

В. М. ТКАЧУК

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

ЛНУ імені Івана Франка
2011

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Львівський національний університет імені Івана Франка

В. М. Ткачук

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Львів
2011

УДК 530.145
ББК 22.31я73
Т 48

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. **Ю. О. Ситенко**
(Інститут теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова НАН України);
д-р фіз.-мат. наук, проф. **С. Й. Вільчинський**
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка);
канд. фіз.-мат. наук, **Т. Є. Крохмальський**
(Інститут фізики конденсованих систем НАН України)

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний
посібник для студентів вищих навчальних закладів
(Лист №1/11-97 від 06.01.2011)*

Ткачук В. М.

Т 48 Фундаментальні проблеми квантової механіки. — Львів : ЛНУ
імені Івана Франка, 2011. — 144 с.
ISBN 978-966-613-850-0.

Посібник складається з дев'яти розділів: “Математичні основи квантової механіки”, “Двостанові квантові системи”, “Квантові комунікації”, “Квантові обчислення та квантові комп'ютери”, “Вимірювання у квантовій механіці”, “Геометрія простору квантових станів”, “Еволюція квантової системи”, “Декогеренція”, “Операторні тотожності та середні значення функцій від бозонних операторів”. Він присвячений фундаментальним проблемам квантової механіки і його можна розглядати як доповнення до традиційних підручників з квантової механіки.

Для студентів, аспірантів фізико-математичних спеціальностей університетів, викладачів та науковців.

The book consists of nine chapters: *Mathematical foundation of quantum mechanics, Two-state quantum systems, Quantum communication, Quantum calculations and quantum computers, Measurements in quantum mechanics, Geometry of quantum states, Evolution of quantum systems, Decoherence, Operator's identities and mean value of functions of boson operators*. It is devoted to fundamental problems in quantum mechanics and can be considered as a supplement to traditional books on quantum mechanics.

The book is meant for students and post-graduates of physics and mathematics as well as for teachers and researchers.

**УДК 530.145
ББК 22.31я73**

© Ткачук В. М., 2011

© Львівський національний університет
імені Івана Франка, 2011

ISBN 978-966-613-850-0

Зміст

Передмова	5
1 Математичні основи квантової механіки	7
1.1 Простір станів	7
1.2 Оператори	10
1.3 Представлення векторів станів та операторів	14
1.4 Властивості власних значень і власних векторів ермітових операторів	16
1.5 Унітарні перетворення	20
1.6 Постулат про вимірювання у квантовій механіці	21
1.7 Середні значення фізичних величин. Чистий ансамбль станів	22
1.8 Змішаний ансамбль станів. Матриця густини	24
1.9 Квантова дужка Пуассона	26
1.10 Динаміка квантової системи	28
1.11 Динаміка квантової системи. Змішаний ансамбль	30
1.12 Співвідношення невизначеностей Гайзенберга	31
1.13 Вимірювання в чистому та змішаному ансамблях	33
2 Двостанові квантові системи	35
2.1 Квантові стани спіну $s = 1/2$	36
2.2 Спінова матриця густини	38
2.3 Квантові стани N спінів	40
2.4 Синглетний стан. Парадокс ЕПР	43
2.5 Нерівності Белла	45
2.6 Заплутані стани. Міра заплутаності	51
2.7 GHZ рівність	54
3 Квантові комунікації	57
3.1 Теорема про неклонування та неможливість миттєвої передачі інформації	57
3.2 Квантова телепортація	60
3.3 Квантова криптографія	63

4	Квантові обчислення та квантові комп'ютери	67
4.1	Від класичного біта до квантового	68
4.2	Квантовий процесор. Квантові логічні елементи . .	69
4.3	Квантові алгоритми. Задача Дойча–Джозси	74
4.4	Фізична реалізація одно-кубітових операцій. Напів-прозорий бар'єр	78
4.5	Однокубітовий квантовий комп'ютер	82
5	Вимірювання у квантовій механіці	85
5.1	Вимірювання проєкції спіну на заданий напрям. Експеримент Штерна–Герлаха	85
5.2	Чи можна виміряти квантовий стан	87
5.3	Вимірювання без взаємодії	90
6	Геометрія простору квантових станів	93
6.1	Відстань між квантовими станами	93
6.2	Метрика простору квантових станів	95
6.3	Метрика двовимірного квантового простору	97
7	Еволюція квантової системи	101
7.1	Швидкість еволюції	101
7.2	Квантова брахістохрона	105
7.3	Ефект Зенона ($\text{Z}\eta\text{v}\omega\text{v}$, Zeno)	109
7.4	Адіабатична теорема	112
7.5	Фаза Беррі (Berry)	114
8	Декогеренція	119
8.1	Спін у флуктуюючому магнітному полі	119
8.2	Точна модель декогеренції	122
8.3	Декогеренція кота Шредінгера	131
9	Операторні тотожності та середні значення функцій від бозонних операторів	133
9.1	Тотожності для функцій від бозонних операторів . .	133
9.2	Похідна за параметром	134
9.3	Тотожність Вейля	135
9.4	Середні значення функцій від бозонних операторів .	137
	Список літератури	138
	Предметний покажчик	142

Передмова

Цей посібник написаний на основі курсу лекцій з фундаментальних проблем квантової механіки, який автор читає магістрам фізичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Його можна розглядати як доповнення до традиційних підручників з квантової механіки. Проте, у першому розділі посібника послідовно викладено основи квантової механіки, що дає змогу розуміти матеріал без звертання до інших книг з квантової механіки.

У другому розділі розглянуто квантові спінові системи і на їхньому прикладі продемонстровано парадокс Ейнштейна, Подольського і Розена, виведено нерівності Белла, введено поняття квантових кореляцій, заплутаних станів та міри заплутаності. Третій і четвертий розділ охоплює матеріал, який відносять до квантової інформатики, а саме: квантова телепортація, квантова криптографія, квантові комп'ютери та квантові обчислення. У п'ятому розділі детально проаналізовано вимірювання спіну у квантовій механіці та розглянуто парадокс, пов'язаний з вимірюванням без взаємодії. Поняття відстані між квантовими станами, яке введене у шостому розділі, є цікаве само собою, а також дає змогу поновому подивитися на деякі задачі квантової механіки, зокрема на швидкість еволюції квантової системи, що розглянута у розділі 7. У цьому ж розділі проаналізовано низку інших проблем, пов'язаних з еволюцією, таких як квантова брахістохрона, ефект чи парадокс Зенона, адіабатична теорема та фаза Беррі. Восьмий розділ присвячений декогеренції квантових систем, зокрема розглянуто парадокс з котом Шредінгера і показано, як декогеренція, пов'язана зі взаємодією із зовнішнім оточенням, дає можливість пояснити його. Зазначимо, що параграф 8.2 цього розділу, в яко-

му розглянута точна модель декогеренції, на відміну від попередніх параграфів, навантажений досить складними обчисленнями, які потребують знання різноманітних операторних тотожностей та середніх від бозонних операторів. Власне, дев'ятий розділ забезпечує ці знання.

Автор висловлює подяку своїм колегам, студентам та аспірантам кафедри теоретичної фізики за допомогу та корисні зауваження під час написання цього підручника. Особливо дякую І. Вакарчукові за цікаві дискусії та його пропозицію прочитати курс лекцій з фундаментальних проблем квантової механіки, без яких цей посібник був би неможливим. Дякую Ю. Криницькому та Т. Фітьові за спільні, часом досить бурхливі, обговорення багатьох проблем квантової механіки, всім учасникам щорічних семінарів з квантової інформатики у Верхньому Синьовидному за цікаві доповіді та дискусії, а особливо його постійному учасникові Т. Крохмальському за лекції з квантових обчислень і квантових комп'ютерів. Дякую також О. Кіктєвій та А. Ровенчаку за допомогу та корисні поради в оформленні посібника, Т. Фітьові за виконані рисунки до видання.

Розділ 1

Математичні основи квантової механіки

1.1 Простір станів

Стани у квантовій механіці задають векторами, які утворюють лінійний простір. У позначеннях Дірака [1] ці вектори записують $|\psi\rangle$ і називають кет-векторами. Буква в середині дужок нумерує вектори стану. Зазначимо, що $c|\psi\rangle$, де c — комплексне число, описує той самий квантовий стан.

Лінійність простору відображає принцип суперпозиції у квантовій механіці. Якщо квантова система може перебувати у станах $|\psi_1\rangle$ або $|\psi_2\rangle$, то вона може перебувати у стані, який є лінійною комбінацією цих станів:

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle, \quad (1.1)$$

де c_1 і c_2 — комплексні числа.

Квантова механіка оперує з гільбертовим простором. Це лінійний простір зі скалярним добутком $(|\psi\rangle, |\phi\rangle)$, який двом кет-векторам $|\psi\rangle$ і $|\phi\rangle$ ставить у відповідність комплексне число. Наперед наголосимо, що в цьому посібнику ми розглядатимемо скін-

ченно вимірний гільбертовий простір, коли довільний вектор зображають лінійною комбінацією скінченної кількості базисних векторів.

Постулюємо такі властивості скалярного добутку

$$(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = (|\phi\rangle, |\psi\rangle)^*, \quad (1.2)$$

$$(|\psi\rangle, c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle) = c_1(|\psi\rangle, |\phi_1\rangle) + c_2(|\psi\rangle, |\phi_2\rangle), \quad (1.3)$$

$$(|\phi\rangle, |\phi\rangle) \geq 0, \quad (1.4)$$

а також

$$(|\phi\rangle, |\phi\rangle) = 0 \quad (1.5)$$

тоді і тільки тоді, коли $|\phi\rangle = 0$. Зірка позначає комплексне спряження. Перша властивість приводить до дійсності норми вектора. Друга властивість — це лінійність скалярного добутку за другим вектором. Із цих двох властивостей одержуємо антилінійність за першим кет-вектором

$$(c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle, |\phi\rangle) = c_1^*(|\psi_1\rangle, |\phi\rangle) + c_2^*(|\psi_2\rangle, |\phi\rangle). \quad (1.6)$$

Зафіксуємо у скалярному добутку $(|\psi\rangle, |\phi\rangle)$ перший кет-вектор. Тоді скалярний добуток можна трактувати як функціонал, який кожному $|\phi\rangle$ ставить у відповідність число. Різним векторам $|\psi\rangle$ відповідають різні функціонали. Згідно з Діраком позначимо ці функціонали як $\langle\psi|$, і називатимемо їх бра-векторами. Тоді скалярний добуток — це дія певного функціонала на кет-вектор

$$(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \langle\psi| \cdot |\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle. \quad (1.7)$$

Зазначимо, що функціонал $\langle\psi|$, який приводить до того самого результату — єдиний. Для доведення припустимо, що наявні два функціонали $\langle\psi|$ і $\langle\psi'|$, які дають той самий результат для довільного $|\phi\rangle$

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi'|\phi\rangle \quad (1.8)$$

або

$$(\langle\psi| - \langle\psi'|)|\phi\rangle = 0. \quad (1.9)$$

Оскільки $|\phi\rangle$ — довільний вектор, то можливий випадок, коли $|\phi\rangle = |\psi\rangle - |\psi'\rangle$. Тоді (1.9) означає, що скалярний добуток цього вектора з самим собою рівний нулю. Це своєю чергою, внаслідок (1.5), веде до $|\psi\rangle - |\psi'\rangle = 0$. Тобто, функціонали $\langle\psi|$ і $\langle\psi'|$ збігаються.

Властивість (1.2) у нових позначеннях запишемо

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*. \quad (1.10)$$

Нормою вектора називають $\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = ||\psi||$. Відповідно, квадрат норми вектора запишемо $||\psi||^2 = \langle\psi|\psi\rangle$. Оскільки у квантовій механіці $|\psi\rangle$ та $c|\psi\rangle$ описують той самий квантовий стан, то зручно вибрати норму векторів станів рівною одиниці, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

Функціонали чи бра-вектори так само, як і кет-вектори, утворюють лінійний простір. Тобто якщо $\langle\psi| = c_1\langle\psi_1| + c_2\langle\psi_2|$, то

$$\langle\psi|\phi\rangle = (c_1\langle\psi_1| + c_2\langle\psi_2|)|\phi\rangle = c_1\langle\psi_1|\phi\rangle + c_2\langle\psi_2|\phi\rangle. \quad (1.11)$$

Аналогічно, якщо $|\phi\rangle = c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle$, то

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi|(c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle) = c_1\langle\psi|\phi_1\rangle + c_2\langle\psi|\phi_2\rangle. \quad (1.12)$$

Відображенню кет- у бра-вектор відповідає операція спряження, яку будемо позначати хрестом

$$|\psi\rangle^+ = \langle\psi|. \quad (1.13)$$

Таке відображення єдине внаслідок доведеної вище властивості про єдиність функціонала, який відповідає кет-вектору. Аналогічно кет-вектори можна трактувати як функціонали над бра-векторами. Кожному бра-вектору відповідає кет-вектор і таке відображення єдине. Отже маємо взаємно однозначну відповідність між бра- і кет-векторами. Це означає, що операція спряження відповідає прямому і оберненому відображенню. Тоді

$$\langle\psi|^+ = |\psi\rangle. \quad (1.14)$$

Подвійне виконання операції спряження повертає нас до вихідного вектора

$$(|\psi\rangle^+)^+ = |\psi\rangle, \quad (\langle\psi|^+)^+ = \langle\psi|. \quad (1.15)$$

Встановимо властивості цього відображення, які випливають із властивостей скалярного добутку. Розглянемо скалярний добуток $|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$ і $|\phi\rangle$

$$\begin{aligned} \langle\psi|\phi\rangle &= \langle\phi|\psi\rangle^* = c_1^*\langle\phi|\psi_1\rangle^* + c_2^*\langle\phi|\psi_2\rangle^* = \\ &= c_1^*\langle\psi_1|\phi\rangle + c_2^*\langle\psi_2|\phi\rangle = (c_1^*\langle\psi_1| + c_2^*\langle\psi_2|)|\phi\rangle. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Отже знаходимо

$$(c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle)^+ = c_1^*\langle\psi_1| + c_2^*\langle\psi_2|. \quad (1.17)$$

Бра-вектори утворюють лінійний простір, який називають дуальним простором до простору кет-векторів. Унаслідок взаємно однозначної відповідності між кет- і бра-векторами квантовий стан можна задавати або кет-, або відповідним бра-вектором.

1.2 Оператори

Фізичним величинам у квантовій механіці відповідають лінійні ермітові оператори.

Лінійне відображення кет-вектора $|\psi\rangle$ у кет вектор $|\psi'\rangle$ можна записати як дію деякого лінійного оператора $\hat{A}$

$$|\psi'\rangle = \hat{A}|\psi\rangle. \quad (1.18)$$

Лінійність оператора виражають такою властивістю

$$\hat{A}(c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle) = c_1\hat{A}|\psi_1\rangle + c_2\hat{A}|\psi_2\rangle. \quad (1.19)$$

Для того, щоб увести дію оператора на бра-вектори, розглянемо скалярний добуток

$$\langle\phi|\psi'\rangle = \langle\phi|\cdot\hat{A}|\psi\rangle = \langle\phi|\hat{A}\cdot|\psi\rangle = \langle\phi'|\psi\rangle. \quad (1.20)$$

Функціонал $\langle \phi' |$, який задовольняє цю умову при довільних $|\psi\rangle$ — єдиний (див. доведення після (1.7)).

Рівність (1.20), яка повинна виконуватись для довільних $|\psi\rangle$, означає новий функціонал

$$\langle \phi' | = \langle \phi | \hat{A}. \quad (1.21)$$

Новий функціонал чи бра-вектор $\langle \phi' |$ можна трактувати як результат дії на $\langle \phi |$ оператора $\hat{A}$, який записується за вектором і діє наліво. Надалі крапки в (1.20) можемо опускати, оскільки оператор може діяти як направо так і наліво.

Введемо поняття спряженого оператора. Розглянемо скалярний добуток двох довільних векторів $|\phi\rangle$ і $|\psi\rangle$

$$\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \phi | \psi' \rangle = \langle \psi' | \phi \rangle^* = \langle \psi | \hat{A}^+ | \phi \rangle^*, \quad (1.22)$$

де ми ввели позначення

$$|\psi'\rangle = \hat{A} |\psi\rangle, \quad (1.23)$$

$$\langle \psi' | = \langle \psi | \hat{A}^+. \quad (1.24)$$

Оператор $\hat{A}^+$ називають спряженим оператором до оператора $\hat{A}$. Зазначимо, що

$$(\hat{A} |\psi\rangle)^+ = \langle \psi | \hat{A}^+. \quad (1.25)$$

Отже, для спряженого оператора повинно виконуватись співвідношення

$$\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A}^+ | \phi \rangle^*, \quad (1.26)$$

де $|\phi\rangle$ і $|\psi\rangle$ — довільні вектори із простору станів. Це співвідношення однозначно задає спряжений оператор.

Оператор називають ермітовим, якщо $A^+ = A$. Для довільних станів $|\phi\rangle$ і $|\psi\rangle$ для ермітового оператора має виконуватись рівність

$$\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle^*. \quad (1.27)$$

Запишемо властивості операції спряження, які випливають із означення (1.26):

1. $c^+ = c^*$, де c — комплексне число.
2. $(\hat{A} + \hat{B})^+ = \hat{A}^+ + \hat{B}^+$.
3. $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$.

Перші дві властивості є очевидні. Доведемо третю властивість

$$\begin{aligned}\langle\phi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle &= \langle\phi|\hat{A}|\psi'\rangle = \langle\psi'|\hat{A}^+|\phi\rangle^* = \langle\psi'|\phi'\rangle^* = \\ &= \langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi'|\hat{B}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{B}^+|\phi'\rangle^* = \langle\psi|\hat{B}^+\hat{A}^+|\phi\rangle^*.\end{aligned}\quad (1.28)$$

Тут ми скористалися позначеннями $|\psi'\rangle = \hat{B}|\psi\rangle$ і $|\phi'\rangle = \hat{A}^+|\phi\rangle$.

Із бра- і кет-векторів відповідно до Дірака можна утворити оператор

$$\hat{A} = |\psi'\rangle\langle\psi|, \quad (1.29)$$

який за означенням діє так

$$\hat{A}|\phi\rangle = |\psi'\rangle\langle\psi|\phi\rangle. \quad (1.30)$$

Спряжений оператор у цих позначеннях запишемо

$$\hat{A}^+ = (|\psi'\rangle\langle\psi|)^+ = |\psi\rangle\langle\psi'|. \quad (1.31)$$

Важливу роль у квантовій механіці відіграє оператор проектування

$$P_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|, \quad (1.32)$$

який володіє властивістю: Квадрат оператора проектування збігається з самим собою. Справді

$$P_\phi^2 = |\phi\rangle\langle\phi|\phi\rangle\langle\phi| = |\phi\rangle\langle\phi| = P_\phi, \quad (1.33)$$

де ми використали, що $\langle\phi|\phi\rangle = 1$.

