основного стану можна відкинути для зручності:

$$\varepsilon_j = \hbar \omega j, \qquad j = 0, 1, 2, 3 \dots$$
 (6.3)

 \mathfrak{E} такі можливості отримати $E = 3\hbar\omega$:

- перевести одну частинку у збуджений стан із j = 3;
- перевести одну частинку у стан із j = 2, а другу у стан із j = 1. Зауважмо, що квантові частинки нерозрізнювальні!
- перевести усі три частинки у стани з j = 1.

Решта частинок системи перебуватиме в основному стані з j = 0. Можливість того, що декілька частинок перебувають в одному стані, забезпечує статистика Бозе. Ці міркування проілюстровано на рис. 6.1.



Рис. 6.1. Усі можливі реалізації стану з енергією $E=3\hbar\omega$ в системі гармонічних осциляторів

Таким чином, довільність порядку доданків у розбитті еквівалентна нерозрізнювальності квантових частинок. Кількість однакових частин може досягати довільного значення, як і заповнення квантового стану в бозе-статистиці. Більш того, очевидною є відповідність між необмеженими розбиттями і бозе-системою з безмежною кількістю частинок, а також між обмеженими розбиттями (з обмеженою кількістю частин) і скінченною системою бозонів. Деякі інші типи розбиттів також можна пов'язати з фізичними задачами. Зокрема, розбиття на неповторювані доданки (англ. *distinct partitions*) відповідають фермі-системам. Приклад такого розбиття числа 5:

$$5: 5 = 4 + 1 = 3 + 2.$$

Якщо всі частини не перевищують деякого *s*, то такі розбиття відповідають системі зі статистикою Джентіле [158]. Приклад для числа 5 наведено нижче:

5 :
$$1+1+1+1+1=2+1+1+1=$$

= $3+1+1=4+1=2+2+1=3+2 = 5$ для $s=3$.

Можна також розглядати розбиття на степені натуральних чисел, скажімо так:

5 :
$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 2^2 + 1^2$$
,

що відповідає системі вільних бозонів, оскільки тоді спектр $\varepsilon_j \propto j^2$.

Щоби пов'язати статистико-механічну задачу з її відповідником у теорії чисел, використовуватимемо такий метод. Статистична сума $Z(\beta)$ виражається через кількість мікростанів $\Gamma(E)$ як перетворення Лапласа [58, 432, 434]:

$$Z(\beta) = \int_{0}^{\infty} \Gamma(E) e^{-\beta E} dE,$$

$$\Gamma(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} Z(\beta) \, e^{\beta E} \, d\beta, \qquad (6.4)$$

де $\beta=1/T$ — обернена температура.

Після низки перетворень, використовуючи метод перевалу, для кількості мікростанів отримаємо

$$\Gamma(E) = \frac{\mathrm{e}^{S(\beta_0)}}{\sqrt{2\pi S''(\beta_0)}},\tag{6.5}$$

де ентропія дорівнює

$$S(\beta) = \beta E + \ln Z(\beta), \tag{6.6}$$

а
 β_0 — стаціонарна точка,

$$S'(\beta_0) = 0. (6.7)$$

Із цього виразу можна отримати оцінку кількості розбиттів натурального числа n, розглядаючи статистичні суми відповідної фізичної системи з подальшою заміною енерґії E на n:

$$E \to n, \qquad \Gamma(E) \to p(n).$$
 (6.8)

У наступних підрозділах цей підхід застосовуватимемо до лінійних і плоских розбиттів, як необмежених, так і обмежених, а також для оцінки асимптотики кількості багатовимірних розбиттів.

6.3. Необмежені розбиття

6.3.1. Одновимірний випадок. У випадку одновимірних гармонічних осциляторів зі статистикою Бозе статистична сума системи з безмежною кількістю частинок дорівнює

$$Z(\beta) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega j}}.$$
(6.9)

Для простоти надалі вважатимемо одиницю вимірювання енергії і температури $\hbar \omega = 1$.

Ентропія цієї системи буде

$$S(\beta) = \beta E + \ln Z(\beta) = \beta E - \sum_{j=1}^{\infty} \ln \left(1 - e^{-\beta j}\right).$$

$$(6.10)$$

За допомогою формули Ейлера–Маклорена [359, р. 16]

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(j) = \int_{1}^{\infty} f(x) \, dx + \frac{f(1)}{2} - \frac{1}{12} \, f'(1) + \dots \tag{6.11}$$

отримаємо у границі $\beta \to 0$ (саме вона нас цікавить, оскільки ми сподіваємося знайти асимптотичний вираз для великих значень енергії $E \gg 1$ або, відтворюючи одиниці, $E \gg \hbar \omega$):

$$S(\beta) = \frac{\pi^2}{6\beta} + \frac{1}{2}\ln\beta - \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(E - \frac{1}{24}\right)\beta + \dots$$
 (6.12)

Варто відзначити появу 1/24 біля енергії: така дрібна поправка виникає у формулі, що уточнює головну асимптотику [420, 421]. У границі великих E (або еквівалентно — великих n) її можна відкинути.

Стаціонарна точка, що задовольняє умову $S'(\beta_0) = 0$, дорівнює

$$\beta_0 = \frac{\pi}{\sqrt{6E}}.\tag{6.13}$$

Отже, за допомогою $S''(\beta_0) = \frac{2\sqrt{6}}{\pi} E^{3/2}$ отримаємо:

$$\Gamma(E) = \frac{1}{4\sqrt{3}E} e^{\pi\sqrt{2E/3}}, \quad \text{звідки} \quad p(n) = \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{2n/3}}, \quad (6.14)$$

що точно відтворює результат Гарді і Рамануджана.

6.3.2. Двовимірний випадок. У двовимірній задачі виведення лише незначно відрізняється від одновимірного. Потрібно розглядати двовимірну систему ізотропних гармонічних осциляторів. З урахуванням кратності виродження *j*-го енерґетичного рівня отримаємо для ентропії

$$S(\beta) = \beta E + \ln Z(\beta) = \beta E - \sum_{j=1}^{\infty} j \ln \left(1 - e^{-\beta j}\right) =$$
$$= \beta E + \frac{\zeta(3)}{\beta^2} + \frac{1}{12} \ln \beta - \frac{1}{6} + \dots$$
(6.15)

У цьому випадку стаціонарна точка дорівнює

$$\beta_0 = \left(\frac{2\zeta(3)}{E}\right)^{1/3},\tag{6.16}$$

де $\zeta(x)$ — дзета-функція Рімана.

Ураховуючи, що $S''(\beta_0) = \frac{3}{[2\zeta(3)]^{1/3}} E^{4/3}$, отримаємо кількість мікростанів:

$$\Gamma^{2D}(E) = \frac{[2\zeta(3)]^{7/36}}{\sqrt{6\pi}} E^{-25/36} \exp\left\{\frac{3}{2}[2\zeta(3)]^{1/3}E^{2/3} - \frac{1}{6}\right\}.$$
 (6.17)

Отже,

$$p^{\text{2D}}(n) = \frac{[2\zeta(3)]^{7/36}}{\sqrt{6\pi}} n^{-25/36} \exp\left\{\frac{3}{2}[2\zeta(3)]^{1/3}n^{2/3} - \frac{1}{6}\right\}.$$
 (6.18)

Цей результат дещо відрізняється від формули Райта [435]:

$$p_{\text{Wright}}^{\text{2D}}(n) = \frac{[2\zeta(3)]^{7/36}}{\sqrt{6\pi}} n^{-25/36} \exp\left\{\frac{3}{2}[2\zeta(3)]^{1/3}n^{2/3} + c\right\}, \quad (6.19)$$

де

$$c = \zeta'(-1) = -0.165421\dots$$
 порівняно з $-\frac{1}{6} = -0.166666\dots$

Щоб відтворити правильне значення *c*, потрібно підсумувати асимптотичний ряд у формулі Ейлера–Маклорена [436]:

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(j) = \int_{1}^{\infty} f(x) \, dx + \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{k_{\max}} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \, f^{(2k-1)}(1) + R, \quad (6.20)$$

де B_{2k} — числа Бернуллі, а R — залишковий член. Для зручності у цьому виразі відкинуто доданки, які відповідають значенням функції f(x) і її похідних на безмежності, оскільки вони дорівнюють нулеві в аналізованому випадку.

Підсумовуючи знакозмінний асимптотичний ряд, достатньо зупинитися на доданку з найменшим абсолютним значенням (k = 4 у табл. 6.1). Отже, з точністю до членів із B_6 і B_8 , отримаємо замість -1/6 такі результати для константи c:

$$-\frac{139}{840} = -0.165476\dots$$
порівняно з $c = \zeta'(-1) = -0.165421\dots$

 $-\frac{1007}{10\,080} = -0.165377\dots$

k	значення
2	-0.0013889
3	+0.0001984
4	-0.0000992
5	+0.0001052
6	-0.0001918

Таблиця 6.1. Значення доданків асимптотичного ряду для двовимірних розбиттів

Насправді, точного значення $c = \zeta'(-1)$ можна досягти в межах моделі двовимірних гармонічних осциляторів, однак це вимагає використання значно складнішого підходу, як показав Нанда [428].

6.3.3. Поправка до головної асимптотики. Ураховуючи на один доданок більше в розкладі ентропії

$$S(\beta) \simeq S(\beta_0) + \frac{1}{2!} S''(\beta_0) (\beta - \beta_0)^2 + \frac{1}{3!} S'''(\beta_0) (\beta - \beta_0)^3, \quad (6.21)$$

отримаємо для кількості мікростанів за допомогою методу перевалу такий результат [437]:

$$\Gamma(E) = \frac{e^{S(\beta_0)}}{2\pi} \frac{2S''(\beta_0)}{\sqrt{3} |S'''(\beta_0)|} \exp\left\{\frac{[S''(\beta_0)]^3}{3[S'''(\beta_0)]^2}\right\} K_{1/3}\left(\frac{[S''(\beta_0)]^3}{3[S'''(\beta_0)]^2}\right), (6.22)$$

де $K_{\nu}(x)$ — функція Макдоналда (модифікована функція Бесселя другого роду).

Отже, уточнена асимптотика лінійних розбиттів буде такою:

$$p_{\rm corr}(n) = \frac{1}{18\sqrt[4]{6} n^{3/4}} e^{\frac{28}{27}\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}} K_{1/3}\left(\frac{1}{27}\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$
(6.23)

Порівняно з асимптотикою Гарді і Рамануджена (6.1), цей вираз у компактному вигляді забезпечує кращу оцінку (з відхиленням < 1%) навіть для малих значень n > 20, див. рис. 6.2.



Рис. 6.2. Порівняння відносних похибок різних оцінок кількості одновимірних розбиттів. Суцільна крива — результат (6.23); штрихова крива — головна асимптотика (6.1)



Рис. 6.3. Порівняння відносних похибок різних оцінок кількості плоских розбиттів. Суцільними контурами з додатними значеннями показано головну асимптотику Райта (6.19); штрихові з від'ємними — поправка, задана формулою (6.24)

У двовимірному випадку відповідна поправка до головної асимптотики Райта (6.19) для плоских розбиттів матиме вигляд

$$p_{\rm corr}^{\rm 2D}(n) = \frac{[2\zeta(3)]^{13/16}}{4\sqrt{3}\pi} n^{-13/36} e^{\frac{25}{16}[2\zeta(3)]^{1/3}n^{2/3} + c} \times K_{1/3} \left(\frac{[2\zeta(3)]^{1/3}n^{2/3}}{16}\right).$$
(6.24)

Однак, на відміну від одновимірної задачі, ця поправка дає точніші оцінки лише за малих значень n < 17. Відносна похибка для n = 50 становить +1.81% для головної асимптотики (6.19) і -2.72% для поправки (6.24), для n = 100 відповідні похибки становлять +1.13% і -1.98%, для n = 1000 - +0.24% і -0.54% тощо. Область малих значень n проілюстровано на рис. 6.3.

Зауважмо, що використання методу перевалу не дає змоги отримати подальші уточнення кількості розбиттів. Це пов'язано з асимптотичним характером відповідних рядів: уже доданки ~ $(\beta - \beta_0)^4$ приводять до розбіжних інтеґралів у розрахунках $\Gamma(E)$.

6.4. Двовимірні розбиття цілих чисел з обмеженою кількістю частин

Так звані двовимірні або плоскі розбиття — це особливий тип розбиттів цілих чисел. Плоским розбиттям натурального n називають двовимірний масив невід'ємних цілих n_{ij} , що задовольняють умову незростання за рядками і стовпцями:

$$n = \sum_{i,j>0} n_{ij}, \quad \text{de} \quad n_{i_1j_1} \ge n_{i_2j_2}$$
 (6.25)

для довільних $i_1 \leq i_2, j_1 \leq j_2$ [418, р. 176]. Наприклад, усі 13 плоских розбиттів числа 4 мають вигляд [438]:

Нульових елементів зазвичай не пишуть, а решту ненульових називають частинами. Кількість різних плоских розбиттів числа nпозначатимемо $p^{2D}(n)$, тобто $p^{2D}(4) = 13$.

Подібно до задачі про одновимірні (звичайні, лінійні) розбиття [58, 426, 428, 432], задача розрахунку кількості плоских розбиттів може бути пов'язана з підрахунком кількості мікростанів системи двовимірних квантових гармонічних осциляторів зі статистикою Бозе–Айнштайна [428, 437].

На розбиття цілих чисел можна накладати різні обмеження щодо кількості чи значень частин, а у випадку багатовимірних — ще й форми [418, 439, 440]. Це відповідає вивченню дробової статистики чи аналізові впливу скінченності кількості частинок у квантових ансамблях [157, 158, 432]. Цікаво, що задача про плоскі розбиття з єдиним обмеженням на кількість частин не знайшла відображення в літературі. Один з можливих підходів до неї викладено нижче.

6.4.1. Загальні результати для скінченної системи N **частинок.** Статистична сума Z_N скінченної системи N бозонних гармонічних осциляторів задовольняє таке рекурентне співвідношення [432, 441]:

$$Z_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N B_k(x) Z_{N-k}(x), \qquad Z_0(x) \equiv 1, \tag{6.26}$$

де $x={\rm e}^{-\beta\hbar\omega},\,\beta-$ обернена температура,
а $\omega-$ частота осцилятора. У D-вимірному просторі

$$B_k(x) = \frac{1}{(1 - x^k)^D}.$$
(6.27)

У замкненому вигляді вираз для Z_N існує лише в одновимірному випадку:

$$Z_N^{\rm 1D}(x) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - x^k}.$$
(6.28)

Цим результатом можна скористатися для перевірки пропонованого методу. Розв'язати рівняння (6.26) можна за допомогою інтеґрального перетворення. Щоб уникнути проблем, пов'язаних із переходом від підсумовування до інтеґрування, найзручніше скористатися якимось дискретним перетворенням [442].

Застосуємо так зване Z-перетворення, визначене для функції f(N) так [443, Chap. 13]:

$$\mathfrak{Z}[f(N)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)s^{-n} = \tilde{f}(s).$$
(6.29)

Воно є дискретним аналогом перетворення Лапласа. Розв'язування рівняння (6.26) вимагатиме використання таких властивостей *Z*-перетворення:

$$\mathfrak{Z}[Nf(N)] = -s\frac{d\tilde{f}(s)}{ds},\tag{6.30}$$

$$\mathfrak{Z}[f(N) * g(N)] = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s), \tag{6.31}$$

де конволюцію визначено як

$$f(N) * g(N) = \sum_{n=0}^{N} f(n)g(N-n).$$
(6.32)

Зручною для безпосереднього застосування *Z*-перетворення буде така форма рівняння (6.26):

$$NZ_N(x) = \sum_{k=0}^{N} B_k(x) Z_{N-k}(x), \qquad B_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0. \tag{6.33}$$

При цьому простіше розглядати поправку до статистичної суми порівняно з безмежною системою $Z_{\infty}(x)$:

$$Z_N(x) = Z_\infty(x)y_N(x), \qquad (6.34)$$

де функція $y_N(x)$ має очевидну границю:

$$\lim_{N \to \infty} y_N(x) = 1. \tag{6.35}$$
Для перетворення цієї поправки легко отримати:

$$-s\frac{d\tilde{y}(s|x)}{ds} = \tilde{B}(s|x)\tilde{y}(s|x), \qquad (6.36)$$

або

$$\tilde{y}(s|x) = C \exp\left\{-\int^{s} \frac{\tilde{B}(s')}{s'} \, ds'\right\},\tag{6.37}$$

де сталу інтеґрування C можна знайти з (6.35).

6.4.2. Перевірка підходу в одновимірному просторі. Усі результати для одновимірної задачі про розбиття добре відомі [58, 432, 444]. Нижче отримаємо їх на підставі запропонованого підходу.

Підсумовування у перетворенні $B_N(x)$ легко зробити у першому порядку за x:

$$\tilde{B}^{1\mathrm{D}}(s|x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^{-k}}{1-x^k} \simeq \sum_{k=1}^{\infty} s^{-k} (1+x^k) = \frac{s-2x+sx}{(s-1)(s-x)}, \quad (6.38)$$

звідки

$$\tilde{y}^{1D}(s|x) = C \frac{s^2}{(s-1)(s-x)},$$
(6.39)

і далі знаходимо обернене перетворення:

$$y_N^{1D}(x) = \mathfrak{Z}^{-1}\left[C\frac{s^2}{(s-1)(s-x)}\right] = C\frac{x^{N+1}-1}{x-1}.$$
 (6.40)

З рівняння (6.35) стала інтеґрування C = 1 - x, що дає в головному наближенні:

$$y_N^{1D}(x) = 1 - x^{N+1}.$$
 (6.41)

Цей результат правильно відтворює точний вираз (6.28). Справді,

$$Z_{\infty}^{1\mathrm{D}}(x) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-x^{k}} \prod_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{k}}, \qquad (6.42)$$

тобто

$$y_N^{1D}(x) = \prod_{k=N+1}^{\infty} (1 - x^k) = \exp\sum_{k=N+1}^{\infty} \ln\left(1 - x^k\right).$$
(6.43)

Знову ж у головному наближенні, беручи до уваги, що x < 1 і N — велике, отримаємо:

$$y_N^{1D}(x) = \exp\left(-x^{N+1}\right) = 1 - x^{N+1} \pm \dots$$
 (6.44)

Пригадаємо тут, що кількість одновимірних розбиттів $p^{1D}(n) \equiv p(n)$ натурального числа n дорівнює кількості мікростанів $\Gamma(E)$ системи з енерґією $E = \hbar \omega n$. Візьмемо до уваги вираз (6.5) і врахуємо, що для скінченної системи N частинок, яка відповідає розбиттям зі скінченною кількістю частин, ентропія дорівнює $S_N = \beta E + \ln Z_{\infty} + \ln y_N$. Тоді з рівняння (6.34) матимемо

$$p_N(n) = p(n)y_N(e^{-\beta_0}),$$
 (6.45)

де стаціонарна точка $\beta_0 = \pi/\sqrt{6n}$ [58, 437]. Оскільки *n* велике, то β_0 — мала величина, й арґумент $x = e^{-\beta_0}$ близький до одиниці, але x < 1. Тому підсумовування у формулі (6.43) треба виконувати точніше, а саме:

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \ln(1-x^k) \simeq -\sum_{k=N+1}^{\infty} x^k = -\frac{x^{N+1}}{1-x}.$$

При $N \gg 1$ отримаємо такий поправлений вираз (6.44):

$$y_N^{1D}(x) = \exp\left(-\frac{x^N}{1-x}\right) \simeq \exp\left(-\frac{x^N}{\beta_0}\right).$$
 (6.46)

Тобто, головна поправка до кількості обмежених розбиттів буде [58, 426]

$$p_N(n) = p(n) \exp\left\{-\frac{\sqrt{6n}}{\pi} e^{-\pi N/\sqrt{6n}}\right\},$$
 (6.47)

що правильно відтворює класичний результат Ердьоша і Ленера [422] про асимптотичну поведінку кількості розбиттів натурального n на щонайбільше N частин.

Цей підхід ми далі поширимо на вищі розмірності простору. Варто зауважити, що вираз для $\tilde{y}^{1D}(s)$ можна отримати безпосередньо у границі $x \to 1$, проте вже обернене перетворення $\mathfrak{Z}^{-1}[\tilde{y}^{1D}(s)]$ аналітично зробити не вдається. Саме цей факт і потребував додаткових кроків, описаних вище.

6.4.3. Результати для плоских розбиттів. У двовимірному просторі $B_k^{2D}(x)$ дорівнює:

$$B_k^{2D}(x) = \frac{1}{(1-x^k)^2},$$
(6.48)

звідки наближено матимемо

$$\tilde{B}^{2D}(s|x) \simeq \sum_{k=1}^{\infty} s^{-k} (1+2x^k) = \frac{s-3x+2sx}{(s-1)(s-x)}.$$
(6.49)

Розв'язок рівняння (6.36) буде

$$\tilde{y}^{2D}(s|x) = C \frac{s^3}{(s-1)(s-x)^2},$$
(6.50)

а його обернене Z-перетворення:

$$y_N^{\text{2D}}(x) = \mathfrak{Z}^{-1}[\tilde{y}^{\text{2D}}(s|x)] =$$

= $C \frac{(N+1)x^{N+2} - (N+2)x^{N+1} + 1}{(x-1)^2},$ (6.51)

де $C = (x - 1)^2$, що в границі великих N і малих x дає:

$$y_N^{\rm 2D}(x) = 1 - Nx^N.$$
 (6.52)

Подібний вираз можна отримати для системи N ізотропних двовимірних осциляторів, записуючи статистичну суму у вигляді:

$$\ln Z_N^{2D}(x) = -\sum_{k=1}^N k \ln(1 - x^k), \qquad (6.53)$$

де взято до уваги k-кратне виродження k-го рівня. Прямуючи верхню межу до безмежності, відтворимо твірну функцію МакМагона для плоских розбиттів [445]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{2\mathrm{D}}(n) x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^n}.$$
 (6.54)

Порівнюючи рівняння (6.52)–(6.53) і діючи за аналогією з одновимірним випадком, щоб перейти до границі $\beta \to 0$, можемо отримати для $y_N^{\text{2D}}(x)$:

$$y_N^{2D}(x) = \exp\sum_{k=N+1}^{\infty} k \ln(1-x^k) \simeq \exp\left(-\sum_{k=N+1}^{\infty} kx^k\right) = \exp\left(-\frac{x^{N+1}[N(1-x)+1]}{(1-x)^2}\right).$$
(6.55)

Для $N\beta_0 \gg 1$ матимемо таку асимптотику:

$$y_N^{2\mathrm{D}}(x) = \exp\left(-\frac{Nx^N}{1-x}\right) \simeq \exp\left(-\frac{Nx^N}{\beta_0}\right),$$
 (6.56)

де стаціонарна точка

$$\beta_0 = \left(\frac{2\zeta(3)}{n}\right)^{1/3}.\tag{6.57}$$

Отже, для обмежених плоских розбиттів будемо мати таку асимптотичну поведінку [442]:

$$p_N^{\rm 2D}(n) = p^{\rm 2D}(n) \exp\left\{-\frac{Nn^{1/3}}{[2\zeta(3)]^{1/3}} e^{-N[2\zeta(3)/n]^{1/3}}\right\}.$$
 (6.58)

Цей вираз є одним із головних результатів роботи в цьому розділі. Він дає оцінку кількості плоских розбиттів числа n на щонайбільше N частин.

Умову для кількості частин N безпосередньо отримуємо під час виведення у вигляді:

$$0.75n^{1/3} \ll N < n, \tag{6.59}$$

де 0.75 є наближеним значенням $[2\zeta(3)]^{-1/3}$.

на	,%	8.7	5.5	3.8	4.3
дносі	кибка	8.8	5.7	3.9	4.4
Bi	KOII	3.5	1.3	0.5	1.0
	обчисл. 3	497	7073	77478	77339
$_{ m V}^{ m 2D}(n)$	обчисл. 2	498	7082	77574	77435
p_I^2	обчисл. 1	474	6791	75003	74898
	оньот	458	6703	74651	74161
$m^{2D}(m)$	$(a_1) d$	500	6879	75278	
N u		n = 10, N = -9	n = 15, N = 14	n = 20, N = 19	N = 18

Таблиця 6.2. Кількість обмежених плоских розбиттів

[447]; значення в	нти <i>с</i> взято з [437]	
к точному $p^{ m 2D}(n)$ з	n) з (6.60), де конста	
обчисл. 1» відповіда	но на підставі $p^{\mathrm{2D}}(q)$	
з [446]. Колонка «	«обчисл. 3» отрима	
Гочні значення взято :	холонках «обчисл. 2» й	[435, 448], відповідно.

$\ln Z_N$	
для	
(6.26)	
рівняння	
рекурентного	Γ
Розв'язки	му випадку
6.3.	ірно
Таблиця	у двовим

$\frac{u}{N}$	100	200	500	1000	2000	5000	10000
10	13.50490	17.20871	22.46359	26.62624	30.90153	36.67638	41.11207
20	17.11408	23.66709	33.53210	41.58209	49.96198	61.38032	70.19437
30	18.09474	26.52429	40.27325	51.91522	64.22143	81.14853	94.28280
50	18.30640	28.02642	47.03409	64.86995	84.45795	111.98343	133.58019
100		28.13457	49.79461	75.97533	109.82935	161.18825	202.85769
200			49.81234	76.99794	119.32409	203.58562	280.20762
300				76.99798	119.40093	213.60298	316.40845
500						214.27879	334.40026
N ightarrow n	18.30884	28.13458	49.81234	76.99798	119.40094	214.27879	334.64773

Результати деяких обчислень за допомогою рівняння (6.58) наведено в табл. 6.2. Точні значення необмежених плоских розбиттів $p^{2D}(n)$ можна знайти в [447], тоді як асимптотична залежність від n має вигляд [435, 448]:

$$p^{2\mathrm{D}}(n) = \frac{[2\zeta(3)]^{7/36}}{\sqrt{6\pi}} n^{-25/36} \exp\left\{\frac{3}{2}[2\zeta(3)]^{1/3}n^{2/3} + c\right\}, \quad (6.60)$$

де $c = \zeta'(-1) = -0.165421...$ У праці [437] ми отримали значення c = -1/6 = -0.166666..., яке дає кращі результати для $n \le 7573$, але не забезпечує правильної поведінки при $n \to \infty$.

Як бачимо з табл. 6.2, для обмежених плоских розбиттів оцінки за виразом (6.58) дають добру точність, принаймні в діапазоні $n = 10 \div 20$. Дещо більші значення похибок (4–9%) головно пов'язані з похибкою асимптотичного виразу (6.60) для кількості необмежених плоских розбиттів. Як і варто було очікувати, спостерігається монотонне спадання відносної похибки зі зростанням n, щонайменше для співвідношення N/n = 9/10.

6.4.4. Числова оцінка кількості обмежених плоских розбиттів для проміжних значень $N \sim n^{2/3}$. Числовий аналіз рекурентного співвідношення (6.26) для $Z_N(x)$ у двовимірному випадку зроблено для $n = 100 \div 10\,000$ [449]. За значення арґумента взято $x = e^{-\beta_0}$ зі стаціонарною точкою, яка відповідає цій задачі, $\beta_0 = [2\zeta(3)/n]^{1/3}$. Результати деяких обчислень наведено в табл. 6.3.

Як легко зауважити, значення Z_N швидко наближаються до асимптотичних результатів, що відповідають границі $N \to n$. Це суттєво ускладнює числовий аналіз рекурентного співвідношення (6.26) у випадку, розглянутому в попередньому пункті.