Цей оператор проектує довільний вектор $|\psi\rangle$ на $|\phi\rangle$

$$P_\phi|\psi\rangle = |\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle. \quad (1.34)$$

Можемо ввести також оператор проектування на підпростір ортонормованих векторів станів $|\phi_i\rangle$, $i = 1, 2, \dots, k$

$$P = \sum_{i=1}^k |\phi_i\rangle\langle\phi_i|. \quad (1.35)$$

Доведемо, що $P^2 = P$

$$\begin{aligned} P^2 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\phi_j\rangle\langle\phi_j| = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k |\phi_i\rangle\delta_{ij}\langle\phi_j| = \sum_{i=1}^k |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = P. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Оператори проектування є ермітовими операторами. У цьому легко переконатись, скориставшись (1.31).

На завершення цього параграфа зазначимо, що при множенні дві фізичні класичні величини можна переставляти місцями $AB = BA$, тоді як у квантовому випадку для відповідних операторів така властивість не завжди виконується $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0$. Цю різницю називають комутатором і позначають так

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (1.37)$$

Комутатори володіють такими властивостями:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}], \quad (1.38)$$

$$[\hat{A}, c_1\hat{B} + c_2\hat{C}] = c_1[\hat{A}, \hat{B}] + c_2[\hat{A}, \hat{C}], \quad (1.39)$$

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}, \quad (1.40)$$

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0, \quad (1.41)$$

де c_1 і c_2 — константи. Останню властивість називають тотожністю Якобі. У справедливості цих властивостей переконуємось за допомогою перевірки, скориставшись означенням комутатора.

Звернемо увагу на подібність властивостей комутаторів до властивостей дужок Пуассона. Згодом ми побачимо, що це не є випадково і покажемо, що класична дужка Пуассона тісно пов'язана з комутатором у квантовій механіці (див. параграф 1.9).

1.3 Представлення векторів станів та операторів

У багатьох задачах квантової механіки зручно користуватись тим чи іншим представленням векторів станів та операторів, що діють на них. Абстрактним поняттям лінійної алгебри, які ми ввели у попередніх параграфах, можна поставити у відповідність певні сукупності чисел, що володіють такими самими властивостями, як і вихідні абстрактні поняття. Таку відповідність називатимемо представленням.

З метою визначення представлення задамо повний набір ортонормованих векторів $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle$, $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$. Будь-який кет-вектор можемо розкласти за вибраним базисом

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |e_i\rangle. \quad (1.42)$$

Звідки, використавши ортонормованість базису, знаходимо

$$c_i = \langle e_i|\psi\rangle. \quad (1.43)$$

Сукупність комплексних чисел $c_i = \langle e_i|\psi\rangle$ однозначно задає вектор $|\psi\rangle$ і утворює представлення цього вектора у вибраному базисі $|e_i\rangle$.

Підставляємо c_i в попередню формулу

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \langle e_i|\psi\rangle |e_i\rangle = \sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i|\psi\rangle. \quad (1.44)$$

Оскільки ця рівність повинна виконуватись для довільних $|\psi\rangle$, то маємо

$$\sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i| = 1, \quad (1.45)$$

що і є умовою повноти базису $|e_i\rangle$.

Для бра-вектора маємо

$$\langle\psi| = \sum_{i=1}^n \langle\psi|e_i\rangle\langle e_i|, \quad (1.46)$$

де числа $\langle\psi|e_i\rangle$ представляють бра-вектор.

Скалярний добуток двох векторів $|\psi\rangle$ і $|\psi'\rangle$ запишемо

$$\langle\psi|\psi'\rangle = \sum_{i=1}^n \langle\psi|e_i\rangle\langle e_i|\psi'\rangle = \sum_{i=1}^n \langle e_i|\psi\rangle^* \langle e_i|\psi'\rangle = \sum_{i=1}^n c_i^* c'_i. \quad (1.47)$$

Для отримання цього результату ми використали представлення одиничного оператора (1.45). Як бачимо, це є звичайне означення скалярного добутку двох векторів з компонентами c_i та c'_i .

Розглянемо представлення оператора. Для цього помножимо ліву і праву частини (1.18) скалярно на базисний вектор $|e_i\rangle$ і після перетворення правої частини, з використанням одиничного оператора маємо

$$\langle e_i|\psi'\rangle = \langle e_i|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_{j=1}^n \langle e_i|\hat{A}|e_j\rangle\langle e_j|\psi\rangle, \quad (1.48)$$

або

$$c'_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} c_j, \quad (1.49)$$

де $A_{ij} = \langle e_i|\hat{A}|e_j\rangle$ — матричний елемент оператора. Як бачимо з (1.48) чи (1.49), дія оператора представляється дією матриці

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

на вектор-стовпчик

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

який представляє кет-вектор.

На завершення розглянемо операцію спряження, коли оператори записані у матричному представленні. Виберемо вектори, які входять в означення спряженого оператора (1.26) так $|\phi\rangle = |e_i\rangle$ і $|\psi\rangle = |e_j\rangle$, де $|e_i\rangle$ утворюють повний ортонормований набір векторів в n -вимірному просторі. Тоді згідно з (1.26) знаходимо

$$A_{ij} = \langle e_i | \hat{A} | e_j \rangle = \langle e_j | \hat{A}^+ | e_i \rangle^* = (A_{ji}^+)^*, \quad (1.52)$$

або

$$A_{ji}^+ = A_{ij}^*. \quad (1.53)$$

Отже операція спряження матриці складається з двох операцій, а саме — транспонування і комплексного спряження.

Спряження кет-вектора дає бра-вектор, який у матричному представленні запишемо

$$\left(c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^* \right). \quad (1.54)$$

1.4 Властивості власних значень і власних векторів ермітових операторів

Розглянемо рівняння на власні значення і власні вектори ермітового оператора

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle, \quad (1.55)$$

де a — власне значення, якому відповідає власний вектор $|a\rangle$.

Власні значення і власні вектори ермітового оператора мають такі властивості:

1. Власні значення його є дійсні. Для доведення помножимо ліву і праву частину рівняння (1.55) на $\langle a|$

$$\langle a | \hat{A} | a \rangle = a \langle a | a \rangle. \quad (1.56)$$

Для ненульового вектора скалярний добуток $\langle a | a \rangle > 0$ і є дійсний. Також внаслідок ермітовості оператора $\hat{A}$ (1.27) впливає, що $\langle a | \hat{A} | a \rangle = \langle a | \hat{A} | a \rangle^*$ є дійсне. Тому власне значення a є дійсне.

2. Власні вектори ермітового оператора, які відповідають різним власним значенням, ортогональні. Розглянемо рівняння з двома різними власними значеннями a та a'

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle, \quad (1.57)$$

$$\hat{A}|a'\rangle = a'|a'\rangle. \quad (1.58)$$

Домножимо перше рівняння на $\langle a'|$. Друге рівняння домножимо на $\langle a|$ і комплексно спряжемо його. Отримаємо

$$\langle a'|\hat{A}|a\rangle = a\langle a'|a\rangle \quad (1.59)$$

$$\langle a|\hat{A}|a'\rangle^* = a'\langle a|a'\rangle^* = a'\langle a'|a\rangle. \quad (1.60)$$

Звідки після віднімання двох рівнянь знаходимо

$$\langle a'|\hat{A}|a\rangle - \langle a|\hat{A}|a'\rangle^* = (a - a')\langle a'|a\rangle. \quad (1.61)$$

Унаслідок ермітовості оператора $\hat{A}$ ліва сторона цього рівняння дорівнює нулю. Оскільки $a \neq a'$, то $\langle a'|a\rangle = 0$, тобто власні вектори, які відповідають різним власним значенням, ортогональні.

3. Власні вектори ермітового оператора утворюють повну систему векторів, які можуть служити базисом. Це означає, що будь-який вектор однозначно розкладається за цими власними векторами.

Доведемо цю властивість для скінченновимірному простору, в якому будь-який вектор можна розкласти за n базисними векторами. Спочатку зауважимо, що будь-який оператор володіє принаймні одним власним вектором, позначимо його $|a\rangle$. Доведення цього факту ґрунтується на представленні оператора в n -вимірному просторі матрицею $n \times n$. Тоді рівняння на власні значення оператора зводиться до відповідного рівняння на власні значення матриці

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}c_j = ac_i. \quad (1.62)$$

Ненульові розв'язки існують за умови $\det(A_{ij} - a\delta_{ij}) = 0$. Це рівняння на власні значення a є алгебраїчним рівнянням n -го порядку,

яке має принаймні один розв'язок. Тобто існує принаймні один власний вектор.

Нехай $|b\rangle$ — вектор із ортогонального до $|a\rangle$ підпростору b . Тоді

$$\langle b|\hat{A}|a\rangle = a\langle b|a\rangle = 0. \quad (1.63)$$

Тому

$$\langle a|\hat{A}|b\rangle = \langle b|\hat{A}|a\rangle^* = 0, \quad (1.64)$$

де ми використали ермітовість оператора $\hat{A}$. Звідси робимо висновок, що $\hat{A}|b\rangle = |b'\rangle$ належить до ортогонального до $|a\rangle$ підпростору. Оператор $\hat{A}$ діючи на вектори з підпростору b не виводить їх із цього підпростору. Тоді ми можемо розглянути дію ермітового оператора $\hat{A}$ лише у підпросторі b . У цьому підпросторі оператор $\hat{A}$ також має принаймні один власний вектор. Продовжуючи міркування, доводимо, що ермітовий оператор має n власних ортогональних векторів. Бачимо, що власні вектори ермітового оператора утворюють повну систему базисних векторів.

4. Якщо два ермітові оператори комутують між собою $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, то наявна спільна система власних векторів. Справедливе також зворотнє твердження. Якщо два ермітові оператори володіють спільною системою власних векторів, то вони комутують між собою.

Доведемо спочатку друге твердження. Нехай $|\phi_i\rangle$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — спільна система власних функцій двох операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$. Тоді

$$\hat{A}|\phi_i\rangle = a_i|\phi_i\rangle, \quad (1.65)$$

$$\hat{B}|\phi_i\rangle = b_i|\phi_i\rangle. \quad (1.66)$$

Подіємо на перше рівняння оператором $\hat{B}$, а на друге $\hat{A}$ і віднімемо від другого рівняння перше

$$(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})|\phi_i\rangle = (a_i b_i - b_i a_i)|\phi_i\rangle = 0. \quad (1.67)$$

Оскільки $|\phi_i\rangle$ ($i = 1, 2, \dots, n$) утворює повну систему векторів, то $(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})|\psi\rangle = 0$ для довільного вектора. Це означає, що оператори комутують $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$.

Доведемо перше твердження. Нехай $|\phi_i\rangle$ є власні вектори оператора $\hat{A}$, які задовольняють рівняння (1.65). Подіємо на праву та ліву частину цього рівняння оператором $\hat{B}$ і скористаємось умовою комутації операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$. Тоді

$$\hat{A}\hat{B}|\phi_i\rangle = a_i\hat{B}|\phi_i\rangle. \quad (1.68)$$

Розглянемо спочатку випадок, коли відсутнє виродження власних значень. Тобто всі a_i різні і кожному власному значенню відповідає один власний вектор. Тоді із (1.68) доходимо висновку, що дія оператора $\hat{B}$ на $|\phi_i\rangle$ має давати ту саму функцію з певним множителем b_i

$$\hat{B}|\phi_i\rangle = b_i|\phi_i\rangle. \quad (1.69)$$

Звідси $|\phi_i\rangle$ є також власною функцією оператора $\hat{B}$.

Трохи складніший випадок, коли є виродження власних значень. Нехай $a_1 = a_2 = a$. Тоді власне значення a оператора $\hat{A}$ є двократно вироджене і йому відповідають два власні вектори $|\phi_1\rangle$ і $|\phi_2\rangle$, які нехай є ортогональними. У цьому випадку оператор $\hat{B}$, діючи на $|\phi_1\rangle$ чи $|\phi_2\rangle$, може перевести їх у лінійну комбінацію

$$\hat{B}|\phi_1\rangle = b_{11}|\phi_1\rangle + b_{12}|\phi_2\rangle, \quad (1.70)$$

$$\hat{B}|\phi_2\rangle = b_{21}|\phi_1\rangle + b_{22}|\phi_2\rangle$$

і отже $|\phi_1\rangle$ і $|\phi_2\rangle$ не будуть власними векторами $\hat{B}$. Оскільки $\hat{B}$ є ермітовим оператором, то матриця b_{ij} є також ермітовою. Тому (1.70) завжди можна привести до діагонального вигляду

$$\hat{B}|\phi'_1\rangle = b_1|\phi'_1\rangle \quad (1.71)$$

$$\hat{B}|\phi'_2\rangle = b_2|\phi'_2\rangle,$$

де $|\phi'_1\rangle$ і $|\phi'_2\rangle$ — власні вектори матриці b_{ij} , які є певними лінійними комбінаціями $|\phi_1\rangle$ і $|\phi_2\rangle$ і тому також є власними векторами $\hat{A}$ з власним значенням a . Отже і у випадку виродження ми завжди можемо вибрати власні вектори так, щоб вони були одночасно власними векторами двох комутуючих ермітових операторів.

1.5 Унітарні перетворення

Нехай кожному вектору стану $|\psi\rangle$ відповідає деякий новий вектор $|\psi_u\rangle$

$$|\psi_u\rangle = \hat{U}|\psi\rangle, \quad |\psi\rangle = \hat{U}^{-1}|\psi_u\rangle, \quad (1.72)$$

де $\hat{U}^{-1}$ — обернений до $\hat{U}$ оператор. Тоді дію операторів (1.18) на просторі нових векторів запишемо так

$$\hat{A}_u|\psi_u\rangle = |\psi'_u\rangle, \quad (1.73)$$

де новий оператор

$$\hat{A}_u = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1}. \quad (1.74)$$

Нові оператори задовольняють ті самі алгебраїчні співвідношення, що і старі оператори. Це видно із такого

$$\hat{U}(\hat{A} + \hat{B})\hat{U}^{-1} = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1} + \hat{U}\hat{B}\hat{U}^{-1} = \hat{A}_u + \hat{B}_u, \quad (1.75)$$

$$\hat{U}(\hat{A}\hat{B})\hat{U}^{-1} = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1}\hat{U}\hat{B}\hat{U}^{-1} = \hat{A}_u\hat{B}_u. \quad (1.76)$$

Розглянемо оператори $\hat{U}$, які не міняють норму векторів. А саме, якщо $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, то вимагаємо, щоб нові вектори також були нормовані на одиницю

$$\langle\psi_u|\psi_u\rangle = \langle\psi|\hat{U}^+\hat{U}|\psi\rangle = 1. \quad (1.77)$$

Ця умова повинна виконуватись для довільних векторів $|\psi\rangle$ і вона буде забезпечена, коли

$$\hat{U}^+\hat{U} = 1, \quad (1.78)$$

або інакше спряжений оператор дорівнює оберненому $\hat{U}^+ = \hat{U}^{-1}$. Такі оператори називають унітарними операторами. При унітарному перетворенні нові оператори

$$\hat{A}_u = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^+ \quad (1.79)$$

очевидно є ермітовими операторами, якщо вихідні оператори $\hat{A}$ є ермітові. Очевидно також, що власні значення операторів $\hat{A}$ та $\hat{A}_u$ збігаються, а власні вектори пов'язані співвідношенням (1.72).

1.6 Постулат про вимірювання у квантовій механіці

Без постулату про вимірювання розвинута в попередніх параграфах теорія залишалась би абстрактною математичною теорією лінійних просторів. Цей постулат пов'язує абстрактну теорію зі спостережуваними величинами. Напевно не буде перебільшенням сказати, що цей постулат вдихає життя в абстрактну теорію лінійних просторів.

Розглянемо спочатку вимірювання фізичної величини A , оператор якої $\hat{A}$ має невироджені власні значення. Постулат про вимірювання стверджує таке.

Нехай квантова система перебуває у стані $|\psi\rangle$. Тоді результатом вимірювання фізичної величини A , якій відповідає оператор $\hat{A}$, є одне із його власних значень $a = a_1, a_2, \dots, a_n$. Вектор стану $|\psi\rangle$ при цьому переходить (редукує) у власний стан $|a\rangle$ оператора $\hat{A}$. Імовірність такого процесу визначають перекриттям вихідного $|\psi\rangle$ і кінцевого станів $|a\rangle$, а саме, $W_a = |\langle a|\psi\rangle|^2$. Цей постулат можна економно сформулювати з допомогою операторів проекції

$$P_a = |a\rangle\langle a|. \quad (1.80)$$

Тоді легко переконатися, що імовірність отримати в результаті виміру власне значення a дорівнює

$$W_a = \langle \psi | P_a | \psi \rangle = \langle \psi | a \rangle \langle a | \psi \rangle = |\langle a | \psi \rangle|^2. \quad (1.81)$$

Редукція вектора стану $|\psi\rangle$ внаслідок вимірювання до $|a\rangle$ еквівалентна дії оператора проекції

$$P_a |\psi\rangle = |a\rangle \langle a | \psi \rangle. \quad (1.82)$$

Зазначимо, після дії оператора проектування норма вектора міняється і цікаво, що ймовірність W_a дорівнює квадрату норми вектора $P_a |\psi\rangle$.

Розглянемо складніший випадок, коли оператор володіє виродженими власними значеннями. Оператори проектування і в цьому випадку дають змогу сформулювати постулат про вимірювання. Нехай власному значенню a оператора $\hat{A}$ відповідає кілька

власних ортонормованих векторів $|a, 1\rangle, |a, 2\rangle, \dots, |a, s\rangle$, де s — кратність виродження. Введемо оператор проектування на цей підпростір

$$P_a = \sum_{k=1}^s |a, k\rangle \langle a, k|. \quad (1.83)$$

Тоді, якщо результатом вимірювання фізичної величини A є власне значення a , то вихідний стан $|\psi\rangle$ проєктується на підпростір власних векторів оператора $\hat{A}$ з власним значенням a

$$P_a |\psi\rangle = \sum_{k=1}^s |a, k\rangle \langle a, k | \psi\rangle. \quad (1.84)$$

Імовірність отримати унаслідок вимірювання власне значення a

$$W_a = \langle \psi | P_a | \psi \rangle = \sum_{k=1}^s |\langle a, k | \psi \rangle|^2. \quad (1.85)$$

1.7 Середні значення фізичних величин. Чистий ансамбль станів

Розглянемо середнє значення фізичної величини для квантової системи, яка перебуває у стані $|\psi\rangle$. Як ми бачили у попередньому параграфі вимірювання змінює квантовий стан. Тому для проведення наступних вимірювань над квантовою системою у тому самому стані нам потрібно або повертати після вимірювань систему до попереднього стану, або мати сукупність однакових квантових систем, які є у тому самому стані $|\psi\rangle$. Таку сукупність називають чистим ансамблем.

Використовуючи постулат про вимірювання знаходимо середнє значення фізичної величини

$$\bar{A} = \sum_a W_a a = \sum_a \langle \psi | a \rangle \langle a | \psi \rangle a = \langle \psi | \left(\sum_a |a\rangle a \langle a| \right) | \psi \rangle, \quad (1.86)$$

де в круглих дужках ми отримали не що інше, як оператора фізичної величини A

$$\hat{A} = \sum_a |a\rangle a \langle a|. \quad (1.87)$$

В цьому легко переконатись, подіявши цим оператором на вектори $|a\rangle$. Отже, середнє значення фізичної величини A у квантовому стані $|\psi\rangle$ запишемо

$$\bar{A} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (1.88)$$

Для скорочення позначень ми також писатимемо $\bar{A} = \langle \hat{A} \rangle$ і називатимемо праву сторону рівності середнім значенням оператора. Вимірює на експерименті середнє значення фізичної величини дорівнює середньому значенню відповідного оператора.

Доведемо таке твердження. Якщо середнє значення оператора $\hat{A}$ у довільному стані $|\psi\rangle$ є дійсне, тобто

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle^* = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle, \quad (1.89)$$

то цей оператор є ермітовий. Для цього розглянемо вектор стану, який є лінійною комбінацією $|\psi_1\rangle$ і $|\psi_2\rangle$ і запишемо його так:

$$|\psi\rangle = c(|\psi_1\rangle + z|\psi_2\rangle), \quad (1.90)$$

де c — множник нормування, z — довільне комплексне число. Підставимо (1.90) в (1.89) і отримаємо

$$\begin{aligned} & \langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_1 \rangle^* + z^* \langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle^* + z \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle^* + |z|^2 \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_2 \rangle^* = \\ & = \langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_1 \rangle + z \langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle + z^* \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle + |z|^2 \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_2 \rangle. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Звідки, враховуючи, що $\langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_1 \rangle$ і $\langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_2 \rangle$ є дійсними, маємо

$$z(\langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle^* - \langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle) = z^*(\langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle^* - \langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle). \quad (1.92)$$

Отримана рівність має виконуватись при довільному комплексному числі z . Це можна забезпечити, коли вирази в круглих дужках зліва і справа в (1.92) дорівнюють нулю. Звідси одержуємо умову

$$\langle \psi_2 | \hat{A} | \psi_1 \rangle^* = \langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle, \quad (1.93)$$

яка є не чим іншим, як означенням ермітового оператора.

1.8 Змішаний ансамбль станів. Матриця густини

Створити експериментально чистий ансамбль станів не завжди є простим завданням. Дуже часто ми маємо ансамбль станів, які дещо відрізняються один від одного. Ансамбль неоднакових станів виникає також після вимірів, проведених над чистим ансамблем. У такому ансамблі ми з певною імовірністю можемо натрапити на той чи інший квантовий стан. Такий ансамбль називають змішаним. Нехай змішаний ансамбль складається зі станів $|\psi_i\rangle$, $i = 1, 2, \dots, m$, де m — довільне число, яке не пов'язане з розмірністю простору n . Імовірність знайти в ансамблі відповідний квантовий стан дорівнює ω_i , очевидно, що $\sum_i \omega_i = 1$. Уявімо собі, що ми зібрали в одну множину всі стани $|\psi_1\rangle$, згодом $|\psi_2\rangle$ і наприкінці $|\psi_m\rangle$. Тоді кожен із цих сукупностей утворює чистий ансамбль. Отже, змішаний ансамбль можна розглядати як змішування у відповідних пропорціях чистих ансамблів. Для середнього значення вимірювальної величини маємо

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^m \omega_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle. \quad (1.94)$$

Середнє значення фізичної величини містить тепер два усереднення, а саме, квантово-механічне для відповідного чистого ансамблю, та класичне усереднення за різними чистими ансамблями, що формують змішаний ансамбль. Використовуючи (1.87), знаходимо

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \sum_{i=1}^m \omega_i \sum_a \langle \psi_i | a \rangle a \langle a | \psi_i \rangle = \sum_a a \sum_{i=1}^m \omega_i \langle a | \psi_i \rangle \langle \psi_i | a \rangle = \\ &= \sum_a a \langle a | \hat{\rho} | a \rangle = \sum_a \langle a | \hat{\rho} \hat{A} | a \rangle = \text{Sp } \hat{\rho} \hat{A}, \end{aligned} \quad (1.95)$$

де

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^m \omega_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (1.96)$$

— оператор густини, який називають також матрицею густини, Sp називають слідом (шпуром) відповідного оператора, позначає суму його діагональних матричних елементів.

Розглянемо властивості матриці густини. Наголосимо спочатку, що матриця густини чистого ансамблю має вигляд $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ і володіє властивістю $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$.

З означення (1.96) очевидно, що матриця густини є ермітовим оператором. Покажемо, що слід (шпур) матриці густини дорівнює одиниці. Нехай $|e_k\rangle$ ($k = 1, 2, \dots, n$) довільна система ортонормованих базисних векторів простору. Тоді

$$\begin{aligned} \text{Sp } \hat{\rho} &= \sum_{k=1}^n \sum_i \omega_i \langle e_k | \psi_i \rangle \langle \psi_i | e_k \rangle = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_i \omega_i \langle \psi_i | e_k \rangle \langle e_k | \psi_i \rangle = \sum_i \omega_i = 1, \end{aligned} \quad (1.97)$$

тут ми скористались, що $\sum_{k=1}^n |e_k\rangle\langle e_k| = 1$.

Оскільки матриця густини є ермітовим оператором, то його власні значення λ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) дійсні, а власні вектори утворюють повний набір ортогональних векторів $|\phi_k\rangle$. Матрицю густини можемо записати

$$\hat{\rho} = \sum_{k=1}^n \lambda_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|. \quad (1.98)$$

Тоді

$$\text{Sp } \hat{\rho} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \quad (1.99)$$

і, враховуючи властивість (1.97), знаходимо, що сума власних значень матриці густини дорівнює одиниці

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1. \quad (1.100)$$

Середнє значення матриці густини в будь-якому стані $|\phi\rangle$ завжди невід'ємне

$$\langle \hat{\rho} \rangle = \sum_i \omega_i \langle \phi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \phi \rangle = \sum_i \omega_i |\langle \phi | \psi_i \rangle|^2 \geq 0, \quad (1.101)$$

оскільки імовірності $\omega_i \geq 0$. Середнє матриці густини у власному стані $|\phi_i\rangle$ рівне $\langle\hat{\rho}\rangle = \langle\phi_i|\hat{\rho}|\phi_i\rangle = \lambda_i$. Звідси робимо висновок, що поряд з властивістю (1.100) власні значення матриці густини невід'ємні $\lambda_i \geq 0$.

Будь-яку матрицю густини можна привести до вигляду (1.98). У матричному зображенні це є діагональна матриця, по діагоналі якої є власні значення λ_k . Якщо одне із власних значень матриці густини дорівнює одиниці $\lambda_1 = 1$, тоді всі інші власні значення дорівнюють нулю $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$ і матриця густини у цьому випадку відповідає чистому ансамблю.

На завершення цього параграфа зробимо зауваження щодо термінології. Для скорочення чистий ансамбль станів називають чистим станом, а змішаний ансамбль станів — змішаним станом.

1.9 Квантова дужка Пуассона

В класичній механіці зміну в часі t функції A динамічних змінних (координат та імпульсів) задають рівнянням

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}. \quad (1.102)$$

Центральну роль у цьому рівнянні відіграють класичні дужки Пуассона, які володіють властивостями

$$\{A, B\} = -\{B, A\}, \quad (1.103)$$

$$\{\alpha A + \beta B, C\} = \alpha\{A, C\} + \beta\{B, C\}, \quad (1.104)$$

$$\{AB, C\} = \{A, C\}B + A\{B, C\}, \quad (1.105)$$

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0, \quad (1.106)$$

де α і β — константи. Зазначимо, що застосовуючи до третьої властивості першу, знаходимо також

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}. \quad (1.107)$$

Виникає питання про те, як узагальнити класичне рівняння на квантовий випадок, коли фізичним величинам відповідають оператори. Щоб відповісти на це питання, потрібно знайти квантову

дужку Пуассона, яка була б аналогом класичної дужки Пуассона. Вважатимемо, що квантова дужка Пуассона володіє тими ж властивостями, що і класична з додатковою умовою збереження порядку операторів в лівій і правій частині властивостей. Зокрема, у класичному випадку в правій частині третьої рівності A і B можуть стояти як перед дужками Пуассона, так і після них. Тоді як у квантовому випадку ми вимагаємо збереження порядку операторів. А саме, якщо оператор $\hat{A}$ був перед операторами $\hat{B}$ у добутку $\hat{A}\hat{B}$ у лівій частині рівності, то він має бути перед ним і у правій частині. Виявляється, що перші три властивості однозначно встановлюють структуру квантової дужки Пуассона. Розглянемо квантову дужку Пуассона $\{\hat{A}_1\hat{A}_2, \hat{B}_1\hat{B}_2\}$. Обчислимо її у два способи. З одного боку, маємо

$$\begin{aligned}\{\hat{A}_1\hat{A}_2, \hat{B}_1\hat{B}_2\} &= \{\hat{A}_1, \hat{B}_1\hat{B}_2\}\hat{A}_2 + \hat{A}_1\{\hat{A}_2, \hat{B}_1\hat{B}_2\} = \\ &= \{\hat{A}_1, \hat{B}_1\}\hat{B}_2\hat{A}_2 + \hat{B}_1\{\hat{A}_1, \hat{B}_2\}\hat{A}_2 + \\ &+ \hat{A}_1\{\hat{A}_2, \hat{B}_1\}\hat{B}_2 + \hat{A}_1\hat{B}_1\{\hat{A}_2, \hat{B}_2\}.\end{aligned}\quad (1.108)$$

Обчисливши в інший спосіб, одержуємо

$$\begin{aligned}\{\hat{A}_1\hat{A}_2, \hat{B}_1\hat{B}_2\} &= \{\hat{A}_1\hat{A}_2, \hat{B}_1\}\hat{B}_2 + \hat{B}_1\{\hat{A}_1\hat{A}_2, \hat{B}_2\} = \\ &= \{\hat{A}_1, \hat{B}_1\}\hat{A}_2\hat{B}_2 + \hat{A}_1\{\hat{A}_2, \hat{B}_1\}\hat{B}_2 + \\ &+ \hat{B}_1\{\hat{A}_1, \hat{B}_2\}\hat{A}_2 + \hat{B}_1\hat{A}_1\{\hat{A}_2, \hat{B}_2\}.\end{aligned}\quad (1.109)$$

Очевидно, що ці два результати мають збігатися. Прирівнюючи їх, знаходимо

$$\{\hat{A}_1, \hat{B}_1\}(\hat{A}_2\hat{B}_2 - \hat{B}_2\hat{A}_2) = (\hat{A}_1\hat{B}_1 - \hat{B}_1\hat{A}_1)\{\hat{A}_2, \hat{B}_2\}.\quad (1.110)$$

Оскільки оператори $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$ і $\hat{A}_2$, $\hat{B}_2$ є незалежними, доходимо висновку, що квантова дужка Пуассона $\{\hat{A}_1, \hat{B}_1\}$ пропорційна комутатору $\hat{A}_1\hat{B}_1 - \hat{B}_1\hat{A}_1$, а $\{\hat{A}_2, \hat{B}_2\}$ пропорційна $\hat{A}_2\hat{B}_2 - \hat{B}_2\hat{A}_2$ з тим самим коефіцієнтом пропорційності. Отже, в загальному маємо

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \frac{1}{i\hbar}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}].\quad (1.111)$$

Коефіцієнт пропорційності вибрано чисто уявним, щоби забезпечити ермітовість квантової дужки Пуассона. Звичайно стала $\hbar$ не

може бути знайдена теоретично. Однак для того, щоби теорія збігалася з експериментом мусимо ототожнити $\hbar$ зі сталою Планка.

Зазначимо, що тотожність Якобі не використовувалась при розгляді квантової дужки Пуассона. Проте, оскільки квантова дужка Пуассона пропорційна комутатору, то тотожність Якобі автоматично задовольняється. У цьому легко переконатися прямою перевіркою.

1.10 Динаміка квантової системи

Після встановленої у попередньому параграфі квантової дужки Пуассона ми можемо легко узагальнити рівняння еволюції (1.102) на квантовий випадок, замінивши фізичні величини відповідними операторами, а класичну дужку Пуассона квантовою. Отже, одержуємо рівняння еволюції для операторів фізичних величин

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = i\hbar \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + [\hat{A}, \hat{H}]. \quad (1.112)$$

Форму динаміки, в якій оператори фізичних величин змінюються в часі і задовольняють рівняння (1.112), називають гайзенбергівською формою динаміки.

Перший доданок у правій частині рівняння описує зміну в часі, пов'язану з явною залежністю оператора від часу, а другий — з еволюцією квантової системи. Якщо оператор явно не залежить від часу, то маємо рівняння

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}]. \quad (1.113)$$

Наприклад, оператор $\hat{A} = f_1(t)\hat{A}_1 + f_2(t)\hat{A}_2$ містить явну залежність від часу через наперед задані функції $f_1(t)$ і $f_2(t)$, а оператори $\hat{A}_1$ і $\hat{A}_2$ змінюються в часі внаслідок еволюції квантової системи. Часткова похідна в цьому прикладі стосується саме до функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$. Оператори $\hat{A}_1$ і $\hat{A}_2$ задовольняють рівняння (1.113) без часткової похідної у правій частині рівняння, тобто $\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial t} = 0$ і $\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial t} = 0$.

Довільний оператор $\hat{A} = A(t, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots)$ з явною залежністю від часу можемо записати як певну функцію від часу t і операторів $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots$, які явно не залежать від часу, $\frac{\partial \hat{A}_i}{\partial t} = 0$. Кожен з операторів $\hat{A}_i$ задовольняє рівняння (1.113). Розглянемо гамільтоніан $\hat{H}$, який не залежить від часу. За допомогою прямої підстановки переконуємось, що розв'язком цього рівняння є

$$\hat{A}_i(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{A}_i^0 e^{-i\hat{H}t/\hbar}, \quad (1.114)$$

де $\hat{A}_i^0$ — оператори у початковий момент часу $t = 0$, $i = 1, 2, \dots$. Тоді часову еволюцію оператора $\hat{A}$ з явною залежністю від часу запишемо

$$\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{A}^0 e^{-i\hat{H}t/\hbar} = A(t, \hat{A}_1(t), \hat{A}_2(t), \dots), \quad (1.115)$$

де $\hat{A}^0 = A(t, \hat{A}_1^0, \hat{A}_2^0, \dots)$.

Перейдемо до форми динаміки Шредінгера. Пригадаємо, що оператори визначаються через їхню дію на вектори гільбертового простору

$$\hat{A}(t)|\psi\rangle = |\psi'\rangle, \quad (1.116)$$

де $|\psi\rangle, |\psi'\rangle$ — незалежні від часу вектори. Після підстановки (1.115) в (1.116) знаходимо рівняння

$$\hat{A}^0 e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi'\rangle, \quad (1.117)$$

яке можемо переписати

$$\hat{A}^0 |\psi_t\rangle = |\psi'_t\rangle. \quad (1.118)$$

Тут ми ввели часово-залежні вектори $|\psi_t\rangle$ і $|\psi'_t\rangle$, які еволюціонують так

$$|\psi_t\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi\rangle. \quad (1.119)$$

Продиференціювавши за часом ліву і праву частину рівності приходимо до часового рівняння Шредінгера

$$i\hbar \frac{\partial |\psi_t\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi_t\rangle. \quad (1.120)$$

Це рівняння ми отримали для незалежного від часу гамільтоніана. Проте і у випадку залежного від часу гамільтоніана $\hat{H}$ рівняння (1.120) є справедливим. Щоб показати це, достатньо розглянути еволюцію протягом нескінченно малого проміжку часу t . Тоді всі попередні формули залишаються справедливими за умови, що вони містять гамільтоніан у початковий момент еволюції. Врахувавши зміни гамільтоніана під час еволюції, одержмо другий порядок малості за t , який для нескінченно малих часів t можемо не брати до уваги. Тому маємо (1.120) і у випадку залежного від часу гамільтоніана.

1.11 Динаміка квантової системи.

Змішаний ансамбль

У попередньому параграфі ми записали рівняння Шредінгера, яке описує еволюцію вектора стану квантової системи. Чистий ансамбль складається з квантових систем, що перебувають у тому самому стані. Нехай додатково кожна квантова система є в тих самих умовах, тобто описується тим самим гамільтоніаном. Тоді під час еволюції вектори станів всіх систем змінюються однаково згідно з рівнянням Шредінгера. Тому, якщо ансамбль був чистий у вихідний момент часу, то він залишиться чистим і у наступні моменти часу. Звичайно, що це справедливо, якщо ансамбль ізолюваний від випадкового впливу зовнішнього оточення.

Розглянемо еволюцію в часі змішаного ансамблю, який описують матрицею густини (1.96)

$$\hat{\rho} = \sum_i^n \omega_i |\psi_{i,t}\rangle \langle \psi_{i,t}|, \quad (1.121)$$

де $|\psi_{i,t}\rangle$ та $\langle \psi_{i,t}|$ еволюціонують згідно з рівнянням Шредінгера

$$i\hbar \frac{\partial |\psi_{i,t}\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi_{i,t}\rangle, \quad (1.122)$$

$$i\hbar \frac{\partial \langle \psi_{i,t}|}{\partial t} = -\langle \psi_{i,t}| \hat{H}. \quad (1.123)$$

Взявши похідну за часом від лівої і правої частини рівняння

(1.121) і враховуючи, що ω_i не залежать від часу, знаходимо

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (1.124)$$

Це рівняння описує еволюцію квантового ансамблю мовою матриці густини. Воно підходить для опису динаміки в часі як змішаного, так і чистого ансамблю.

1.12 Співвідношення невизначеностей Гайзенберга

Розглянемо дві фізичні величини A і B , оператори яких не комутують

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}, \quad (1.125)$$

де внаслідок ермітовості $\hat{A}$ і $\hat{B}$ оператор $\hat{C}$ є також ермітовим.

Середньоквадратичні флуктуації A і B задовольняють співвідношення, яке називають співвідношенням невизначеностей Гайзенберга. Для отримання цього співвідношення розглянемо очевидну нерівність $\langle \psi' | \psi' \rangle \geq 0$. Виберемо $|\psi'\rangle = (\Delta\hat{A} + \gamma\Delta\hat{B})|\psi\rangle$, де $\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle$ і $\Delta\hat{B} = \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle$ відхилення операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$ від своїх середніх значень $\langle\hat{A}\rangle$ і $\langle\hat{B}\rangle$, відповідно. В явному вигляді маємо

$$\langle \psi | (\Delta\hat{A} + \gamma^*\Delta\hat{B})(\Delta\hat{A} + \gamma\Delta\hat{B}) | \psi \rangle \geq 0, \quad (1.126)$$

або

$$\begin{aligned} & \langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle + \gamma^*\gamma \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle + \gamma \langle \Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \rangle + \gamma^* \langle \Delta\hat{B}\Delta\hat{A} \rangle = \\ & = I(\gamma, \gamma^*) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.127)$$

Нерівність повинна виконуватись для довільних γ . Розглянемо параметри γ і γ^* , за яких $I(\gamma, \gamma^*)$ набуває мінімального значення

$$\frac{\partial I}{\partial \gamma} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \gamma^*} = 0, \quad (1.128)$$

де γ, γ^* трактуємо як незалежні змінні.