Отримані результати можна перенести на проблему підрахунку плоских розбиттів. Виявляється, що з доброю точністю отримані дані за проміжних значень $N \sim n^{2/3}$ описує формула [449]:

$$\ln \frac{p_N^{2\mathrm{D}}(n)}{p^{2\mathrm{D}}(n)} = -An^{2/3}N^{-1/3}\exp\left\{-kN^{3/2}/n + b\,n^{1/3}\ln N\right\}.$$
 (6.61)

Константи A, b та k розраховано як параметри підгонки у вигляді:

$$A = 1.075 \pm 0.008, \quad b = 0.0060 \pm 0.0002, \quad k = 2.26 \pm 0.2.$$
 (6.62)

Цікаво, що обчислене значення k близьке до $k = 2\zeta(3) = 2.40411...,$ звідки відповідний множник можна подати як $k/n = \beta_0^3$.

Отже, ми отримали другу асимптотику кількості обмежених плоских розбиттів [449]

$$\ln \frac{p_N^{2D}(n)}{p^{2D}(n)} \sim -\left(\frac{n^2}{N}\right)^{1/3} \exp\left\{-\frac{2\zeta(3)N^{3/2}}{n}\right\}$$
(6.63)

для кількості частин $N \sim n^{2/3}$.

6.5. Зв'язок між дробовою статистикою і скінченною бозе-системою в одновимірному випадку

У цьому підрозділі запропоновано опис бозонної системи зі скінченною кількістю частинок за допомогою моделі, яка є математично простішою. До певної міри такий підхід має спільні риси зі знаходженням бозонно-ферміонної еквівалентності ідеальних газів [450] або в газі Тонкса–Жірардо [451], який експериментально отримали 2004 р. [452, 453]. Еніонно-ферміонну відповідність також застосовують до аналізу ультрахолодних газів [44].

Застосовуватимемо дробову статистику Джентіле, у якій максимальне заповнення енерґетичного рівня обмежене деяким числом *M* [33, 93, 99]. Якщо встановити відповідність між кількістю частинок *N* в реальній бозе-системі та параметром *M* — у модельній, то поставлену задачу можна вважати розв'язаною.

Для спрощення розглядатимемо одновимірну систему. Фізично це відповідає бозонам у високоасиметричній гармонічній пастці. До цієї ж системи застосовано підхід канонічного та великого канонічного ансамблю, а згодом узагальнено отримані результати для системи зі степеневим енерґетичним спектром $\varepsilon_m \propto m^s$. **6.5.1. Мікроканонічний підхід.** Запишемо вираз для кількості мікростанів системи одновимірних осциляторів з енерґією $E = \hbar \omega n$ (6.14), відновивши розмірність:

$$\Gamma(E) = \frac{1}{4\sqrt{3} E/\hbar\omega} e^{\pi\sqrt{2/3}\sqrt{E/\hbar\omega}}.$$
(6.64)

Використовуючи ентропію $S = \ln \Gamma$, з означення температури

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE}$$

отримаємо таке рівняння стану:

$$E = \frac{\pi^2}{6} \hbar \omega \left(\frac{T}{\hbar \omega}\right)^2. \tag{6.65}$$

Оскільки енерґія E є екстенсивною величиною, $E \propto N$, де N — кількість частинок, то термодинамічна границя ωN = const відразу випливає з наведеного вище рівняння. Цей результат також можна отримати на підставі інших міркувань [14].

Вираз для скінченної системи N частинок отримуємо на підставі задачі про обмежені розбиття на щонайбільше N доданків [58], кількість яких асимптотично дорівнює [422], порівн. стор. 217:

$$\Gamma_{\rm fin}(E) = \frac{1}{4\sqrt{3} E/\hbar\omega} e^{\pi\sqrt{2/3}\sqrt{E/\hbar\omega}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{\sqrt{6}}{\pi}\sqrt{E/\hbar\omega} e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6}}\frac{N}{\sqrt{E/\hbar\omega}}}\right\}.$$
 (6.66)

Результат, до якого зводиться дробова статистика, розглянули Сріватсан ma *in.* [157]. Він відповідає кількості розбиттів числа n, де кожен доданок трапляється щонайбільше M разів:

$$\Gamma_{\rm frac}(E) = \frac{1}{4\sqrt{3} E/\hbar\omega} e^{\pi\sqrt{2/3}\sqrt{E/\hbar\omega} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)^{1/2}.$$
 (6.67)

Легко бачити, що $\Gamma(E)$ з виразу (6.64) є головним множником і в рівняннях (6.66) та (6.67). Відповідні ентропії дорівнюють

$$S_{\text{fin}} = \ln \Gamma_{\text{fin}} = \ln \Gamma + \Delta S_{\text{fin}}$$
 i $S_{\text{frac}} = \ln \Gamma_{\text{frac}} = \ln \Gamma + \Delta S_{\text{frac}}$.

Порівнюючи поправки ΔS_{fin} та ΔS_{frac} , можна встановити умову еквівалентності, яка пов'язує параметр максимального заповнення M і кількість частинок N:

$$M \sim \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{N}{\sqrt{E/\hbar\omega}}\right).$$
 (6.68)

6.5.2. Підхід канонічного і великого канонічного ансамблів. Безпосередніми викладками легко показати, що у випадку визначеної дробової статистики Джентіле заповнення енерґетичного рівня є дорівнює [33, 93, 99]

$$f_M(\varepsilon,\mu,T) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1} - \frac{M+1}{e^{(M+1)(\varepsilon-\mu)/T} - 1},$$
(6.69)

де $\mu-$ хімічний потенціал,
аT-температура.

Хімічний потенціал і кількість частинок ${\mathcal N}$ пов'язані співвідношеннями:

$$\mathcal{N} = \sum_{j=0}^{\infty} f_M(\varepsilon_j, \mu, T), \qquad (6.70)$$

а енергія E дорівнює

$$E = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j f_M(\varepsilon_j, \mu, T).$$
(6.71)

Однак у випадку скінченної системи значно простіше застосувати канонічний ансамбль. Як було зазначено, статистична сума N нерозрізнювальних одновимірних осциляторів дорівнює [432]:

$$Z_N = \prod_{j=1}^{N} \left(1 - e^{\hbar \omega j/T} \right)^{-1}, \qquad (6.72)$$

звідки можна розрахувати енерґію системи E_N . У границі великих N головний доданок задають виразом

$$E_N - E_{\text{Bose}} \sim \hbar \omega \frac{N e^{-\hbar \omega N/T}}{e^{\hbar \omega/T} - 1},$$
 (6.73)

де E_{Bose} — енергія безмежної бозонної системи.

Для випадку дробової статистики використовуватимемо великий канонічний ансамбль. Активність $z = e^{\mu/T}$ зобразимо як $z = z_{\text{Bose}} + \Delta z$, де z_{Bose} задовольняє рівняння

$$\mathcal{N} = \sum_{i} \frac{1}{z_{\text{Bose}}^{-1} e^{\varepsilon_i/T} - 1}.$$
(6.74)

У границі великих M доданок $\Delta z \sim \frac{1}{M}$, звідки випливає поправка до енергії з рівняння (6.71):

$$E_M - E_{\text{Bose}} \sim \frac{1}{M}.$$
(6.75)

Порівнюючи вирази (6.73) та (6.75), отримаємо такий зв'язок між параметрами M та N:

$$M \sim \frac{1}{N} e^{\hbar \omega N/T}.$$
 (6.76)

В експоненті температура T, пов'язана з енергією E через формулу (6.65). Отже, результат (6.76) відтворює мікроканонічний вираз (6.68) з точність до нехтовно малого множника 1/N — потрібно брати до уваги, що в логарифмах від (6.66) і (6.67) збережено лише головні доданки.

6.5.3. Степеневий енерґетичний спектр. Далі розглянемо загальний степеневий енерґетичний спектр $\varepsilon = am^s$ (s > 0). Відповідним вибором енерґетичних одиниць можна досягнути значення a = 1. Насправді, для реальних фізичних систем реалізуються лише випадки s = 1 та s = 2 [157], однак інші значення можуть ефективно з'явитися в деяких екзотичних модельних системах або в густині станів системи в зовнішньому потенціалі в межах наближення WKB.

Для енерґетичного спектра $\varepsilon_m = m^s$ статистична сума

$$Z(\beta) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\beta m^s} \right)^{-1}.$$
 (6.77)

Ентропія $S(\beta)$ після застосування формули Ейлера–Маклорена набуде вигляду

$$S(\beta) = \beta E + \ln Z(\beta) = \beta E - \sum_{m=1}^{\infty} \ln \left(1 - e^{-\beta m^s} \right) =$$

= $\beta E + \frac{C(s)}{\beta^{1/s}} + \frac{1}{2} \ln \beta + \dots,$ (6.78)

де

$$C(s) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{s}\right)\zeta\left(1 + \frac{1}{s}\right),\tag{6.79}$$

 $\Gamma(z)$ і
 $\zeta(z)-$ це, відповідно, гамма-функція Ейлера і дзета-функція Рімана.

Стаціонарна точка β_0 дорівнює

$$\beta_0 = \left(\frac{C(s)}{sE}\right)^{s/(s+1)} = \lambda_s E^{-s/(s+1)}.$$
(6.80)

Отже, для кількості мікростанів матимемо

$$\Gamma(E) = \frac{\lambda_s}{(2\pi)^{(s+1)/2}} \sqrt{\frac{s}{s+1}} E^{-\frac{3s+1}{2(s+1)}} \exp\left[\lambda_s(s+1)E^{\frac{1}{s+1}}\right].$$
 (6.81)

Замінюючи E на n, можна отримати добре відому формулу Гарді–Рамануджана [420] для кількості розбиттів цілого n на суму s-х степенів.

Якщо кількість частино
кNу системі є скінченою, то до наведеної вище формули потр
ібно знайти поправку. У цьому випадку статистична сума дорівнює

$$\ln Z_N(\beta) = -\sum_{m=1}^N \ln\left(1 - e^{-\beta m^s}\right),$$
(6.82)

і для ентропії маємо

$$S_{\text{fin}}(\beta) = \beta E - \sum_{m=1}^{N} \ln\left(1 - e^{-\beta m^s}\right).$$
 (6.83)

Після простих перетворень отримаємо:

$$S_{\rm fin}(\beta) = S(\beta) - \frac{1}{s\beta^{1/s}} \Gamma\left(\frac{1}{s}, \beta N^s\right), \qquad (6.84)$$

де $\Gamma(a, x)$ — це неповна Г-функція. Отже,

$$\Gamma_{\rm fin}(E) = \Gamma(E) \exp\left[-\frac{1}{s\beta_0^{1/s}}\Gamma\left(\frac{1}{s},\beta_0 N^s\right)\right].$$
 (6.85)

Застосовуючи асимптотичний розклад $\Gamma(a, x)$ [359, рівняння 6.5.32], остаточно матимемо:

$$\Gamma_{\rm fin}(E) = \Gamma(E) \exp\left[-\frac{1}{s\beta_0}N^{1-s}e^{-\beta_0 N^s}\right].$$
(6.86)

Замінююч
и ${\cal E}$ на n,отримаємо результат для обмежених розбиттів

$$\Gamma_{\rm fin}(n) = \Gamma(n) \exp\left[-\frac{1}{\lambda_s s} n^{s/(s+1)} N^{1-s} e^{-\lambda_s N^s n^{-s/(s+1)}}\right], \quad (6.87)$$

див. також (17) з [434]. Для цієї функції традиційно використовують позначення $p_N^s(n)$, однак треба зазначити, що для задачі розбиттів цілих чисел значення *s* повинно бути цілим. Для s = 1отриманий вираз зводиться до результату Ердьоша і Ленера [422], див. також (6.66).

Вираз для дробової статистики візьмемо безпосередньо з [157]:

$$\Gamma_{\rm frac}(n) = \frac{\lambda_s}{(2\pi)^{(s+1)/2}} \sqrt{\frac{s}{s+1}} \left(1 - \frac{1}{(M+1)^{1/s}}\right)^{s/(s+1)} n^{-\frac{3s+1}{2(s+1)}} \times \\ \times \exp\left[\lambda_s \left(1 - \frac{1}{(M+1)^{1/s}}\right)^{s/(s+1)} (s+1)n^{\frac{1}{s+1}}\right]. \quad (6.88)$$

Щоб отримати зв'язок між параметрами M та N, можна знову розглянути ентропії $S_{\text{frac}} = \ln \Gamma_{\text{frac}}$ і $S_{\text{fin}} = \ln \Gamma_{\text{fin}}$:

$$S_{\text{frac}} - S = -\frac{1}{s\beta_0} N^{1-s} e^{-\beta_0 N^s},$$

$$S_{\text{fin}} - S = -\frac{s\lambda_s}{1+s} M^{-1/s},$$
(6.89)

де $S = \ln \Gamma$.

Відкидаючи константи, отримаємо:

$$M^{1/s} \sim n^{\frac{1-s}{1+s}} N^{s-1} \exp\left\{\lambda_s n^{-\frac{s}{1+s}} N^s\right\}.$$
 (6.90)

У цьому загальному випадку цікаво знайти зв'язок між енергією E та температурою T з означення $\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE}$:

$$\frac{1}{T} = \lambda_s E^{-\frac{s}{1+s}} \quad \Rightarrow \quad E^{\frac{s}{1+s}} = \lambda_s T. \tag{6.91}$$

Отже, головний внесок дасть

$$M \sim \exp\left(\frac{sN^s}{T}\right),$$
 (6.92)

що не суперечить частковому результату (6.76).

6.6. Багатовимірні розбиття цілих чисел

Для означення багатовимірних розбиттів вимога про незростаючий порядок в усіх напрямках стає важливою. У D-вимірному випадку натуральне число n зображають як суму натуральних $n_{i_1...i_D}$:

$$n = \sum_{i_1, \dots, i_D \ge 0} n_{i_1 \dots i_D}, \tag{6.93}$$

де $n_{i_1...i_D} \ge n_{j_1...j_D}$ щоразу, коли $i_1 \le j_1, i_2 \le j_2, \ldots, i_D \le j_D$ [418, р. 179].

Скориставшись фізичною аналогією між кількістю мікростанів багатобозонної системи і кількістю розбиттів натуральних чисел, розглядатимемо *D*-вимірну систему бозонів з енерґетичним спектром у такому вигляді:

$$\varepsilon(m_1,\ldots,m_D) = m_1^{s_1} + \ldots + m_D^{s_D}.$$
(6.94)

Різні степені можуть відповідати певним геометріям зовнішніх потенціалів, наприклад, частинка, що рухається вільно вздовж осі z

 $(s_3 = 2)$, перебуваючи при цьому у двовимірній осциляторній пастці в напрямках x та y $(s_1 = s_2 = 1)$.

Щоб отримати $\Gamma(E)$, скористаємося підходом, викладеним у попередніх підрозділах, відповідно до праць [58, 158].

Для енергетичного спектра (6.94) статистична сума

$$Z(\beta) = \prod_{\text{all the energies}} \left(1 - e^{-\beta\varepsilon}\right)^{-1} =$$
$$= \prod_{m_1=1}^{\infty} \cdots \prod_{m_D=1}^{\infty} \left[\left(1 - e^{-\beta(m_1^{s_1} + \ldots + m_D^{s_D})}\right)^{-1} \right]^{-1}.$$
(6.95)

Як і раніше, для кількості мікростанів $\Gamma(E)$ з (6.4) матимемо:

$$\Gamma(E) = \frac{\exp[S(\beta_0)]}{\sqrt{2\pi S''(\beta_0)}}.$$
(6.96)

Ентропія $S(\beta) = \beta E + \ln Z(\beta)$ після застосування формули Ейлера–Маклорена набуде вигляду [454]

$$S(\beta) = \beta E - \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_D=1}^{\infty} \ln \left[1 - e^{-\beta (m_1^{s_1} + \dots + m_D^{s_D})} \right] =$$
$$= \beta E + \frac{C}{\beta^{1/\sigma}} + \frac{1}{2^D} \ln \beta + \dots,$$
(6.97)

де останнє перетворення зроблено в границі $\beta \to 0$. Тут $C = C(s_1, \ldots, s_D)$ — константа зі складною залежністю від степенів s_1, \ldots, s_D . Для наших оцінок її явний вигляд не буде суттєвим. Параметр σ визначають так:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{s_1} + \ldots + \frac{1}{s_D}.$$
 (6.98)

Поява множника $1/2^D$ пов'язана з *D*-вимірним узагальненням формули підсумовування, оскільки область зміни індексів є прямокутною, див. [359, р. 892], а внесок у першу поправку до інтеґрального доданка дає лише найнижча точка $m_1 = \ldots = m_D = 1$.

Для стаціонарної точки $\beta_0, S'(\beta_0) = 0$, отримаємо

$$\beta_0 = \left(\frac{C}{\sigma E}\right)^{\sigma/(\sigma+1)} = \lambda E^{-\sigma/(\sigma+1)}.$$
(6.99)

Отже, кількість мікростанів буде

$$\Gamma(E) \sim E^{-\frac{1}{\sigma+1}\left(\frac{1}{2} + (2^{-D} + 1)\sigma\right)} \exp\left[\lambda(\sigma + 1)E^{\frac{1}{\sigma+1}}\right].$$
 (6.100)

Замінюючи Е на n, матимемо вираз для кількості розбиттів [454]:

$$p(s_1, \dots, s_D; D|n) \sim n^{-\frac{1}{\sigma+1}\left(\frac{1}{2} + (2^{-D} + 1)\sigma\right)} \exp\left[\lambda(\sigma + 1)n^{\frac{1}{\sigma+1}}\right],$$
$$\sigma = \left(\frac{1}{s_1} + \dots + \frac{1}{s_D}\right)^{(-1)}.$$
(6.101)

Таким чином, поведінку головної асимптотики функції $p(s_1, \ldots, s_D; D|n)$ повністю визначає параметр σ . Якщо всі s_i однакові, $s_1 = \ldots = s_D = s$, то

$$\sigma = s/D.$$

Зокрема, для простих багатовимірних розбиттів (s = 1) отримаємо:

$$p(D|n) \sim n^{-\frac{1}{D+1}\left(\frac{D}{2}+2^{-D}+1\right)} \exp\left[\operatorname{const} n^{\frac{D}{D+1}}\right].$$
 (6.102)

Рівняння (6.102) правильно відтворює головну асимптотику в експоненті [455]. Оскільки плоскі (двовимірні, D = 2) розбиття вивчені більш детально порівняно з вищими випадками, то цікаво порівняти відомі результати з отриманими тут.

З рівняння (6.102) маємо:

$$p(2|n) \sim n^{-3/4} \exp\left(\operatorname{const} n^{2/3}\right).$$
 (6.103)

Правильна поведінка, відповідно до Райта [435, 456]:

$$p(2|n) \sim n^{-25/36} \exp\left(\operatorname{const} n^{2/3}\right),$$
 (6.104)

вона відрізняється від нашого результату лише передекспонентним множником. Вираз (6.103) дає близьку оцінку для кількості плоских розбиттів:

 $n^{-3/4} = n^{-0.75...},$ тоді як $n^{-25/36} = n^{-0.694...}.$

Для тривимірних розбиттів (D = 3) [457] оцінка (6.102) є також правильною, принаймні в головному наближенні.

6.7. Висновки до розділу 6

На підставі аналогії між підрахунком кількості мікростанів квантової багаточастинкової системи і задачею про розбиття в теорії чисел отримано низку результатів. Зокрема, встановлено еквівалентність між одновимірною бозе-системою зі скінченною кількістю частинок і системою, яку описують дробовою статистикою Джентіле. Зроблено узагальнення на випадок степеневого енерґетичного спектра.

Квантово-статистичний підхід використано для оцінки кількості обмежених плоских розбиттів натурального числа n за умови, що кількість частин не перевищує деякого скінченного N. Відповідна теоретико-числова задача пов'язана з підрахунком мікростанів ідеального двовимірного бозе-газу. Отриманий вираз для кількості обмежених плоских розбиттів дає добре узгодження між розрахованими і точними значеннями при $n = 10 \div 20$.

Також знайдено вирази для багатовимірних розбиттів цілих чисел в загальному випадку різних степенів. Принаймні у головному наближенні результати збігаються з відомими асимптотиками, розрахованими за допомогою різних методів теорії чисел.

Розділ 7

СТАТИСТИКА БОЗЕ В ЗАДАЧІ КЛАСИФІКАЦІЇ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

« Horreur des courants d'air... ce n'est pas de chance, pour une plante, avait remarqué le petit prince. Cette fleur est bien compliquée... ».

(Antoine de Saint-Exupéry, «Le petit prince»)

7.1. Вступ

Для пояснення емпіричних законів у суспільних та гуманітарних науках Парето [458], Еступ [459], Ціпф [460, 461] та інші вчені використовували базові принципи поведінки людини, див. зокрема історичний огляд [462]. До таких понять належить принцип найменшого зусилля (англ. principle of least effort), який у формулюванні Ціпфа [461] має очевидні алюзії на принцип найменшої дії у фізиці.

Самі підходи статистичної фізики можна застосовувати для різних систем, що назагал складаються з багатьох одиниць, тому тексти для таких досліджень є добрим матеріалом. Використання фізичних методів досить поширене у лінгвістиці [64, 65, 463–465], їх також успішно застосовують у різних галузях суспільних наук, наприклад, у вивченні транспортних мереж [466], розподілу міських територій [467, 468] і навіть у моделях прояву насильства [469].

Кількісний аналіз великих за обсягом текстів дозволив виявити певні закономірності різних текстових параметрів. Встановлені таким способом емпіричні співвідношення, зокрема закон Ціпфа, правильні також в інших галузях. Їх виявили при вивченні розподілу нуклеотидів у геномі та інших задачах біології [61–63, 470], а також, як щойно було зазначено, в суспільних науках [68–70, 467– 469, 471].

У цьому розділі ми аналізуватимемо кількісну поведінку текстів на підставі виявленої аналогії з бозе-системою в підході великого канонічного ансамблю. Буде продемонстровано можливість присвоєння текстові певного нового набору параметрів, які характеризують його частотну структуру, причому один із них можна умовно назвати «температурою».

До поняття «температура тексту» зверталися різні автори з різних поглядів. Так, Мандельброт [472] запропонував термін «інформаційна температура текстів» для параметра в ранґово-частотному розподілі (відомому зараз як закон Ціпфа–Мандельброта). Такий параметр стосується «доброго» чи «поганого» вживання слів, особливо рідкісних для певного тексту [473]. «Температуру» як міру комунікативної здатності увів Космідіс [474]. Нещодавно Міяджіма і Ямамото [475] використали класичний розподіл Больцмана для визначення «температури тексту» на підставі частотної інформації про найбільш частотні слова.

У цьому розділі запропоновано новий підхід, що полягає у введенні низки параметрів, за якими можна проводити класифікацію текстів. Зокрема, від методики [475] він відрізняється використанням для аналізу низькочастотної лексики, структура якої, взагалі кажучи, вирізняється стабільнішою поведінкою.

7.2. Ранґово-частотний розподіл

Аналізуватимемо тексти на рівні слова. Оскільки саме поняття «слово» не має однозначної дефініції, порівн. [476], ми обмежимося так званим «орфографічним словом», яке є буквено-цифровою послідовністю між двома пробілами або розділовими знаками. Різні словоформи, наприклад, 'рука' і 'руки', 'писати' і 'писала' тощо вважатимемо для спрощення різними словами.

Щоб отримати ранґово-частотний розподіл, потрібно спочатку укласти частотний список із заданої вибірки (тексту). Далі, слово з найбільшою частотою отримує **ранґ 1**, наступне за частотою **ранґ 2** і так далі. Словам із однаковими частотами присвоюють послідовні значення ранґів, у межах яких упорядкування може бути довільним.

Вивчення ранґово-частотних розподілів започатковано в аналізі текстів, і хоча подібні закономірності виявили згодом у різних галузях, тексти й надалі залишаються найдоступнішим матеріалом, що характеризується високим розмаїттям.

Типовий рангово-частотний розподіл має форму, зображену на рис. 7.1.



Рис. 7.1. Типовий ранґово-частотний розподіл. Абсолютні частоти f показано як функцію від ранґу r для орфографічних слів на матеріалі роману Івана Франка «Перехресні стежки». Дані отримано під час попередньої стадії укладання частотного словника цього роману [477]

Горизонтальні плато в області великих ранґів/малих частот означають велику кількість слів, які мають однакові частоти. Найдовше плато відповідає частоті 1. Такі слова відомі як гапакс леґомена (hapax legomena) — цей термін походить із досліджень Біблії.

Гапакс леґомена — це множина давньогрецького терміна гапакс леґоменон (ἄπαξ λεγόμενον), що приблизно перекладається як '[щось] сказане [лише] один раз'. Тобто, цей термін відповідає словам, які трапилися в досліджуваному тексті лише раз.

Приклади з Біблії включають [478]: לילית 'Ліліт' (слово неясного значення) або עַצִי-גפָר 'дерево гофер' (із нього було збудовано Ноїв ковчег). Інші часто згадувані приклади: מילסעסע, вид плуга (з поеми Гесіода 'Έργα каї 'Ημέραι «Роботи і дні», 433); honorificabilitudinitatibus 'стан бути в змозі досягти почестей' (Шекспір, Loves Labours Lost «Марні зусилля кохання», дія 5, сцена 1 [479, р. 372]).

Для великих текстових вибірок приблизно від 40 до 60 відсотків слів є гапаксами, ця пропорція залежить від обсягу тексту [480, р. 72]. Відносна кількість гапакс леґомена незначно зростає зі збільшенням довжини тексту. Залежність багатьох величин від обсягу тексту N добре описує степеневий закон [481], до них зокрема належить і кількість гапаксів,

$$N_{\text{hapax}} = aN^b.$$

Потрібно зауважити, однак, що для статистичних досліджень тексти мають бути достатньо довгими.

Справді, навіть у такому довгому реченні, що складається з двадцяти чотирьох слів, усі вони — <u>гапакси</u>, за винятком самого терміна «<u>гапакси</u>», який трапляється тут двічі.

7.3. Фізична аналогія

Ранґово-частотні залежності мають риси, дуже подібні до розподілу Бозе у статистичній фізиці [482, 483]. Щоб продемонструвати це, зіставмо номер енерґетичного рівня j з абсолютною частотою у певному списку. Тобто елементи (слова) з частотою 1 займатимуть перший рівень j = 1, з частотою 2 — другий рівень j = 2 і т. д. Заселеність рівня N_j відповідатиме кількості різних одиниць із частотою j. Оскільки таке число може набувати будь-яких значень (зокрема як завгодно великих), то можливим видається використання для опису відповідної частотної структури функції розподілу Бозе. Найнижчий енерґетичний рівень відповідає *гапакс леґоме*на — елементам, що трапилися в досліджуваному матеріалі лише один раз. У такій схемі вони є аналогом бозе-конденсату.

Функція розподілу Бозе, що визначає числа заповнення
 j-го рівня, має вигляд

$$N_j = \frac{1}{z^{-1} e^{\varepsilon_j/T} - 1},$$
(7.1)

де z – активність, ε_j – енергія j-го рівня, T – температура.

Як показали наші дослідження, для опису низькочастотної структури (тобто рівнів з малими значеннями *j*) добре підходить степеневий спектр

$$\varepsilon_j = (j-1)^{\alpha}.\tag{7.2}$$

Одиницю віднімаємо з міркувань зручності, забезпечуючи нульове значення енергії першого рівня.

Зважаючи на природу частотних розподілів, для високих енерґетичних рівнів видається застосовною проста модель дуже слабкого зростання, $\varepsilon_j \propto \ln \ln j$ при $j \gg 1$, порівн. рис. 7.13. Однак такий спектр вимагає обмеження максимального значення рівня якимось значенням $j_{\rm max}$ з метою забезпечення збіжності виразу $\sum N_j$.

Параметри функції розподілу (7.1) визначатимемо за таким двокроковим алгоритмом. Спочатку обчислюємо параметр z, який є аналогом активності у фізиці, керуючись числом заповнення найнижчого рівня j = 1, тобто кількістю гапакс леґомена:

$$N_{\text{hapax}} \equiv N_1 = \frac{z}{1-z}.$$
(7.3)

«Температуру» T й показник степеня α у рівнянні (7.2) далі обчислюємо одночасно, зіставляючи розраховані для реальної системи значення N_i з j > 1 з теоретичною моделлю

$$N_j = \frac{1}{z^{-1}e^{(j-1)^{\alpha}/T} - 1}$$
(7.4)



Рис. 7.2. Зіставлення теоретичної моделі зі спостережуваним значенням заповнення рівнів. Кружечки відповідають даним, отриманим на підставі перших 40 розділів роману Івана Франка «Перехресні стежки» (усього в романі 60 розділів). Суцільна лінія — функція (7.4), розрахована за першими 20 значеннями чисел заповнення N_j

за двома параметрами, α та T. Приклад результатів таких розрахунків наведено на рис. 7.2. Ці обчислення, а також подібні подальші, зроблено за допомогою методу найменших квадратів з використанням нелінійного алгоритму Марквардта–Левенберґа, який реалізовано у процедурі fit середовища GnuPlot, версія 4.6.

Варто зазначити, що в нашому випадку параметр T — безрозмірний, як і енерґії ε_j . Так означені величини відрізняються, наприклад, від використаних у праці [475], де розподіл певного стандартного тексту взято з метою встановлення точки відліку температури в кельвінах.

Стан зі значенням T = 0 відповідає ситуації, коли всі частоти дорівнюють одиниці, тобто цілий текст складається зі самих лише гапакс леґомена. Це може бути дуже короткий текст, обсягом одне або кілька речень, як демонструє приклад наприкінці підрозділу 7.2. Для розрахунків параметрів розподілу Бозе використано значення чисел заповнення перших 10–20 рівнів, оскільки, як уже зазначалося, степеневий спектр (7.2) за великих значень j потрібно модифіковувати, щоб коректно відобразити частотну структуру на середніх і великих частотах (див. рис. 7.2). Детальніше про верхню межу номера рівня j ітиметься в наступних підрозділах.

Отриманий таким способом параметр T дуже точно масштабується як N^{β} ($\beta < 1$). Ця властивість може бути пов'язана з означенням «термодинамічної границі» в аналізованій задачі. Пригадаймо, що для системи N бозонів у D-вимірному гармонічному потенціалі з частотою ω термодинамічну границю визначають умовою $\omega N^{1/D} = \text{const}$ при $N \to \infty$, $\omega \to 0$ [297]. Оскільки ω (або $\hbar \omega$, якщо сталу Планка \hbar не вважати рівною одиниці) є природною одиницею енерґії осцилятора, то степеневого масштабування величин, пов'язаних за змістом з енергією, можна очікувати і для систем зі степеневим спектром.

Виявляється, що для достатньо довгих текстів відношення $\ln T/\ln N$, де N — довжина тексту (загальна кількість слів), несуттєво змінюється зі зміною N. Цей факт дозволяє використовувати параметр $\tau = \ln T/\ln N$ для порівняльних¹ лінгвістичних досліджень.

7.4. Перші результати

На початковому етапі, щоби перевірити, як працює запропонована модель, було проаналізовано кілька текстів англійською (германська мова), українською (слов'янська мова), а також ґвінейською манінка́ (писемністю нко; мова родини манде, Західна Африка). Таке розмаїття пов'язане з потребою з'ясувати на підставі суттєво різного мовного матеріалу, які риси у поведінці параметрів є універсальними, а які — навпаки, можуть допомогти у класифікації текстів (чи у перспективі — інших складних систем).

¹Узагалі кажучи, правильним мовознавчим терміном тут буде «контрастивний», а «порівняльний» стосується радше дослідження лінгвістичних явищ з погляду їх зміни в часі, історичних зв'язків, однак ці термінологічні нюанси не мають безпосереднього впливу на досліджувану задачу та описані тут результати.

На рис. 7.3 зображено поведінку «температури» англійського тексту («Мобі Дік» Германа Мелвілла) і двох українських («Перехресні стежки» Івана Франка і «Собор» Олеся Гончара).

У таблиці 7.1 показано числові значення параметра T, розрахованого на підставі зростаючої частки розділів від початку кожного тексту. Дані про статтю з ґвінейської газети «Yélén`» («Світло») наведено для порівняння.

Зважаючи на великий обсяг кожного з текстів, значення параметра z в усіх випадках виявляється близьким до одиниці. Для більш наочного розділення за цією характеристикою можна ввести інший параметр μ , за аналогією з хімічним потенціалом, за допомогою співвідношення $z = e^{\mu/T}$.



Рис. 7.3. Поведінка «температури» зі зростанням обсягу тексту. MD — «Мобі Дік»; PS — «Перехресні стежки»; So — «Собор». Прямими зображено результати лінійної підгонки даних, які позначено відповідними символами в легенді

Розрахунки свідчать про повільне спадання значень показника α зі збільшенням обсягу аналізованої системи. Таку поведінку можна інтерпретувати за допомогою аналогії з впливом на систему зовнішнього потенціалу. Справді, у квазікласичному наближенні

Таблиця 7.1	. Параметри	«енерґетичного	спектра»	i	«температу-
ри» текстів					

N	α	T	$\ln T / \ln N$	T/N
Moby-D	ick (E)	NG)		
5942	1.97	470.4	0.708	0.0792
39363	1.60	1773.3	0.707	0.0451
66916	1.56	2639.7	0.709	0.0394
107503	1.48	3622.3	0.707	0.0337
132968	1.48	4207.3	0.707	0.0316
165746	1.48	4968.4	0.708	0.0300
191040	1.47	5476.5	0.708	0.0287
215270	1.45	5791.3	0.706	0.0269
Перехре	есні ст	<i>пежки</i> (U	JKR)	
343	1.57	26.6	0.562	0.0774
1052	2.03	119.1	0.687	0.1132
12949	1.68	812.0	0.708	0.0627
28010	1.73	1610.1	0.721	0.0575
40811	1.72	2270.7	0.728	0.0556
54361	1.70	2964.3	0.733	0.0545
70330	1.64	3597.4	0.734	0.0512
96083	1.57	4561.4	0.734	0.0475
ې فم ل ې	élén` (Світло),	одна стаття	I (NKO)
429	1.42	45.2	0.629	0.1053

[296] зменшення значень показника в степеневому енерґетичному спектрі ефективно відповідає послабленню «крутості» потенціальної кривої. Отже, якщо довжина тексту зростає, то вплив зовнішніх чинників на нього стає слабшим.

В одновимірному випадку степеневому енерґетичному спектрові $\varepsilon_p \propto p^\alpha$ відповідає густина станів

$$g(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$
 (7.5)

З іншого боку, система невзаємодіючих частинок у зовнішньому степеневому потенціалі $U(x)\propto x^\eta$ у квазікласичному наближенні

[296] має густину станів

$$g(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\frac{1}{\eta} - \frac{1}{2}}.$$
 (7.6)

Зауважимо також, що системі у скриньці з вертикальними стінками відповідає $\eta = \infty$.

Остаточно, зіставляючи (7.5) і (7.6), отримаємо такий зв'язок:

$$\alpha = \frac{2\eta}{\eta + 2},\tag{7.7}$$

звідки випливає зокрема $\alpha = 3/2$ для $\eta = 6$ і $\alpha = 1$ для $\eta = 2$.



Рис. 7.4. Поведінка параметра $\ln T / \ln N$ для українських текстів різних жанрів: відкриті листи (*open letters*), приватні листи (*private letters*) і проповіді (*sermons*)

З отриманих параметрів T та α можна зробити попередній висновок про те, що їх значення корелюють зі ступенем аналітичності мови. А саме, менші значення відповідають вищому ступеню аналітичності (менша словозміна), що засвідчує протиставлення англійської та української (обидві належать до індоєвропейських мов). На додаток, мале значення показника α в манінканському тексті дає підстави очікувати високого ступеня аналітичності цієї мови, що відповідає дійсності.

На завершення цього підрозділу на рис. 7.4 зображено результати розрахунку «температури» для низки коротких українських текстів різних жанрів [484]. Близькі значення свідчать про слабку залежність цього параметра від жанру чи стилю. Докладніше дослідження можливості жанрової атрибуції потребує застосування багатовимірного дискримінантного аналізу й виходить за рамки очікуваного простого застосування нашої моделі.

7.5. Вплив довжини тексту на значення параметрів

Варто зазначити, що розмір вибірки залишається проблемою, яку часто іґнорують у дослідженнях текстів, хоча в деяких працях можна натрапити на відповідний аналіз [485–487]. Зрозуміло, що надійність розрахованих параметрів буде нижчою для менших вибірок, і саме на підставі цього можна запропонувати певну «наївну» фізичну аналогію, пов'язану зі співвідношенням невизначеностей. Як відомо, цей принцип запропонував Гайзенберґ 1927 р. [488], а у вигляді відомої нерівності для невизначеностей координати $\Delta q = q - \langle q \rangle$ та імпульсу $\Delta p = p - \langle p \rangle$

$$\langle (\Delta q)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle \ge \frac{\hbar^2}{4}$$
 (7.8)

він уперше з'явився у праці Кеннарда [489]. Використовуючи спрощене формулювання, «що з більшою точністю ми можемо виміряти координату частинки, то з меншою точністю ми знатимемо її імпульс, і навпаки», запропонуємо далі за аналогією підхід до задач іншого типу, припускаючи, що довжина тексту N відіграє роль однієї з величин у співвідношенні (7.8).

Для зручності припустимо, що *i*-й текст характеризується параметром x_i . Узагальнення на більшу кількість параметрів легко зробити безпосередньо. Нехай також існує певне «ідеальне» значення цього параметра x_0 . Сформулюємо таку гіпотезу, навіяну наївною аналогією з принципом невизначеності: відстань від x_i до ідеального значення параметра x_0 може бути більшою для коротших текстів і навпаки [490]. Математичний запис матиме вигляд:

$$(x_i - x_0)^2 f(N_i) \le a^2, (7.9)$$

де N_i — обсяг *i*-ї вибірки, величина a — певна константа. Загальні властивості функції f(n) такі:

- $f(n \to \infty) \to \infty$ (більша вибірка повинна перебувати ближче до центру);
- *f*(1) = 0 (тобто текст, що містить лише одне слово, може мати довільне значення параметра);
- f(n) є монотонною функцією свого арґумента.

Наведені властивості приводять до думки, що $f(n) \sim \ln n$ або якась подібна. Виявляється, що сам логарифм дає дуже слабку залежність від обсягу вибірки, тому зупинимося на функції комбінаторного типу, $f(n) \sim \ln n! \sim n \ln n$. Отже, нехай

$$f(N_i) = (N_i \ln N_i)^{\gamma}, \qquad (7.10)$$

і для спрощення дослідимо далі випадок $\gamma = 1$.

Оцінимо значення a та x_0 так:

$$(x_i - x_0)^2 \le \frac{a^2}{f(N_i)} \quad \Rightarrow \quad \left\langle (x_i - x_0)^2 \right\rangle \le a^2 \left\langle \frac{1}{f(N_i)} \right\rangle, \quad \text{de } x_0 = \langle x_i \rangle,$$

тобто a^2 пов'язана з дисперсією x_i :

$$\sigma_x^2 = \left\langle (x_i - x_0)^2 \right\rangle \quad \Rightarrow \quad a^2 = \sigma_x^2 \left\langle \frac{1}{f(N_i)} \right\rangle^{-1}. \tag{7.11}$$

Операцію усереднення потрібно проводити з певною ваговою функцією w_i . Цілком природно обрати її у вигляді

$$w_i = N_i, \tag{7.12}$$

тобто текст обсягом kN даватиме внесок як k текстів обсягом N.

Отже,

$$\left\langle (\ldots) \right\rangle = \frac{1}{\sum_{i} w_i} \sum_{i} (\ldots) w_i. \tag{7.13}$$

Розглянемо запропонований підхід на прикладі жанрової атрибуції наукових статей з різних галузей. У двопараметричній задачі область, що відповідає певному жанрові, буде еліпсом

$$\frac{(x-x_0)^2}{2a^2/f(N_0)} + \frac{(y-y_0)^2}{2b^2/f(N_0)} \le 1,$$
(7.14)

де N_0 — певна характерна довжина тексту (у наведеному прикладі $N_0 = \bar{N}/2$, причому \bar{N} — середня довжина за вибіркою).



Рис. 7.5. Розміщення на площині $(d; p_4)$ наукових статей з різних дисциплін, включаючи фізичні тексти з «Журналу фізичних досліджень» (JPS), $f(N_i) = (N_i \ln N_i)$. Центри еліпсів позначено H (humanities, гуманітарні) та S (sciences, природничі), їх координати, відповідно, H (1.471; 0.1734), S (2.008; 0.1679)

На рис. 7.5 показано результати для наукових статей з гуманітарних і природничих наук. Атрибуцію виконано за параметром $d = m_2/(m_1 - 1)$, де m_1 — середня довжина слова у складах, а m_2 — так званий другий центральний момент, $m_2 = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - m_1)^2$, та часткою чотирискладових слів p_4 [491, 492].

я часткою чотирискладових слв *p*₄ [491, 492]. Як показує рис. 7.5, запропонована гіпотеза добре підтверджує-

ться. Цікаво зазначити, зокрема, що фізичні тексти, які потрапили в «гуманітарний» еліпс, є насправді персоналіями, а не власне фізичними статтями.

7.6. Новела Антуана де Сент-Екзюпері

Наступним матеріалом досліджень обрано переклади новели Антуана де Сент-Екзюпері «Маленький принц» різними мовами. Кілька прикладів ранґово-частотних залежностей для цього тексту показано на рис. 7.6.



Рис. 7.6. Приклад ранґово-частотних розподілів перекладів «Маленького принца» китайською (+), англійською (*) та українською (×) мовами

«Маленький принц» (французька ориґінальна назва *Le Petit Prince*) — відома новела-казка, яку Антуан де Сент-Екзюпері написав 1943 р. Від часу першої публікації цей твір переклали двома сотнями мов, наприклад, на сайті http://www.patoche.org/ lepetitprince/gallima.htm подано перелік близько 240 різних мов, включно з деякими діалектами та штучними мовами (дані наведено станом на 2013 рік). Насправді, можна знайти дуже мало текстів, для яких існує таке розмаїття перекладів, причому значна частка з них фіґурує в електронному вигляді в мережі Інтернет. Зрозуміло, що значно більшу кількість перекладів маємо для Біблії (чи точніше, Нового Заповіту) або для Загальної декларації прав людини (http://unicode.org/udhr/). І хоча ці два тексти досить специфічні за стилем, їх також можна розглядати як потенційний матеріал для подальших досліджень, як зокрема показано в підрозділі 7.9.

Цікаво зазначити, що новела «Маленький принц» завдяки великій кількості діалогів наближається за частотною поведінкою до розмовного стилю. Зокрема, наші підрахунки показують, що займенник 'я' виявляється найбільш частотним у французькому оригіналі та в українському перекладі, другим за частотою (після 'the') в англійському, також другим — у баманському [493], що є рисою, характерною саме для розмовного тексту, порівн. [494].

З метою аналізу новели ми обрали сорок мов, намагаючись, з одного боку, включити по декілька представників з однієї мовної родини, а з іншого — охопити різні родини. Також вибір визначався доступністю електронних текстів перекладу. Нижче подано аналізовані мови в алфавітному порядку: азербайджанська, англійська, арабська, бамана, баскська (еускара), білоруська, болгарська, в'єтнамська, вірменська, гінді, грецька, грузинська, есперанто, естонська, іврит, іспанська, італійська, каталонська, китайська, корейська, латвійська, литовська, ложбан, монгольська, морісьєн (маврикійська креольська), німецька, польська, португальська, російська, румунська, сербська, тайська, турецька, угорська, українська, фарсі, французька, хорватська, чеська, японська.

Джерелами електронних текстів стали такі сайти:

- http://www.odaha.com/antoine-de-saint-exupery/maly-princ
- http://www.petit-prince.at/links.htm
- http://ukrlib.com.ua/books-zl/
- http://www.lib.ru/EKZUPERY/
- http://olddreamz.com/bookshelf/prince/littleprince.html
- http://www.xiaowangzi.org



Рис. 7.7. Положення різних мов на площині (α ; τ). Мови позначено кодами ISO (якщо двобуквений код не визначено, то використано найближче за звучанням позначення): AR — арабська; AT — астурійська; AZ — азербайджанська; BM — бамана; BE — білоруська; BG — болгарська; CA — каталонська; CS — чеська; DE — німецька; EN — англійська; ES — іспанська; EU — баскська (еускара); FA — фарсі; FR — французька; EL — грецька; EO — есперанто; ET — естонська; HE — іврит; HI — гінді; HR — хорватська; HU — угорська; HY — вірменська; IT — італійська; JP — японська; KA — грузинська; MC — маврикійська креольська (морісьєн); MN — монгольська; PL — польська; PT — португальська; RO — румунська; RU — російська; SR — сербська; TF — амазіг (берберська, письмом тіфінаг); TH — тайська; TR — турецька; UK — українська; VI — в'єтнамська; ZH — китайська

Результати обчислень підсумовано на рис. 7.7 і в табл. 7.2. Поки що ми не будемо враховувати в аналізі аналога активності z, оскільки значення цього параметра близькі до одиниці завдяки достатньо великим обсягам текстів N, отже, й великою буде кількість гапаксів, через які визначається z, порівн. (7.3).

Як уже згадувалося в попередньому підрозділі, попередні дослідження [482] свідчили про те, що значення параметрів температури і показника степеня α у спектрі корелюють зі ступенем аналітичності мови. Це спостереження вдалося підтвердити і на досліджуваному матеріалі.

З рис. 7.7 можна зауважити групування мов у кількох ділянках площини ($\alpha; \tau$) (дані про тайський переклад до уваги не беремо, див. докладніше примітку до табл. 7.2). Отже, вдається виділити такі групи:

- бамана, в'єтнамська, китайська, ложбан, морісьєн і японська;
- англійська, гінді, італійська, німецька, португальська та французька;
- іспанська, монгольська, румунська, сербська, фарсі, хорватська, чеська;
- білоруська, польська, російська, українська, латвійська, литовська, каталонська, арабська, азербайджанська, грузинська, іврит, угорська, корейська та турецька (можна також зауважити певні підгрупи в межах цієї більшої групи).

Дещо окремо стоять такі мови: баскська, естонська, вірменська, грецька, есперанто і болгарська (у цій слов'янській мові словозміна суттєво збіднена порівняно з іншими, що й, очевидно, стало причиною її виокремлення з очікуваних груп). Самі слов'янські мови розділяються на дві групи. Одна з них включає білоруську, польську, російську та українську мови, інша складається з хорватської, сербської і — певною мірою неочікувано — чеської.



Moba	Оригінальна назва	N	$N_{ m hapax}$	σ	T	$\tau = \ln T / \ln N$
Польська	Mały książe	11272	2025	1.58	814	0.718
Литовська	Mažasis princas	10899	2105	1.62	784	0.717
Російська	Маленький принц	12547	1915	1.55	831	0.712
Вірменська	Փոքրիկ իշխանը	13794	1727	1.49	885	0.712
Азербайджанська	Balaca Şahzadə	12557	2667	1.58	820	0.711
Грузинська	პატარა უფლისწული	10822	2519	1.60	741	0.711
Корейська	어린 왕자의	11282	3048	1.55	748	0.709
Білоруська	Маленькі прынц	12391	1989	1.55	785	0.707
Латвійська	Mazais princis	11527	1957	1.56	740	0.706
Іврит	הנסיך הקטן	12105	3454	1.63	742	0.703
Каталонська	El Petit Príncep	13954	1811	1.59	808	0.701
Угорська	Kis herceg	12041	2476	1.56	725	0.701
Арабська	الأمير الصغير	1001	3367	1.62	607	0.696
Баскська	Printze Txikia	11760	1957	1.50	683	0.696
Українська	Маленький принц	11553	2205	1.55	673	0.696
Турецька	Küçük prens	11697	3173	1.65	673	0.695
Болгарська	Малкия принц	12066	1609	1.39	625	0.685
Іспанська	El Principito	13735	1479	1.47	669	0.683
Φ apci	شازده کوچول	14214	2127	1.45	679	0.682
Амазіг (берберська)	°XN∧SI °C¥X₀I	12781	1629	1.60	631	0.682
Чеська	Malý princ	11398	2158	1.48	581	0.681
Сербська	Mali Princ	12217	1945	1.52	599	0.680
Естонська	Väike prints	11901	2056	1.41	587	0.679
			Див. зан	<i>к</i> інченн.	я на н	аступній сторінці

Таблиця 7.2. Параметри «енергетичного спектра» і «температури» текстів

\sim	
(закінчення	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
TekcTib	
«температури»	
•	
спектра»	
«енергетичного	
Параметри	
ä	
2	
Таблиця	

Moba	Оригінальна назва	N	$N_{ m hapax}$	σ	T	$\tau = \ln T / \ln N$
Хорватська	Mali Princ	12095	1958	1.49	587	0.678
Грецька	Ο μιχρός πρίγκιπας	14447	1742	1.58	653	0.677
Румунська	Micul print	13188	1708	1.50	603	0.675
Астурійська	El principín	12938	2006	1.53	580	0.672
Монгольська	Бяцхан хун тайж	11819	2029	1.46	585	0.669
Італійська	Il Piccolo Principe	12429	1734	1.45	528	0.665
Португальська	O Pequeno Príncipe	12646	1591	1.47	531	0.664
Есперанто	La Eta Princo	11808	1555	1.55	505	0.664
Французька	Le Petit Prince	13926	1684	1.44	546	0.661
Німецька	Der Kleine Prinz	14077	1554	1.49	544	0.659
Гінді	नन्हा राजकुमार	14014	1129	1.38	518	0.655
Англійська	The Little Prince	16905	1030	1.43	579	0.653
Морісьєн	Zistoir Ti-Prins	12553	747	1.24	375	0.628
В'єтнамська	Hoàng Tử Bé	17694	535	1.15	410	0.615
Китайська**	小王子	22806	420	1.24	458	0.611
Ложбан	le cmalu noltru	17482	581	1.18	360	0.603
Бамана	Masadennin	16269	852	1.32	314	0.593
Тайська ^{***}	เจ้าชายน้อย	2656	2241	1.47	50	0.497

* Для словоподілу японського тексту використано програмні засоби UniDic, MeCab та ChaSen.

** Дані щодо китайського перекладу відповідають частотам ієрогліфів, а не слів.

*** У тайських текстах пробілами розділяють речення або їх частини. Тому відповідні дані займають окреме положення й наведені для подальших узагальнень.
Цікаво, що каталонська мова потрапила в область, яка відрізняється від тої, що випливає з її генеалогічних зв'язків.

Отримані дані можна вважати ще одним підтвердженням гіпотези про зв'язок між значеннями параметрів α й T та ступенем аналітичності мови.

Цікаво зауважити, що дві штучні мови, а саме есперанто і ложбан, займають дуже різні положення на площині (α ; τ). Це пов'язано з підходами до створення цих мов. Якщо ложбан ґрунтується на предикативній логіці і є високоаналітичною, навіть близькою до «машинної», мовою, то есперанто — мова переважно аґлютинативна, яка має спільні риси з природними.

Потрібно підкреслити, що близькі положення мов на рис. 7.7 в жодному разі не означають близької спорідненості. Натомість у такій ситуації можна стверджувати про подібність частотної структури текстів на рівні слів, що й пов'язано з аналітичністю чи синтетичністю мови.

7.7. Траєкторії текстів

Ще одним текстом, для якого вдалося знайти низку перекладів різними мовами, була новелаказка Льюїса Керрола «Аліса в Країні чудес» (Alice's Adventures in Wonderland) [495].

Для розрахунків параметрів розподілу ми обмежилися рівнями $j_{\text{max}} = 10$ у випадку «Маленького принца» та $j_{\text{max}} = 15$ для «Аліси...». Такі верхні межі можна обґрунтувати на підставі вивчення частотних розподілів слів. Відповідні значення є близькими до так званої k-



точки [496] для аналізованих тут текстів. Саму k-точку визначають подібно до індекса Гірша, проте в іншому «просторі» змінних, а саме: k-точка є розв'язком рівняння $N_j = j$ (з певним доозначенням, якщо перетин N_j і j не відповідає цілому числу j). Вважають, що ця точка розділяє різні типи лексики: високочастотні функціональні (допоміжні) слова та низькочастотні повнозначні [476]. Таке розділення, однак, досить розмите [497]. Таблиці 7.3, 7.4 дають змогу оцінити, наскільки обрані значення j_{max} близькі до k-точок.

Для вивчення залежності параметрів α й τ від довжини тексту N отримано так звані траєкторії текстів для кожного перекладу: значення двох параметрів фіксує точку на площині, а їх зміна зі зростанням N визначає певну лінію, яку назвемо траєкторією.

Виявилося, що стабільності у значеннях параметрів не вдається досягти відразу, поки довжина тексту досить мала. Назагал, як показує практика, для досліджень бажано мати тексти, у яких кількість слів перевищує кілька тисяч, і переклади «Маленького принца» перебувають досить близько до такої нижньої межі [483].



Рис. 7.8. Траєкторії російських перекладів «Маленького принца» (знаки +, ×) та «Аліси в країні чудес» (знаки □, ■ та *) [495]. Перша точка відповідає першій 1000 слів, а кожна наступна розрахована з кроком також 1000

На рис. 7.8 зображено траєкторії текстів для кількох перекладів російською мовою, які вдалося знайти в електронному вигляді: два «Маленького принца» та три «Аліси в країні чудес». Простежуємо якісну подібність у формах цих траєкторій, хоча існують відмінності у числових значеннях відповідних параметрів для різних текстів. Це підтверджує думку про вплив жанру на величини α й τ навіть у межах одної мови.

j	кит.	ложбан	англ.	фр.	пол.	poc.	укр.
1	420	582	1032	1578	2025	1916	2207
2	213	221	359	399	574	571	513
3	140	124	206	176	261	271	216
4	92	84	115	107	122	146	115
5	78	69	65	71	95	96	81
6	43	45	39	44	52	39	54
7	51	53	37	40	37	38	27
8	41	25	27	28	33	43	28
9	20	21	22	18	24	24	18
10	20	23	19	22	15	18	19
11	23	27	20	10	8	11	12
12	17	17	18	12	15	11	11
13	17	16	12	14	10	7	10
14	18	19	13	3	15	8	14
15	15	6	7	12	3	6	5
16	11	10	7	7	9	4	4
17	10	7	6	4	6	7	6
18	16	5	6	9	4	6	9
19	9	9	6	5	6	4	3
20	8	6	4	4	2	6	4

Таблиця 7.3. Спостережувані величини N_j для різних перекладів новели «Маленький принц». Найближчі до k-точок значення рівнів j виділено напівжирним курсивом та затінено сірим кольором

Таблиця 7.4. Спостережувані величини N_j для різних перекладів новели «Аліса в Країні чудес». Найближчі до k-точок значення рівнів j виділено напівжирним курсивом та затінено сірим кольором

j	кит.	ложбан	англ.	франц.	пол.	poc.	укр.
1	460	939	1456	2070	3141	2709	3328
2	241	294	558	615	1000	1051	1142
3	146	172	312	305	468	474	524
4	86	118	187	183	225	292	243
5	97	91	117	110	127	171	140
6	72	60	71	84	98	110	77
7	57	57	55	57	65	59	67
8	32	37	59	52	59	52	40
9	30	29	29	32	40	27	32
10	37	36	46	34	27	30	34
11	32	31	27	20	20	26	29
12	36	25	33	23	17	17	18
13	22	23	17	22	18	18	6
14	25	22	18	20	14	16	11
15	19	19	16	17	11	6	12
16	11	16	g	20	11	7	6
17	18	7	12	8	11	9	5
18	16	15	9	3	6	11	8
19	15	12	8	8	10	4	7
20	12	12	8	7	5	3	9

Водночас поведінка траєкторій засвідчує, що вплив перекладача (як автора) на значення параметрів є суттєво меншим, ніж вплив жанру. Ці спостереження будуть корисними в подальших дослідженнях можливостей атрибуції за α й τ чи спорідненими величинами.