Звідки знаходимо

$$\gamma = -\frac{\langle \Delta \hat{B} \Delta \hat{A} \rangle}{\langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle}, \quad \gamma^* = -\frac{\langle \Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \rangle}{\langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle} = -\frac{\langle \Delta \hat{B} \Delta \hat{A} \rangle^*}{\langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle}, \quad (1.129)$$

де у другому виразі ми скористались, що $\langle \Delta \hat{B} \Delta \hat{A} \rangle = \langle (\Delta \hat{B} \Delta \hat{A})^+ \rangle^* = \langle \Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \rangle^*$, оскільки $\Delta \hat{A}$ і $\Delta \hat{B}$ ермітові оператори. Бачимо, що параметри γ і γ^* справді є спряженими один до другого, як і має бути. Підставляючи ці значення в (1.127), отримуємо співвідношення невизначеностей

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle \geq |\langle \Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \rangle|^2. \quad (1.130)$$

Перепишемо праву сторону нерівності

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} = \frac{1}{2} [\Delta \hat{A}, \Delta \hat{B}] + \frac{1}{2} [\Delta \hat{A}, \Delta \hat{B}]_+ = \frac{1}{2} i \hat{C} + \frac{1}{2} [\Delta \hat{A}, \Delta \hat{B}]_+, \quad (1.131)$$

де $[\Delta \hat{A}, \Delta \hat{B}]_+ = \Delta \hat{A} \Delta \hat{B} + \Delta \hat{B} \Delta \hat{A}$ — антикомутатор. Оскільки $[\Delta \hat{A}, \Delta \hat{B}]_+$ і $\hat{C}$ ермітові оператори, то їхні середні — дійсні величини. Тоді співвідношення невизначеностей (1.130) запишемо

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left(\langle \hat{C} \rangle^2 + \langle [\Delta \hat{A}, \Delta \hat{B}]_+ \rangle^2 \right). \quad (1.132)$$

Із цієї нерівності одержуємо слабшу нерівність

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle \hat{C} \rangle^2, \quad (1.133)$$

яка в правій стороні нерівності містить тільки комутатор двох операторів.

Отримані нерівності є справедливі і для змішаного ансамблю. Щоб показати це доведемо нерівність (1.126) для змішаного ансамблю. Для цього розглянемо

$$\langle \hat{K}^+ \hat{K} \rangle = \text{Sp } \hat{\rho} \hat{K}^+ \hat{K}, \quad (1.134)$$

де для спрощення ми ввели позначення $\hat{K} = \Delta \hat{A} + \gamma \Delta \hat{B}$. Виберемо матрицю густини у діагональній формі (1.98). Тоді

$$\begin{aligned} \langle \hat{K}^+ \hat{K} \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \phi_i | \hat{\rho} \hat{K}^+ \hat{K} | \phi_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \phi_i | \hat{K}^+ \hat{K} | \phi_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \phi'_i | \phi'_i \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (1.135)$$

де $|\phi'_i\rangle = \hat{K}|\phi\rangle$ і враховано, що $\langle\phi'_i|\phi'_i\rangle \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$.

Усі подальші міркування, які ми використовували під час виведення співвідношення невизначеностей Гайзенберга для чистого ансамблю є справедливими і для змішаного з тою відмінністю, що для змішаного ансамблю значок середнього означає $\langle(\dots)\rangle = \text{Sp } \hat{\rho}(\dots)$. Як наслідок (1.132) та (1.133) є справедливими і для змішаного ансамблю.

На завершення зазначимо, що співвідношення невизначеностей Гайзенберга можна узагальнити на випадок довільної кількості операторів $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_m$, скориставшись нерівністю

$$\left\langle \left(\Delta \hat{A}_0 + \sum_{i=1}^m \gamma_i^* \Delta \hat{A}_i \right) \left(\Delta \hat{A}_0 + \sum_{i=1}^m \gamma_i \Delta \hat{A}_i \right) \right\rangle \geq 0. \quad (1.136)$$

1.13 Вимірювання в чистому та змішаному ансамблях

Розглянемо вимірювання певної фізичної величини A , яке проводять над однаковими квантовими системами, що утворюють чистий ансамбль станів. Тобто, кожна квантова система перебуває у тому самому стані $|\psi\rangle$. Проводячи вимірювання над окремою квантовою системою ми з імовірністю $|\langle a|\psi\rangle|^2$ отримаємо власне значення a із сукупності $a_1, a_2, \dots, a_n$ власних значень оператора $\hat{A}$, а стан квантової системи зредукується до власного стану цього оператора $|a\rangle$. Провівши вимірювання над всіма квантовими системами, ми отримаємо змішаний ансамбль, в якому з імовірністю $|\langle a|\psi\rangle|^2$ знайдемо квантову систему у стані $|a\rangle$. Цьому ансамблю відповідає матриця густини

$$\hat{\rho}' = \sum_a |\langle a|\psi\rangle|^2 |a\rangle\langle a| = \sum_a |a\rangle\langle a|\psi\rangle\langle\psi|a\rangle\langle a|. \quad (1.137)$$

Цікаво порівняти цю матрицю густини з вихідною матрицею густини чистого ансамблю, яку запишемо так:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_a \sum_{a'} |a\rangle\langle a|\psi\rangle\langle\psi|a'\rangle\langle a'|, \quad (1.138)$$

де

$$|\psi\rangle = \sum_a |a\rangle \langle a|\psi\rangle \quad (1.139)$$

є суперпозицією векторів $|a\rangle$.

Як бачимо, матриця густини (1.137) на відміну від (1.138) містить лише діагональні елементи. Вимірювання фізичної величини A можна трактувати як перехід матриці густини від ρ до ρ' з втратою позадіагональних матричних елементів. Такий перехід називають декогеренцією і полягає він у перетворенні суперпозиції (1.139) станів $|a\rangle$ у суміш цих же станів.

Розглянемо вимірювання у змішаному ансамблі, який описують матрицею густини

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^m \omega_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (1.140)$$

Нагадаємо, що в цьому ансамблі ймовірність знайти систему у стані $|\psi_i\rangle$ дорівнює ω_i . Якщо квантова система перебуває у стані $|\psi_i\rangle$, то при вимірюванні фізичної величини A ми з ймовірністю $|\langle a|\psi_i\rangle|^2$ отримаємо одне із власних значень оператора $\hat{A}$, а стан $|\psi_i\rangle$ перейде в $|a\rangle$. Тоді, після проведення вимірювань над всім ансамблем, ймовірність отримати власне значення a дорівнює

$$W_a = \sum_{i=1}^m \omega_i |\langle a|\psi_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^m \omega_i \langle a|\psi_i\rangle \langle \psi_i|a\rangle = \langle a|\hat{\rho}|a\rangle. \quad (1.141)$$

Отже, в результаті вимірювання ми отримуємо новий змішаний ансамбль з матрицею густини

$$\hat{\rho}' = \sum_a W_a |a\rangle \langle a| = \sum_a |a\rangle \langle a|\hat{\rho}|a\rangle \langle a|. \quad (1.142)$$

Як бачимо і у випадку, коли початковий стан був змішаний, вимірювання зводиться до знищення недіагональних компонент матриці густини, записаної в базисі $|a\rangle$.

Зазначимо, що у випадку, коли вимірювання проводять над чистим ансамблем з матрицею густини $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$ отриманий вираз для нової матриці густини (1.142) зводиться до (1.137).

Розділ 2

Двостанові квантові системи

У цьому розділі ми розглянемо найпростішу квантову систему, простір станів якої є двовимірним. Будь-який квантовий стан цієї системи може бути розкладений за двома базисними векторами, які позначатимемо $|0\rangle$ і $|1\rangle$,

$$|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle. \quad (2.1)$$

В теорії квантової інформації таку квантову систему називають квантовим бітом (qubit) чи кубітом.

Варто порівняти квантовий біт із класичним. Класичний біт реалізовується класичною системою, яка може перебувати у двох стабільних станах. Одному зі станів приписують 0, а іншому — 1. Наголосимо, що ідеальний класичний біт не допускає ніяких проміжних станів. Натомість кубіт внаслідок принципу суперпозиції може бути у стані, що є лінійною комбінацією базисних станів $|0\rangle$ і $|1\rangle$. Тому простір станів кубіта є незрівнянно більший від простору станів класичного біта, який має два стани.

У наступних параграфах ми побачимо, що ця найпростіша квантова система виявляє цікаві властивості, які не властиві відповідній класичній системі.

2.1 Квантові стани спіну $s = 1/2$

Фізичною реалізацією двостанових систем є частинки зі спіном $1/2$. Спінкові оператори задовольняють алгебру

$$[s^\alpha, s^\beta] = i\hbar\epsilon^{\alpha\beta\gamma}s^\gamma, \quad (2.2)$$

де $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ — повністю антисиметричний тензор. Для $s = 1/2$ також маємо

$$(s^\alpha)^2 = \frac{\hbar^2}{4}, \quad s^2 = \frac{3}{4}\hbar^2. \quad (2.3)$$

Оператори спіну в матричному представленні мають вигляд

$$s^\alpha = \frac{\hbar}{2}\sigma^\alpha, \quad \alpha = x, y, z, \quad (2.4)$$

де матриці Паулі

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

побудовані на базисі власних векторів σ_z . У матричному представленні запишемо їх як

$$|0\rangle \equiv |\uparrow\rangle \equiv | +1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle \equiv |\downarrow\rangle \equiv | -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Тут ми написали також можливі позначення базисних векторів, які використовуються в літературі.

Нагадаємо властивості матриць Паулі

$$[\sigma^\alpha, \sigma^\beta]_+ = 2\delta_{\alpha\beta}\hat{1}, \quad (2.7)$$

$$\sigma^x\sigma^y = i\sigma^z, \quad \sigma^y\sigma^z = i\sigma^x, \quad \sigma^z\sigma^x = i\sigma^y, \quad (2.8)$$

а також їхню дію на базисні вектори

$$\sigma^x|\sigma\rangle = \sigma|-\sigma\rangle, \quad \sigma^y|\sigma\rangle = -i\sigma|-\sigma\rangle, \quad \sigma^z|\sigma\rangle = \sigma|\sigma\rangle, \quad (2.9)$$

де $\sigma = \pm 1$.

Розглянемо таку задачу. Нехай спін є в довільному стані

$$|\psi\rangle = c_{\uparrow}|\uparrow\rangle + c_{\downarrow}|\downarrow\rangle, \quad (2.10)$$

де з умови нормування $|c_{\uparrow}|^2 + |c_{\downarrow}|^2 = 1$. Потрібно знайти результат вимірювання проекції спіну на заданий напрям $\mathbf{a}$. Цій фізичній величині відповідає оператор проекції спіну на заданий напрям $(\mathbf{s} \cdot \mathbf{a}) = \frac{\hbar}{2}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})$.

Знайдемо власні значення і власні вектори оператора $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})$, де $\mathbf{a}$ — одиничний вектор, компоненти якого у сферичній системі координат запишемо

$$a_x = \sin \theta \cos \phi, \quad a_y = \sin \theta \sin \phi, \quad a_z = \cos \theta. \quad (2.11)$$

Тоді, використовуючи явний вигляд матриць Паулі, маємо

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Рівняння на власні вектори цього оператора

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})|\psi_{\mathbf{a}}\rangle = \lambda|\psi_{\mathbf{a}}\rangle \quad (2.13)$$

має розв'язки для $\lambda = 1$

$$|\psi_{\mathbf{a}}^{+}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix} = \cos(\theta/2)|\uparrow\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\phi}|\downarrow\rangle, \quad (2.14)$$

і для $\lambda = -1$

$$|\psi_{\mathbf{a}}^{-}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2)e^{-i\phi} \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} = -\sin(\theta/2)e^{-i\phi}|\uparrow\rangle + \cos(\theta/2)|\downarrow\rangle. \quad (2.15)$$

Зазначимо, що перехід від базисних векторів $|\uparrow\rangle$ і $|\downarrow\rangle$ до $|\psi_{\mathbf{a}}^{+}\rangle$ і $|\psi_{\mathbf{a}}^{-}\rangle$ є унітарним перетворенням

$$|\psi_{\mathbf{a}}^{+}\rangle = \hat{U}|\uparrow\rangle, \quad |\psi_{\mathbf{a}}^{-}\rangle = \hat{U}|\downarrow\rangle, \quad (2.16)$$

де в матричному представленні

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Імовірність отримати внаслідок вимірювання проекції спіну на напрям $\mathbf{a}$ додатне значення $\hbar/2$ чи від'ємне $-\hbar/2$ дорівнює $W_{\mathbf{a}}^{\pm} = |\langle \psi_{\mathbf{a}}^{\pm} | \psi \rangle|^2$, де “+” відповідає додатному значенню спіну, “-” — від'ємному. Наприклад, коли $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle$, знаходимо $W_{\mathbf{a}}^+ = \cos^2(\theta/2)$ і $W_{\mathbf{a}}^- = \sin^2(\theta/2)$.

На завершення цього параграфу зазначимо, що довільний вектор стану можна трактувати як власний вектор оператора проекції спіну на певний напрям $\mathbf{a}$. Це зрозуміло із загального вигляду (2.14) чи (2.15). Справді, завжди є такі кути, які з точністю до постійного фазового множника у векторі стану

$$\cos(\theta/2) = c_{\uparrow}, \quad \sin(\theta/2)e^{i\phi} = c_{\downarrow} \quad (2.18)$$

і вектор $|\psi\rangle = |\psi_{\mathbf{a}}^+\rangle$, тобто є власним вектором оператора проекції спіну на напрям $\mathbf{a}$ з додатним власним значенням. Тобто одиничний вектор $\mathbf{a}$ повністю задає вектор стану спіну $s = 1/2$.

2.2 Спінова матриця густини

Розглянемо спочатку матрицю густини чистого ансамблю, кожна квантова система якого є у стані (2.10)

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |\psi\rangle\langle\psi| = |c_{\uparrow}|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + c_{\uparrow}c_{\downarrow}^* |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \\ &+ c_{\downarrow}c_{\uparrow}^* |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |c_{\downarrow}|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow|. \end{aligned} \quad (2.19)$$

У матричному вигляді маємо

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} |c_{\uparrow}|^2 & c_{\uparrow}c_{\downarrow}^* \\ c_{\downarrow}c_{\uparrow}^* & |c_{\downarrow}|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & 1 - a_z \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

де матрицю густини можна переписати з допомогою трьох дійсних параметрів a_x , a_y , a_z , які утворюють одиничний вектор. Тобто незалежними є тільки два параметри. У цьому легко переконатись, зауваживши, що

$$(1 - a_z^2) = 4|c_{\uparrow}|^2|c_{\downarrow}|^2, \quad a_x^2 + a_y^2 = 4|c_{\uparrow}|^2|c_{\downarrow}|^2. \quad (2.21)$$

Звідси власне знаходимо $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$.

Матрицю густини (2.20) перепишемо з допомогою матриць Паулі

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}), \quad (2.22)$$

де одиничний класичний вектор $\mathbf{a}$ називають вектором Блоха. Кінець цього вектора впирається в сферу одиничного радіуса, яка називають сферою Блоха.

Цікаво, що вектор стану $|\psi\rangle$ є власним вектором оператора проекції спіну на напрям $\mathbf{a}$, наприклад, з додатним власним значенням. Пригадаємо, що довільний вектор стану можна трактувати власним вектором оператора проекції спіну на певний напрям $\mathbf{a}$ (див. (2.18)). Тоді прямою підстановкою переконуємось, що компоненти вектора (2.11) задовольняють (2.20), де $c_{\uparrow}$, $c_{\downarrow}$ задані через (2.18).

Розглянемо матрицю густини змішаного ансамблю, яку для двовимірного простору запишемо як суму з певними вагами двох матриць густин чистих ансамблів

$$\hat{\rho} = \omega_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \omega_2|\psi_2\rangle\langle\psi_2| = \omega_1\hat{\rho}_1 + \omega_2\hat{\rho}_2. \quad (2.23)$$

Для матриць густин $\hat{\rho}_1$ і $\hat{\rho}_2$ чистих ансамблів скористаємося матричним представленням (2.22) з одиничними векторами $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$, відповідно. Тоді

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(1 + (\omega_1\mathbf{a}_1 + \omega_2\mathbf{a}_2)\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}), \quad (2.24)$$

де ми ввели позначення

$$\mathbf{a} = \omega_1\mathbf{a}_1 + \omega_2\mathbf{a}_2. \quad (2.25)$$

Тепер для квадрата вектора $\mathbf{a}$ маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^2 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = \\ &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \phi \leq (\omega_1 + \omega_2)^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Оскільки $\omega_1 + \omega_2 = 1$, знаходимо, що для змішаного ансамблю $|\mathbf{a}| \leq 1$. Вектор $\mathbf{a}$ задає точки у тривимірному просторі. Змішаним

ансамблям відповідають точки всередині кулі одиничного радіуса. А точкам на поверхні кулі відповідають чисті ансамблі.

Матриця густини, якій відповідає центр кулі $\mathbf{a} = 0$, володіє цікавою властивістю, яку можна назвати сферичною симетрією

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\hat{1} = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) = \frac{1}{2}(|\psi_{\mathbf{b}}^+\rangle\langle\psi_{\mathbf{b}}^+| + |\psi_{\mathbf{b}}^-\rangle\langle\psi_{\mathbf{b}}^-|). \quad (2.27)$$

Справді ця матриця густини пропорційна до одиничного оператора і не змінюється після унітарних перетворень. Прямою перевіркою можемо переконавшись, що вона має такий самий вигляд мовою власних векторів (2.14) і (2.15) оператора проекції спіну на довільний напрям, котрий тепер ми позначили одиничним вектором $\mathbf{b}$.

2.3 Квантові стани N спінів

Розглянемо спочатку квантову систему, що складається з двох спінів $s = 1/2$. Спінові оператори кожної із частинок задовольняють комутаційні співвідношення (2.2), а оператори спінів різних частинок комутують між собою $[s_1^\alpha, s_2^\beta] = 0$. Вектори спінових станів першої частинки позначатимемо $|\cdots\rangle_1$, а другої, відповідно, $|\cdots\rangle_2$, де індекси 1, 2 вказують на номер частинки. Простір станів двох спінів є прямим добутком просторів станів першого і другого спіну

$$|\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2 \equiv |\psi\rangle_1 |\phi\rangle_2 \equiv |\psi, \phi\rangle. \quad (2.28)$$

Ми часто будемо опускати індекси, які нумерують частинки, пам'ятаючи, що перший стан у добутку належить першій частинці, а другий — другій: $|\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2 \equiv |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$. Зазначимо, що оператори спіну першої частинки змінюють перший аргумент стану, а оператори спіну другої частинки — другий аргумент. Вимірність простору станів двох спінів дорівнює 2^2 . Базисні вектори можна вибрати так

$$|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2, \quad (2.29)$$

$$|\uparrow\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2, \quad (2.30)$$

$$|\uparrow\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2, \quad (2.31)$$

$$|\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2. \quad (2.32)$$

Будь-який стан двох спінів можна розкласти за цим базисом

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\uparrow\downarrow\rangle + c|\downarrow\uparrow\rangle + d|\downarrow\downarrow\rangle, \quad (2.33)$$

де з умови нормування $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$. Цей розклад можемо записати у вигляді, який є зручний для узагальнення на довільну кількість двостанових квантових систем чи спінів

$$|\psi\rangle = \sum_{x_1, x_2} c_{x_1 x_2} |x_1, x_2\rangle, \quad (2.34)$$

де x_1, x_2 набувають значення 0, 1 чи $\uparrow, \downarrow$, коли двостанові системи реалізовані спінами.

У випадку N спінів за базисні вектори можемо вибрати

$$|x_1, x_2, \dots, x_N\rangle = |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes \dots \otimes |x_N\rangle. \quad (2.35)$$

Тоді довільний вектор стану запишемо

$$|\psi\rangle = \sum_{x_1, x_2, \dots, x_N} c_{x_1, x_2, \dots, x_N} |x_1, x_2, \dots, x_N\rangle, \quad (2.36)$$

Підкреслимо, що вимірність простору станів N спінів дорівнює 2^N .

Важливим для подальшого розгляду є розклад Шмідта для двоспінових квантових станів. Довільний квантовий стан двох спінів можна записати у вигляді

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1,2} c_i |\alpha_i\rangle |\beta_i\rangle, \quad (2.37)$$

де одночастинкові вектори $|\alpha_i\rangle$ стосуються до першого спіну

$$|\alpha_1\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + \alpha|\downarrow\rangle}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}, \quad |\alpha_2\rangle = \frac{\alpha^*|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}, \quad (2.38)$$

а $|\beta_i\rangle$ — до другого

$$|\beta_1\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle}{\sqrt{1+|\beta|^2}}, \quad |\beta_2\rangle = \frac{\beta^*|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{1+|\beta|^2}}. \quad (2.39)$$

Звернемо увагу на те, що вектори, які стосується до того самого спіну, є ортогональними

$$\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \langle\beta_i|\beta_j\rangle = \delta_{ij}. \quad (2.40)$$

Тоді умову нормування вектора (2.37) запишемо

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1. \quad (2.41)$$

Про те, що розклад Шмідта є можливим, засвідчує простий аналіз кількості вільних параметрів, якими визначається двоспіновий стан. Так загальне представлення (2.33) з врахуванням умови нормування має 7 дійсних параметрів. Розклад Шмідта (2.37) задають комплексними величинами c_1, c_2, α, β з умовою нормування (2.41). Тому розклад Шмідта також має 7 дійсних параметрів. Підставивши $|\alpha_i\rangle$ і $|\beta_i\rangle$ в (2.37), знайдемо зв'язок між c_1, c_2, α, β та a, b, c, d

$$\begin{aligned} a &= \frac{c_1 + c_2\alpha^*\beta^*}{\sqrt{(1+|\alpha|^2)(1+|\beta|^2)}}, & b &= \frac{c_1\beta - c_2\alpha^*}{\sqrt{(1+|\alpha|^2)(1+|\beta|^2)}}, \\ c &= \frac{c_1\alpha - c_2\beta^*}{\sqrt{(1+|\alpha|^2)(1+|\beta|^2)}}, & d &= \frac{c_1\alpha\beta + c_2}{\sqrt{(1+|\alpha|^2)(1+|\beta|^2)}}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ці співвідношення розглядатимемо як рівняння для параметрів у розкладі Шмідта. Зауважимо, що оскільки фазові множники в c_1 і c_2 можна віднести до початкових станів то c_1 і c_2 завжди можна вибрати дійсними і додатніми.

На завершення цього параграфа розглянемо матричне представлення. Базисні вектори двоспінової квантової системи запишемо

$$|\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

$$|\uparrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

$$|\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

$$|\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Для спінових операторів маємо $s_1^\alpha = \hbar\sigma_1^\alpha/2$ і $s_2^\alpha = \hbar\sigma_2^\alpha/2$, де

$$\sigma_1^x = \sigma^x \otimes \hat{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

$$\sigma_2^x = \hat{1} \otimes \sigma^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

аналогічно для інших компонент. Подібно можемо записати матричне представлення для N спінів.

2.4 Синглетний стан. Парадокс ЕПР

Квантові стани двох спінів виявляють принципово нові властивості, які відсутні у класичних системах, а саме — квантові кореляції. З квантовими кореляціями пов'язаний парадокс ЕПР, запропонований А. Ейнштейном, Б. Подольським і Н. Розеном у 1935 році [2]. На думку авторів цей парадокс доводить неповноту квантової теорії. Проте ми побачимо, що насправді ніякого парадоксу немає. І як би парадоксально з класичного погляду не вигляда-

ли висновки квантової механіки, вони виявляються правильними і експеримент їх підтверджує.

Ми продемонструємо ЕПР-парадокс, використовуючи спінові змінні двох частинок. Розглянемо синглетний стан двох спінів

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (2.49)$$

Дві частинки, які є в цьому стані, називають також ЕПР парою. Стан (2.49) є власним станом оператора суми двох спінів з нульовим власним значенням

$$(s_1^\alpha + s_2^\alpha)|\psi\rangle = 0, \quad \alpha = x, y, z. \quad (2.50)$$

Тобто сумарний спін дорівнює нулю. Проте окремо спін першої чи другої частинки не має визначеного значення у синглетному стані, тобто цей стан не є власним станом окремо першого чи другого спіну.

Важливою властивістю синглетного стану є інваріантність його відносно поворотів. Цю властивість називатимемо також сферичною симетрією

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_{\mathbf{a}}^+, \psi_{\mathbf{a}}^- \rangle - |\psi_{\mathbf{a}}^-, \psi_{\mathbf{a}}^+ \rangle). \quad (2.51)$$

У цьому переконуємося прямою підстановкою (2.14) і (2.15) в (2.51).

Для формулювання парадоксу ЕПР рознесемо частинки на велику відстань L . Вважатимемо, що до квантового випадку застосовний принцип локальності та причинності. Це означає, що локальний вимір, проведений над першою частинкою, не може змінити стан другої частинки, поки інформація про вимірювання не дійде до неї. Для цього потрібно скінчений час L/c , де c — швидкість світла.

Виміряємо x -компоненту спіну першої частинки і нехай унаслідок вимірювання ми отримали $\hbar/2$. Тоді оскільки сумарний спін двох частинок дорівнює нулю, то друга частинка має чітко визначене значення x компоненти свого спіну $-\hbar/2$. Оскільки інформація про вимірювання для часів $t < L/c$ не дійшла до другої

частинки, то А. Ейнштейн, Б. Подольський і Н. Розен роблять висновок, що друга частинка ще до виміру мала конкретне значення x -компоненти спіну. Аналогічно, вимірюючи y -компоненту спіну першої частинки, доходимо висновку, що друга частинка ще до виміру володіла конкретним значенням y -компоненти спіну. Це означає, що друга частинка має в тому самому стані визначеними значеннями x -компоненти та y -компоненти спіну. Але це є неможливо, оскільки оператори s_2^x та s_2^y не комутують між собою і не існує стану, який би був одночасно власним станом для цих операторів.

Ми дійшли до суперечності. З одного боку, локальність та принцип причинності дає підстави зробити висновок про одночасне існування різних компонент спіну. З іншого боку, квантова механіка заперечує таку можливість. Це і є парадоксом ЕПР. Звідси А. Ейнштейн, Б. Подольський і Н. Розен роблять висновок про неповноту квантово-механічного опису. Наявні елементи реальності, які квантова механіка не бере до уваги. У цьому випадку цими елементами реальності є компоненти спіну.

Парадокс ЕПР виник унаслідок припущення про локальність, про те, що вимірювання проведене над однією частинкою не впливає на стан іншої. Насправді синглетний стан є єдиним нелокальним об'єктом. Вимірювання проекції спіну першої частинки на довільний напрям $\mathbf{a}$ моментально призводить до редукції синглетного стану. Якщо унаслідок вимірювання проекції спіну першої частинки на напрям $\mathbf{a}$ ми отримали $\hbar/2$, то синглетний стан зредукується до $|\psi_{\mathbf{a}}^+\rangle|\psi_{\mathbf{a}}^-\rangle$, в якому проекція спіну другої частинки на напрям $\mathbf{a}$ дорівнює $-\hbar/2$. І навпаки, якщо у разі вимірювання проекції спіну першої частинки ми отримали $-\hbar/2$, то проекція спіну другої частинки на цей напрям є $\hbar/2$. Такі кореляції називають квантовими кореляціями.

2.5 Нерівності Белла

Парадокс ЕПР був аргументом на користь теорій зі схованими параметрами. А саме, можна припустити, що вектор стану не дає нам всіх відомостей про систему, і що існують певні змінні, схо-

вані від нас, не відомі нам на теперішній момент, які повністю визначають стан системи. Ці змінні називають схованими змінними чи схованими параметрами. Бор у своїй відповіді на статтю ЕПР навів аргументи на користь квантової механіки. Проте до шістдесятих років минулого століття продовжувались спроби побудови теорій зі схованими параметрами. У 1964 р. Белл під час підготовки оглядової статті про теорії зі схованими параметрами виявив нерівності, які повинні виконуватися в теоріях зі схованими параметрами і порушуються у квантовій механіці [3]. Ці нерівності тепер називають нерівностями Белла. Вони перенесли питання про сховані параметри із чистої теорії в експериментальну область. Експерименти, які провів і опублікував в 1982 р. Аспект (Aspect) [4], показали, що нерівності Белла порушуються, підтвердивши таким чином висновки квантової механіки і відкинувши цілий клас локальних теорій зі схованими параметрами.

Виведемо нерівності Белла. Розглянемо дві частинки, рознесені на велику відстань, спіни яких мають протилежні напрями $\mathbf{s}_1(\lambda) = -\mathbf{s}_2(\lambda)$ і залежать від певних схованих параметрів λ . Якщо унаслідок вимірювання проекції спіну першої частинки на певний напрям ми отримали, наприклад, додатну проекцію, то тоді проекція на цей же напрям спіну другої частинки має від'ємне значення, і навпаки.

Центральними у виведенні нерівностей Белла є принципи локальності та причинності. Принцип локальності вимагає, щоб результат вимірювання проекції спіну частинки на напрям $\mathbf{a}$ залежав тільки від локальних характеристик вимірювального приладу, які суттєві у цьому вимірюванні, тобто від напрямку $\mathbf{a}$. Фактично налаштування приладу задають напрям $\mathbf{a}$. Позначимо знак проекції спіну на певний напрям через $\sigma = \pm 1$. Нехай для першої частинки вимірюємо знак проекції σ_1 її спіну на напрям $\mathbf{a}$, а для другої частинки в той самий час вимірюємо знак проекції σ_2 її спіну на напрям $\mathbf{b}$. Для проведення таких вимірювань ми маємо два незалежні один від одного локальні прилади. Один прилад, позначимо його A , міряє проекцію спіну першої частинки на $\mathbf{a}$, другий прилад B міряє проекцію спіну другої частинки на $\mathbf{b}$. Принцип причинності вимагає, щоб вимірювання, проведене над

першою частинкою не впливало на результат вимірювання, проведеного над другою частинкою, і навпаки. Тому σ_1 залежить від налаштувань тільки свого приладу A та схованих параметрів λ , а σ_2 — від налаштувань свого приладу B та тих самих схованих параметрів λ . Тобто

$$\sigma_1 = \sigma_1(\mathbf{a}, \lambda), \quad \sigma_2 = \sigma_2(\mathbf{b}, \lambda). \quad (2.52)$$

Для повторення так експериментів вважатимемо, що ми маємо N пар частинок з протилежними спінами. Такі скорельовані пари можуть утворюватись за певних фізичних процесів, деталі яких на цей момент не є важливі. Сховані параметри для кожної із пари можуть бути різні λ_i і визначаються внутрішніми властивостями процесу, відповідального за утворення скорельованих пар.

Із вимірюаних проекцій спінів двох частинок утворимо таку величину

$$\begin{aligned} &\sigma_1(\mathbf{a}, \lambda_i)[\sigma_2(\mathbf{b}, \lambda_i) + \sigma_2(\mathbf{b}', \lambda_i)] + \\ &+ \sigma_1(\mathbf{a}', \lambda_i)[\sigma_2(\mathbf{b}, \lambda_i) - \sigma_2(\mathbf{b}', \lambda_i)] = \pm 2, \end{aligned} \quad (2.53)$$

яка може набувати тільки два значення ± 2 . Справді, кожне $\sigma_{1,2}$ набуває тільки двох значення ± 1 . Тоді, якщо $\sigma_2(\mathbf{b}, \lambda_i)$ і $\sigma_2(\mathbf{b}', \lambda_i)$ мають однакові знаки, то друга квадратна дужка дорівнює нулю, а перша — ± 2 , і навпаки. Отже (2.53) справді виконується.

Просумуємо (2.53) за i і розділимо на кількість пар N , над якими проведено експеримент із визначення проекцій їх спінів. Тому одержуємо очевидну нерівність

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma_1(\mathbf{a}, \lambda_i)[\sigma_2(\mathbf{b}, \lambda_i) + \sigma_2(\mathbf{b}', \lambda_i)] + \right. \\ &\left. + \sigma_1(\mathbf{a}', \lambda_i)[\sigma_2(\mathbf{b}, \lambda_i) - \sigma_2(\mathbf{b}', \lambda_i)]) \right| \leq 2. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Кожен із доданків в (2.54) має зміст середнього

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_1(\mathbf{a}, \lambda_i) \sigma_2(\mathbf{b}, \lambda_i) = \langle \sigma_1(\mathbf{a}) \sigma_2(\mathbf{b}) \rangle \quad (2.55)$$

i є корелятором проекцій двох спінів. Тоді нерівність (2.54) набуде вигляду

$$\begin{aligned} |\langle \sigma_1(\mathbf{a})\sigma_2(\mathbf{b}) \rangle| &+ |\langle \sigma_1(\mathbf{a})\sigma_2(\mathbf{b}') \rangle + \langle \sigma_1(\mathbf{a}')\sigma_2(\mathbf{b}) \rangle \\ &- \langle \sigma_1(\mathbf{a}')\sigma_2(\mathbf{b}') \rangle| \leq 2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Це і є одна із нерівностей Белла.

Якщо відома функція розподілу схованих параметрів $P(\lambda)$, то корелятор запишемо

$$\langle \sigma_1(\mathbf{a})\sigma_2(\mathbf{b}) \rangle = \int d\lambda P(\lambda) \sigma_1(\mathbf{a}, \lambda) \sigma_2(\mathbf{b}, \lambda). \quad (2.57)$$

Покажемо, що квантова механіка порушує нерівність Белла (2.54). У квантовому випадку

$$\sigma_1(\mathbf{a}) = (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{a}), \quad \sigma_2(\mathbf{a}) = (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{a}), \quad (2.58)$$

де $|\mathbf{a}| = 1$ і $|\mathbf{b}| = 1$. Обчислимо корелятор двох спінів у синглетному стані (2.49)

$$\langle \sigma_1(\mathbf{a})\sigma_2(\mathbf{b}) \rangle = \langle \psi | (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{b}) | \psi \rangle. \quad (2.59)$$

Скористаємось сферичною симетрією синглетного стану (2.51) і виберемо вісь z вздовж напрямку $\mathbf{a}$. Тоді $(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{a}) = \sigma_z$ і як наслідок

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1(\mathbf{a})\sigma_2(\mathbf{b}) \rangle &= \frac{1}{2} (\langle \uparrow \downarrow | - \langle \downarrow \uparrow |) \sigma_1^z(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{b}) (| \uparrow \uparrow \rangle - | \downarrow \downarrow \rangle) = \\ &= \frac{1}{2} (\langle \downarrow | (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{b}) | \downarrow \rangle - \langle \uparrow | (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{b}) | \uparrow \rangle) = \\ &= -\cos(\theta) = -(\mathbf{ab}), \end{aligned} \quad (2.60)$$

де θ — кут між віссю z (вектором $\mathbf{a}$) та вектором $\mathbf{b}$. Тут ми використали, що

$$\langle \uparrow | (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{b}) | \uparrow \rangle = \langle \uparrow | \sigma_2^x b_x + \sigma_2^y b_y + \sigma_2^z b_z | \uparrow \rangle \quad (2.61)$$

$$= \langle \uparrow | \sigma_2^z b_z | \uparrow \rangle = b_z = \cos \theta$$

і так само

$$\langle \downarrow | (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{b}) | \downarrow \rangle = -\cos \theta. \quad (2.62)$$

Зазначимо, що оператори σ_2^x і σ_2^y , діючи на $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$, перевертають стрілку. Тому в першому і другому доданках в (2.61) виникають скалярні добутки ортогональних векторів, які дорівнюють нулю.

У квантовому випадку ліву частину нерівності (2.56) запишемо

$$Q = |(\mathbf{a}\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\mathbf{b}') + (\mathbf{a}'\mathbf{b}) - (\mathbf{a}'\mathbf{b}')|. \quad (2.63)$$

Знайдемо обмеження зверху для цього виразу

$$Q = |\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{b}') + \mathbf{a}'(\mathbf{b} - \mathbf{b}')| \leq |\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{b}')| + |\mathbf{a}'(\mathbf{b} - \mathbf{b}')| \leq \quad (2.64)$$

$$\leq |(\mathbf{b} + \mathbf{b}')| + |(\mathbf{b} - \mathbf{b}')| = \sqrt{2 + 2\cos\phi} + \sqrt{2 - 2\cos\phi} \leq 2\sqrt{2},$$

де ϕ — кут між $\mathbf{b}$ і $\mathbf{b}'$

$$|(\mathbf{b} + \mathbf{b}')| = \sqrt{(\mathbf{b} + \mathbf{b}')^2} = \sqrt{\mathbf{b}^2 + \mathbf{b}'^2 + 2(\mathbf{b}\mathbf{b}')} = \sqrt{2 + 2\cos\phi}.$$

Аналогічно $|(\mathbf{b} - \mathbf{b}')| = \sqrt{2 - 2\cos\phi}$. На останньому етапі виведення (2.64) ми скористались нерівністю $x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$, яку отримуємо після незначних перетворень із очевидної нерівності $(x - y)^2 \geq 0$. Максимальне значення $2\sqrt{2}$ в (2.64) досягається при $\phi = \pi/2$.