7.8. Моделі з дробовою вимірністю простору і дробовою статистикою

Як показано в попередніх розділах, для багатьох мов, що характеризуються високим рівнем аналітичності (наприклад, в'єтнамська, гавайська, китайська, морісьєн, штучна мова ложбан) показник степеня у спектрі $\alpha = 1.1 \div 1.3$, тобто близький до одиниці. Це наштовхує на думку про те, що можна використати як модель систему гармонічних осциляторів зі спектром $\varepsilon_j = j - 1$, використавши як другий параметр вимірність простору. Тобто замість дослідженого раніше виразу (7.4) будемо аналізувати функцію

$$N_j = \frac{\Gamma(j-1+D)}{\Gamma(j)\Gamma(j+D)} \cdot \frac{1}{z^{-1}e^{(j-1)/T} - 1},$$
(7.15)

де враховано виродження *j*-го рівня (3.15).

Результати розрахунків наведено на рис. 7.9–7.11. Якість підгонки можна перевірити за допомогою так званого коефіцієнта детермінації R^2 , який визначають так [498]:

$$R^{2} = 1 - \frac{\sum_{j} \left(N_{j}^{\exp} - N_{j} \right)^{2}}{\sum_{j} \left(N_{j}^{\exp} - \langle N^{\exp} \rangle \right)^{2}}.$$
 (7.16)

У цьому виразі $\langle N^{\exp} \rangle$ — це середнє значення спостережуваних величин N_j^{\exp} . У нашому випадку підсумовування відбувається від j = 2, оскільки j = 1 зафіксовано через z.

Обчислені значення R^2 є дуже близькими до одиниці (зазвичай, $R^2 > 0.9$ вважають прийнятним [498]). Наприклад, переклад «Аліси...» китайською та мовою ложбан дає $R^2 > 0.98$ і $R^2 > 0.99$, відповідно. Дещо нижчі значення простежуємо для англійського $(R^2 > 0.97)$ і гавайського $(R^2 > 0.96)$ текстів.



Рис. 7.9. Результати для перекладів «Аліси в Країні чудес» мовою ложбан (вгорі) і гавайською (внизу). Кружечками показано спостережувані значення, а лінія відповідає функції (7.15)



Рис. 7.10. Результати для перекладів «Маленького принца» мовою ложбан (вгорі) і в'єтнамською (внизу). Кружечками показано спостережувані значення, а лінія відповідає функції (7.15)



Рис. 7.11. Результати для перекладів «Аліси в Країні чудес» англійською (вгорі) та українською (внизу) мовами. Кружечками показано спостережувані значення, а лінія відповідає функції (7.15)

В українського перекладу $R^2 > 0.94$, і таке порівняно низьке значення можна легко зауважити за поведінкою кривої на рис. 7.11. Причина полягає в тому, що для мов із більш синтетичною граматикою показник α у спектрі $\varepsilon_j = (j-1)^{\alpha}$ значно відхиляється від одиниці [482, 483, 499], а отже модель гармонічних осциляторів дає гірший опис, порівн. результати для англійського та українського текстів на рис. 7.11. Модель (7.15) погано відтворює проміжні значення $j \gtrsim 5$.

Мова	Текст	D	ΔD
англійська	«Аліса в Країні чудес»	0.557	0.143
	«Маленький принц»	0.530	0.165
в'єтнамська	«Маленький принц»	0.595	0.088
гавайська	«Аліса в Країні чудес»	0.699	0.127
китайська	«Аліса в Країні чудес»	0.699	0.081
	«Маленький принц»	0.677	0.102
ложбан	«Аліса в Країні чудес»	0.649	0.028
	«Маленький принц»	0.563	0.080
морісьєн	«Маленький принц»	0.513	0.097
українська	«Аліса в Країні чудес»	0.501	0.303
	«Маленький принц»	0.416	0.195

Таблиця 7.5. Значення дробової вимірності простору для різних текстів. Результати отримано в інтервалі $D\pm\Delta D$

Розраховані просторові вимірності підсумовано в табл. 7.5.

Отже, ще одна запропонована модель опису частотної структури текстів, що ґрунтується на розподілі Бозе для системи гармонічних осциляторів у просторі з дробовою вимірністю $D = 0.5 \div 0.7$ добре підходить для мов із високим ступенем аналітичності. Варто також зазначити, що розраховані значення D слабко змінюються залежно від розміру тексту, що робить цей параметр добрим показником для досліджень [500].

Для опису частотних даних можна також застосувати вирази з подібною до бозонної поведінкою при малих j, що ґрунтуються на дробових статистиках, наприклад, статистиці Поліхронакоса [98, 179]

$$N_j = \frac{g_j}{z^{-1}e^{\varepsilon_j/T} - \gamma},\tag{7.17}$$

де активність z визначається умовою:

$$z^{-1} = \gamma + \frac{1}{N_1}.\tag{7.18}$$

Модифікуючи далі цю функцію розподілу за допомогою q-експоненти Цалліса (5.45), можна досягнути степеневої залежності при великих j, яка часто виникає в дослідженні складних систем.



Рис. 7.12. Результати підгонки для українського перекладу «Аліси у Країні чудес». Штрихова лінія — функція (7.1) зі степеневим спектром $\varepsilon_j = (j-1)^{\alpha}$, суцільна лінія — функція (7.19) при q = 1.5. В обох випадках параметри дорівнюють $T = 1787 \pm 22, \ \alpha = 1.74 \pm 0.02$

Відповідний аналіз проведено для українського перекладу «Аліси в Країні чудес» із функцією

$$N_j = \frac{1}{z^{-1} e_q^{(j-1)^{\alpha}/T} - 1}.$$
(7.19)

На рис. 7.12 показано результати розрахунків. Обчислення зроблено при фіксованому q = 1.5 через підгонку за двома параметрами, T та α . Можна зауважити, що для великих j простежуємо певне поліпшення опису частотних даних порівняно з (одновимірною) функцією (7.1) зі степеневим спектром $\varepsilon_i = (j-1)^{\alpha}$.

Залежно від застосованих наближень та від значень параметрів, моделі, задані виразами (7.15) та (7.19), виявляються узагальненнями інших відомих наближень для N_i [476, 501], а саме

$$N_j = Aj^b$$
 i $N_j = Aj^b e^{-cj}$

параметри яких (A, b, c) пов'язані з z, D та T.

7.9. Можливості дослідження еволюції мов

Питання еволюції мов є дуже різнобічним, його вивчають різними методами: лінгвістичними, історичними, культурними, соціологічними тощо [502–505]. Також застосовують підходи природничих наук, включаючи еволюційну біологію [506] і фізику [474, 507, 508], а також міждисциплінарні дослідження [509–511].

Як уже було зазначено у вступі, порівняно з більшістю подібних досліджень, див. зокрема [475], розглянутий тут підхід ґрунтується на аналізі низькочастотної лексики, крім того, до уваги беремо лише частоти слів, а не самі слова чи їх основи, порівн. [512].

У цьому підрозділі зроблено простий аналіз, мета якого — показати, як певні параметри тексту змінюються з часом. Назагал знайти відповідний матеріал непросто: потрібен той самий текст, написаний тією самою мовою з великим часовим інтервалом, бажано декілька століть. Найвідповіднішими виявляються релігійні тексти, зокрема тут ми досліджуватимемо Євангеліє від Івана. Зважаючи на специфічний жанр, варто очікувати підтвердження загальних тенденцій у поведінці параметрів, тоді як їх значення можуть відрізнятися від розрахованих на художніх текстах, проаналізованих у попередніх підрозділах.



Рис. 7.13. Розрахунки за рівнянням (7.4), що відповідають частотним даним англосаксонського перекладу Євангелія від Івана

Для розрахунків взято лише рівні з $j = 2 \div 10$. Верхню межу 10 вибрано для простоти, однак вона також є близькою до k-точки (див. попередній підрозділ) для усіх аналізованих тут текстів.

Узагалі кажучи, можна ввести різні «сталі Больцмана» (або коефіцієнти пропорційності у спектрі елементарних збуджень) для різних мов або мовних родин. Однак вплив від цього стає нехтовно малим за умови великих обсягів тексту: заміна T на kT приводить до параметра α у вигляді

$$\alpha = \ln kT / \ln N = \ln T / \ln N + \ln k / \ln N,$$

і останній доданок прямує до нуля, коли N — велике.



Розрахунки зроблено для перекладів Євангелія від Івана тридцятьма мовами з різних родин. Електронні версії переважно взято з http://unbound.biola.edu та http://gospelgo.com/bibles.htm. Взято до уваги лише перші дев'ять розділів (із 21), оскільки саме стільки було доступно в електронному вигляді з англосаксонського перекладу http://wordhord.org/nasb/john.html. Peзультати обчислень показано на рис. 7.14, де кожну мову зображено на площині α - τ точкою з «вусами», що відповідають похибкам, і в табл. 7.6. Можна зауважити, що, як і в [483], мови займають переважно смугу між лівою нижньою (малі α — малі τ) і правою верхньою областями (великі α — великі τ). Стрілками показано зв'язки між мовами, спорідненими історично, однак їх не можна розглядати як прямі еволюційні зв'язки.

Розмаїття проаналізованих мов пов'язане з намірами залучити різні щодо значень α і τ типи граматики: ізолюючі, флективні, полісентетичні або інкорпоруючі мови. Включення кількох груп споріднених мов забезпечує дані для вивчення їх еволюції.

Як показують попередні спостереження [482, 483], менші значення τ й α відповідають вищому ступеню аналітичності (меншій словозміні), що добре демонструє розміщення слов'янських (з багатою словозміною) та германських (більш аналітичних) мов. Звідси можна припустити, що еволюція відбувається від області «великі α — великі τ » до області «малі α — малі τ ». Ця модель є дуже спрощеною і потребує додаткових матеріалів для уточнення в майбутньому.

Майже пряма лінія з'єднує староцерковнослов'янську мову з болгарською, проходячи між російською та українською — це відповідає досить складній граматиці давньої мови порівняно зі значно спрощеною в болгарській (наприклад, відсутність відмінювання іменників). Такий самий напрям простежуємо між старогрецькою і новогрецькою мовами². Подібно, але під більшим кутом, можна провести лінію між латинською, французькою, італійською та іспанською мовами. З іншого боку, лінія між англосаксонською (староанглійською) та областю ранньої сучасної та сучасної англій-

²До включення старогрецького перекладу спонукало обговорення цих результатів на семінарі в Інституті теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова у вересні 2016 р.

ської мов має протилежний нахил. Це можна розглядати як вказівку на складні історичні зв'язки між цими стадіями англійської, наприклад, зсув до більших значень α може бути пов'язаний із норманським (французьким) впливом на сучасну мову порівняно з кельтським в англосаксонській. Цікаво зазначити, що зменшення τ як міри синтетичності мови корелює з кількісними оцінками Дж. Г. Ґрінберга (1960) [513].

У табл. 7.7 подано результати розрахунків, що ґрунтуються на повному тексті Євангелія від Івана. Можна зауважити, що «температура» T досить точно масштабується за законом:

$$T = tN^{\beta},\tag{7.20}$$

де N — кількість слів від початку до певної точки тексту. Подібний вираз відомий для *гапакс леґомена*:

$$N_1 = aN^b. (7.21)$$

Із природної вимоги про екстенсивність вільної енерґії Ґіббса $G=\mu N\sim N$ отримаємо для великих N

$$\mu = T \ln z = T \ln \frac{N_1}{N_1 + 1} \simeq -\frac{T}{N_1}.$$
(7.22)

Звідси отримаємо умову $\beta = b$. Як показує табл. 7.7, це співвідношення виконується досить добре.

Хоча залежність між значеннями параметрів α і τ та типом граматики видається досить очевидною, залишаються деякі нез'ясовані питання. Насамперед, можна було б очікувати, що ізолюючі мови (в'єтнамська, китайська, маорі) будуть протиставлені полісинтетичним або інкорпоруючим (аймара і керріер), проте з цієї схеми випадає староцерковнослов'янська. Крім того, в запропонованій схемі немає змоги розрізнити флективні та аґлютинативні мови (прикладами останніх є есперанто, суагілі, таґалоґ, угорська та ко́са), які характеризуються проміжними значеннями параметрів α і τ .

Код	Мова	N	N_1	α	T	au
ang	Англосаксонська					
	(староанглійська)	8200	768	1.32 ± 0.04	286 ± 9	0.628
aym	Аймара	5841	1710	1.54 ± 0.05	389 ± 9	0.688
bre	Бретонська	9341	616	1.43 ± 0.06	336 ± 14	0.671
\mathbf{bul}	Болгарська	7577	841	1.37 ± 0.07	322 ± 17	0.646
chu	Староцерковно-					
	слов'янська	6774	910	1.70 ± 0.07	471 ± 18	0.698
crx	Keppiep	9510	1170	1.66 ± 0.06	387 ± 11	0.651
dan	Данська	8498	487	1.33 ± 0.04	261 ± 9	0.615
deu	Німецька	8724	621	1.35 ± 0.04	293 ± 9	0.626
ell	Грецька	8314	817	1.36 ± 0.07	352 ± 17	0.650
eme	Рання					
	новоанглійська	9007	371	1.35 ± 0.07	249 ± 14	0.606
eng	Англійська	8889	390	1.44 ± 0.05	270 ± 11	0.616
$_{\rm epo}$	Есперанто	8319	611	1.38 ± 0.06	266 ± 11	0.618
\mathbf{fra}	Французька	8694	668	1.36 ± 0.05	311 ± 11	0.633
hun	Угорська	7631	1184	1.54 ± 0.03	379 ± 6	0.661
$_{\rm glv}$	Ґельська менська	9513	495	1.33 ± 0.11	276 ± 25	0.620
grc	Старогрецька	7511	970	1.55 ± 0.06	389 ± 13	0.681
ice	Ісландська	7929	795	1.34 ± 0.06	322 ± 13	0.630
ita	Італійська	8531	712	1.39 ± 0.03	$331\pm~8$	0.646
lat	Латинська	6816	842	1.47 ± 0.05	358 ± 12	0.666
lav	Латвійська	6975	925	1.54 ± 0.06	387 ± 14	0.666
lit	Литовська	6366	1117	1.51 ± 0.04	367 ± 9	0.667
mao	Маорійська	12007	215	1.05 ± 0.07	132 ± 9	0.520
pol	Польська	7129	904	1.41 ± 0.05	384 ± 13	0.673
rus	Російська	6901	954	1.41 ± 0.10	355 ± 24	0.662
$_{\rm spa}$	Іспанська	8166	687	1.23 ± 0.11	252 ± 21	0.626
swa	Суагілі	6554	1081	1.46 ± 0.07	312 ± 12	0.638
tag	Таґалоґ	9500	592	1.37 ± 0.05	289 ± 11	0.645
$_{ m ukr}$	Українська	7445	903	1.56 ± 0.04	422 ± 10	0.660
vie	В'єтнамська	10162	269	1.15 ± 0.07	191 ± 14	0.589
xho	Kóca	5739	1651	1.59 ± 0.03	386 ± 5	0.646
zhs	Китайська*	12072	231	1.13 ± 0.07	222 ± 18	0.624

Таблиця 7.6. Параметри перекладів Євангелія від Івана різними мовами (перші дев'ять розділів)

* Через відсутність поділу на слова у китайському письмі проаналізовано частоту окремих ієрогліфів, а не слів.

Код	Мова	au	β	b
eng	Англійська	0.616	0.406 ± 0.021	0.436 ± 0.015
epo	Есперанто	0.618	0.613 ± 0.030	0.566 ± 0.015
fra	Французька	0.633	0.487 ± 0.015	0.607 ± 0.013
ita	Італійська	0.646	0.550 ± 0.009	0.607 ± 0.011
lat	Латинська	0.666	0.691 ± 0.015	0.598 ± 0.013
mao	Maopi	0.520	0.331 ± 0.023	0.412 ± 0.018
pol	Польська	0.673	0.650 ± 0.020	0.555 ± 0.015
rus	Російська	0.662	0.690 ± 0.025	0.567 ± 0.012
spa	Іспанська	0.626	0.585 ± 0.013	0.597 ± 0.005
ukr	Українська	0.660	0.660 ± 0.033	0.605 ± 0.022
vie	В'єтнамська	0.589	0.408 ± 0.024	0.335 ± 0.017
xho	Kóca	0.646	0.809 ± 0.014	0.730 ± 0.006
zhs	Китайська	0.624	0.259 ± 0.018	0.288 ± 0.018

Таблиця 7.7. Параметр $\tau=\ln T/\ln N$ і показники масштабування «температури» (β) і кількості гапаксів (b)

7.10. Висновки до розділу 7

У цьому розділі на підставі аналогії між частотним розподілом слів у тексті та розподілом Бозе запропоновано новий набір параметрів для опису поведінки частот слів. Зокрема, з цією метою введено поняття «температури» тексту T. За результатами розрахунків для таких мов, як англійська, українська, а також ґвінейська манінка, встановлено кореляцію між типом граматики (рівнем аналітичності) мови та запропонованими параметрами.

Обчислення поширено на деякі інші тексти. Проаналізовано переклади казки Антуана де Сент-Екзюпері «Маленький принц» чотирма десятками мов із різних мовних родин. Вибір цього твору пов'язаний із тим, що він є одним із найбільш перекладених секулярних текстів. Отримані дані підтвердили початкову гіпотезу про існування зв'язку між типом граматики певної мови і запропонованими параметрами. Зазначмо також, що окремої уваги потребує аналіз залежності параметрів від розміру системи N [490]. Для кожного перекладу розраховано параметр, пов'язаний із температурою $\tau = \ln T / \ln N$, та показник спектра α моделі.

Обчислення, зроблені для «Маленького принца», доповнено перекладами казки Льюїса Керрола «Аліса в Країні чудес». Вивчено поведінку величин T та α впродовж продукування тексту та на підставі рівнянь термодинаміки теоретично встановлено закономірності відповідних степеневих залежностей, які підтверджуються в більшості випадків. Виявлено також, що параметри текстів у межах однієї мови показують значно меншу варіацію стосовно перекладача, ніж стосовно жанру. Сьогодні ще немає можливості проводити атрибуцію текстів за мовою на підставі запропонованого набору параметрів, оскільки жанрові особливості потребують додаткового вивчення.

Показано можливість використання запропонованого методу для дослідження еволюції мов. З обчислених параметрів перекладу Євангелія від Івана для кількох мовних родоводів чітко простежується спрощення граматики з часом. У цьому напрямі також передбачено подальші дослідження із залученням більшої кількості текстів. Зокрема, для порівнянь можна використовувати латинські переклади деяких сучасних авторів, які з'явилися протягом XX– XXI ст.

Для мов із високим ступенем аналітичності (в'єтнамська, гавайська, китайська, ложбан, морісьєн) запропоновано альтернативний опис із використанням моделі гармонічних осциляторів у просторі з дробовою вимірністю. Додатково до температури параметром є вимірність простору, яка виявилася меншою за одиницю. Тут, крім розподілу Бозе, також проаналізовано деякі моделі, що ґрунтуються на дробовій статистиці.

Удосконалення описаного методу пов'язане не лише з потребою розширення «експериментальної бази» (текстів різних авторів різними мовами), а й із поглибленням окремих його деталей. Зокрема, потрібне уточнення форми спектра елементарних збуджень ε_j для великих значень рівня $j \gg 1$, яке би забезпечувало правильний опис відповідних чисел заповнення. Потрібно також дослідити можливості розрахунку інших параметрів у межах «термодинамічного підходу» (наприклад, аналогів енергії, теплоємності тощо, порівн. [474]).

Головними завданнями, які варто очікувати від запропонованого підходу, є автоматична атрибуція текстів, важлива для автоматичного опрацювання мови. У майбутньому можливі застосування подібних методів і в інших галузях, зокрема в генетиці та суспільних науках. Наприклад, попередній аналіз вказує на можливість класифікації діагнозів за певними частотними характеристиками електрокардіограм.

ВИСНОВКИ

Викладені нові результати, що стосуються квантових багаточастинкових систем з різними типами статистики та кількох суміжних задач, для яких може бути встановлена аналогія з фізичними системами, можна підсумувати у вигляді таких тез.

Показано, як енергетичний спектр сильновзаємодіючої бозесистеми можна отримати за допомогою діагоналізації гамільтоніана. На підставі формалізму двочасових температурних функцій Ґріна у довгохвильовій границі для гелію-4 отримано правильний нахил фононної гілки без застосування поняття ефективної маси. Відповідні аналітичні вирази можна застосовувати насамперед для систем із відомим фур'є-зображенням потенціалу міжатомних взаємодій.

У випадку слабковзаємодіючого бозе-газу отримано вирази для парного міжчастинкового потенціалу, що уточнюють δ -подібну залежність у борнівському наближенні теорії розсіяння. У моделі твердих сфер обчислено густину станів, критичну температуру та хімічний потенціал із використанням теорії ідеального газу на підставі спектра Боголюбова. За допомогою розкладу для двовимірного газу за параметром взаємодії ν_0 отримано результати, які можна узагальнити для довільної вимірності. Показано, що критична температура $T_c \propto -1/\ln \nu_0$ і прямує до нуля, а хімічний потенціал газу в пастці з точністю до лінійних за ν_0 доданків дорівнює хімічному потенціалові ідеального газу й відрізняється від нього доданками типу $\rho^2 \nu_0^2 \ln \rho \nu_0$.

Ідею Боголюбова про наближене вторинне квантування узагальнено на випадок слабковзаємодіючого бозе-газу в гармонічній пастці. Унаслідок цього отримано систему рівнянь, що дають змогу діагоналізувати гамільтоніан і розрахувати спектр елементарних збуджень. Застосовуючи пертурбативний розв'язок, обчислено конденсатну фракцію та енерґію модельної системи як функції температури. Запропоновано процедуру побудови ефективного гамільтоніана цієї задачі, що дозволяє виконати просту діагоналізацію.

Для бозе-системи у просторі з дробовою вимірністю (що відповідає пористому середовищу) проаналізовано відхилення від напівкласичного підходу та знайдено поправки, пов'язані з дискретністю енерґетичних рівнів. Знайдені аналітичні залежності критичної температури корисні для вивчення впливу скінченності кількості частинок на фізичні властивості бозонної системи. Числовий аналіз показує, що дискретність енерґетичних рівнів треба враховувати, аналізуючи безпосередній температурний окіл точки бозеконденсації.

Розглянуто систему одновимірних гармонічних осциляторів, що підпорядковуються дробовій статистиці Джентіле. З використанням відомої функції розподілу для модельної системи зі слабкою взаємодією розраховано температурні залежності хімічного потенціалу, енергії та теплоємності. Проаналізовано також вплив на них значень максимального заповнення рівня — параметра, що характеризує статистику.

Дробову статистику Поліхронакоса узагальнено з використанням комплекснозначного параметра, який у бозонній та ферміонній границі можна пов'язати з дисипативною гілкою енерґетичного спектра. Для одновимірної системи гармонічних осциляторів у такій статистиці розраховано термодинамічні функції, передбачено існування фазового переходу та зроблено оцінки про можливість експериментального вимірювання стрибків теплоємності. У випадку *D*-вимірної системи з'ясовано природу фазових переходів і зроблено аналітичні та числові оцінки критичних температур.

Двопараметричні дробові статистики використано для моделювання ідеальної системи еніонів. Показано, що за допомогою модифікацій статистики Голдейна–Ву можна відтворити рівняння стану еніонів з точністю до третього віріального коефіцієнта включно в усьому інтервалі значень еніонного параметра $\alpha \in [0; 1]$, тоді як модифікації статистики Поліхронакоса дозволяють коректний опис лише на обмежених відрізках з боку бозонної і ферміонної границь. На підставі проведеного аналізу запропоновано продовжити пошуки моделей еніонів серед модифікацій статистик Голдейна–Ву або Бозе–Айнштайна. За допомогою слабконеадитивної дробової статистики Поліхронакоса також вдалося врахувати вплив міжчастинкової взаємодії та скінченності кількості частинок у бозонних системах на термодинамічні функції та зокрема на значення критичної температури.

Методи аналізу бозонних систем поширено на суміжні задачі, що відкрило шлях до міждисциплінарних досліджень. Зокрема, розглянуто теоретико-числові задачі, відомі як розбиття натуральних чисел. Мікроканонічний розгляд бозе-системи зі степеневим спектром дав змогу оцінити кількість багатовимірних розбиттів на суму довільних степенів, причому отримані оцінки збігаються з відомими асимптотиками, розрахованими різними методами теорії чисел. Для одновимірних розбиттів отримано у простому компактному вигляді поправку до головної асимптотики Гарді– Рамануджана. Також оцінено кількість обмежених двовимірних (плоских) розбиттів натуральних чисел зі скінченною кількістю частин.

Вдалося встановити відповідність між дробовою (проміжною) статистикою Джентіле і бозе-системою зі скінченною кількістю частинок у випадку одновимірної гармонічної пастки. Запропонований підхід розширено на загальний степеневий енерґетичний спектр.

На підставі аналогії між ранґово-частотним розподілом (на прикладі текстів) і функцією розподілу у статистиці Бозе–Айнштайна запропоновано підхід для аналізу і класифікації складних систем. Він ґрунтується на нових параметрах для дослідження текстів та їх співвідношеннях з певними характеристиками мов. Такий набір параметрів має також перспективи застосування в біології (наприклад, у вивченні геномів) та суспільних науках у задачах, які дозволяють кількісний аналіз.

Результати розрахунків спектра елементарних збуджень бозонних систем можуть бути використані для інтерпретації експериментів у галузі фізики конденсованих систем. Отримані аналітичні та числові результати щодо властивостей слабковзаємодіючих систем мають перспективи застосування зокрема в дослідженнях бозе-конденсатів у пастках, які стосуються розробки нових технологій запису інформації та високоточних вимірювань.

Результати, що стосуються дробової статистики Поліхронакоса з комплексним параметром, можна використати для пояснення експериментів у системах з малою дисипативною частиною спектра елементарних збуджень. Двопараметричні дробові статистики дають змогу вивчати на підставі простих математичних моделей квантові системи з різними типами взаємодій, що є предметом інтенсивних експериментальних і теоретичних досліджень, які проводять у сучасних світових наукових центрах і лабораторіях. Знаходження квантовомеханічного зображення відповідної наближеної моделі еніонів може бути корисним у галузі квантової інформатики та квантових обчислень.

Розроблені міждисциплінарні застосування статистико-механічних підходів є важливими в дослідженнях складних систем з погляду передбачення їх поведінки чи класифікації за певними ознаками. Так, сьогодні у нас є певні попередні напрацювання щодо можливості класифікації діагнозів на підставі частотних характеристик електрокардіограм, які, однак, ще потребують додаткового аналізу. Зрозуміло, що результати в таких ділянках можуть мати не лише науковий ефект, а й важливе практичне значення.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

с-число, 87

fractional exclusion statistics, $\partial u b.$ статистика дробова виключна

g-он, $\partial u b$. ексклюзон

hapax legomena, *див.* гапакс леґомена

k-точка, 252

q-експонента Цалліса, 172 *q*-факторіал, 21, 34, 180 *q*-число, 22, 180

supersolid, 39

активність, 22, 26, 237 асимптотика Гарді–Рамануджана, 204, 209 Ердьоша–Ленера, 205, 217 Райта, 213

бозе-конденсат, 9 бозе-конденсація, 9, 10 бозе-суміш, 37

віріальне розвинення, 163

віріальний коефіцієнт, 26

гапакс леґомена, 236–238, 249, 266, 268

дзета-функція Рімана, 64, 209 довжина гармонічного осцилятора, 97, 196 мінімальна, 16, 202 розсіяння, 60, 192, 196 тексту, 236, 239, 241, 243, 245, 253 теплової хвилі де Бройля, 64, 163

ексклюзон, 29 емерджентність, 11 еніон, 10

закон збереження імпульсу, 88 степеневий, 236, 266 Ціпфа, 234 Ціпфа–Мандельброта, 234

квантовий ефект Голла, 9 кластерне розвинення, 163–165 кластерні інтеґрали, 163, 167, 173, 174, 184 коефіцієнт детермінації, 256 колективні змінні, 42 конденсатна фракція, 82, 85, 91 парастатистика Гріна, 11, 15 пастка, 77 перетворення Лапласа, 207 полілогарифм, 64 потенијал «майже твердих сфер», 60 рівень Фермі, 26, 168 розбиття натуральних чисел, 40, 203 необмежені, 204 обмежені, 204 плоскі, 205 прості, 204 розподіл Больцмана, 234 семіон, 29 співвідношення Артіна, 19 невизначеностей, 243 статистика Бозе–Айнштайна, 36, 165, 206

Голдейна-Ву, 27, 29-31, 168 Джентіле, 31, 168 дробова, 10 дробова виключна, 16, 161 еніонна, 167, 168 неадитивна, 162 неекстенсивна, 162 неповна, 172 Поліхронакоса, 30, 31, 168 слабконеадитивна, 187 Фермі–Дірака, 165 Цалліса, 172 статистична взаємодія, 27, 30 температура тексту, 234 термодинамічна границя, 167, 239формула Ейлера-Маклорена, 208, 210 функція Гріна, 23, 42, 46, 48 Maepa, 60 розбиття, 203 хімічний потенціал, 22

ЛІТЕРАТУРА

- Bardeen J. Superconductivity and other macroscopic quantum phenomena / J. Bardeen // Phys. Today. - 1990. - Vol. 43, No. 12. -P. 25-31.
- [2] Eisenstein J. P. The fractional quantum Hall effect / J. P. Eisenstein, H. L. Stormer // Science. - 1990. - Vol. 248, No. 4962. - P. 1510-1516.
- [3] Ketterle W. Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser / W. Ketterle // Rev. Mod. Phys. – 2002. – Vol. 74, No. 4. – P. 1131–1151.
- [4] Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor / M. H. Anderson, J. N. Ensher, M. R. Matthews [et al.] // Science. – 1995. – Vol. 269. – P. 198–201.
- [5] Bose–Einstein condensation in a gas of sodium atoms / K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 75. – P. 3969–3973.
- [6] Evidence of Bose–Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions / C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, R. G. Hulet // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol. 75, No. 9. — P. 1687– 1690.
- [7] Bose-Einstein condensation: Twenty years after / V. S. Bagnato, D. J. Frantzeskakis, P. G. Kevrekidis [et al.] // Rom. Rep. Phys. – 2015. – Vol. 67, No. 1. – P. 5–50.
- [8] Bose-Einstein condensation of atomic hydrogen / D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 81, No. 18. – P. 3811–3814.
- [9] Pethick C. J. Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases / C. J. Pethick, H. Smith. — Cambridge : Cambridge University Press, 2001. — xii, 402 p.
- [10] Боголюбов Н. Н. К теории сверхтекучести / Н. Н. Боголюбов // Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1947. — Т. 11, № 1. — С. 77–90.

- [11] Bassichis W. H. Analysis of the Bogoliubov method applied to a simple boson model / W. H. Bassichis, L. L. Foldy // Phys. Rev. - 1964. --Vol. 133. - P. A935-A943.
- [12] Okumura M. Proper treatment of the zero mode in quantum field theory for trapped Bose–Einstein condensation / M. Okumura, Y. Yamanaka // Phys. Rev. A. - 2003. - Vol. 68. - Art. 013609. --12 p.
- [13] Rogel-Salazar J. The Gross-Pitaevskii equation and Bose-Einstein condensates / J. Rogel-Salazar // Eur. J. Phys. - 2013. - Vol. 34, No. 2. - P. 247-257.
- Theory of Bose–Einstein condensation in trapped gases / F. Dalfovo,
 S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari // Rev. Mod. Phys. 1999. Vol. 71. P. 463–512.
- [15] Andersen J. O. Theory of the weakly interacting Bose gas / J. O. Andersen // Rev. Mod. Phys. - 2004. - Vol. 76. - P. 599-639.
- [16] Krauth W. Quantum Monte Carlo calculations for a large number of bosons in a harmonic trap / W. Krauth // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 77. – P. 3695–3699.
- [17] Pearson S. Bose–Einstein condensation in one-dimensional power-law traps: A path-integral Monte Carlo simulation / S. Pearson, T. Pang, C. Chen // Phys. Rev. A. - 1998. - Vol. 58. - P. 1485–1489.
- [18] van Druten N. J. Two-step condensation of the ideal Bose gas in highly anisotropic traps / N. J. van Druten, W. Ketterle // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 79. – P. 549–552.
- [19] The 1D interacting Bose gas in a hard wall box / M. T. Batchelor, X. W. Guan, N. Oelkers, C. Lee // J. Phys. A. - 2005. - Vol. 38. -P. 7787-7806.
- [20] Вакарчук І. О. Бозе-конденсат у двокомпонентній бозе-рідині /
 I. О. Вакарчук, В. С. Пастухов // Журн. фіз. дослідж. 2008. —
 Т. 12, № 3. Ст. 3002. 8 с.
- [21] Ishino S. Instability of overlapped vortices rotating in opposite directions in binary Bose–Einstein condensates / S. Ishino, M. Tsubota, H. Takeuchi // J. Low. Temp. Phys. 2013. Vol. 171, No. 3/4. P. 429–435.
- [22] Li Jinbin. Properties of two-component Bose–Einstein condensates with monopolar interaction / Jinbin Li, Yaxin Qiao // J. Low. Temp. Phys. - 2014. - Vol. 177, No. 3/4. - P. 165–177.
- [23] Mason P. Number-conserving approaches to n-component Bose-Einstein condensates / P. Mason, S. A. Gardiner // Phys. Rev. A. – 2014. – Vol. 89, No. 4. – Art. 043617. – 22 p.

- [24] Bound vortex states and exotic lattices in multicomponent Bose-Einstein condensates: The role of vortex-vortex interaction / D. S. Dantas, A. R. P. Lima, A. Chaves [et al.] // Phys. Rev. A. – 2015. – Vol. 91, No. 2. – Art. 023630. – 9 p.
- [25] Byrnes T. Macroscopic quantum computation using Bose-Einstein condensates / T. Byrnes, Kai Wen, Y. Yamamoto // Phys. Rev. A. – 2012. – Vol. 85, No. 4. – Art. 040306. – 4 p.
- [26] Optical tweezers for vortex rings in Bose-Einstein condensates / A. I. Yakimenko, Yu. M. Bidasyuk, O. O. Prikhodko [et al.] // Phys. Rev. A. - 2013. - Vol. 88, No. 4. - Art. 043637. - 5 p.
- [27] Quantum turbulence by vortex stirring in a spinor Bose-Einstein condensate / B. Villaseñor, R. Zamora-Zamora, D. Bernal, V. Romero-Rochín // Phys. Rev. A. - 2014. - Vol. 89, No. 3. - Art. 033611. -4 p.
- [28] Generation and decay of two-dimensional quantum turbulence in a trapped Bose-Einstein condensate / G. W. Stagg, A. J. Allen, N. G. Parker, C. F. Barenghi // Phys. Rev. A. - 2015. - Vol. 91, No. 1. - Art. 013612. - 6 p.
- [29] Гриценко И. Квантовая турбулентность: коэффициент сопротивления при колебаниях погруженного в Не II кварцевого камертона / И. Гриценко, А. Цескис, Г. Шешин // Физ. низк. темп. 2015. Т. 41, № 4. С. 338-342.
- [30] Leinaas J. M. On the theory of identical particles / J. M. Leinaas, J. Myrheim // Nuovo Cim. - 1977. - Vol. 37B, No. 1. - P. 1-23.
- [31] Wilczek F. Quantum mechanics of fractional-spin particles / F. Wilczek // Phys. Rev. Lett. - 1982. - Vol. 49, No. 14. - P. 957-959.
- [32] Canright G. S. Fractional statistics: alpha to beta / G. S. Canright, M. D. Johnson // J. Phys. A: Math. Gen. – 1994. – Vol. 27, No. 11. – P. 3579–3598.
- [33] *Khare A.* Fractional Statistics and Quantum Theory / A. Khare. 2nd edition. Singapore : World Scientific, 2005. xiv, 300 p.
- [34] Laughlin R. B. The relationship between high temperature superconductivity and the fractional quantum Hall effect / R. B. Laughlin // Science. - 1988. - Vol. 242, No. 4878. - P. 525-533.
- [35] Treumann R. A. Incomplete-exclusion statistical mechanics in violent relaxation / R. A. Treumann, W. Baumjohann // Astron. Astrophys. – 2013. – Vol. 558. – Art. A40. – 4 p.
- [36] Jeon Gun Sang. Thermodynamic behavior of braiding statistics for certain fractional quantum Hall quasiparticles / Gun Sang Jeon, J. K. Jain // Phys. Rev. B. - 2010. - Vol. 81, No. 3. - Art. 035319. -7 p.

- [37] Fractional excitations in cold atomic gases / J. Honer, J. C. Halimeh, I. McCulloch [et al.] // Phys. Rev. A. -2012. Vol. 86, No. 5. Art. 051606(R). -5 p.
- [38] Anghel D. V. Fractional exclusion statistics applied to relativistic nuclear matter / D. V. Anghel, A. S. Parvan, A. S. Khvorostukhin // Physica A. - 2012. - Vol. 391. - P. 2313-2321.
- [39] Ebadi Z. Infinite statistics condensate as a model of dark matter / Z. Ebadi, B. Mirza, H. Mohammadzadeh // J. Cosmol. Astropart. Phys. - 2013. - Vol. 2013, No. 11. - Art. 057. - 12 p.
- [40] Silverman M. P. Dark matter as a cosmic Bose-Einstein condensate and possible superfluid / M. P. Silverman, R. L. Mallett // Gen. Rel. Grav. - 2002. - Vol. 34, No. 5. - P. 633-649.
- [41] Velten H. Power spectrum for the Bose–Einstein condensate dark matter / H. Velten, E. Wamba // Phys. Lett. B. – 2012. – Vol. 709. – P. 1–5.
- [42] Bettoni D. Dark matter as a Bose-Einstein condensate: the relativistic non-minimally coupled case / D. Bettoni, M. Colombo, S. Liberati // J. Cosmol. Astropart. Phys. - 2014. - Vol. 2014, No. 02. - Art. 004. -22 p.
- [43] Batchelor M. T. One-dimensional interacting anyon gas: Low-energy properties and Haldane exclusion statistics / M. T. Batchelor, X. W. Guan, N. Oelkers // Phys. Rev. Lett. - 2006. - Vol. 96, No. 21. -Art. 210402. - 4 p.
- [44] Girardeau M. D. Anyon-fermion mapping and applications to ultracold gasses in tight waveguides / M. D. Girardeau // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol. 97. – Art. 100402. – 4 p.
- [45] Polychronakos A. P. Virial coefficients of non-Abelian anyons /
 A. P. Polychronakos // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84, No. 6. P. 1268-1271.
- [46] You Yi-Zhuang. Synthetic non-Abelian statistics by Abelian anyon condensation / Yi-Zhuang You, Chao-Ming Jian, Xiao-Gang Wen // Phys. Rev. B. - 2013. - Vol. 87, No. 4. - Art. 045106. - 7 p.
- [47] Mancarella F. Statistical mechanics of an ideal gas of non-Abelian anyons / F. Mancarella, A. Trombettoni, G. Mussardo // Nucl. Phys. B. - 2013. - Vol. 867 [FS]. - P. 950-976.
- [48] Green H. S. A generalized method of field quantization / H. S. Green // Phys. Rev. - 1953. - Vol. 90, No. 2. - P. 270-273.
- [49] Lundholm D. Local exclusion principle for identical particles obeying intermediate and fractional statistics / D. Lundholm, J. P. Solovej // Phys. Rev. A. - 2013. - Vol. 88, No. 6. - Art. 062106. - 9 p.

- [50] Mandal S. On the determination of the mutual exclusion statistics parameter / S. Mandal // Pramana – J. Phys. – 2013. – Vol. 81, No. 3. – P. 503–509.
- [51] Olemskoi A. Generalization of multifractal theory within quantum calculus / A. Olemskoi, I. Shuda, V. Borisyuk // Europhys. Lett. – 2010. – Vol. 89, No. 5. – Art. 50007. – 6 p.
- [52] Livadiotis G. Understanding kappa distributions: A toolbox for space science and astrophysics / G. Livadiotis, D. J. McComas // Space Sci. Rev. - 2013. - Vol. 175. - P. 183-214.
- [53] Ginsberg N. S. Coherent control of optical information with matter wave dynamics / N. S. Ginsberg, S. R. Garner, L. V. Hau // Nature. – 2007. – Vol. 445. – P. 623–626.
- [54] Bloch I. Quantum simulations with ultracold quantum gases / I. Bloch, J Dalibard, S. Nascimbène // Nature Phys. - 2012. - Vol. 8. - P. 267-276.
- [55] Teo J. C. Y. Braiding statistics and congruent invariance of twist defects in bosonic bilayer fractional quantum Hall states / J. C. Y. Teo, A. Roy, Xiao Chen // Phys. Rev. B. - 2014. - Vol. 90, No. 15. -Art. 155111. - 6 p.
- [56] Interferometry with bose-einstein condensates in microgravity / H. Müntinga, H. Ahlers, M. Krutzik [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2013. – Vol. 110, No. 9. – Art. 093602. – 5 p.
- [57] Interferometry with non-classical motional states of a Bose–Einstein condensate / S. van Frank, A. Negretti, T. Berrada [et al.] // Nature Commun. - 2014. - Vol. 5. - Art. 4009. - 6 p.
- [58] Tran M. N. On the quantum density of states and partitioning an integer / M. N. Tran, M. V. N. Murthy, R. J. Bhaduri // Ann. Phys. – 2004. – Vol. 311. – P. 204–219.
- [59] Roccia J. Level density of a Fermi gas and integer partitions: A Gumbellike finite-size correction / J. Roccia, P. Leboeuf // Phys. Rev. C. – 2010. - Vol. 81. - Art. 044301. - 5 p.
- [60] Chatterjee S. Fluctuations of the Bose–Einstein condensate / S. Chatterjee, P. Diaconis // J. Phys. A: Math. Theor. – 2014. – Vol. 47. – Art. 085201. – 23 p.
- [61] Jin Neng-zhi. Frequency and correlation of nearest neighboring nucleotides in human genome / Neng-zhi Jin, Zi-xian Liu, Wenyuan Qiu // Chin. J. Chem. Phys. – 2009. – Vol. 22, No. 1. – P. 27–33.
- [62] Information weights of nucleotides in DNA sequences / M. R. Dudek, S. Cebrat, M. Kowalczuk [et al.] // Computat. Meth. Sci. Technol. – 2007. – Vol. 13. – P. 5–12.

- [63] Ogasawara O. Zipf's law and human transcriptomes: an explanation with an evolutionary model / O. Ogasawara, Sh. Kawamoto, K. Okubo // Comptes Rendus Biologies. - 2003. - Vol. 326. - P. 1097-1101.
- [64] Kechedzhi K. E. Rank distributions of words in correlated symbolic systems and the Zipf law / K. E. Kechedzhi, O. V. Usatenko, V. A. Yampol'skii // Phys. Rev. E. - 2005. - Vol. 72. - Art. 046138. -6 p.
- [65] Bernhardsson S. Size-dependent word frequencies and translational invariance of books / S. Bernhardsson, L. E. Correa da Rocha, P. Minnhagen // Physica A. - 2010. - Vol. 389. - P. 330-341.
- [66] Rank diversity of languages: Generic behavior in computational linguistics / G. Cocho, J. Flores, C. Gershenson [et al.] // PLoS ONE. – 2015. – Vol. 10, No. 4. – Art. e0121898. – 12 p.
- [67] General three-state model with biased population replacement: Analytical solution and application to language dynamics / F. Colaiori, C. Castellano, Ch. F. Cuskley [et al.] // Phys. Rev. E. - 2015. -Vol. 91, No. 1. - Art. 012808. - 12 p.
- [68] Chakraborti Anirban. Variational principle for the Pareto power law / Anirban Chakraborti, Marco Patriarca // Phys. Rev. Lett. – 2009. – Vol. 103. – Art. 228701. – 4 p.
- [69] Common ecology quantifies human insurgency / J. C. Bohorquez, S. Gourley, A. R. Dixon [et al.] // Nature. - 2009. - Vol. 462. - P. 911-914.
- [70] Blazhyevskyi L. F. The path integral representation kernel of evolution operator in Merton–Garman model / L. F. Blazhyevskyi, V. S. Yanishevsky // Condens. Matter Phys. – 2011. – Vol. 14, No. 2. – Art. 23001. – 16 p.
- [71] Interevent time distributions of human multi-level activity in a virtual world / O. Mryglod, B. Fuchs, M. Szell [et al.] // Physica A. – 2015. – Vol. 419. – P. 681–690.
- [72] *Ровенчак А.* Дробові статистики: погляд з боку статистичної фізики / А. Ровенчак // Журн. фіз. досл. 2013. Т. 17, № 2. Ст. 2001. 15 с.
- [73] Clausius R. Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie / R. Clausius // Ann. Phys. Chem. 1865. Bd. 125, No. 7. S. 353–400.
- [74] Maxwell J. C. On the dynamical theory of gases / J. C. Maxwell // Phil. Trans. R. Soc. London. - 1867. - Vol. 157. - P. 49–88.
- [75] Maxwell J. C. On the dynamical theory of gases / J. C. Maxwell // Phil. Mag. Ser. 4. - 1868. - Vol. 35. - P. 129-145; 185-217.

- [76] Boltzmann L. Uber das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen / L. Boltzmann // Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Cl. (Abt. 2). - 1871. - Bd. 63. - S. 397-418.
- [77] Boltzmann L. Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht /
 L. Boltzmann // Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss.
 Cl. (Abt. 2). 1871. Bd. 63. S. 679-711.
- [78] Boltzmann L. Uber die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den sätzen über das Wärmegleichgewicht / L. Boltzmann // Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Cl. (Abt. 2). 1877. Bd. 76. S. 373–435. цит. за: Wissenschaftliche Abhandlungen von Ludwig Boltzmann / herausg. von F. Hasenöhrl. II. Band. Leipzig : Barth, 1909. S. 164–223.
- [79] *Planck M.* Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum / M. Planck // Ann. Phys. - 1901. - Bd. 309. - S. 553-563.
- [80] Gibbs J. W. On the equilibrium of heterogeneous substances / J. W. Gibbs // Trans. Connecticut Acad. Arts Sci. - 1874-1878. -Vol. 3. - P. 108-248; 343-520.
- [81] Gibbs J. W. Elementary Principles in Statistical Mechanics / J. W. Gibbs. – New York : C. Scribner, 1902. – xviii, 207 p.
- [82] Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese / Bose // Zs. Phys. 1924. Bd. 26, No. 1. S. 178–181.
- [83] Einstein A. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases / A. Einstein // Sitzungsber. Preuss. Konigl. Akad. Wiss.: phys.-math. Klasse. - 1924. - S. 261-267.
- [84] Einstein A. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung / A. Einstein // Sitzungsber. Preuss. Konigl. Akad. Wiss.: phys.-math. Klasse. — 1925. — S. 3–14.
- [85] Pauli jr. W. Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren / W. Pauli jr. // Zs. Phys. – 1925. – Bd. 31, No. 1. – S. 765–783.
- [86] Fermi E. Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases / E. Fermi // Zs. Phys. - 1926. - Bd. 36, No. 11-12. - S. 902-912.
- [87] Dirac P. A. M. On the theory of quantum mechanics / P. A. M. Dirac // Proc. R. Soc. London Ser. A. – 1926. – Vol. 112. – P. 661–677.
- [88] Uhlenbeck G. E. Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons / G. E. Uhlenbeck, S. Goudsmit // Naturwiss. — 1925. — Bd. 13. — S. 953–952.

- [89] Uhlenbeck G. E. Spinning electrons and the structure of spectra / G. E. Uhlenbeck, S. Goudsmit // Nature. - 1926. - Vol. 117. - P. 264-265.
- [90] Fierz M. Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin / M. Fierz // Helvetica Physica Acta. — 1939. — Bd. 12. — S. 3–37.
- [91] Pauli W. The connection between spin and statistics / W. Pauli // Phys. Rev. - 1940. - Vol. 58. - P. 716-722.
- [92] Schwinger J. The theory of quantized fields. i / J. Schwinger // Phys. Rev. - 1951. - Vol. 82, No. 6. - P. 914-927.
- [93] Gentile G. Osservazioni sopra le statistiche intermedie / G. Gentile // Nuovo Cim. - 1940. - Vol. 17. - P. 493-497.
- [94] Gentile j. G. Le statistiche intermedie e le proprietà dell'elio liquido / G. Gentile j. // Nuovo Cim. Nuova Ser. — 1942. — Vol. 19, No. 4. — P. 109–125.
- [95] Einbinder H. Quantum statistics and the ℵ theorem / H. Einbinder // Phys. Rev. - 1948. - Vol. 74, No. 7. - P. 805-808.
- [96] Borsellino A. Sulle ipotesi poste a fondamento delle statistiche intermedie / A. Borsellino // Nuovo Cim. Ser. IX. – 1947. – Vol. 4, No. 1–2. – P. 52–62.
- [97] Brillouin L. Les statistiques quantiques et leurs applications / L. Brillouin. — Paris : Les Presses Universitaire de France, 1930. — Vol. 1. — 192 p. — Vol. 2. — P. [i–vi], 193–404.
- [98] Polychronakos A. P. Probabilities and path-integral realization of exclusion statistics / A. P. Polychronakos // Phys. Lett. B. – 1996. – Vol. 365. – P. 202–206.
- [99] Исихара А. Статистическая физика / А. Исихара. Москва : Мир, 1973. 471 с.
- [100] Балашова С. А. Нестандартные алгебры операторов рождения уничтожения и промежуточные квантовые статистики / С. А. Балашова, В. В. Курышкин, Э. Э. Энтральго // Физ. эл. част. ат. яд. — 1989. — Т. 20. — С. 965–987.
- [101] Biedenharn L. C. The quantum group $SU_q(2)$ and a q-analogue of the boson operators / L. C. Biedenharn // J. Phys. A: Math. Gen. 1989. Vol. 22. P. L873–L878.
- [102] Zagier D. Realizability of a model in infinite statistics / D. Zagier // Commun. Math. Phys. - 1992. - Vol. 147. - P. 199-210.
- [103] Nešković P. V. Quantum oscillators: Applications in statistical mechanics / P. V. Nešković, B. V. Urošević // Int. J. Mod. Phys. A. – 1992. – Vol. 7, No. 14. – P. 3379–3388.

- [104] *Кац В. Г.* Квантовый анализ / В. Г. Кац, П. Чен. Москва : Изд-во МЦНМО, 2005. 127 с.
- [105] Fityo T. V. Statistical physics in deformed spaces with minimal length / T. V. Fityo // Phys. Lett. A. - 2008. - Vol. 372. - P. 5872-5877.
- [106] Ando T. Theory of Hall effect in a two-dimensional electron system / T. Ando, Y. Matsumoto, Y. Uemura // J. Phys. Soc. Jpn. – 1975. – Vol. 39, No. 2. – P. 279–288.
- [107] Klitzing K. v. New method for high-accuracy determination of the finestructure constant based on quantized Hall resistance / K. v. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper // Phys. Rev. Lett. - 1980. - Vol. 45, No. 6. -P. 494-497.
- [108] Tsui D. C. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit / D. C. Tsui, H. L. Stormer, A. C. Gossard // Phys. Rev. Lett. – 1982. – Vol. 48, No. 22. – P. 1559–1562.
- [109] Laughlin R. B. Anomalous quantum Hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations / R. B. Laughlin // Phys. Rev. Lett. - 1983. - Vol. 50, No. 18. - P. 1395-1398.
- [110] Halperin B. I. Statistics of quasiparticles and the hierarchy of fractional quantized Hall states / B. I. Halperin // Phys. Rev. Lett. - 1984. --Vol. 52, No. 18. - P. 1583-1586.
- [111] Jain J. K. Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect / J. K. Jain // Phys. Rev. Lett. – 1989. – Vol. 63, No. 2. – P. 199–202.
- [112] Arovas D. Fractional statistics and the quantum Hall effect / D. Arovas, J. R. Schrieffer, F. Wilczek // Phys. Rev. Lett. – 1984. – Vol. 53, No. 7. – P. 722–723.
- [113] Haldane F. D. M. "Fractional statistics" in arbitrary dimension: A generalization of the Pauli principle / F. D. M. Haldane // Phys. Rev. Lett. - 1991. - Vol. 67, No. 8. - P. 937-940.
- [114] Wu Y.-S. Statistical distribution for generalized ideal gas of fractionalstatistics particles / Y.-S. Wu // Phys. Rev. Lett. - 1994. - Vol. 73, No. 7. - P. 922-925.
- [115] Dasniéres de Veigy A. Equation of state of an anyon gas in a strong magnetic field / A. Dasniéres de Veigy, S. Ouvry // Phys. Rev. Lett. – 1994. – Vol. 72, No. 5. – P. 600–603.
- [116] Medvedev M. V. Properties of particles obeying ambiguous statistics / M. V. Medvedev // Phys. Rev. Lett. - 1997. - Vol. 78, No. 22. -P. 4147-4150.

- [117] Rényi A. On measures of entropy and information / A. Rényi // Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability 1960. — Berkeley, CA, USA : University of California Press, 1961. — P. 547–561.
- [118] Daróczy Z. Generalized information functions / Z. Daróczy // Information and Control. - 1970. - Vol. 16. - P. 36-51.
- [119] Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics / C. Tsallis // J. Stat. Phys. - 1988. - Vol. 52, No. 1-2. - P. 479-486.
- [120] Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications / Ed. by S. Abe, Y. Okamoto. – Berlin : Springer, 2001. – IX, 277 p.
- [121] Curado E. M. F. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics / E. M. F. Curado, C. Tsallis // J. Phys. A: Math. Gen. - 1991. - Vol. 24. - P. L69-L72.
- [122] Tsallis C. The role of constraints within generalized nonextensive statistics / C. Tsallis, R. S. Mendes, A. R. Plastino // Physica A. - 1998. --Vol. 261. - P. 534-554.
- [123] Башкиров А. Г. Энтропия Реньи как статистическая энтропия для сложных систем / А. Г. Башкиров // Теор. мат. физ. — 2006. — Т. 149, № 2. — С. 299–317.
- [124] Olemskoi A. I. Multifractal spectrum of phase space related to generalized thermostatistics / A. I. Olemskoi, V. O. Kharchenko, V. N. Borisyuk // Physica A. 2008. Vol. 387. P. 1895-1906.
- [125] Машкевич С. В. Квантовая и статистическая механика систем с дробной статистикой : диссерт. ...д-ра физ.-мат. наук: 01.04.02 / Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко. — Киев, 2005. — 320 с.
- [126] Jones V. F. R. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials / V. F. R. Jones // Ann. Math. Second Ser. – 1987. – Vol. 126, No. 2. – P. 335–388.
- [127] Fredenhagen K. Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras / K. Fredenhagen, K. H. Rehren, B. Schroer // Commun. Math. Phys. - 1989. - Vol. 125, No. 2. - P. 201-226.
- [128] *Вакарчук I. О.* Квантова механіка / І. О. Вакарчук. 4-те вид. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2012. 872 с.
- [129] Lerda A. Anyons: Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics / A. Lerda. — Berlin ; New York : Springer, 1992. — viii, 138 p.
- [130] Wu Y.-S. Multiparticle quantum mechanics obeying fractional statistics / Y.-S. Wu // Phys. Rev. Lett. - 1984. - Vol. 53, No. 2. - P. 111-114.