Нерівність (2.64) перетворюється на рівність у двох випадках конфігурації векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$, які зображені на рис. 2.1:

- 1) $\mathbf{a}$ — паралельне $\mathbf{b} + \mathbf{b}'$, $\mathbf{a}'$ — паралельне $\mathbf{b} - \mathbf{b}'$ і $\mathbf{b} \perp \mathbf{b}'$.
- 2) $\mathbf{a}$ — антипаралельне $\mathbf{b} + \mathbf{b}'$, $\mathbf{a}'$ — антипаралельне $\mathbf{b} - \mathbf{b}'$ і $\mathbf{b} \perp \mathbf{b}'$.

У цих випадках Q досягає свого найбільшого значення $2\sqrt{2}$ і нерівність Белла порушується максимально.

Перший випадок реалізується, коли одиничні вектори розміщені в одній площині в порядку $\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{b}'$ проти годинникової

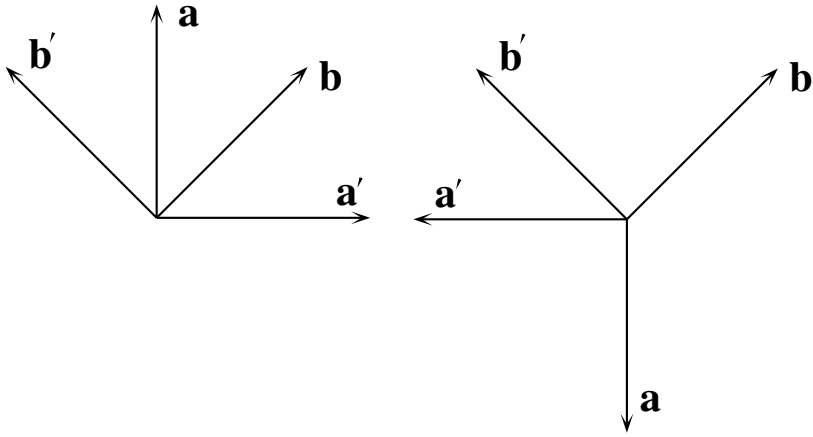


Рис. 2.1: Конфігурації векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$, при яких нерівність Белла порушується максимально.

стрілки через кут $\pi/4$. Для цієї конфігурації одиничних векторів обчислюємо праву частину нерівності Белла

$$Q = \left| 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right| = 2\sqrt{2} \geq 2. \quad (2.65)$$

Другий випадок є подібний до першого, тільки вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{a}'$ мають протилежні напрями до тих, що у першому випадку. Також знаходимо, що $Q = 2\sqrt{2} \geq 2$.

Отже, для цих конфігурацій, у квантові механіці нерівність Белла порушується. Висновки квантової механіки були підтверджені експериментально.

Зазначимо, що під час виведення нерівності Белла (2.56) ми насправді ніде не використовували властивостей спінових станів двох частинок, наприклад те, що сумарний spin дорівнює нулю. Тому нерівність можна розглянути для довільних спінових станів. Нехай спіновий стан двох частинок є факторизований, тобто записується у вигляді

$$|\psi\rangle = |\psi_1, \psi_2\rangle = |\psi_1\rangle_1 |\psi_2\rangle_2. \quad (2.66)$$

У цьому випадку корелятори розпадаються на добутки відповід-

них середніх і ми отримуємо

$$Q = |a(b + b') + a'(b - b')|, \quad (2.67)$$

де $a = \langle \psi_1 | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) | \psi_1 \rangle$ і аналогічно маємо для a', b, b' . Ці величини змінюються в межах $[-1, 1]$.

Простий аналіз показує, що $Q \leq 2$. Розглянемо випадок $b + b' \geq 0$ і $b - b' \geq 0$. Тоді Q досягає максимального значення при $a = a' = 1$, яке рівне 2. Аналогічний результат отримується для інших випадків. Таким чином у випадку факторизованого квантового стану нерівність Белла не порушується.

Зауважимо, що синглетний стан, для якого порушується нерівність Белла, не можна факторизувати. Саме неможливість факторизації квантового стану є необхідною умовою порушення нерівностей Белла. Стани, які не факторизуються, називаються заплутаними станами. Дослідженню цих станів присвячений наступний параграф.

2.6 Заплутані стани. Міра заплутаності

Розглянемо довільний квантовий стан двох спінів (2.33) і поставимо питання, при яких співвідношеннях між a, b, c, d цей стан можна факторизувати, тобто записати у вигляді

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle_1 |\psi_2\rangle_2, \quad (2.68)$$

де

$$|\psi_1\rangle_1 = a_1 |\uparrow\rangle_1 + b_1 |\downarrow\rangle_1, \quad (2.69)$$

$$|\psi_2\rangle_2 = a_2 |\uparrow\rangle_2 + b_2 |\downarrow\rangle_2. \quad (2.70)$$

Підставляючи ці розклади в (2.68), знаходимо

$$|\psi\rangle = a_1 a_2 |\uparrow\uparrow\rangle + a_1 b_2 |\uparrow\downarrow\rangle + b_1 a_2 |\downarrow\uparrow\rangle + b_1 b_2 |\downarrow\downarrow\rangle. \quad (2.71)$$

Порівнюючи цей результат з (2.33), маємо

$$a = a_1 a_2, \quad b = a_1 b_2, \quad c = b_1 a_2, \quad d = b_1 b_2. \quad (2.72)$$

Звідки бачимо, що для факторизованого стану

$$ad - bc = 0. \quad (2.73)$$

Справедливе також обернене твердження. Якщо виконується (2.73), то квантовий стан двох спінів можна факторизувати. Співвідношення (2.72) можна розглядати як рівняння для a_1, b_1, a_2, b_2 . Ці рівняння є сумісними у випадку (2.73) і ми знаходимо

$$a_1 = \frac{a}{c}b_1, \quad a_2 = \frac{a}{b}b_2. \quad (2.74)$$

Отже стан двох спінів можемо записати у факторизованому вигляді (2.68) з такими одночастинковими станами

$$|\psi_1\rangle_1 = b_1 \left(\frac{a}{c} |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \right), \quad (2.75)$$

$$|\psi_2\rangle_2 = b_2 \left(\frac{a}{b} |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \right), \quad (2.76)$$

де b_1 і b_2 — константи нормування.

Мірою заплутаності станів двох спінів вибирають величину

$$C = 2|ad - bc|, \quad (2.77)$$

яку називають узгодженістю (concurrence). Вона дорівнює нулю для факторизованих станів і одиниці для синглетного стану. В цьому легко переконаємось, оскільки для синглетного стану $b = -c = 1/\sqrt{2}$. Одиниця є максимальним значенням, яке взагалі може набувати C . Це можна показати, досліджуючи (2.77) на екстремум з умовою нормування $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$. Переконаємось у тому, що $C_{\max} = 1$, використовуючи розклад Шмідта (2.37). Підставляємо a, b, c, d із (2.42) у міру заплутаності C (2.77) знаходимо

$$C = 2|c_1c_2| = 2|c_1|\sqrt{1 - |c_1|^2}. \quad (2.78)$$

Звідки бачимо, що міра заплутаності має максимальне значення $C_{\max} = 1$ при $|c_1| = |c_2| = 1/\sqrt{2}$. У цьому випадку стани є максимально заплутаними. Прикладом максимально заплутаних станів

є стани Белла

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle), \quad (2.79)$$

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle \pm |\downarrow\downarrow\rangle). \quad (2.80)$$

Ці стани є взаємно ортогональні й утворюють повний базис у просторі станів двох спінів.

Цікаво зазначити, що можна ввести оператор узгодженості

$$\hat{C} = \sigma_1^y \sigma_2^y K = K \sigma_1^y \sigma_2^y, \quad (2.81)$$

де K — оператор комплексного спряження: $Kf = f^*$. Легко перевірити, що

$$C = |\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle| = |\langle\psi|\sigma_1^y \sigma_2^y K|\psi\rangle|, \quad (2.82)$$

тобто узгодженість рівна модулю середнього значення оператора узгодженості $\hat{C}$. Звернемо увагу на те, що оператор $\hat{C}$, унаслідок присутності в ньому оператора комплексного спряження, є анти-лінійним оператором

$$\hat{C}(c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle) = c_1^* \hat{C}|\psi_1\rangle + c_2^* \hat{C}|\psi_2\rangle. \quad (2.83)$$

Для кількісної характеристики заплутаності вводять також ентропію заплутаності

$$E = -\text{Sp } \hat{\rho}_1 \log_2 \hat{\rho}_1 = -\text{Sp } \hat{\rho}_2 \log_2 \hat{\rho}_2, \quad (2.84)$$

де наведені матриці густини першого і другого спіну, відповідно

$$\hat{\rho}_1 = \text{Sp}_2 \hat{\rho}, \quad \hat{\rho}_2 = \text{Sp}_1 \hat{\rho}. \quad (2.85)$$

Тут Sp_1 позначає шпур за першою підсистемою спінів, а Sp_2 , відповідно, за другою, $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ — матриця густини чистого ансамблю двох спінів.

Використовуючи розклад Шмідта для приведених матриць густин першого і другого спінів, знаходимо

$$\hat{\rho}_1 = \sum_{i=1,2} |c_i|^2 |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|, \quad \hat{\rho}_2 = \sum_{i=1,2} |c_i|^2 |\beta_i\rangle\langle\beta_i|, \quad (2.86)$$

де $|c_i|^2$ є власними значеннями операторів $\hat{\rho}_1$ і $\hat{\rho}_2$. Як наслідок для ентропії запутаності маємо

$$\begin{aligned} E &= - \sum_{i=1,2} |c_i|^2 \log_2 |c_i|^2 = \\ &= -|c_1|^2 \log_2 |c_1|^2 - (1 - |c_1|^2) \log_2 (1 - |c_1|^2). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Із (2.78) $|c_1|^2 = (1 + \sqrt{1 - C^2})/2$. Тому E однозначно пов'язана з узгодженістю C .

Ентропія запутаності набуває мінімального значення $E_{\min} = 0$ для повністю незаплутаних станів, коли одне із c_i дорівнює нулю, і набуває максимального значення $E_{\max} = 1$ для максимально заплутаних станів, $|c_1| = |c_2| = 1/\sqrt{2}$.

2.7 GHZ рівність

В 1989 Д. Грінбергер, М. Горне і А. Цайлінгер (D. Greenberger, M. Horne, A. Zeilinger (GHZ)) показали, що у випадку трьох частинок квантові кореляції проявляються більш яскраво, ніж для двох частинок [5, 6]. Нагадаємо, що для двох частинок існують нерівності Белла, які порушуються внаслідок квантових кореляцій. У випадку трьох частинок аналогом нерівностей Белла є певні рівності. Для їх встановлення розглянемо такий квантовий стан трьох спінів

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle). \quad (2.88)$$

Прямою перевіркою переконуємось, що цей стан є власним станом трьох операторів

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \sigma_1^x \sigma_2^y \sigma_3^y, \\ \hat{A}_2 &= \sigma_1^y \sigma_2^x \sigma_3^y, \\ \hat{A}_3 &= \sigma_1^y \sigma_2^y \sigma_3^x \end{aligned} \quad (2.89)$$

з власним значенням 1. Тобто

$$\hat{A}_i|\psi\rangle = 1|\psi\rangle, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.90)$$

Для оператора

$$\hat{A}_0 = \sigma_1^x \sigma_2^x \sigma_3^x \quad (2.91)$$

це є власний стан з власним значенням -1

$$\hat{A}_0|\psi\rangle = -1|\psi\rangle. \quad (2.92)$$

Нехай три спіни рознесені достатньо далеко один від одного. Проведемо вимірювання x - чи y -компоненти кожного зі спінів. Результат позначимо через λ_i^α , де $i = 1, 2, 3$ нумерує спін, $\alpha = x, y$ вказує проекцію спіну.

Принцип локальності припускає, що вимірювання одного спіну не впливає на інший спін. Тому для визначення A_i можемо виміряти окремо відповідні проекції кожного зі спінів і скласти необхідні добутки. Згідно з (2.89) і (2.90), маємо

$$\lambda_1^x \lambda_2^y \lambda_3^y = 1, \quad (2.93)$$

$$\lambda_1^y \lambda_2^x \lambda_3^y = 1, \quad (2.94)$$

$$\lambda_1^y \lambda_2^y \lambda_3^x = 1. \quad (2.95)$$

Перемноживши між собою ці три рівності і враховуючи, що $(\lambda_i^\alpha)^2 = 1$, знаходимо

$$\lambda_1^x \lambda_2^x \lambda_3^x = 1. \quad (2.96)$$

З іншого боку, згідно з (2.91) і (2.92) цей добуток повинен мати протилежний знак.

Отже, принцип локальності суперечить квантовій теорії. Квантова система трьох спінів у стані (2.88) є нелокальним об'єктом, до якого не можна застосовувати принцип локальності. Нагадаємо, що подібну картину ми спостерігали для двох станів, які перебували у синглетному стані. Тоді квантова механіка порушувала

нерівності Белла, які виводяться з використанням принципу локальності. Для трьох спінів, що перебувають у стані (2.88), квантова механіка порушує рівність (2.96), яка також отримується з використанням принципу локальності. Зауважимо, що можливе також узагальнення на довільну кількість частинок, яке можна знайти у праці [7].

Розділ 3

Квантові комунікації

3.1 Теорема про неклонунання та неможливість миттєвої передачі інформації

Теорему про неклонунання було доведено в 1982 р. [8, 9]. Теорема про неклонунання стверджує, що неможливим є утворити точну копію невідомого нам квантового стану. Нехай квантова система перебуває у невідомому нам стані $|\psi\rangle$. Перед нами стоїть завдання перевести ще одну квантову систему у стан, який є точною копією стану $|\psi\rangle$. Отже до клонування перша система знаходиться у стані $|\psi\rangle$, який ми хочемо зклонувати, а друга — у певному вихідному стані $|\psi_0\rangle$. Квантовий стан двох систем до клонування є прямим добутком станів першої і другої системи $|\psi\rangle_1|\psi_0\rangle_2$. Після клонування цей стан повинен перейти у $|\psi\rangle_1|\psi\rangle_2$. Перетворення векторів станів у квантовій механіці відбувається унаслідок еволюції, яку описують лінійним унітарним оператором або в результаті вимірювання, що є лінійною операцією проектування. Це означає, що клонуванню, якщо воно можливе, має відповідати певний лінійний оператор $\hat{U}$. Тоді процес клонування запишемо як лінійне перетворення

$$\hat{U}|\psi\rangle_1|\psi_0\rangle_2 = |\psi\rangle_1|\psi\rangle_2. \quad (3.1)$$

Розглянемо клонування двох станів $|\phi_1\rangle$ і $|\phi_2\rangle$

$$\hat{U}|\phi_1\rangle_1|\psi_0\rangle_2 = |\phi_1\rangle_1|\phi_1\rangle_2, \quad (3.2)$$

$$\hat{U}|\phi_2\rangle_1|\psi_0\rangle_2 = |\phi_2\rangle_1|\phi_2\rangle_2. \quad (3.3)$$

А тепер розглянемо клонування довільного стану $|\psi\rangle = c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle$, який є суперпозицією двох станів. З одного боку, згідно з (3.1), ми повинні отримати точну копію цього стану. З іншого боку, використовуючи лінійність оператора клонування, маємо

$$\begin{aligned} \hat{U}|\psi\rangle_1|\psi_0\rangle_2 &= \hat{U}(c_1|\phi_1\rangle_1 + c_2|\phi_2\rangle_1)|\psi_0\rangle_2 \\ &= c_1\hat{U}|\phi_1\rangle_1|\psi_0\rangle_2 + c_2\hat{U}|\phi_2\rangle_1|\psi_0\rangle_2 \\ &= c_1|\phi_1\rangle_1|\phi_1\rangle_2 + c_2|\phi_2\rangle_1|\phi_2\rangle_2 \neq |\psi\rangle_1|\psi\rangle_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ми дійшли до суперечності. Звідси припущення про можливість клонування довільного, невідомого нам, квантового стану є неправильне.

Проте це не означає, що не можна клонувати наперед задані стани. Нехай відомо, що спіновий стан є власним станом оператора проекції спіну на певний напрям, наприклад на вісь z . Тобто ми знаємо, що спин може перебувати або в стані $|\uparrow\rangle$, або в стані $|\downarrow\rangle$, які є ортогональні один до другого. Тоді, вимірявши проекції спіну на вісь z , ми без руйнування визначимо стан, в якому перебуває спин частинки, наприклад $|\uparrow\rangle$. Далі беремо другу частинку, яка перебуває в довільному квантовому стані і проводимо вимірювання проекції спіну на вісь z . Унаслідок цього вимірювання її спіновий стан зредукується до $|\uparrow\rangle$ з додатною проекцією чи $|\downarrow\rangle$ з від'ємною проекцією спіну. Відбираючи експерименти тільки з додатними проекціями спіну, отримаємо довільну кількість частинок у тому самому спіновому стані $|\uparrow\rangle$, що і перша частинка. Таким чином знання про те, що спин частинки перебуває в одному з двох взаємно ортогональних станів, дозволяє зробити довільну кількість копій. Якщо такого додаткового знання про стан нема, то клонування є неможливе.

Теорема про неклонування виявляє цікавий зв'язок з неможливістю миттєвої передачі інформації. Якщо би було можливе клонування, то можлива була б і миттєва передача інформації. Для виявлення цього зв'язку дослідимо можливість передачі

інформації з допомогою ЕПР-пари (2.49), яку будемо називати квантовим каналом. Нехай перша частинка з ЕПР-пари знаходиться у відправника інформації Аліси (Alice), а друга у отримувача Боба (Bob). Послідовно згенеровані в часі такі ЕПР-пари утворюють квантовий канал.

Нехай Аліса виміряла проекцію спіну першої частинки першої пари на певну вісь, наприклад z . З однаковою імовірністю $1/2$ вона отримає додатну або від'ємну проекцію. При цьому стан першої частинки редукується до $|\uparrow\rangle$, а стан другої — до $|\downarrow\rangle$, або навпаки. Послідовні виміри, проведені Алісою над першими спінами ЕПР-пар приведуть до того, що Боб володітиме змішаним ансамблем

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|), \quad (3.5)$$

який описує стан другого спіну. Середнє значення другого спіну в цьому стані дорівнює нулю. Точно такий самий результат отримаємо, обчисливши середнє значення другого спіну в синглетному стані. Це означає, що ніякий локальний експеримент, проведений Бобом, не дасть змоги виявити, в якому стані перебуває спін, синглетному чи змішаному. А це, своєю чергою, означає неможливість передачі інформації від Аліси до Боба, використовуючи лише квантовий канал.