- [131] Mashkevich S. V. Exact solutions of a many-anyon problem / S. V. Mashkevich // Int. J. Mod. Phys. A. – 1992. – Vol. 7, No. 32. – P. 7931–7942.
- [132] Mitra P. Structure of multi-anyon wavefunctions / P. Mitra // Phys. Lett. B. - 1995. - Vol. 345, No. 4. - P. 473-476.
- [133] Sogo K. Explicit construction of the second-quantized anyon operators / K. Sogo // J. Phys. Soc. Jpn. – 1995. – Vol. 64. – P. 2249– 2251.
- [134] Wilczek F. Magnetic flux, angular momentum, and statistics / F. Wilczek // Phys. Rev. Lett. – 1982. – Vol. 48, No. 17. – P. 1144–1146.
- [135] Camino F. E. Realization of a Laughlin quasiparticle interferometer: Observation of fractional statistics / F. E. Camino, W. Zhou, V. J. Goldman // Phys. Rev. B. - 2005. - Vol. 72, No. 7. -Art. 075342. - 8 p.
- [136] Anyons in a weakly interacting system / C. Weeks, G. Rosenberg, B. Seradjeh, M. Franz // Nature Phys. - 2007. - Vol. 3. - P. 797-801.
- [137] Statistically induced phase transitions and anyons in 1D optical lattices / T. Keilmann, S. Lanzmich, I. McCulloch, M. Roncaglia // Nature Commun. -2011. Vol. 2. Art. 361. -7 p.
- [138] Greenberg O. W. Example of infinite statistics / O. W. Greenberg // Phys. Rev. Lett. - 1990. - Vol. 64, No. 7. - P. 705-708.
- [139] Mohapatra R. N. Infinite statistics and a possible small violation of the Pauli principle / R. N. Mohapatra // Phys. Lett. B. - 1990. - Vol. 242, No. 3-4. - P. 407-411.
- [140] Greenberg O. W. Particles with small violations of Fermi or Bose statistics / O. W. Greenberg // Phys. Rev. D. - 1991. - Vol. 43, No. 12. -P. 4111-4120.
- [141] Arik M. Hilbert spaces of analytic functions and generalized coherent states / M Arik, D. D. Coon // J. Math. Phys. - 1976. - Vol. 17, No. 4. - P. 524-527.
- [142] Adamska L. V. Multi-particle correlations in qp-Bose gas model / L. V. Adamska, A. M. Gavrilik // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – Vol. 37. – P. 4787–4795.
- [143] Burban I. M. Generalized deformed oscillators in the framework of unified $(q; \alpha, \beta, \gamma; \nu)$ -deformation and their oscillator algebras / I. M. Burban // Ukr. J. Phys. 2012. Vol. 57, No. 4. P. 396–407.
- [144] Lavagno A. q-deformed structures and generalized thermodynamics / A. Lavagno, A. M. Scarfone, P. Narayana Swamy // Rep. Math. Phys. 2005. Vol. 55, No. 3. P. 423–433.
- [145] Algin A. Non-extensive entropy of bosonic Fibonacci oscillators / A. Algin // J. Stat. Mech. - 2009. - No. 4. - Art. P04007. - 18 p.
- [146] Algin A. A comparative study on q-deformed fermion oscillators / A. Algin // Int. J. Theor. Phys. 2011. Vol. 50, No. 5. P. 1554–1568.
- [147] Algin A. High-temperature behavior of a deformed Fermi gas obeying interpolating statistics / A. Algin, M. Senay // Phys. Rev. E. - 2012. --Vol. 85, No. 4. - Art. 041123. - 10 p.
- [148] R.-Monteiro M. A. Highly deformed q-oscillator systems / M. A. R.-Monteiro, I. Roditi, L. M. C. S. Rodrigues // Mod. Phys. Lett. B. – 1993. – Vol. 7, No. 29–30. – P. 1897–1902.
- [149] Chang Z. Thermodynamics of a deformed Bose gas / Z. Chang, S.-X. Chen // J. Phys. A: Math. Gen. - 2002. - Vol. 35. - P. 9731-9743.
- [150] Chakrabarti R. A (p,q)-oscillator realization of two-parameter quantum algebras / R. Chakrabarti, R. Jagannathan // J. Phys. A: Math. Gen. 1991. Vol. 24. P. L711–L718.
- [151] Burban I. M. On $(p, q; \alpha, \beta, l)$ -deformed oscillator and its generalized quantum Heisenberg–Weyl algebra / I. M. Burban // Phys. Lett. A. 2007. Vol. 366, No. 4–5. P. 308–314.
- [152] Thermodynamics of a free q-fermion gas / R. Dutt, A. Gangopadhyaya, A. Khare, U. P. Sukhatme // Int. J. Mod. Phys. A. – 1994. – Vol. 9, No. 15. – P. 2687–2698.
- [153] Statistics for q-commutator in the case of $q^{s+1} = 1$ / Y. Yang, S. Xie, W. Feng, X. Wu // Mod. Phys. Lett. A. 1998. Vol. 13, No. 11. P. 879–886.
- [154] Müller H. Zur Frage intermediärer Statistiken / H. Müller // Ann. Phys. (Berlin). - 1950. - Bd. 442, No. 7-8. - S. 420-424.
- [155] Guénault A. M. Intermediate statistics / A. M. Guénault, D. K. C. MacDonald // Mol. Phys. - 1962. - Vol. 5, No. 5. - P. 525-530.
- [156] Sokolova E. S. Chemical potential of the low-dimensional multisubband Fermi gas / E. S. Sokolova, S. S. Sokolov, N. Studart // J. Phys.: Condens. Matter. - 2010. - Vol. 22. - Art. 465304. - 8 p.
- [157] Srivatsan C. S. Gentile statistics and restricted partitions / C. S. Srivatsan, M. V. N. Murthy, R. K. Bhaduri // Pramana J. Phys. 2006. Vol. 66, No. 3. P. 485–494.
- [158] Rovenchak A. The relation between fractional statistics and finite bosonic systems in one-dimensional case / A. Rovenchak // Fiz. Nizk. Temp. - 2009. - Vol. 35, No. 5. - P. 510-513; Low Temp. Phys. -2009. - Vol. 35, No. 5. - P. 400-403.

- [159] Dai W.-S. Do bosons obey Bose–Einstein distribution: Two iterated limits of Gentile distribution / W.-S. Dai, M. Xie // Phys. Lett. A. – 2009. – Vol. 373. – P. 1524–1526.
- [160] Топілко М. І. Термодинамічні функції одновимірних слабковзаємодіючих гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле / М. І. Топілко, А. А. Ровенчак // Журн. фіз. досл. — 2009. — Т. 13, № 2. — Ст. 2004. — 8 с.
- [161] Shen Y. The relation between properties of Gentile statistics and fractional statistics of anyon / Y. Shen, Q. Ai, G. L. Long // Physica A. – 2010. – Vol. 389. – P. 1565–1570.
- [162] About an alternative distribution function for fractional exclusion statistics / Q. A. Wang, L. Nivanen, A. Le Méhauté, M. Pezeril // Nuovo Cim. - 2003. - Vol. 118B, No. 6. - P. 635-640.
- [163] Kapur J. N. A note on the relationships between some probability distributions, measures of entropy, measures of directed divergence and distributions of statistical mechanics / J. N. Kapur // Indian J. Pure Appl. Math. - 1983. - Vol. 14, No. 12. - P. 1433-1438.
- [164] Calogero F. Solution of a three-body problem in one dimension / F. Calogero // J. Math. Phys. - 1969. - Vol. 10, No. 12. - P. 2191-2196.
- [165] Calogero F. Ground state of a one-dimensional N-body system / F. Calogero // J. Math. Phys. 1969. Vol. 10, No. 12. P. 2197–2200.
- [166] Sutherland B. Quantum many-body problem in one dimension: Ground state / B. Sutherland // J. Math. Phys. - 1971. - Vol. 12, No. 2. -P. 246-250.
- [167] Sutherland B. Quantum many-body problem in one dimension: Thermodynamics / B. Sutherland // J. Math. Phys. 1971. Vol. 12, No. 2. P. 251–256.
- [168] Murthy M. V. N. Thermodynamics of a one-dimensional ideal gas with fractional exclusion statistics / M. V. N. Murthy, R. Shankar // Phys. Rev. Lett. - 1994. - Vol. 73, No. 25. - P. 3331-3334.
- [169] Bhaduri R. K. Fractional exclusion statistics and two dimensional electron systems / R. K. Bhaduri, M. V. N. Murthy, M. K. Srivastava // Phys. Rev. Lett. - 1996. - Vol. 76, No. 2. - P. 165–168.
- [170] An explicit realization of fractional statistics in one dimension / S. Sree Ranjani, P. K. Panigrahi, A. K. Kapoor, A. Khare // Ann. Phys. - 2009. - Vol. 324. - P. 1176-1183.
- [171] Thermodynamics for fractional exclusion statistics / S. B. Isakov, D. P. Arovas, J. Myrheim, A. P. Polychronakos // Phys. Lett. A. – 1996. – Vol. 212. – P. 299–303.

- [172] Thermodynamic properties of particles with intermediate statistics / G. S. Joyce, S. Sarkar, J. Spałek, K. Byczuk // Phys. Rev. B. – 1996. – Vol. 53, No. 3. – P. 990–993.
- [173] Aoyama T. Specific heat of the ideal gas obeying the generalized exclusion statistics / T. Aoyama // Eur. Phys. J. B. - 2001. --Vol. 20. - P. 123-131.
- [174] Qin F. Adiabatic sound velocity and compressibility of a trapped d-dimensional ideal anyon gas / F. Qin, J.-s. Chen // Phys. Lett. A. – 2012. – Vol. 376. – P. 1191–1196.
- [175] Быцко А. Г. Статистика Халдейна–Ву и дилогарифм Роджерса / А. Г. Быцко // Зап. науч. сем. ПОМИ (С.-Петербург. отделен. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН). — 2002. — Vol. 291. — Р. 64–77.
- [176] Acharya R. Statistical mechanics of anyons / R. Acharya, P. Narayana Swamy // J. Phys. A: Math. Gen. - 1994. - Vol. 27. -P. 7247-7263.
- [177] Chaichian M. Statistics of q-oscillators, quons and relations to fractional statistics / M. Chaichian, R. Gonzalez Felipe, C. Montonen // J. Phys. A: Math. Gen. - 1993. - Vol. 26. - P. 4017-4034.
- [178] What is between Fermi–Dirac and Bose–Einstein statistics? / K. Byczuk, J. Spałek, G. S. Joyce, S. Sarkar // Acta Phys. Polon. B. – 1995. – Vol. 26, No. 12. – P. 2167–2184.
- [179] Mirza B. Thermodynamic geometry of fractional statistics / B. Mirza, H. Mohammadzadeh // Phys. Rev. E. - 2010. - Vol. 82, No. 3. -Art. 031137. - 10 p.
- [180] Ruppeiner G. Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory / G. Ruppeiner // Rev. Mod. Phys. - 1995. - Vol. 67, No. 3. -P. 605-659; erratum: Rev. Mod. Phys. - 1996. - Vol. 68, No. 1. -P. 313.
- [181] Condensation of an ideal gas with intermediate statistics on the horizon / S. Zare, Z. Raissi, H. Mohammadzadeh, B. Mirza // Eur. Phys. J. C. - 2012. - Vol. 72. - Art. 2152. - 12 p.
- [182] Rovenchak A. Polychronakos fractional statistics with a complex-valued parameter / A. Rovenchak // J. Phys.: Conf. Ser. - 2012. - Vol. 400. --Art. 012064. - 4 p.
- [183] Rovenchak A. Phase transition in a system of 1D harmonic oscillators obeying Polychronakos statistics with a complex parameter / A. Rovenchak // Fiz. Nizk. Temp. 2013. Vol. 39, No. 10. P. 1141-1145; Low Temp. Phys. 2013. Vol. 39, No. 10. P. 888-892.
- Büyükkılıç F. A fractal approach to entropy and distribution functions / F. Büyükkılıç, D. Demirham // Phys. Lett. A. - 1993. - Vol. 181, No. 1. - P. 24-28.

- [185] q-generalized Bose–Einstein condensation based on Tsallis entropy / Jincan Chen, Zhipeng Zhang, Guozhen Su [et al.] // Phys. Lett. A. – 2002. – Vol. 300, No. 1. – P. 65–70.
- [186] Wang Q. A. Quantum gas distribution prescribed by factorization hypothesis of probability / Q. A. Wang // Chaos Solitons Fractals. – 2002. – Vol. 14. – P. 765–770.
- [187] Wang Q. A. Extensive generalization of statistical mechanics based on incomplete information theory / Q. A. Wang // Entropy. -2003. Vol. 5. P. 220–232.
- [188] Understanding heavy fermion from generalized statistics / Y. Kaupp, S. Liraki, D. Tayurskii [et al.] // J. Low Temp. Phys. - 2008. --Vol. 150. - P. 660-666.
- [189] Landau L. D. The theory of superfluidity of Helium II / L. D. Landau // J. Phys. (USSR). - 1941. - Vol. 5. - P. 71-90.
- [190] Landau L. D. On the theory of supefluidity of Helium II / L. D. Landau // J. Phys. (USSR). - 1947. - Vol. 11. - P. 91.
- [191] Bijl A. The lowest wave function of the symmetrical many particles system / A. Bijl // Physica. - 1940. - Vol. 7, No. 9. - P. 869-886.
- [192] Feynman R. P. Atomic theory of the two-fluid model of liquid helium / R. P. Feynman // Phys. Rev. - 1954. - Vol. 94, No. 2. - P. 262-277.
- [193] Feynman R. P. Energy spectrum of the excitations in liquid helium / R. P. Feynman, M. Cohen // Phys. Rev. – 1956. – Vol. 102, No. 5. – P. 1189–1204.
- [194] Jackson H. W. Energy spectrum of elementary excitations in helium II / H. W. Jackson, E. Feenberg // Rev. Mod. Phys. - 1962. - Vol. 34, No. 4. - P. 686-693.
- [195] Sunakawa S. Energy spectrum of the excitations in liquid helium II / S. Sunakawa, S. Yamasaki, T. Kebukawa // Progr. Theor. Phys. – 1969. – Vol. 41. – P. 919–941.
- [196] Vakarchuk I. A. Microscopic theory of the energy spectrum of liquid He II / I. A. Vakarchuk, I. R. Yukhnovskii // Theor. Math. Phys. – 1980. – Vol. 42, No. 1. – P. 73–80.
- [197] Apaja V. Soft excitation modes of quantum Bose fluids in the liquidsolid phase transition / V. Apaja, J. Halinen, M. Saarela // J. Low Temp. Phys. - 1998. - Vol. 113. - P. 909-914.
- [198] Kruglov V. I. Roton excitation spectrum in liquid helium II / V. I. Kruglov, M. J. Collett // Phys. Rev. Lett. - 2001. - Vol. 87, No. 18. - P. 185302.

- [199] Pashitskii E. A. Superfluid Bose liquid with a suppressed BEC and an intensive pair coherent condensate as a model of ⁴He / E. A. Pashitskii, S. V. Mashkevich, S. I. Vilchynskyy // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89, No. 7. Art. 075301. 4 p.
- [200] Adamenko I. N. Application of the theory of continuous media to the description of thermal excitations in superfluid helium / I. N. Adamenko, K. E. Nemchenko, I. V. Tanatarov // Phys. Rev. B. – 2003. – Vol. 67. – P. 104513.
- [201] Kruglov V. I. Cluster model of roton excitations in liquid ⁴He / V. I. Kruglov, M. J. Collett // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. – 2008. – Vol. 41, No. 3. – P. 035305.
- [202] Roton-phonon interactions in superfluid ⁴He / B. Fåk, T. Keller, M. E. Zhitomirsky, A. L. Chernyshev // Phys. Rev. Lett. - 2012. --Vol. 109. - P. 155305.
- [203] Bobrov V. B. Criterion of superfluidity, elementary excitations, and heat capacity singularity in superfluid helium / V. B. Bobrov, S. A. Trigger // Prog. Theor. Exp. Phys. - 2013. - P. 043I01.
- [204] Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a dilute gas / D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 77, No. 3. – P. 420–423.
- [205] Stringari S. Collective excitations of a trapped Bose-condensed gas / S. Stringari // Phys. Rev. Lett. - 1996. - Vol. 77, No. 12. - P. 2360-2363.
- [206] Low energy excitation spectra of trapped Bose condensates / L. You, W. Hoston, M. Lewenstein, M. Marinescu // Acta Phys. Polon. A. – 1998. – Vol. 93, No. 1. – P. 211-235.
- [207] Grossmann S. On bose-Einstein condensation in harmonic traps / S. Grossmann, M. Holthaus // Phys. Lett. A. - 1995. - Vol. 208. -P. 188-192.
- [208] Haugerud H. A more accurate analysis of Bose–Einstein condensation in harmonic traps / H. Haugerud, T. Haugset, F. Ravndal // Phys. Lett. A. - 1997. - Vol. 225. - P. 18–22.
- [209] Mullin W. J. Bose-Einstein condensation in a harmonic potential / W. J. Mullin // J. Low Temp. Phys. - 1997. - Vol. 106, No. 5/6. -P. 615-641.
- [210] Gerbier F. Quasi-1D Bose-Einstein condensates in the dimensional crossover regime / F. Gerbier // Europhys. Lett. – 2004. – Vol. 66, No. 6. – P. 771-777.
- [211] Parkins A. S. The physics of trapped dilute-gas Bose–Einstein condensates / A. S. Parkins, D. F. Walls // Phys. Rep. – 1998. – Vol. 303. – P. 1–80.

- [212] Bloch I. Many-body physics with ultracold gases / I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger // Rev. Mod. Phys. - 2008. - Vol. 80, No. 3. - P. 885-964.
- [213] Production of two overlapping Bose-Einstein condensates by sympathetic cooling / C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist [et al.] // Phys. Rev. Lett. - 1997. - Vol. 78, No. 4. - P. 586-589.
- [214] Papp S. B. Tunable miscibility in a dual-species Bose-Einstein condensate / S. B. Papp, J. M. Pino, C. E. Wieman // Phys. Rev. Lett. - 2008. - Vol. 101, No. 4. - Art. 040402. - 4 p.
- [215] Two atomic species superfluid / G. Modugno, M. Modugno, F. Riboli [et al.] // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89, No. 19. Art. 190404. 4 p.
- [216] Dual-species Bose-Einstein condensate of $^{87}\rm{Rb}$ and $^{133}\rm{Cs}$ / D. J. McCarron, H. W. Cho, D. L. Jenkin [et al.] // Phys. Rev. A. 2011. Vol. 84, No. 1. Art. 011603(R). 4 p.
- [217] Kasamatsu K. Static and dynamic properties of multicomponent Bose–Einstein condensates of ytterbium atoms / K. Kasamatsu, M. Tsubota // J. Low Temp. Phys. - 2008. - Vol. 150. - P. 599–604.
- [218] Gross E. P. Structure of a quantized vortex in boson systems / E. P. Gross // Nuovo Cim. Ser. 10. 1961. Vol. 20, No. 3. P. 454–477.
- [219] *Питаевский Л. П.* Вихревые нити в неидеальном бозе-газе / Л. П. Питаевский // Журн. эксп. теор. физ. — 1961. — Т. 40, № 2. — С. 646–651.
- [220] Lieb E. H. Exact analysis of an interacting Bose gas. I. The general solution and the ground state / E. H. Lieb, W. Liniger // Phys. Rev. – 1963. – Vol. 130, No. 4. – P. 1605–1616.
- [221] Lieb E. H. Exact analysis of an interacting Bose gas. II. The excitation spectrum / E. H. Lieb // Phys. Rev. 1963. Vol. 130, No. 4. P. 1616–1624.
- [222] Menotti C. Collective oscillations of a one-dimensional trapped Bose-Einstein gas / C. Menotti, S. Stringari // Phys. Rev. A. - 2002. --Vol. 66, No. 4. - P. 043610.
- [223] Luo Yun-Wen. Collective excitations of low dimensional trapped Bosecondensed gas / Yun-Wen Luo, Ji-Sheng Chen // Commun. Theor. Phys. - 2013. - Vol. 60, No. 6. - P. 673-676.
- [224] Hazzard K. R. A. Hyperfine spectra of trapped bosons in optical lattices / K. R. A. Hazzard, E. J. Mueller // Phys. Rev. A. - 2007. --Vol. 76, No. 6. - P. 063612.

- [225] Strongly interacting array of Bose-Einstein condensates trapped in a one-dimensional optical lattice / M. Yamashita, Sh. Kato, A. Yamaguchi [et al.] // Phys. Rev. A. - 2013. - Vol. 87, No. 4. -P. 041604(R).
- [226] Stasyuk I. V. Investigation of the bosonic spectrum of two-dimensional optical graphene-type lattices. superfluid phase / I. V. Stasyuk, O. V. Velychko, I. R. Dulepa // Ukr. J. Phys. 2014. Vol. 59, No. 10. P. 993-1000.
- [227] Grech Ph. The excitation spectrum for weakly interacting bosons in a trap / Ph. Grech, R. Seiringer // Commun. Math. Phys. - 2013. -Vol. 322. - P. 559-591.
- [228] Seiringer R. Bose gases, Bose-Einstein condensation, and the Bogoliubov approximation / R. Seiringer // J. Math. Phys. – 2014. – Vol. 55, No. 7. – P. 075209.
- [229] Excited states of exciton-polariton condensates in 2D and 1D harmonic traps / C. Trallero-Giner, M. V. Durnev, Y. Núñez Fernández [et al.] // Phys. Rev. B. - 2014. - Vol. 89, No. 20. - P. 205317.
- [230] Observation of Bogoliubov excitations in exciton-polariton condensates / S. Utsunomiya, L. Tian, G. Roumpos [et al.] // Nature Phys. - 2008. - Vol. 4. - P. 700-705.
- [231] Rubo Yu. G. Suppression of superfluidity of exciton-polaritons by magnetic field / Yu. G. Rubo, A. V. Kavokin, I. A. Shelykh // Phys. Lett. A. - 2006. - Vol. 358. - P. 227-230.
- [232] Deng Hui. Exciton-polariton Bose-Einstein condensation / Hui Deng, H. Haug, Y. Yamamoto // Rev. Mod. Phys. - 2010. - Vol. 82. -P. 1489–1537.
- [233] Room-temperature Bose–Einstein condensation of cavity exciton– polaritons in a polymer / J. D. Plumhof, T. Stöferle, L. Mai [et al.] // Nature Mater. - 2014. - Vol. 13, No. 3. - P. 247–252.
- [234] Fetter A. L. Rotating trapped Bose–Einstein condensates / A. L. Fetter // Rev. Mod. Phys. – 2009. – Vol. 81, No. 2. – P. 647–691.
- [235] Tsubota M. Quantum turbulence / M. Tsubota // J. Phys. Soc. Jpn. 2008. Vol. 77, No. 11. Art. 111006. 12 p.
- [236] Kasamatsu K. Quantised vortices in atomic Bose–Einsten condensates / K. Kasamatsu, M. Tsubota // Quantum Turbulence / Ed. by M. Tsubota, W. P. Halperin. — Elsevier, 2009. — Vol. 16 of Progress in Low Temperature Physics. — P. 351–403.
- [237] Paoletti M. S. Quantum turbulence / M. S. Paoletti, D. P. Lathrop // Annu. Rev. Condens. Matter Phys. – 2011. – Vol. 2. – Art. 213–234.

- [238] Barenghi C. Introduction to quantum turbulence / C. Barenghi, L. Skrbek, K. R. Sreenivasan // Proc. Natl. Acad. Sci. - 2014. --Vol. 111, Suppl. 1. - P. 4647-4652.
- [239] Driving phase slips in a superfluid atom circuit with a rotating weak link / K. C. Wright, R. B. Blakestad, C. J. Lobb [et al.] // Phys. Rev. Lett. - 2013. - Vol. 110, No. 2. - Art. 025302. - 5 p.
- [240] Ketterle W. Bose–Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions / W. Ketterle, N. J. van Druten // Phys. Rev. A. – 1996. – Vol. 54. – P. 656–660.
- [241] Deng W. Bose–Einstein condensation of finite number of confined particles / W. Deng, P. M. Hui // Solid Stat. Commun. – 1997. – Vol. 104. – P. 729–734.
- [242] Vakarchuk I. O. Thermodynamics of the Bose-system with a small number of particles / I. O. Vakarchuk, A. A. Rovenchak // Condens. Matter Phys. - 2001. - Vol. 4. - P. 431-447.
- [243] Sharp heat-capacity signature at the superfluid transition of helium films in porous glasses / D. Finotello, K. A. Gillis, A. Wong, M. H. W. Chan // Phys. Rev. Lett. - 1988. - Vol. 61. - P. 1954-1957.
- [244] Chan M. Helium in aerogel / M. Chan, N. Mulders, J. Reppy // Phys. Today. - 1996. - Vol. 49. - P. 30-37.
- [245] Capture of superfluid helium by porous structures / R. E. Boltnev, I. B. Bykhalo, S. V. Ivashin [et al.] // J. Low Temp. Phys. - 2008. --Vol. 150. - P. 511-515.
- [246] Yamamoto K. Heat capacity of liquid ⁴He confined in a nanoporous glass / K. Yamamoto, Y. Shibayama, K. Shirahama // J. Low Temp. Phys. - 2008. - Vol. 150. - P. 353-357.
- [247] Yamamoto K. Thermodynamic evidence for nanoscale Bose–Einstein condensation in ⁴He confined in nanoporous media / K. Yamamoto, Y. Shibayama, K. Shirahama // Phys. Rev. Lett. -2008. Vol. 100. Art. 195301. -4 p.
- [248] Localized collective excitations in superfluid helium in vycor / R. M. Dimeo, P. E. Sokol, C. R. Anderson [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 81, No. 26. – P. 5860–5863.
- [249] Glyde H.R. Bose-Einstein condensation measurements and superflow in condensed helium / H.R. Glyde // J. Low Temp. Phys. - 2013. --Vol. 172, No. 5/6. - P. 364-387.
- [250] Courtens E. Experiments on the structure and vibrations of fractal solids / E. Courtens, R. Vacher // Proc. R. Soc. London. Ser. A. – 1989. – Vol. 423. – P. 55–69.

- [251] Kim S.-H. The ideal Bose gas in non-integer dimensions and liquid ⁴He in porous media / S.-H. Kim, Ch. K. Kim, K. Nahm // J. Phys.: Condens. Matter. - 1999. - Vol. 11. - P. 10269-10276.
- [252] Kim E. Probable observation of a supersolid helium phase / E. Kim, M. H. W. Chan // Nature. - 2004. - Vol. 427, No. 6971. - P. 225-227.
- [253] Kim Duk Y. Absence of supersolidity in solid helium in porous vycor glass / Duk Y. Kim, Moses H. W. Chan // Phys. Rev. Lett. – 2012. – Vol. 109, No. 15. – Art. 155301. – 5 p.
- [254] Supersolid formation in a quantum gas breaking a continuous translational symmetry / J. Léonard, A. Morales, Ph. Zupancic [et al.] // Nature. - 2017. - Vol. 543. - P. 87-90.
- [255] A stripe phase with supersolid properties in spin–orbit-coupled Bose– Einstein condensates / Jun-Ru Li, Jeongwon Lee, Wujie Huang [et al.] // Nature. - 2017. - Vol. 543. - P. 91–94.
- [256] Bose–Einstein condensation of photons in an optical microcavity / J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger, M. Weitz // Nature. – 2013. – Vol. 468, No. 7323. – P. 545–548.
- [257] Kruchkov A. Bose-Einstein condensation of light in a cavity / A. Kruchkov // Phys. Rev. A. - 2014. - Vol. 89, No. 3. -Art. 033862. - 9 p.
- [258] Georgescu I. M. Quantum simulation / I. M. Georgescu, S. Ashhab, F. Nori // Rev. Mod. Phys. - 2014. - Vol. 86, No. 1. - P. 153-185.
- [259] Barceló C. Analogue gravity / C. Barceló, S. Liberati, M. Visser // Living Rev. Rel. - 2005. - Vol. 8. - Art. 12. - 133 p.
- [260] Observation of isolated monopoles in a quantum field / M. W. Ray, E. Ruokokoski, K. Tiurev [et al.] // Science. - 2015. - Vol. 348, No. 6234. - P. 544-547.
- [261] Coherent all-optical control of ultracold atoms arrays in permanent magnetic traps / A. Abdelrahman, T. Mukai, H. Häffner, T. Byrnes // Optics Express. - 2014. - Vol. 22, No. 3. - P. 3501-3513.
- [262] Pyrkov A. N. Quantum teleportation of spin coherent states: beyond continuous variables teleportation / A. N. Pyrkov, T. Byrnes // New J. Phys. - 2014. - Vol. 16, No. 7. - Art. 073038. - 11 p.
- [263] Quantum metrology: Dynamics versus entanglement / S. Boixo, A. Datta, M. J. Davis [et al.] // Phys. Rev. Lett. - 2008. - Vol. 101, No. 4. - Art. 040403. - 4 p.
- [264] Atom-chip-based generation of entanglement for quantum metrology / M F. Riedel, P. Böhi, Yun Li [et al.] // Nature. — 2010. — Vol. 464, No. 7292. — P. 1170–1173.
- [265] Quantum-enhanced measurements: Beating the standard quantum limit // Science. - 2004. - Vol. 306, No. 5700. - P. 1130-1336.

- [266] Jamison A. O. Advances in precision contrast interferometry with Yb Bose-Einstein condensates / A. O. Jamison, B. Plotkin-Swing, S. Gupta // Phys. Rev. A. 2014. Vol. 90, No. 6. Art. 063606. 7 p.
- [267] Боголюбов Н. Н. Волновая функция нижнего состояния системы взаимодействующих бозе-частиц / Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев // Журн. эксп. теор. физ. — 1955. — Т. 28, № 2. — С. 129–139.
- [268] Rovenchak A. A. Extraction of interatomic potentials from structure of liquids / A. A. Rovenchak // Centr. Eur. J. Phys. – 2005. – Vol. 3, No. 1. – P. 47–60.
- [269] Rovenchak A. A. Effective mass of atom and the excitation spectrum in liquid helium-4 at T = 0 K / A. A. Rovenchak // Fiz. Nizk. Temp. 2003. Vol. 29, No. 2. P. 145–148; Low Temp. Phys. 2003. Vol. 29, No. 2. P. 105–107.
- [270] Rovenchak A. A. Energy spectrum of an interacting Bose-system / A. A. Rovenchak // J. Low Temp. Phys. - 2005. - Vol. 138, No. 1/2. -P. 49-54.
- [271] Quesne C. Deformed algebras, position-dependent effective masses and curved spaces: an exactly solvable Coulomb problem / C. Quesne, V. M. Tkachuk // J. Phys. A: Math. Gen. - 2004. - Vol. 37, No. 14. -P. 4267-4281.
- [272] Bohm D. A collective description of electron interactions: III. Coulomb interactions in a degenerate electron gas / D. Bohm, D. Pines // Phys. Rev. - 1953. - Vol. 92, No. 3. - P. 609-625.
- [273] Cowley R. A. Inelastic scattering of thermal neutrons from liquid helium / R. A. Cowley, A. D. B. Woods // Can. J. Phys. – 1971. – Vol. 49, No. 2. – P. 177–200.
- [274] Robkoff H. N. Structure-factor measurements in ⁴He at saturated vapor pressure for $1.38 \le T \le 4.24$ K / H. N. Robkoff, R. B. Hallock // Phys. Rev. B. -1981. Vol. 24, No. 1. P. 159–182.
- [275] Rovenchak A. A note on the calculation of the long-wavelength limit of the bosonic excitation spectrum / A. Rovenchak // Z. Naturforsch. A. - 2015. - Vol. 70, No. 1. - P. 73-78.
- [276] Zubarev D. N. Nonequilibrium Statistical Thermodynamics /
 D. N. Zubarev. New York : Consultants Bureau, 1974. 489 p.
- [277] Vakarchuk I. O. A potential energy of interaction between helium atoms / I. O. Vakarchuk, V. V. Babin, A. A. Rovenchak // J. Phys. Stud. - 2000. - Vol. 4, No. 1. - P. 16-22.

- [278] Tang K. T. An improved simple model for the van der Waals potential based on universal damping functions for the dispersion coefficients / K. T. Tang, J. P. Toennies // J. Chem. Phys. - 1994. - Vol. 80, No. 8. -P. 3726-3741.
- [279] Janzen A. R. An accurate potential energy curve for helium based on ab initio calculations / A. R. Janzen, R. A. Aziz // J. Chem. Phys. – 1997. – Vol. 107, No. 3. – P. 914–919.
- [280] Relativistic and quantum electrodynamics effects in the helium pair potential / M. Przybytek, W. Cencek, J. Komasa [et al.] // Phys. Rev. Lett. - 2010. - Vol. 104. - Art. 183003. - 4 p.
- [281] Cleymans Jean. Bose–Einstein condensation of kaons in dense nuclear matter / Jean Cleymans, Detlof W. von Oertzen // Phys. Lett. B. – 1990. – Vol. 249. – P. 511–513.
- [282] Rezaeian A. H. Diquark Bose–Einstein condensation and nuclear matter / A. H. Rezaeian, H. J. Pirner // Nucl. Phys. A. – 2006. – Vol. 779. – P. 197–219.
- [283] Ceperley D. M. Exact calculations of the ground state of model neutron matter / D. M. Ceperley, G. V. CHester // Phys. Rev. D. - 1976. --Vol. 13. - P. 3208-3213.
- [284] Strepparola E. Ground-state structure and thermodynamics of Yukawa Bose fluids in dimensionality D = 3 and D = 2 / E. Strepparola, R. Nifosì, M. P. Tosi // J. Phys.: Condens. Matter. 1998. Vol. 10. P. 11645-11658.
- [285] Halinen J. Role of short- and long-range interactions in quantum Bose fluids / J. Halinen, V. Apaja, M. Saarela // Physica B. - 2000. --Vol. 284–288. - P. 3–4.
- [286] McLaughlin I. L. The structure factor of expanded liquid rubidium at long wavelengths / I. L. McLaughlin, W. H. Young // J. Phys. F: Met. Phys. - 1984. - Vol. 14. - P. 1-12.
- [287] Arlinghaus R. T. The role of the pair potential in determining the structure factor of liquid rubidium / R. T. Arlinghaus, P. T. Cummings // J. Phys. F: Met. Phys. - 1987. - Vol. 17. - P. 797-807.
- [288] Singh R. N. Effective pair potential, structure and heat capacity of undercooled liquid rubidium / R. N. Singh, R. P. Jaju, I. Ali // Physica B. - 2001. - Vol. 299. - P. 108-119.
- [289] Вакарчук И. А. Матрицы плотности сверхтекучего гелия-4. І / И. А. Вакарчук // Теор. мат. физ. — 1989. — Vol. 80, No. 3. — Р. 439– 451.
- [290] Вакарчук И. А. Матрицы плотности сверхтекучего гелия-4. II / И. А. Вакарчук // Теор. мат. физ. — 1990. — Vol. 82, No. 3. — Р. 438– 449.

- [291] Ровенчак А. А. Міжатомні потенціали розрідженої багатобозонної системи / А. А. Ровенчак // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. Фізика. — 2003. — № 14. — С. 16–19.
- [292] Vakarchuk I. O. Representation of the short-range interactions in liquid helium via modified hard sphere potentials / I. O. Vakarchuk, A. A. Rovenchak // J. Phys. Stud. - 2001. - Vol. 5, No. 2. - P. 126– 130.
- [293] Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика / Р. Балеску. — Москва : Мир, 1978. — Т. 1. — 404 с.
- [294] *Хуанг К.* Статистическая механика / К. Хуанг. Москва : Мир, 1966. 520 с.
- [295] Bagnato V. Bose-Einstein condensation in an external potential / V. Bagnato, D. E. Pritchard, D. Kleppner // Phys. Rev. A. - 1987. -Vol. 35. - P. 4354-4358.
- [296] Bagnato V. Bose–Einstein condensation in low-dimensional traps / V. Bagnato, D. Kleppner // Phys. Rev. A. – 1991. – Vol. 44, No. 11. – P. 7439–7441.
- [297] Posazhennikova A. Colloquium: Weakly interacting, dilute Bose gases in 2D / A. Posazhennikova // Rev. Mod. Phys. - 2006. - Vol. 78. -P. 1111-1134.
- [298] Bose–Einstein condensation in a harmonic trap: Effect of interactions on T_c // J. Stat. Phys. 2003. Vol. 110. P. 903–910.
- [299] Mazzanti F. Energy and structure of dilute hard- and soft-sphere gases / F. Mazzanti, A. Polls, Fabrocini A. // Phys. Rev. A. -2003. -Vol. 67. Art. 063615. -14 p.
- [300] Ільків І. М. Вплив слабкої взаємодії на властивості бозе-газу / І. М. Ільків, А. А. Ровенчак // Журн. фіз. досл. — 2007. — Т. 11, № 1. — С. 122–131.
- [301] Panda S. Charged-boson fluid at zero-temperature in the fractional dimensional space / S. Panda, B. K. Panda // Eur. Phys. J. B. – 2010. – Vol. 76. – P. 187–196.
- [302] Yan Z. Bose–Einstein condensation in trapped gas in n dimension / Z. Yan // Phys. Rev. A. 1999. Vol. 59.
- [303] Li M. Density of states of particles in a generic power-law potentian in any dimensional space / M. Li, L. Chen, Ch. Chen // Phys. Rev. A. – 1999. – Vol. 59. – P. 3109–3111.
- [304] Ровенчак А. А. Фізика бозе-систем / А. А. Ровенчак. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2015. — 128 с.

- [305] Salasnich L. Bose–Einstein Condensation in Exotic Trapping Potentials / L. Salasnich // Recent Research Developments in Physics / Ed. by M. Kawasaki, A. Ashgriz, R. Anthony. — India : Transworld Research Network, 2002. — Vol. 3, Part II. — P. 683–697.
- [306] Hao Ling. Lacunarity and universality / Ling Hao, Z. R. Yang // J. Phys. A: Math. Gen. - 1987. - Vol. 20, No. 6. - P. 1627-1631.
- [307] Critical properties of the Ising model on Sierpinski fractals: A finitesize scaling-analysis approach / J. M. Carmona, U. M. B. Marconi, J. J. Ruiz-Lorenzo, A. Tarancón // Phys. Rev. B. - 1998. - Vol. 58, No. 21. - P. 14387-14396.
- [308] Maslov V. P. Nonstandard analysis, parastatistics, and fractals / V. P. Maslov // Theor. Math. Phys. - 2007. - Vol. 153, No. 2. -P. 1575-1581.
- [309] Rovenchak A. A. Weakly-interacting bosons in a trap within approximate second quantization approach / A. A. Rovenchak // J. Low Temp. Phys. - 2007. - Vol. 148, No. 3/4. - P. 411-416.
- [310] Bessis N. Open perturbation and the Riccati equation: Algebraic determination of the quartic anharmonic oscillator energies and eigenfunctions / N. Bessis, G. Bessis // J. Math. Phys. - 1997. - Vol. 38, No. 11. - P. 5483-5492.
- [311] Mukaidani H. Asymptotic expansions and a new numerical algorithm of the algebraic Riccati equation for multiparameter singularly perturbed systems / H. Mukaidani, T. Shimomura, K. Mizukami // J. Math. Analysis Appl. – 2002. – Vol. 267, No. 1. – P. 209–234.
- [312] Meini B. Nonlinear matrix equations and structured linear algebra / B. Meini // Lin. Alg. Appl. - 2006. - Vol. 413, No. 2-3. - P. 440-457.
- [313] Rovenchak A. Effective Hamiltonian and excitation spectrum of harmonically trapped bosons / A. Rovenchak // Fiz. Nizk. Temp. – 2016. – Vol. 42, No. 1. – P. 49–55; Low Temp. Phys. – 2016. – Vol. 42, No. 1. – P. 36–41.
- [314] Colpa J. H. P. Diagonalization of the quadratic boson Hamiltonian / J. H. P. Colpa // Physica. - 1978. - Vol. 93A. - P. 327-353.
- [315] Tsallis C. Diagonalization methods for the general bilinear Hamiltonian of an assembly of bosons / C. Tsallis // J. Math. Phys. 1978. Vol. 19, No. 1. P. 277–286.
- [316] Marinescu M. Elementary excitation spectrum of a trapped weakly interacting Bose-Einstein condensate / M. Marinescu, A. F. Starace // Phys. Rev. A. - 1997. - Vol. 56, No. 1. - P. 570-574.
- [317] Yukalov V. I. Basics of bose–einstein condensation / V. I. Yukalov // Phys. Part. Nucl. – 2011. – Vol. 42, No. 3. – P. 460–513.

- [318] Titchmarsh E. C. Some integrals involving hermite polynomials / E. C. Titchmarsh // J. London Math. Soc. - 1949. - Vol. s1-23, No. 1. - P. 15-16.
- [319] Lord R. D. Some integrals involving hermite polynomials / R. D. Lord // J. London Math. Soc. — 1949. — Vol. s1-24, No. 2. — P. 101-112.
- [320] Bajpai S. D. Some formule involving Hermite polynomial, confluent hypergeometric function and Meijer's G-function / S. D. Bajpai // Ann. Math. Siles. — 1992. — Vol. 6. — P. 13–20.
- [321] Giorgini S. Condensate fraction and critical temperature of a trapped interacting bose gas / S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari // Phys. Rev. A. - 1996. - Vol. 54. - P. R4633-R4636.
- [322] Campbell R. Interactions and collisions of discrete breathers in twospecies Bose-Einstein condensates in optical lattices / R. Campbell, G.-L. Oppo, M. Borkowski // Phys. Rev. E. - 2015. - Vol. 91, No. 1. -P. 012909.
- [323] Quantum degenerate mixtures of strontium and rubidium atoms / B. Pasquiou, A. Bayerle, S. M. Tzanova [et al.] // Phys. Rev. A. – 2013. – Vol. 88, No. 2. – P. 023601.
- [324] Van Schaeybroeck B. Weakly interacting Bose mixtures at finite temperature / B. Van Schaeybroeck // Physica A. - 2013. - Vol. 392, No. 17. - P. 3806-3811.
- [325] Shen Y. Intermediate-statistics quantum bracket, coherent state, oscillator, and representation of angular momentum [su(2)] algebra / Y. Shen, W.-Sh. Dai, M. Xie // Phys. Rev. A. 2007. Vol. 75, No. 4. Art. 042111. 8 p.
- [326] Mashkevich S. Virial coefficients of multispecies anyons / S. Mashkevich, J. Myrheim, K. Olaussen // Phys. Lett. A. – 2004. – Vol. 330. – P. 142–148.
- [327] Ponomarenko V. V. Braiding of anyonic quasiparticles in charge transfer statistics of a symmetric fractional edge-state Mach-Zehnder interferometer / V. V. Ponomarenko, D. V. Averin // Phys. Rev. B. – 2010. – Vol. 82. – Art. 205411. – 11 p.
- [328] Lavagno A. Intermediate statistics as a consequence of deformed algebra / A. Lavagno, P. Narayana Swamy // Physica A. - 2010. --Vol. 389. - P. 993-1001.
- [329] Beciu M. A note about fractional statistics / M. Beciu // Physica E. 2009. Vol. 41. P. 786–787.
- [330] Barbour I. M. Complex zeros of lattice partition functions / I. M. Barbour, D. S. Henty, E. G. Klepfish // Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). - 1994. - Vol. 34. - P. 311-313.

- [331] Ipsen J. R. Baryon number Dirac spectrum in QCD / J. R. Ipsen, K. Splittorff // Phys. Rev. D. 2012. Vol. 86, No. 1. Art. 014508. 12 p.
- [332] Singularity of the density of states in the two-dimensional Hubbard model from finite-size scaling of Yang-Lee zeros / E. Abraham, I. M. Barbour, P. H. Cullen [et al.] // Phys. Rev. B. 1996. Vol. 53, No. 12. P. 7704-7713.
- [333] Chakraborty P. K. On the electron energy spectrum in heavily doped non-parabolic semiconductors / P. K. Chakraborty, B. Nag, K. P. Ghatak // J. Phys. Chem. Solids. - 2003. - Vol. 64, No. 11. -P. 2191-2197.
- [334] Cragg G. E. Complex chemical potential: Signature of decay in a Bose-Einstein condensate / G. E. Cragg, A. K. Kerman // Phys. Rev. Lett. – 2005. – Vol. 94, No. 19. – Art. 190402. – 4 p.
- [335] van Saarloos W. Location of zeros in the complex temperature plane: Absence of Lee-Yang theorem / W. van Saarloos, D. A. Kurtze // J. Phys. A: Math. Gen. - 1984. - Vol. 17, No. 6. - P. 1301-1311.
- [336] Matveev V. Complex-temperature properties of the 2D Ising model with $\beta H = \pm i\pi/2$ / V. Matveev, R. Shrock // J. Phys. A: Math. Gen. 1995. Vol. 28. P. 4859–4882.
- [337] Bailey T. K. Complex energy eigenstates in quantum decay models / T. K. Bailey, W. C. Schieve // Nuovo Cim. A. - 1978. - Vol. 47, No. 2. - P. 231-250.
- [338] Bender C. M. Quantum effects in classical systems having complex energy / C. M. Bender, D. C. Brody, D. W. Hook // J. Phys. A: Math. Theor. - 2008. - Vol. 41, No. 35. - Art. 352003. - 15 p.
- [339] Chudesnikov D. O. Bragg scattering on complex potential and formation of super-narrow momentum distributions of atoms in light fields / D. O. Chudesnikov, V. P. Yakovlev // Laser Phys. - 1991. - Vol. 1. -P. 110-119.
- [340] Atom waves in crystals of light / M. K. Oberthaler, R. Abfalterer, S. Bernet [et al.] // Phys. Rev. Lett. - 1996. - Vol. 77, No. 25. -P. 4980-4983.
- [341] Observation of *PT*-symmetry breaking in complex optical potentials / A. Guo, G. J. Salamo, D. Duchesne [et al.] // Phys. Rev. Lett. - 2009. -Vol. 103, No. 9. - Art. 093902. - 4 p.
- [342] Avalanches of Bose–Einstein condensates in leaking optical lattices / G. S. Ng, H. Hennig, R. Fleischmann [et al.] // New J. Phys. – 2009. – Vol. 11. – Art. 073045. – 14 p.

- [343] Gavrilik A. M. Deformed gas of p, q-bosons: Virial expansion and virial coefficients / A. M. Gavrilik, A. P. Rebesh // Mod. Phys. Lett. B. -2012. Vol. 25, No. 5. Art. 1150030. 13 p.
- [344] Gupta R. K. Planck distribution for a complex q-boson gas / R. K. Gupta, C. T. Bach, H. Rosu // J. Phys. A: Math. Gen. – 1994. – Vol. 27. – P. 1427–1433.
- [345] Cascade of phase transitions in $GdFe_3(BO_3)_4$ / R. Z. Levitin, E. A. Popova, R. M. Chtsherbov [et al.] // JETP Lett. - 2004. - Vol. 79, No. 9. - P. 423-426.
- [346] Cascade of magnetic field induced spin transitions in LaCoO₃ / M. M. Altarawneh, G.-W. Chern, N. Harrison [et al.] // Phys. Rev. Lett. -2012. Vol. 109, No. 3. Art. 037201. 5 p.
- [347] Anisotropic cascade of field-induced phase transitions in the frustrated spin-ladder system $BiCu_2PO_6$ / Y. Kohama, Shuang Wang, A. Uchida [et al.] // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 109, No. 16. Art. 167204. 5 p.
- [348] Полуэктов Ю. М. О возможности двух фазовых переходов в жидком гелии / Ю. М. Полуэктов, А. С. Рыбалко // Физ. низк. темп. — 2013. — Т. 39, № 9. — С. 992–1000.
- [349] Bloch oscillations and mean-field effects of Bose-Einstein condensates in 1D optical lattices / O. Morsch, J. H. Müller, M. Cristiani [et al.] // Phys. Rev. Lett. - 2001. - Vol. 87, No. 14. - Art. 140402. - 4 p.
- [350] Observation of dynamical instability for a Bose-Einstein condensate in a moving 1D optical lattice / L. Fallani, L. De Sarlo, J. E. Lye [et al.] // Phys. Rev. Lett. - 2004. - Vol. 93, No. 14. - Art. 140406. - 4 p.
- [351] Vladimirov V. S. Equations of Mathematical Physics / V. S. Vladimirov. – New York : Marcel Dekker, 1971. – viii, 418 p.
- [352] Сивоконь В. Е. Динамические фазовые переходы в двумерном электронном кристалле и двумерной гелиевой пленке / В. Е. Сивоконь, К. А. Наседкин // Физ. низк. темп. 2012. Т. 38, № 1. С. 8–19.
- [353] Сивоконь В. Е. Влияние сверхтекучего перехода на адсорбцию тонких гелиевых пленок / В. Е. Сивоконь // Физ. низк. темп. — 2006. — Т. 32, № 1. — С. 65–74.
- [354] Rovenchak A. Harmonically trapped bosons on the Sierpiński carpet / A. Rovenchak // Acta Phys. Pol. A. 2010. Vol. 118, No. 4. P. 531–533.
- [355] The effective thermal conductivity of porous media based on statistical self-similarity / J. Kou, F. Wu, H. Lu [et al.] // Phys. Lett. A. -2009. -Vol. 374, No. 1. P. 62–65.

- [356] R-Monteiro M. A. Virial expansion for an ε-deformed system / M. A. R-Monteiro, I. Roditi, L. M. C. S. Rodrigues // Mod. Phys. Lett. B. – 1995. – Vol. 9, No. 10. – P. 607–610.
- [357] Rego-Monteiro M. q-deformation and instability of the phonon spectrum in ⁴He / M. Rego-Monteiro, L. M. C. S. Rodrigues, S. Wulck // Physica A. - 1998. - Vol. 259, No. 3-4. - P. 245-260.
- [358] Algin A. Low-temperature thermostatistics of Tamm–Dancoff deformed boson oscillators / A. Algin, E. Ilik // Phys. Lett. A. – 2013. – Vol. 377, No. 31–33. – P. 1797–1803.
- [359] Handbook of mathematical functions. Tenth printing / Ed. by M. Abramowitz, I. A. Stegun. — National Bureau of Standards, 1972. — XIV, 1046 p.
- [360] Polylogarithm [Electronic resource]. Available from: http:// functions.wolfram.com/ZetaFunctionsandPolylogarithms/ PolyLog/. — Cited on 26 June 2014.
- [361] D-dimensional Bose gases and the Lambert W function / J. Tanguay, M. Gil, D. J. Jeffrey, S. R. Valluri // J. Math. Phys. 2010. Vol. 51. Art. 123303. 14 p.
- [362] Higher Transcendental Functions / Ed. by A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger [et al.]; based, in part, on notes left by Harry Bateman. – Malabar, FL : Krieger, 1981. – Vol. 1. – XIII, 302 p.
- [363] Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in any-dimensional space / Mingzhe Li, Lixuan Chen, Jincan Chen [et al.] // Phys. Rev. A. - 1999. - Vol. 60, No. 5. - P. 4168-4170.
- [364] Observation of the photon-blockade breakdown phase transition / J. M. Fink, A. Dombi, A. Vukics [et al.] // Rhys. Rev. X. - 2017. -Vol. 7, No. 1. - Art. 011012. - 9 p.
- [365] Bishop D. J. Study of the superfluid transition in two-dimensional ⁴He films / D. J. Bishop, J. D. Reppy // Phys. Rev. Lett. 1978. Vol. 40, No. 26. P. 1727-1730.
- [366] Зуева Т. И. Поверхностные электроны над жидким гелием / Т. И. Зуева, Ю. З. Ковдря, С. С. Соколов // Физ. низк. темп. – 2007. – Т. 33, № 1. – С. 3–11.
- [367] Engquist J. Anyons, deformed oscillator algebras and projectors / J. Engquist // Nucl. Phys. B. - 2009. - Vol. 816 [FS]. - P. 356-375.
- [368] Dalton S. L. Anyonic quon gas / S. L. Dalton, A. Inomata // Phys. Lett. A. - 1995. - Vol. 199. - P. 315-319.
- [369] Algin A. High temperature behavior of a two-parameter deformed quantum group fermion gas / A. Algin, M. Arik, A. S. Arikan // Phys. Rev. E. - 2002. - Vol. 65, No. 2. - Art. 026140. - 5 p.

- [370] Algin A. Fibonacci oscillators and two-parameter generalized thermostatistics / A. Algin // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. – 2010. – Vol. 15. – P. 1372–1377.
- [371] Gavrilik A. M. Deformed Bose gas models aimed at taking into account both compositeness of particles and their interaction / A. M. Gavrilik, Yu. A. Mishchenko // Ukr. J. Phys. – 2013. – Vol. 58, No. 12. – P. 1171–1177.
- [372] Gavrilik A. M. Correlation function intercepts for $\tilde{\mu}, q$ -deformed Bose gas model implying effective accounting for interaction and compositeness of particles / A. M. Gavrilik, Yu. A. Mishchenko // Nucl. Phys. B. -2015. Vol. 891. P. 466–481.
- [373] Kaniadakis G. Non-linear kinetics underlying generalized statistics / G. Kaniadakis // Physica A. - 2001. - Vol. 296. - P. 405-425.
- [374] Büyükkılıç F. A statistical mechanical approach to generalized statistics of quantum and classical gases / F. Büyükkılıç, D. Demirhan, A. Güleç // Phys. Lett. A. - 1995. - Vol. 197, No. 3. - P. 209-220.
- [375] Bose–Einstein and Fermi–Dirac distributions in nonextensive Tsallis statistics: an exact study / H. H. Aragão-Rêgo, D. J. Soares, L. S. Lucena [et al.] // Physica A. 2003. Vol. 317. P. 199–208.
- [376] *Tsallis C.* Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World / C. Tsallis. – New York : Springer, 2009. – xviii, 382 p.
- [377] Venkatesan R. C. Generalized statistics variational perturbation approximation using q-deformed calculus / R. C. Venkatesan, A. Plastino // Physica A. - 2010. - Vol. 389, No. 6. - P. 1159-1172.
- [378] Borges P. F. Generalized partition functions, interpolating statistics and higher virial coefficients / P. F. Borges, H. Boschi-Filho, C. Farina // Mod. Phys. Lett. A. – 1999. – Vol. 14, No. 18. – P. 1217–1226.
- [379] Mashkevich S. The third virial coefficient of anyons revisited / S. Mashkevich, J. Myrheim, K. Olaussen // Phys. Lett. B. – 1996. – Vol. 382. – P. 124–130.
- [380] Sen D. Spectrum of three anyons in a harmonic potential and the third virial coefficient / D. Sen // Phys. Rev. Lett. - 1992. - Vol. 68, No. 20. - P. 2977-2980.
- [381] Sen D. Some supersymmetric features in the spectrum of anyons in a harmonic potential / D. Sen // Phys. Rev. D. - 1992. - Vol. 46, No. 4. - P. 1846-1857.
- [382] Tsallis C. What are the numbers that experiments provide? / C. Tsallis // Química Nova. 1994. Vol. 17, No. 6. P. 468-471.