Припустімо, що дозволеним є клонування станів. Тоді можна запропонувати просту схему для миттєвої, чи принаймні більшої за швидкість світла, передачі інформації. Домовимось, що власний стан σ_z , тобто $|\uparrow\rangle$ чи $|\downarrow\rangle$ відповідає 0, а власний стан σ_x , які ми позначимо $|\rightarrow\rangle$ та $|\leftarrow\rangle$, відповідає 1. Тоді з метою передачі одного біта інформації відправник А вимірює проекцію свого спіну на z для передачі 0 і вимірювання проекції на x для передачі 1. Нехай Аліса хоче передати 0. Тоді вона міряє проекцію свого спіну на вісь z і отримує, наприклад, стан $|\uparrow\rangle$. Отримувач інформації Боб клонує стан свого спіну і має, отже, чистий ансамбль, в якому кожен спін є в тому самому стані $|\downarrow\rangle$. Оскільки Боб володіє чистим ансамблем, то він може, провівши вимірювання, які описані в розділі 5, встановити, що спін направлений вздовж z . Це означає, що він отримав біт інформації 0.

Квантові кореляції пов'язані з колапсом синглетного стану під

час вимірювання, яке проводить Аліса, передаються миттєво. Тому ми майже миттєво (із затратою часу на експерименти з клонування та визначення напрямку спіну) можемо передавати інформацію. А це суперечить спеціальній теорії відносності. Отже, наше припущення про можливість клонування є неправильне і це ще раз доводить теорему про неклонування. З огляду на це варто наголосити на тому, наскільки добре нерелятивістська квантова механіка та спеціальна теорія відносності є припасовані одна до другої. Якщо б було можливе клонування, то існувала б суперечність між квантовою механікою та спеціальною теорією відносності. Проте внутрішня логіка квантової механіки заперечує можливість клонування і саме це забезпечує її несуперечність зі спеціальною теорією відносності.

3.2 Квантова телепортація

Термін “телепортація” з’явився у науковій фантастиці і означає знищення об’єкта чи людини в одному місці A і появу ідеальної копії в іншому B . Класичний телепортатор складається з двох приладів. В місці A розміщений прилад, який знімає повну інформацію про об’єкт і передає її до B , де є прилад, який, отримавши інформацію про об’єкт, відтворює його точну копію. Мати повну інформацію означає знати, з яких атомів складається об’єкт, їхнє положення та швидкість. Проте принцип невизначеності Гайзенберга заперечує можливість одночасно визначити положення та швидкість атомів.

У квантовій механіці стан системи задають вектором стану, а не координатами і швидкостями. Ми побачимо, що квантова механіка дає змогу телепортації саме вектора стану системи. Ідея квантової телепортації була висловлена в праці [10] у 1993 р. У 1997 р. був проведений перший експеримент з телепортації фотонів [11].

Принципову схему квантової телепортації зображено на рис. 3.1. Частинки 2 і 3 є у синглетному стані і утворюють ЕПР-пару — квантовий канал

$$|\psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3 - |\downarrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3). \quad (3.6)$$

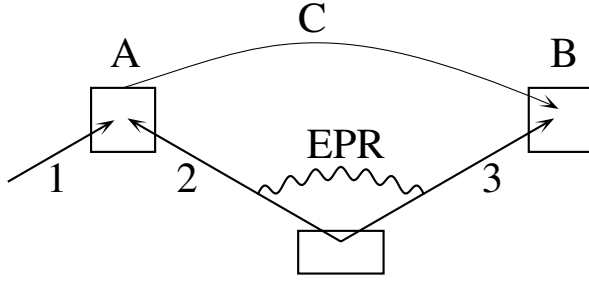


Рис. 3.1: Принципова схема квантової телепортації.

Частинка 1 знаходиться в довільному невідомому стані

$$|\phi\rangle_1 = a|\uparrow\rangle_1 + b|\downarrow\rangle_1, \quad (3.7)$$

який Аліса, що знаходиться в місці A , хоче телепортувати до Боба, який перебуває в B . Процес телепортації проходить так: Аліса проводить спільне вимірювання над частинками 1 і 2 — вимірювання на станах Белла (вимірювання Белла) і передає одержану інформацію до Боба по класичному каналу C . Унаслідок проведених Алісою вимірів стан частинки 3 редукується до певного стану $|\phi'\rangle_3$. Боб, використовуючи отриману від Аліси інформацію, виконує певні маніпуляції над станом $|\phi'\rangle_3$ і отримує частинку 3 в стані $|\phi\rangle_3$. Зазначимо, що описаний процес телепортує стан частинки 1 на частинку 3, а не саму частинку.

Розглянемо в деталях всі етапи телепортації. До телепортації три частинки перебувають у стані

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle_1 |\psi^-\rangle_{23}. \quad (3.8)$$

Перший етап — це вимірювання Белла над першою і другою частинками, який полягає у проектуванні стану цих частинок на один із беллівських станів (2.79). Для частинок 1 і 2 стани Белла запишемо

$$|\psi^\pm\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 \pm |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2), \quad (3.9)$$

$$|\phi^\pm\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \pm |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2). \quad (3.10)$$

Звідки знаходимо

$$|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi^+\rangle_{12} + |\psi^-\rangle_{12}), \quad (3.11)$$

$$|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi^+\rangle_{12} - |\psi^-\rangle_{12}), \quad (3.12)$$

$$|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi^+\rangle_{12} + |\phi^-\rangle_{12}), \quad (3.13)$$

$$|\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi^+\rangle_{12} - |\phi^-\rangle_{12}). \quad (3.14)$$

Використовуючи цей розклад базисних векторів першої і другої частинок через стани Белла перепишемо, вихідний стан так:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\phi\rangle_1 |\psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a|\uparrow\rangle_1 + b|\downarrow\rangle_1)(|\uparrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3 - |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3 - a|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3 + \\ &+ b|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3 - b|\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3) = \\ &= \frac{1}{2}[|\psi^-\rangle_{12}(-a|\uparrow\rangle_3 - b|\downarrow\rangle_3) + |\psi^+\rangle_{12}(-a|\uparrow\rangle_3 + b|\downarrow\rangle_3) + \\ &+ |\phi^-\rangle_{12}(a|\downarrow\rangle_3 + b|\uparrow\rangle_3) + |\phi^+\rangle_{12}(a|\downarrow\rangle_3 - b|\uparrow\rangle_3)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

В результаті вимірювань Белла, виконаних над першою і другою частинками, їх стан редукується до одного зі станів Белла, а стан третьої частинки редукується відповідно до одного з чотирьох станів

$$\begin{aligned} -a|\uparrow\rangle_3 - b|\downarrow\rangle_3, & \quad -a|\uparrow\rangle_3 + b|\downarrow\rangle_3, \\ a|\downarrow\rangle_3 + b|\uparrow\rangle_3, & \quad a|\downarrow\rangle_3 - b|\uparrow\rangle_3. \end{aligned} \quad (3.16)$$

На другому етапі телепортації Аліса передає Бобу інформацію по класичному каналу про проведений вимір, тобто в якому з беллівських станів перебуває перша і друга частинка. Таких станів є чотири, тому кількість інформації, яку Аліса передає Бобу, становить два біти. Отож, Боб знає, в якому стані з набору (3.16) перебуває його спін. Стани (3.16) з допомогою відповідних унітарних перетворень можна звести до стану $|\phi\rangle$. Справді, прямими

обчисленнями переконуємось, що

$$\begin{aligned} -1(-a|\uparrow\rangle_3 - b|\downarrow\rangle_3) &= |\phi\rangle_3, \\ -\sigma_z(-a|\uparrow\rangle_3 + b|\downarrow\rangle_3) &= |\phi\rangle_3, \\ \sigma_x(a|\downarrow\rangle_3 + b|\uparrow\rangle_3) &= |\phi\rangle_3, \\ i\sigma_y(a|\downarrow\rangle_3 - b|\uparrow\rangle_3) &= |\phi\rangle_3. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Отже, Боб, отримавши інформацію по класичному каналу від Аліси, проводить відповідні унітарні перетворення над спіновим станом своєї частинки і отримує телепортований стан. Унітарні перетворення можна реалізувати з допомогою відповідних поворотів системи координат, що видно із такої тотожності $\exp(i\pi\sigma_\alpha/2) = i\sigma_\alpha$.

Звернемо увагу на принципові моменти телепортації. Для телепортації потрібна наявність двох каналів, а саме — квантового і класичного. Необхідність класичного каналу спричинює те, що квантова телепортація відбувається не швидше від швидкості світла. Внаслідок вимірювань Белла, проведеними Алісою над першою і другою частинками, стан першої частинки, який Аліса телепортує, знищується. Отже, під час телепортації стан першої частинки перекидається на третю частинку зі знищенням стану першої частинки. Тут працює теорема про неклонування. Якщо би стан першої частинки не знищувався, то після телепортації ми мали б дві копії того самого стану. Тобто відбулося б клонування невідомого стану, що заборонено теоремою про неклонування.

3.3 Квантова криптографія

Квантова криптографія використовує фундаментальні властивості квантової фізики для абсолютно секретної передачі інформації, тобто для створення каналів зв'язку, які в принципі не можна підслухати так, щоб про це не дізналися відправник і приймач інформації.

Криптографія, яку ми розглянемо, ґрунтується на використанні розподіленого ключа. У цьому випадку Аліса і Боб мають ту саму, цілком випадкову, сукупність нулів і одиниць, наприклад, $K = 100110\dots$. Вона утворює ключ для шифрування та дешифрування інформації і для повної секретності він повинен бути

відомий тільки Алісі та Бобу. Нехай Аліса хоче передати Бобу інформацію $I = 010011 \dots$, так, щоб її ніхто не зміг прочитати. Для цього вона додає послідовно біти інформації I до бітів ключа K за модулем 2 і отримує зашифровану інформацію $\tilde{I} = 110101 \dots$, яку відкритим каналом передає Бобу. Додавання за модулем 2 означене так

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0. \quad (3.18)$$

Боб аналогічно додає до отриманої зашифрованої інформації $\tilde{I}$ ключ K і одержує вихідну інформацію I . Головна проблема в цій схемі — забезпечити секретність ключа.

Генерування розподілених в точках A і B ідентичних секретних ключів і є завданням квантової криптографії. Ми розглянемо тільки основи квантової криптографії і ті квантові принципи, на яких вона ґрунтується, не вникаючи в деталі реалізації.

Перший варіант квантової криптографічної схеми (протоколу) ґрунтується на теоремі про неклонування. Він використовує одночастинкові стани, наприклад, спінові стани частинок, чи поляризаційні стани фотона. Оскільки є повна аналогія між станами спіну $1/2$ та поляризаційними станами фотона, розглянемо криптографію, що використовує спінові стани. Розподілений ключ, яким володіють Аліса і Боб, утворюється так. Аліса вибирає два взаємно перпендикулярні напрями, наприклад осі z і x і відкритим каналом передає цю інформацію Бобу. Спінові стани, з якими далі будуть працювати Аліса і Боб, є власні стани оператора проекції спіну на одну чи другу вісь. Відкритим каналом Аліса і Боб домовляються, що власні стани оператора проекції спіна на z чи на x використовуватимуть для утворення ключа. Власному стану $|\uparrow\rangle$ оператора проекції спіна на z відповідає 0, а $|\downarrow\rangle$ відповідає 1. Аналогічно до власного стану $|\rightarrow\rangle$ оператора проекції спіну на x відповідає 0, а $|\leftarrow\rangle$ відповідає 1.

Аліса випадково вибирає один з напрямів, наприклад z , і випадково з однаковою імовірністю $1/2$ генерує один із власних векторів, наприклад $|\uparrow\rangle$. Частинка з цим спіновим станом по квантовому каналу посиляється до Боба. Боб не знає, що Аліса вибрала саме напрям z . Тому як і Аліса випадково вибирає один із напрямів, на який він вимірює проекцію спіну отриманої частинки. Далі ця процедура повторюється, наприклад, ще 99 разів і Боб

отримає від Аліси 100 частинок.

Припустімо, що Єва робить спроби підслухати інформацію, що передається квантовим каналом. Вона вимірює спіновий стан частинок, які Аліса посилає Бобу, і пересилає Бобу. Проте Єва на момент вимірювань не знає напрямів, вибраних Алісою, для кожної із частинок, хоча може знати відкриту інформацію, що це можуть бути напрями z або x . Тому Єва може тільки випадково потрапити у частині своїх вимірювань на напрями, вибрані Алісою, а в частині випадків Єва протрапить на інші напрями. В останньому випадку вона зіпсує квантовий стан і Боб отримає інший стан, ніж був посланий Алісою.

Для виявлення підслуховування Аліса і Боб відкритим каналом передають один одному інформацію про напрями, які вони вибирали для кожної із 100 частинок, посланих Бобу. Тепер Аліса і Боб знають для яких частинок вибрані ними напрями збігалися. У цьому випадку їхні результати мають повністю збігтися. Проте, оскільки внаслідок підслуховування Єва зіпсувала частину станів, то частина результатів Аліси і Боба не збігатимуться. Для виявлення цього Аліса і Боб обмінюються інформацією про частину результатів вимірів з однаково вибраними напрямими і зіставляють їх. У випадку підслуховування Аліса і Боб виявлять неспівпадіння своїх результатів. Отже, Аліса і Боб виявлять підслуховування і відкинуть результати всіх проведених вимірювань.

Якщо Аліса і Боб виявлять, що підслуховування не було, то вони генерують ключ для кодування, використовуючи результати вимірювань проекції спіну на z чи на x . Для цього вони відбирають тільки ті виміри над спіновими станами, для яких вибрані випадково напрями збіглися із z чи із x , і отримують випадкову сукупність нулів і одиничок. Ця сукупність і утворює розподілений ключ і ним володіють тільки Аліса і Боб.

Зауважимо, що якщо б було можливе клонування, то Єва могла б виміряти стан не зіпсувавши його. І тоді Аліса і Боб не виявили б підслуховування. Тому, саме теорема про неклонування дає змогу виявити підслуховування і забезпечує абсолютну секретність ключа для кодування інформації.

Розглянемо другий варіант квантової криптографічної схеми, яка ґрунтується на використанні заплутаних станів. Між Алісою і Бобом встановлено квантовий канал, по якому одна з частинок

ЕПР-пари приходять до Аліси, а друга — до Боба. Аліса і Боб проводять вимірювання, які необхідні для перевірки нерівності Белла (2.56). Перший варіант вимірювання, при яких нерівність порушується максимально, є такий. При вимірюваннях проекції спіну Аліса випадково вибирає один з двох взаємно перпендикулярних напрямів $\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}$ а Боб — з двох взаємно перпендикулярних $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$. Ці одиничні вектори розміщені в одній площині в порядку $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}'$ проти годинникової стрілки через кут $\pi/4$. Додатково Аліса і Боб вибирають спільний напрям $\mathbf{k}$ вимірювання проекції спіну на який, слугують для утворення розподіленого ключа.

Нерівність Белла дозволяє виявити підслуховування. Щоб перевірити цю нерівність Аліса і Боб, провівши певну кількість вимірювань, по відкритому каналу обмінюються необхідною інформацією. Аліса посилає Бобу інформацію про вибрані у кожному експерименті напрями та про результати вимірювань проекції спіну на $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, а Боб посилає інформацію Алісі про свої вибрані напрями та результати вимірювань проекції спіну на $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$. Проте інформацію про результати вимірювань проекції спіну на напрям $\mathbf{k}$ тримають в секреті.

Якщо Єва проводила підслуховування, то синглетний стан ЕПР-пари був знищений і Аліса та Боб отримували незаплутані, факторизовані спінові стани двох частинок. Інакше кажучи, будь-яке вимірювання Єви розплутує синглетний стан. Якщо нерівність Белла виконується, то це означає, що стани, з якими працюють Аліса і Боб, є незаплутані і, отже, було втручання Єви у квантовий канал.

Якщо нерівність Белла порушується, то підслуховування не було і в цьому випадку: Аліса і Боб можуть генерувати ключ для шифрування. Для цього Аліса і Боб використовують ті вимірювання проекції спіну, в яких вибрані ними напрями потрапляли на $\mathbf{k}$. Боб знає, що коли він отримав додатну проекцію спіну, то Аліса — від'ємну, і навпаки. Можна домовитися, що додатна проекція відповідає нулю, а від'ємна — одиниці. Тоді Боб змінює свої нулі на одиниці, а одиниці на нулі і отримує ту саму випадкову сукупність нулів і одиничок, що й Аліса, який і слугує ключем для шифрування і дешифрування інформації.

Розділ 4

Квантові обчислення та квантові комп'ютери

Ідея обчислювальних приладів (квантових комп'ютерів), які базуються на принципах квантової механіки, виникла у 80-х роках минулого століття (див., наприклад [12]). Згідно із законом Мура кількість електронних елементів в одиниці об'єму класичного комп'ютера щороку подвоюється і ми підходимо до межі, коли суттєвими стають квантові флуктуації. Вони призводять до нестабільної роботи класичних електронних елементів. Тому природно виникає ідея квантових комп'ютерів, що ґрунтуються саме на квантових властивостях мікросистем.

Схематично робота квантового комп'ютера може бути представлена як послідовність трьох операцій:

I. Приготування початкового квантового стану.

II. Обчислення, роль якого виконують унітарні перетворення, проведені над початковим станом.

III. Виведення результату. Його роль виконує певне вимірювання, яке проводять над кінцевим станом.

4.1 Від класичного біта до квантового

Розглянемо один з центральних елементів класичного комп'ютера, а саме — елемент, який реалізовує класичний біт. Роль такого елемента може виконувати будь-яка класична система, що має два стійкі, добре розділені положення рівноваги. Наприклад, це може бути кулька, яка знаходиться у двоявному потенціалі і має два стійкі положення рівноваги. За домовленістю положення кульки в одному локальному мінімумі відповідає 0, а в другому — 1 і ми маємо класичний біт. Зменшення розмірів цієї системи та маси кульки спричинить те, що важливим стане квантове тунелювання кульки крізь потенціальний бар'єр, який розподіляє мінімуми. Тому класичний біт стає нестійким і система стає суттєво квантовою. Прості дослідження квантового руху частинки у двоявному потенціалі показують, що енергетичний спектр складається з двох близько розміщених найнижчих рівнів та досить віддалених інших рівнів. При низькоенергетичних збудженнях квантової системи достатньо розглядати тільки ці два найнижчі близькі рівні. Така двостанова квантова система реалізує квантовий біт. Отже, зменшення розмірів системи приводить нас від класичного біта до квантового. Природно виникає ідея побудови квантових комп'ютерів, які б оперували з квантовими бітами.

Нехай числам 0 і 1 відповідають квантові стани $|0\rangle$ і $|1\rangle$, які є базисними векторами простору станів квантового біта. Суттєвою відмінністю квантового біта від класичного є його можливість перебувати у суперпозиційних станах. Наприклад, це може бути рівнозважений стан

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle). \quad (4.1)$$

В цьому стані одночасно закодовано як число 0, так і 1.

Два кубіти можуть перебувати у суперпозиційному стані

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{2} (|0\rangle_1 + |1\rangle_1) (|0\rangle_2 + |1\rangle_2) \\ &= \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle), \end{aligned} \quad (4.2)$$

в якому одночасно закодовано чотири двійкові числа 00, 01, 10, 11, або у десятковій системі числа 0, 1, 2, 3.