- [383] Applying incomplete statistics to nonextensive systems with different q indices / L. Nivanen, M. Pezeril, Q. A. Wang, A. Le Méhauté // Chaos, Solitons and Fractals. - 2005. - Vol. 24. - P. 1337-1342.
- [384] Yamano T. Some properties of q-logarithm and q-exponential functions in tsallis statistics / T. Yamano // Physica A. - 2002. - Vol. 305, No. 3-4. - P. 486-496.
- [385] Niven R. K. The q-gamma and (q, q)-polygamma functions of Tsallis statistics / R. K. Niven, H. Suyari // Physica A. 2009. Vol. 388, No. 19. P. 4045-4060.
- [386] Delves R. T. Exact results in the theory of intermediate statistics / R. T. Delves, G. S. Joyce, I. J. Zucker // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1997. – Vol. 453. – P. 1177–1194.
- [387] Rovenchak A. Weakly nonadditive Polychronakos statistics / A. Rovenchak // Phys. Rev. A. -2014. Vol. 89, No. 5. Art. 052116. -7 p.
- [388] The fourth virial coefficient of anyons / A. Kristoffersen, S. Mashkevich, J. Myrheim, K. Olaussen // Int. J. Mod. Phys. A. – 1998. – Vol. 13, No. 21. – P. 3723–3747.
- [389] Springer Handbook of Materials Measurement Methods / Ed. by H. Czichos, T. Saito, L. Smith. – Springer, 2006. – XXVI, 1207 p.
- [390] Rovenchak A. Two-parametric fractional statistics models for anyons / A. Rovenchak // Eur. Phys. J. B. 2014. Vol. 87, No. 8. Art. 175. 6 p.
- [391] Kaniadakis G. Theoretical foundations and mathematical formalism of the power-law tailed statistical distributions / G. Kaniadakis // Entropy. - 2013. - Vol. 15, No. 10. - P. 3983-4010.
- [392] Горнецька М. Я. Двопараметричні модифікації статистик еніонів / М. Я. Горнецька, А. А. Ровенчак // Укр. фіз. журн. — 2016. — Т. 61, № 2. — С. 174–183; Hornetska M. Ya., Rovenchak A. A. Two-parameter modifications of anyonic statistics // Ukr. J. Phys. — 2016. — Vol. 61, No. 2. — Р. 168–177.
- [393] The trapped two-dimensional Bose gas: From Bose–Einstein condensation to Berezinskii–Kosterlitz–Thouless physics / Z. Hadzibabic, P. Krüger, M. Cheneau [et al.] // New J. Phys. — 2008. — Vol. 10. — Art. 045006. — 22 p.
- [394] Wang Jian-Hui. Thermodynamic properties of a finite Bose gas in a harmonic trap / Jian-Hui Wang, Yong-Li Ma // Chin. Phys. B. – 2010. – Vol. 19, No. 5. – Art. 050502. – 7 p.

- [395] Wang Jianhui. Thermodynamics of finite Bose systems: An exact canonical-ensemble treatment with different traps / Jianhui Wang, Yongli Ma, Jizhou He // J. Low Temp. Phys. — 2011. — Vol. 162. — P. 23–33.
- [396] Daily K. M. Occupation numbers of the harmonically trapped fewboson system / K. M. Daily, X. Y. Yin, D. Blume // Phys. Rev. A. – 2012. – Vol. 85, No. 5. – Art. 053614. – 14 p.
- [397] Energy-level statistics of interacting trapped bosons / B. Chakrabarti, A. Biswas, V. K. B. Kota [et al.] // Phys. Rev. A. - 2012. - Vol. 86, No. 1. - Art. 013637. - 11 p.
- [398] Beyond mean-field ground-state energies and correlation properties of a trapped Bose–Einstein condensate / S. A. Sofianos, T. K. Das, B. Chakrabarti [et al.] // Phys. Rev. A. 2013. Vol. 87, No. 1. Art. 013608. 8 p.
- [399] Watabe S. Comparative studies of many-body corrections to an interacting Bose-Einstein condensate / S. Watabe, Y. Ohashi // Phys. Rev. A. - 2013. - Vol. 88, No. 5. - Art. 053633. - 9 p.
- [400] Rovenchak A. Complex-valued fractional statistics for D-dimensional harmonic oscillators / A. Rovenchak // Phys. Lett. A. 2014. Vol. 378, No. 3. P. 100-108.
- [401] Lavagno A. Nonextensive nuclear liquid–gas phase transition / A. Lavagno, D. Pigato // Physica A. – 2013. – Vol. 392, No. 20. – P. 5164–5171.
- [402] Bagci G. B. Tsallis power laws and finite baths with negative heat capacity / G. B. Bagci, T. Oikonomou // Phys. Rev. E. -2013. -Vol. 88, No. 4. Art. 042126. -5 p.
- [403] Wong Cheuk-Yin. Tsallis fits to p_T spectra and multiple hard scattering in pp collisions at the LHC / Cheuk-Yin Wong, G. Wilk // Phys. Rev. D. - 2013. - Vol. 87, No. 11. - Art. 114007. - 19 p.
- [404] Phase transition of a Bose gas in a harmonic potential / K. Damle, T. Senthil, S. N. Majumdar, S. Sachdev // Europhys. Lett. – 1996. – Vol. 36, No. 1. – P. 7–12.
- [405] Mansour T. Identities for sums of a q-analogue of polylogarithm functions / T. Mansour // Lett. Math. Phys. - 2009. - Vol. 87. - P. 1-18.
- [406] Bose-Einstein condensation in a dilute gas: Measurement of energy and ground-state occupation / J. R. Ensher, D. S. Jin, M. R. Matthews [et al.] // Phys. Rev. Lett. - 1996. - Vol. 77, No. 25. - P. 4984-4987.
- [407] Kempf A. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation / A. Kempf, G. Mangano, R. B. Mann // Phys. Rev. D. – 1995. – Vol. 52, No. 2. – P. 1108–1118.

- [408] Quesne C. Harmonic oscillator with nonzero minimal uncertainties in both position and momentum in a SUSYQM framework / C. Quesne, V. M. Tkachuk // J. Phys. A. - 2003. - Vol. 36. - P. 10373-10389.
- [409] Вакарчук І. О. Кінетична енерґія і теплоємність рідкого ⁴Не / І. О. Вакарчук, Р. О. Притула, А. А. Ровенчак // Журн. фіз. досл. — 2007. — Т. 11. — С. 259–267.
- [410] Lavagno A. Basic-deformed quantum mechanics / A. Lavagno // Rep. Math. Phys. - 2009. - Vol. 64, No. 1-2. - P. 79-91.
- [411] Kaniadakis G. Two-parameter deformations of logarithm, exponential, and entropy: A consistent framework for generalized statistical mechanics / G. Kaniadakis, M. Lissia, A. M. Scarfone // Phys. Rev. E. - 2005. - Vol. 71, No. 4. - Art. 046128. - 12 p.
- [412] Hounkonnou M. N. (q, μ) and (p, q, ζ) -exponential functions: Rogers–Szegő polynomials and Fourier–Gauss transform / M. N. Hounkonnou, E. B. N. Nkouankam // J. Math. Phys. 2010. Vol. 51, No. 10. 10 p.
- [413] Stanković M. S. The deformed exponential functions of two variables in the context of various statistical mechanics / M. S. Stanković, S. D. Marinković, P. M. Rajković // Appl. Math. Comput. - 2011. --Vol. 218, No. 6. - P. 2439-2448.
- [414] Bose–Einstein condensation of a two-dimensional harmonically trapped q-deformed boson system / Qi-Jun Zeng, Yong-Song Luo, Yuan-Guo Xu, Hao Luo // Physica A. – 2014. – Vol. 398. – P. 116–124.
- [415] Leibniz G. W. Specimen de divulsionibus aequationum ad problemata indefinita in numeris rationalibus solvenda. 2. September 1674 / G. W. Leibniz // Leibniz G. W. Sämtliche Schriften und Briefe. Siebente Reihe: Mathematische Schriften / G. W. Leibniz. — Berlin : Akademie-Verlag, 1990. — Vol. Bd. 1: 1672–1676. Geometrie – Zahlentheorie – Algebra (1. Teil). — P. 740–755.
- [416] *Eulero L.* De partitione numerorum / L. Eulero // Novi Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae. 1753. Vol. 3. P. 125–169.
- [417] Bogoliubov N. M. Enumeration of plane partitions and the algebraic Bethe anzatz / N. M. Bogoliubov // Theor. Math. Phys. - 2007. --Vol. 150, No. 2. - P. 165–174.
- [418] Andrews G. E. The Theory of Partitions / G. E. Andrews. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1976. – xiv, 255 p.
- [419] Hardy G. H. Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n / G. H. Hardy, S. Ramanujan // C. R. Hebd. Séances Acad. Sci. 1917. Vol. 164. P. 35–38.

- [420] Hardy G. H. Asymptotic formulæ in combinatory analysis / G. H. Hardy, S. Ramanujan // Proc. London Math. Soc. - 1918. -Vol. 17. - P. 75-115.
- [421] Rademacher H. On the partition function p(n) / H. Rademacher // Proc. London Math. Soc. (Ser. 2). 1938. Vol. 43. P. 241-254.
- [422] Erdös P. The distribution of the number of summands in the partitions of a positive integer / P. Erdös, J. Lehner // Duke Math. J. 1941. Vol. 8. P. 335–345.
- [423] Bohr N. On the transmutation of atomic nuclei by impact of material particles. I. General theoretical remarks / N. Bohr, F. Kalckar // Kgl. Danske Vid. Selskab. Math. Phys. Medd. — 1937. — Vol. 14, No. 10. — P. 1–40.
- [424] Van Lier C. On the statistical calculation of the density of the energy levels of the nuclei / C. Van Lier, G. E. Uhlenbeck // Physica. 1937. Vol. 4. P. 531–542.
- [425] Debnath L. Srinivasa Ramanujan (1887–1920) and the theory of partitions of numbers and statistical mechanics. A centennial tribute / L. Debnath // Int. J. Math. Math. Sci. 1987. Vol. 10. P. 625–640.
- [426] Auluck F. C. Statistical mechanics and the partitions of numbers / F. C. Auluck, D. S. Kothari // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. - 1946. -Vol. 42. - P. 272-277.
- [427] Temperley H. N. V. Statistical mechanics and the partition of numbers.
 I. The transition of liquid helium / H. N. V. Temperley // Proc. R. Soc. London A. - 1949. - Vol. 199. - P. 361-375.
- [428] Nanda V. S. Partition theory and thermodynamics of multidimensional oscillator assemblies / V. S. Nanda // Proc. Camb. Phil. Soc. - 1951. - Vol. 47. - P. 591-601.
- [429] Dutta M. An essential statistical approach to thermodynamic problem II / M. Dutta // Proc. Natl. Inst. Scl. India A. – 1953. – Vol. 19. – P. 109–126.
- [430] Dutta M. On new partition of numbers / M. Dutta // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. - 1956. - Vol. 25. - P. 138-143.
- [431] Grossmann S. Microcanonical fluctuations of a Bose system's ground state occupation number / S. Grossmann, M. Holthaus // Phys. Rev. E. - 1996. - Vol. 54. - P. 3495-3498.
- [432] Grossmann S. Fluctuations of the particle number in a trapped Bose– Einstein condensate / S. Grossmann, M. Holthaus // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 79, No. 19.
- [433] Grossmann S. From number theory to statistical mechanics: Bose– Einstein condensation in isolated traps / S. Grossmann, M. Holthaus // Chaos Solitons Fractals. — 1999. — Vol. 10. — P. 795–804.

- [434] Comtet A. Level density of a Bose gas and extreme value statistics / A. Comtet, P. Leboeuf, S. N. Majumdar // Phys. Rev. Lett. - 2007. -Vol. 98. - Art. 070404. - 4 p.
- [435] Wright E. M. Asymptotic partition formulae: I. Plane partitions / E. M. Wright // Quart. J. Math. - 1931. - Vol. 2. - P. 177-189.
- [436] Apostol T. M. An elementary view of Euler's summation formula / T. M. Apostol // Am. Math. Mon. 1999. Vol. 106, No. 5. P. 409–418.
- [437] Prokhorov D. Asymptotic formulas for integer partitions within the approach of microcanonical ensemble / D. Prokhorov, A. Rovenchak // Condens. Matter Phys. - 2012. - Vol. 15, No. 3. - Art. 33001. - 9 p.
- [438] Andrews G. Macmahon's partition analysis xii: Plane partitions / G. Andrews, P. Paule // J. London Math. Soc. (2). - 2007. - Vol. 76. -P. 647-666.
- [439] Stanley R. P. Theory and application of plane partitions / R. P. Stanley // Stud. Appl. Math. — 1971. — Vol. 50. — P. 167–188, 259–279.
- [440] Bogoliubov N. M. Boxed plane partitions as an exactly solvable boson model / N. M. Bogoliubov // J. Phys. A: Math. Gen. - 2005. --Vol. 38. - P. 9415-9430.
- [441] Borrmann P. Recursion formulas for quantum statistical partition functions / P. Borrmann, G. Franke // J. Chem. Phys. - 1993. --Vol. 98, No. 3. - P. 2484-2485.
- [442] Rovenchak A. A. Enumeration of plane partitions with a restricted number of parts / A. A. Rovenchak // Theor. Math. Phys. – 2014. – Vol. 181, No. 2. – P. 1428–1434.
- [443] Bracewell R. N. The Fourier transform and its application / R. N. Bracewell. 3rd edition. McGrow Hill, 2000. xx, 616 p.
- [444] Weiss C. Asymptotics of the number partitioning distribution / C. Weiss, M. Holthaus // Europhys. Lett. - 2002. - Vol. 59, No. 4. -P. 486-492.
- [445] MacMahon P. A. Memoir on the theory of the partition of numbers Part I / P. A. MacMahon // Phil. Trans. R. Soc. London A. – 1897. – Vol. 187. – P. 619–673.
- [446] Triangle read by rows: T[n,k]= plane partitions of n containing k parts [Electronic resource] // On-line Encyclopedia of Integer Sequences. — Available from: http://oeis.org/A091298. — Cited on 26 June 2014.
- [447] Number of planar partitions of n [Electronic resource] // On-line Encyclopedia of Integer Sequences. — Available from: http://oeis. org/A000219. — Cited on 26 June 2014.

- [448] Mutafchiev L. Asymptotic formula for the number of plane partitions of positive integers / L. Mutafchiev, E. Kamenov // Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. - 2006. - Vol. 59, No. 4. - P. 361-366.
- [449] Rovenchak A. Statistical mechanics approach in the counting of integer partitions / A. Rovenchak // Banach Center Publ. – 2016. – Vol. 109. – P. 155–166.
- [450] Patton K. R. Thermodynamic equivalence of certain ideal Bose and Fermi gases / K. R. Patton, M. R. Geller, M. P. Blencowe // Physica A. - 2005. - Vol. 357. - P. 427-435.
- [451] Girardeau M. Relationship between systems of impenetrable bosons and fermions in one dimension / M. Girardeau // J. Math. Phys. 1960. Vol. 1. P. 516–523.
- [452] Tonks–Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice / B. Peredes, A. Widera, V. Murg [et al.] // Nature. – 1960. – Vol. 429. – P. 277–281.
- [453] Kinoshita T. Observation of a one-dimensional Tonks-Girardeau gas / T. Kinoshita, T. Wenger, D. S. Weiss // Science. - 2004. - Vol. 305. -P. 1125-1128.
- [454] Rovenchak A. Partition function formalism in the problem of multidimensional integer partitions / A. Rovenchak // Computat. Meth. Sci. Technol. - 2010. - Vol. 16, No. 2. - P. 187-190.
- [455] Bhatia D. P. Asymptotic results for the number of multidimensional partitions of an integer and directed compact lattice animals / D. P. Bhatia, M. A. Prasad, D. Arora // J. Phys. A: Math. Gen. 1997. Vol. 30. P. 2281–2285.
- [456] Almkvist G. Asymptotic formulas and generalized Dedekind sums / G. Almkvist // Experimental Mathematics. - 1998. - Vol. 7. - P. 343-359.
- [457] Mustonen V. Numerical estimation of the asymptotic behaviour of solid partitions of an integer / V. Mustonen, R. Rajesh // J. Phys. A: Math. Gen. - 2003. - Vol. 36. - P. 6651-6659.
- [458] Pareto V. Cours d'économie politique / V. Pareto. Lausanne : Rouge, 1896–1897. — T. I. — VIII, 430 p.; T. II. — IV, 426 p.
- [459] *Estoup J. B.* Gammes sténographiques : méthode & exercices pour l'acquisition de la vitesse / J. B. Estoup. 4e édition. Paris : Institut Sténographique de France, 1916. 151 p.
- [460] Zipf G. K. The psycho-biology of languages : An introduction to dynamic philology / G. K. Zipf. — Boston, Mass. : Houghton-Mifflin, 1935. — ix, 336 p.

- [461] Zipf G. K. Human behavior and the principle of least effort : An introduction to human ecology / G. K. Zipf. Cambridge, Mass. : Addison-Wesley, 1949. xi, 573 p.
- [462] Petruszewycz M. L'histoire de la loi d'Estoup-Zipf : documents / M. Petruszewycz // Math. Sci. Hum. - 1973. - Vol. 44. - P. 41-56.
- [463] Kanter I. Markov processes: Linguistics and Zipf's law / I. Kanter, D. A. Kessler // Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 74, No. 22. – P. 4559– 4562.
- [464] Fontanari J. F. Solvable null model for the distribution of word frequencies / J. F. Fontanari, L. I. Perlovsky // Phys. Rev. E. - 2004. – Vol. 70. – Art. 042901. – 4 p.
- [465] Ferrer i Cancho R. Decoding least effort and scaling in signal frequency distributions / R. Ferrer i Cancho // Physica A. – 2005. – Vol. 345. – P. 275–284.
- [466] Public transport networks: empirical analysis and modeling / C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch, V. Palchykov // Eur. Phys. J. B. - 2009. - Vol. 68. - P. 261-275.
- [467] Urzúa C. M. A simple and efficient test for Zipf's law / C. M. Urzúa // Economics Letters. - 2000. - Vol. 66. - P. 257-260.
- [468] Knudsen Th. Zipf's law for cities and beyond: The case of Denmark / Th. Knudsen // Am. J. Econ. Sociol. 2001. Vol. 60, No. 1. P. 123–146.
- [469] Gulten T. R. Spatial and temporal patterns in civil violence: Guatemala, 1977–1986 / T. R. Gulten // Politics and the Life Sciences. – 2002. – Vol. 21, No. 1. – P. 26–36.
- [470] Bender M. L. The genetic code and Zipf's law / M. L. Bender, Pritmohinder Gill // Current Anthropology. — 1986. — Vol. 27. — P. 280– 283.
- [471] Блажиевський Л. Варіаційний метод в оптимізаційній задачі моделі minority game / Л. Блажиєвський, В. Янішевський // Журн. фіз. досл. — 2009. — Т. 13, № 2. — Ст. 2601. — 7 с.
- [472] Mandelbrot B. An informational theory of the statistical structure of languages / B. Mandelbrot // Communication Theory / Ed. by W. Jackson. — New York : Academic, 1953. — P. 486–502.
- [473] de Campos H. The informational temperature of the text / H. de Campos, J. M. Tolman // Poetics Today. — 1982. — Vol. 3. — P. 177–187.
- [474] Kosmidis K. Statistical mechanical approach of human language / K. Kosmidis, A. Kalampokis, P. Argyrakis // Physica A. – 2006. – Vol. 366. – P. 495–502.

- [475] Miyazima S. Measuring the temperature of texts / S. Miyazima, K. Yamamoto // Fractals. - 2008. - Vol. 16. - P. 25-32.
- [476] Word frequency studies / I.-I. Popescu, G. Altmann, P. Grzybek [et al.]. – Berlin ; New York : Mouton de Gruyter, 2009. – xii, 278 p.
- [477] Бук С. Н. Частотний словник роману "Перехресні стежки" / С. Н. Бук, А. А. Ровенчак // Стежками Франкового тексту (комунікативні, стилістичні та лексикографічні виміри роману "Перехресні стежки") / Ф. С. Бацевич (наук. ред), С. Н. Бук, Л. М. Процак [та ін.]. — Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. — С. 138–369.
- [478] The Jewish Encyclopedia / E. G. Hirsch, I. M. Casanowicz, J. Jacobs, M. Schloessinger. — New York : Funk and Wagnalls, 1901–1906. — P. 226-229. — Available online at: http://www.jewishencyclopedia. com.
- [479] The Complete Concordance to Shakspere / Compiler M. C. Clarke. New York : Wiley and Putman, 1846. – vii, 860 p.
- [480] Kornai A. Mathematical Linguistics / A. Kornai. London : Springer, 2008. xiii, 289 p.
- [481] *Тулдава Ю. П.* Проблемы и методы квантитативно-системного исследования лексики / Ю. П. Тулдава. Таллинн : Валгус, 1987. 203 с.
- [482] Rovenchak A. Application of a quantum ensemble model to linguistic analysis / A. Rovenchak, S. Buk // Physica A. - 2011. - Vol. 390, No. 7. - P. 1326-1331.
- [483] Rovenchak A. Defining thermodynamic parameters for texts from word rank-frequency distributions / A. Rovenchak, S. Buk // J. Phys. Stud. - 2011. - Vol. 15, No. 1. - Art. 1005. - 6 p.
- [484] Project Description: Designing and Constructing a Typologically Balanced Ukrainian Text Database / E. Kelih, S. Buk, P. Grzybek, A. Rovenchak // Methods of Text Analysis: Omnibus volume. — Chernivtsi : ČNU, 2009. — P. 125–132.
- [485] Eder M. Does size matter? Autorship attribution, short samples, big problem / M. Eder // Digital Humanities 2010: Conference abstracts. – London : Office for Humanities Communication, 2010. – P. 132–135.
- [486] Koppel M. Authorship attribution in the wild / M. Koppel, J. Schler, Sh. Argamon // Language Resources and Evaluation. 2011. Vol. 45, No. 1.
- [487] Luyckx K. The effect of author set size and data size in authorship attribution / K. Luyckx, W. Daelemans // Literary and Linguistic Computing. 2011. Vol. 26, No. 1.

- [488] Heisenberg W. Uber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik / W. Heisenberg // Z. Phys. 1927. Bd. 43, No. 3–4. S. 172–198.
- [489] Kennard E. Y. Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen / E. Y. Kennard // Z. Phys. - 1927. - Bd. 44, No. 4-5.
- [490] Rovenchak A. A naïve conception of the uncertainty principle in the multiparametric attribution of texts / A. Rovenchak // Glottometrics. - 2011. - No. 21. - P. 65-72.
- [491] Classification of author and/or genre? The impact of word length / E. Kelih, G. Antić, P. Grzybek, E. Stadlober // Classification – The Ubiquitous Challenge / Ed. by C. Weihs, W. Gaul. – Heidelberg : Springer, 2005. – P. 498–505.
- [492] Word-length-related parameters of text genres in the Ukrainian language. A pilot study / S. Buk, O. Humenchyk, L. Mal'tseva, A. Rovenchak // Text and Language: Structures – Functions – Interrelations. Quantitative perspectives / Ed. by P. Grzybek, E. Kelih, J. Mačutek. — Wien : Praesens, 2010. — P. 13–19.
- [493] Rovenchak A. Masadennin (The Little Prince in Bamana): Experimental online concordance with parallel French and English texts / A. Rovenchak, S. Buk // Mandenkan: Bulletin semestriel d'études linguistiques mandé. - 2013. - No. 50. - P. 117-130.
- [494] *Бук С.* 3000 найчастотніших слів розмовно-побутового стилю сучасної української мови / С. Бук. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2006. 180 с.
- [495] Rovenchak A. Where Alice meets Little Prince: Another approach to study language relationships / A. Rovenchak // Sequences in Language and Text / Ed. by George K. Mikros, Ján Mačutek. — Berlin ; Boston : Walter de Gruyter GmbH, 2015. — P. 217–230.
- [496] Popescu I.-I. Some aspects of word frequencies / I.-I. Popescu, G. Altmann // Glottometrics. - 2006. - No. 13. - P. 23-46.
- [497] *Бук С.* Статистична структура роману Івана Франка "Борислав сміється" / С. Бук // Уч. зап. Таврич. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Филол. — 2010. — Т. 23 (62), № 3. — С. 114–118.
- [498] Mačutek J. Evaluating goodness-of-fit of discrete distribution models in quantitative linguistics / J. Mačutek, G. Wimmer // J. Quant. Ling. 2013. Vol. 20, No. 3. P. 227–240.
- [499] Rovenchak A. Trends in language evolution found from the frequency structure of texts mapped against the Bose-distribution / A. Rovenchak // J. Quant. Ling. - 2014. - Vol. 21, No. 3. - P. 281-294.

- [500] Rovenchak A. Models of frequency spectrum in texts based on quantum distributions in fractional space dimensions / A. Rovenchak // 20th International Conference on Control Systems and Computer Science CSCS 2015: Proceedings, 27–29 May 2015, Bucharest, Romania / Ed. by I. Dumitrache, A. M. Florea, F. Pop, A. Dumitraşcu. – Vol. 2. – Los Alamitos, CA : IEEE Computer Society, 2015. – P. 645–649.
- [501] Tuldava J. The frequency spectrum of text and vocabulary / J. Tuldava // J. Quant. Ling. 1996. Vol. 3, No. 1. P. 38-50.
- [502] Botha R. Pidgin languages as a putative window on language evolution / R. Botha // Language & Communication. - 2006. - Vol. 26. -P. 1-14.
- [503] Bickerton D. Language evolution: A brief guide for linguists / D. Bickerton // Lingua. - 2007. - Vol. 117. - P. 510-526.
- [504] Christiansen M. H. Language Evolution / M. H. Christiansen, S. Kirby // Encyclopedia of Neuroscience / Ed. by Larry R. Squire. – Oxford : Academic Press, 2009. – P. 321–327.
- [505] Steels L. Modeling the cultural evolution of language / L. Steels // Physics of Life Reviews. 2011. Vol. 8. P. 339–356.
- [506] Fitch W. T. Evolutionary developmental biology and human language evolution: Constraints on adaptation / W. T. Fitch // Evol. Biol. 2012. Vol. 39, No. 4. P. 613–637.
- [507] Baxter G. J. Fixation and consensus times on a network: A unified approach / G. J. Baxter, R. A. Blythe, A. J. McKane // Phys. Rev. Lett. - 2008. - Vol. 101, No. 25. - Art. 258701. - 4 p.
- [508] Bakalis E. Modeling language evolution: Aromanian, an endangered language in Greece / E. Bakalis, A. Galani // Physica A. – 2012. – Vol. 391. – P. 4963–4969.
- [509] Wallace R. Information theory, scaling laws and the thermodynamics of evolution / R. Wallace, R. G. Wallace // J. Theor. Biol. 1998. Vol. 192. P. 545–559.
- [510] Simulating the Evolution of Language / Ed. by A. Cangelosi, D. Parisi. – London; New York : Springer, 2002. – xii, 355 p.
- [511] Blanchard Ph. Markov chains or the game of structure and chance: From complex networks, to language evolution, to musical compositions / Ph. Blanchard, J. R. Dawin, D. Volchenkov // Eur. Phys. J. Special Topics. - 2010. - Vol. 184. - P. 1–82.
- [512] Popescu I.-I. Hapax legomena and language typology / I.-I. Popescu, G. Altmann // J. Quant. Ling. - 2008. - Vol. 15. - P. 370-378.
- [513] Greenberg J. H. A quantitative approach to the morphological typology of language / J. H. Greenberg // Int. J. Am. Ling. 1960. Vol. 26. P. 178–194.

Наукове видання

Ровенчак Андрій Адамович

СТАТИСТИКА БОЗЕ І ДРОБОВІ СТАТИСТИКИ В ТЕОРІЇ БАГАТОЧАСТИНКОВИХ СИСТЕМ І СУМІЖНИХ ЗАДАЧАХ

Монографія

Редактор Коректор Комп'ютерна верстка Андрій Ровенчак Технічний редактор

Руслана Спринь Юліана Бурка Світлана Сеник

Формат $60 \times 90^{1/16}$ Умовн. друк. арк. 19.75 Зам. Наклад 300 прим.

Львівський національний університет імені Івана Франка вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів видавничої продукції Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Віддруковано у книжковій друкарні «Коло» вул. Бориславська, 8, м. Дрогобич, Львівська обл., 82100

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів видавничої продукції Серія ДК № 498 від 20.06.2001 р.