Аналогічно n кубітів можуть перебувати у стані

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{2^{n/2}} (|0\rangle_1 + |1\rangle_1) (|0\rangle_2 + |1\rangle_2) \dots (|0\rangle_n + |1\rangle_n) = \quad (4.3) \\ &= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} |x_1, x_2, \dots, x_n\rangle = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{\mathbf{x}} |\mathbf{x}\rangle, \end{aligned}$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n -вимірний вектор, x_i може набувати двох значень — 0 і 1. У цьому стані закодовано одночасно 2^n чисел: $0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$.

Квантовий комп'ютер з допомогою унітарних перетворень, що виконуються над n кубітами, обробляє інформацію, яка записана у n кубітах. При цьому він працює одночасно зі всіма $2^{n/2}$ можливими двійковими числами, записаними у n кубітах. Ця властивість називається квантовим паралелізмом і є наслідком принципу суперпозиції. Саме квантовий паралелізм дає можливість розв'язувати деякі задачі на квантовому комп'ютері набагато ефективніше, ніж на класичному.

4.2 Квантовий процесор. Квантові логічні елементи

Роль процесора для квантового комп'ютера виконують унітарні оператори. Діючи тими чи іншими унітарними операторами на початковий вектор стану, ми виконуємо ті чи інші логічні операції і отримуємо кінцевий вектор стану, який і є результатом квантових обчислень.

Вектором стану для квантового комп'ютера є система кубітів, яку називають квантовим регістром. Тому унітарні оператори — це оператори, що діють на кубіти. Найпростішими операторами є однокубітові оператори, які змінюють стан тільки певного одного кубіта з квантового регістра і залишають незмінними всі інші кубіти. Наступними операторами є двокубітові унітарні оператори,

які змінюють стани лише певних двох кубітів і залишають незмінними всі інші, даючи можливість побудувати квантову мережу.

Було показано, що існує універсальний набір одно- і двокубітових унітарних операторів, з допомогою якого можна побудувати довільний унітарний оператор як певний добуток базових операторів. Реалізуються унітарні оператори з допомогою певних фізичних приладів, які називаються квантовими логічним елементами.

Розглянемо спочатку однокубітові перетворення.

Оператор Адамара

Перетворенню Адамара $\hat{H}$ відповідає унітарний оператор

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(|0\rangle + |1\rangle)\langle 0| + (|0\rangle - |1\rangle)\langle 1|], \quad (4.4)$$

або у матричному зображенні

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Дія цього оператора на базисні вектори дає такий результат

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad \hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), \quad (4.6)$$

який зручно переписати так

$$\begin{aligned} \hat{H}|x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^x|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{y=0,1} (-1)^{xy} |y\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{y=0,1} e^{i\pi xy} |y\rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Дія операторів Адамара на базисні вектори n кубітів

$$\hat{H}^{[n]}|\mathbf{x}\rangle = \hat{H}_1 \hat{H}_2 \cdots \hat{H}_n |x_1, x_2, \dots, x_n\rangle = \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{y_1=0,1} \sum_{y_2=0,1} \cdots \sum_{y_n=0,1} e^{i\pi(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)} |y_1, y_2, \dots, y_n\rangle = \\ &= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{\mathbf{y}} e^{i\pi \mathbf{x} \mathbf{y}} |\mathbf{y}\rangle = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{\mathbf{y}} (-1)^{\mathbf{x} \mathbf{y}} |\mathbf{y}\rangle, \end{aligned}$$

де x_i та y_i набувають двох значень 0, 1. Звідки бачимо, що суперпозиційний стан (4.3) можна отримати як результат дії оператора Адамара на вихідний стан $|\mathbf{x}\rangle = |0\rangle$

$$\hat{H}^{[n]}|0\rangle = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{\mathbf{y}} |\mathbf{y}\rangle. \quad (4.9)$$

Оператор зміни (зсуву) фази

$$\hat{\Phi}(\phi) = |0\rangle\langle 0| + e^{i\phi}|1\rangle\langle 1| \quad (4.10)$$

або у матричному зображенні

$$\hat{\Phi}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Дію цього оператора на базисні вектори запишемо

$$\hat{\Phi}|x\rangle = e^{i\phi x}|x\rangle, \quad (4.12)$$

де $x = 0, 1$. Легко знаходимо дію оператора зміни фази на довільний вектор стану одного кубіта

$$\hat{\Phi}(\phi)(a|0\rangle + b|1\rangle) = a|0\rangle + be^{i\phi}|1\rangle. \quad (4.13)$$

Як бачимо, оператор зміни фази змінює співвідношення фаз між коефіцієнтами розкладу вектора стану за базисними векторами.

Двох операторів, оператора Адамара $\hat{H}$ та оператора зміни фази $\hat{\Phi}(\phi)$, достатньо, щоб збудувати довільний однокубітовий унітарний оператор. Доведення цього можна знайти в огляді [13] (див. також [14]). Для побудови довільного однокубітового унітарного оператора можна вибрати іншу сукупність базових операторів.

Розглянемо ще один однокубітовий унітарний оператор — *оператор заперечення*, його ще називають NOT-оператор

$$\hat{U}_{\text{NOT}} = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|. \quad (4.14)$$

У матричному вигляді

$$\hat{U}_{\text{NOT}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x. \quad (4.15)$$

Назва цього оператора зрозуміла з його дії на базисні вектори

$$\hat{U}_{\text{NOT}}|0\rangle = |1\rangle, \quad \hat{U}_{\text{NOT}}|1\rangle = |0\rangle. \quad (4.16)$$

Виразимо оператор заперечення через послідовну дію оператора Адамара і оператора зсуву фази. Розглянемо

$$\hat{U} = \hat{\Phi}(\phi')\hat{H}\hat{\Phi}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\phi} \\ e^{i\phi'} & -e^{i(\phi+\phi')} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

При $\phi = \phi' = \pi/2$ маємо

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Квадрат цього оператора з точністю до сталої фази дорівнює оператору заперечення

$$\hat{U}^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\hat{U}_{\text{NOT}}. \quad (4.19)$$

Отже

$$\hat{U}_{\text{NOT}} = -i(\hat{\Phi}(\pi/2)\hat{H}\hat{\Phi}(\pi/2))^2. \quad (4.20)$$

Звідси природно ввести $\sqrt{\text{NOT}}$ -оператор

$$\hat{U}_{\sqrt{\text{NOT}}} = e^{-i\pi/4}\hat{\Phi}(\pi/2)\hat{H}\hat{\Phi}(\pi/2) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

квадрат якого дає NOT-оператор: $(\hat{U}_{\sqrt{\text{NOT}}})^2 = \hat{U}_{\text{NOT}}$.

Оператор $\hat{U}_{\text{NOT}}$ та оператор фазового зсуву $\hat{\Phi}(\phi)$ або $\hat{U}_{\sqrt{\text{NOT}}}$ та $\hat{\Phi}(\phi)$ можуть слугувати універсальною сукупністю операторів, з допомогою яких будується довільний однокубітовий унітарний оператор.

Розглянемо двокубітову операцію *контрольованого заперечення*, яку також називають XOR або CNOT і яка визначається унітарним оператором

$$\hat{U}_{XOR} = |0\rangle_1 {}_1\langle 0| \hat{I}_2 + |1\rangle_1 {}_1\langle 1| \hat{U}_{NOT\ 2}. \quad (4.22)$$

Одиничний оператор $\hat{I}_2 = |0\rangle_2 {}_2\langle 0| + |1\rangle_2 {}_2\langle 1|$ та оператор заперечення $\hat{U}_{NOT\ 2} = |1\rangle_2 {}_2\langle 0| + |0\rangle_2 {}_2\langle 1|$ діють на стан другого кубіта. У двоспіновому базисі $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ XOR оператор зображається матрицею

$$\hat{U}_{XOR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Як бачимо, оператор XOR заперечує стан другого кубіта (переводить $|0\rangle$ в $|1\rangle$ і навпаки), коли перший кубіт перебуває в стані $|1\rangle$ і не змінює стан другого кубіта, коли перший кубіт перебуває в стані $|0\rangle$. Таким чином, стан другого кубіта контролюється станом першого кубіта.

Введемо ще один оператор — *оператор контрольованого зсуву фази*

$$\hat{B}(\phi) = |0\rangle_1 {}_1\langle 0| \hat{I}_2 + |1\rangle_1 {}_1\langle 1| \hat{\Phi}_2(\phi), \quad (4.24)$$

де одиничний оператор $\hat{I}_2$ та $\hat{\Phi}_2(\phi)$ діють на стан другого кубіта. Аналогічно, як для оператора XOR, у цьому випадку дія оператора зсуву фази на стан другого кубіта контролюється станом першого. Легко знаходимо матричне зображення оператора контрольованого зсуву фази

$$\hat{B}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Було доведено, що двох однокубітових операторів, наприклад, $\hat{H}$, $\hat{\Phi}(\phi)$ та одного двокубітового, наприклад, XOR достатньо для

побудови довільного унітарного оператора, що діє в Гільбертовому просторі n кубітів [16]. Однак для цього може знадобитися побудувати ланцюжок із $4^n n^3$ базових операторів. Послідовності дій базових унітарних операторів відповідає послідовне з'єднання квантових логічних елементів, яке утворює квантову мережу. Зауважимо також, що послідовність базових унітарних операторів грає роль програми для квантового комп'ютера, яка виконує певні операції над кубітами і визначається розглянутою задачею.

4.3 Квантові алгоритми.

Задача Дойча–Джозси

Розглянемо функцію, яка визначена на множині цілих чисел, записаних у двійковій системі числення. Загалом для векторної функції це є певне відображення n -вимірного двійкового вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ в m -вимірний вектор $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (4.26)$$

де $x_i = 0, 1$, $f_i = 0, 1$. У квантовому випадку цьому відображенню відповідає $\hat{U}_f$ унітарний оператор, який робить подібне відображення у 2^{n+m} -вимірному гільбертовому просторі. Простір Гільберта зручно розділити на прямий добуток двох підпросторів: 2^n -вимірний гільбертовий простір відповідає регістру аргумента $|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle = |\mathbf{x}\rangle$, 2^m -вимірний — регістру функції $|y_1, y_2, \dots, y_m\rangle = |\mathbf{y}\rangle$. Тоді дію оператора $\hat{U}_f$ запишемо так

$$\hat{U}_f |\mathbf{x}\rangle |\mathbf{y}\rangle = |\mathbf{x}\rangle |\mathbf{y} \oplus \mathbf{f}(\mathbf{x})\rangle, \quad (4.27)$$

де $\oplus$ означає додавання за модулем 2.

Зазначимо, що розрахунок функції може бути нетривіальним завданням як в класичному, так і у квантовому випадку. В останньому це може потребувати послідовної дії $4^{n+m}(n+m)^3$ базових унітарних операторів. Якщо кожна операція забирає певний час, то кількість часу, необхідного для розрахунку функції може рости експонентно зі збільшенням кількості аргументів функції. Проте

квантовий комп'ютер може виявитись надефективним не при розрахунку самої функції, а при розрахунку деяких її властивостей. У цьому випадку розрахунок функції є окремою задачею і вважаємо, що існує квантова мережа, яка швидко розраховує функцію. Таку квантову мережу називають оракулом (oracle), який знає все і швидко дає відповідь на поставлене питання про значення функції для того чи іншого аргумента.

Тому завдання полягає в тому, щоби маючи квантовий оракул з допомогою квантового комп'ютера за час, який є певним поліномом з найвищим степенем $n + m$, вивчити певні властивості функції. Тоді як на класичному комп'ютері це потребує часу, який експонентно залежить від $n + m$.

Історично першою задачею, яка продемонструвала надефективність квантового комп'ютера порівняно з класичним, була задача Дойча–Джозси (D. Deutsch, R. Jozsa). Вона полягає у визначенні класу, до якого належить функція, а саме, стала (constant) чи збалансована (balanced) вона є. Збалансованою називають функцію, яка для половини аргументів набуває значення 0, а для іншої половини — 1. Звернемо увагу на те, що збалансовані функції є підкласом змінних функцій. Нехай відомо, що функція належить до класу сталих чи збалансованих функцій. Задача Дойча–Джозси полягає у встановленні до якого саме класу належить функція.

Розглянемо скалярну функцію

$$f = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.28)$$

яка n -вимірному двійковому вектору ставить у відповідність двійкове число f . Якщо f набуває того самого значення для будь-якого $\mathbf{x}$, то функція є сталою, в іншому випадку вона — змінна. Якщо рівно для половини значень аргументів $2^n/2$ функція набуває значення 0, а для іншої половини — 1, то вона є збалансованою. Наприклад, функція одної змінної $f = f(x)$ є сталою, коли

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{або} \quad f(0) = f(1) = 1, \quad (4.29)$$

або є змінна, коли

$$f(0) = 0, f(1) = 1 \quad \text{або} \quad f(0) = 1, f(1) = 0. \quad (4.30)$$

Зазначимо, що для функції одної змінної клас змінних функцій збігається з класом збалансованих. Д. Дойч сформулював спочатку цю задачу саме для функції одної змінної. Пізніше задача була узагальнена Д. Дойчем і Р. Джозсою на випадок функції багатьох змінних.

Для того, щоб на класичному комп'ютері розв'язати поставлену задачу, потрібно для всіх значень аргумента обчислити значення функції, тобто виконати 2^n обчислень значень функції для 2^n аргументів. Квантовий комп'ютер дає змогу розв'язати цю задачу за один розрахунок функції.

Розглянемо, як вирішує задачу про клас функції квантовий комп'ютер з допомогою алгоритму Дойча.

I. Перший етап — це приготування початкового стану. Регістр аргументу складається з n кубітів, регістр значень функції — з одного кубіта. Приготуємо такий початковий стан, в якому регістр аргументу знаходиться в нульовому стані $|0\rangle_1|0\rangle_2 \cdots |0\rangle_n = |\mathbf{0}\rangle$, а регістр значень функції — у стані $|1\rangle$

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = |\mathbf{0}\rangle|1\rangle. \quad (4.31)$$

II. Другий етап — це власне ті послідовні операції, які проводяться над квантовим станом згідно з квантовим алгоритмом. Для цієї задачі він розбивається на такі три операції:

а) Діємо на кожен $n + 1$ кубіт початкового стану (4.31) оператором Адамара

$$\hat{H}^{[n+1]}|\mathbf{0}\rangle|1\rangle = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{\mathbf{x}} |\mathbf{x}\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (4.32)$$

б) Розраховуємо функцію $f(\mathbf{x})$, тобто діємо унітарним оператором $\hat{U}_f$ на стан (4.32)

$$\begin{aligned} \hat{U}_f \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2}} \sum_{\mathbf{x}} |\mathbf{x}\rangle(|0\rangle - |1\rangle) &= \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2}} \sum_{\mathbf{x}} |\mathbf{x}\rangle(|f(\mathbf{x})\rangle - |1 \oplus f(\mathbf{x})\rangle) = \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2}} \sum_{\mathbf{x}} (-1)^{f(\mathbf{x})} |\mathbf{x}\rangle(|0\rangle - |1\rangle). \end{aligned} \quad (4.33)$$

в) Знову діємо оператором Адамара на отриманий стан

$$\begin{aligned} \hat{H}^{[n+1]} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{2}} \sum_{\mathbf{x}} (-1)^{f(\mathbf{x})} |\mathbf{x}\rangle (|0\rangle - |1\rangle) &= \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{y}} (-1)^{f(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} |\mathbf{y}\rangle |1\rangle = |\psi_{\text{fin}}\rangle. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Проаналізуємо отриманий стан. Коли функція є сталою $f(\mathbf{x}) = f_0 = \text{const}$, маємо

$$|\psi_{\text{fin}}\rangle = \frac{1}{2^n} (-1)^{f_0} \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{y}} (-1)^{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} |\mathbf{y}\rangle |1\rangle. \quad (4.35)$$

Зауважимо, що

$$\sum_{\mathbf{x}} (-1)^{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} \quad (4.36)$$

відмінна від нуля тільки при $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ і дорівнює 2^n . Отже, для сталої функції $f(\mathbf{x}) = f_0$ кінцевий стан

$$|\psi_{\text{fin}}\rangle = (-1)^{f_0} |\mathbf{0}\rangle |1\rangle \quad (4.37)$$

містить тільки базисний вектор з $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Розглянемо тепер випадок збалансованої функції. Амплітуда при $|\mathbf{0}\rangle$ для кінцевого стану (4.34), тобто для $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, визначається

$$\sum_{\mathbf{x}} (-1)^{f(\mathbf{x})}. \quad (4.38)$$

Оскільки для збалансованої функції для половини аргументів функція набуває значення 0, а для другої половини — 1, то ця сума дорівнює нулю. Тому для збалансованої функції кінцевий стан $|\psi_{\text{fin}}\rangle$ не містить $|\mathbf{0}\rangle$.

Ще раз підкреслимо результат: для сталої функції кінцевий стан містить тільки $|\mathbf{0}\rangle$, для збалансованої функції він не містить $|\mathbf{0}\rangle$.

III. Проводимо вимірювання $\mathbf{y}$. Це вимірювання проектує $|\psi_{\text{fin}}\rangle$ на один з базисних векторів $|\mathbf{y}\rangle$. Враховуючи щойно проаналізований кінцевий стан, робимо висновок: якщо унаслідок вимірювання

ми отримали стан $|0\rangle$, то функція є сталою, якщо отримали один із станів $|y\rangle$ з $y \neq 0$, то функція є збалансованою.

Отже, з допомогою квантового комп'ютера ми за одне обчислення функції n змінних визначили, до якого класу вона належить, сталої чи збалансованої. У класичному випадку для цього потрібно провести 2^n обчислень. В цьому і полягає надефективність квантового комп'ютера порівняно з класичним.

Проте потрібно зауважити, що задач та відповідних алгоритмів, для яких проявляється надефективність квантового комп'ютера, відомо не так багато. До них належать: задача Дойча–Джозси (яку ми якраз розглянули), квантове перетворення Фур'є, визначення періоду функції (D. Simon), факторизація чисел (P. Shor), задача пошуку даних (L. Grover). Аналіз цих задач та алгоритмів можна знайти в [13, 14].

4.4 Фізична реалізація одно-кубітових операцій. Напівпрозорий бар'єр

Розглянемо спочатку розсіяння частинки на потенціальному бар'єрі під час руху вздовж осі x . Вважатимемо, що довжина плоскої хвилі частинки, яка падає на бар'єр, є набагато більша від його ширини. Тоді бар'єр можна змоделювати потенціалом $V = \alpha\delta(x)$, де $\alpha > 0$ відповідає бар'єру, $\alpha < 0$ відповідає потенціальній ямі. Рух вздовж x описують рівнянням Шредінгера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha\delta(x)\psi = E\psi. \quad (4.39)$$

Хвильова функція зліва від бар'єра містить набігаючу і відбиту хвилю з амплітудами A і B , відповідно

$$\psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}. \quad (4.40)$$

Справа від бар'єра наявна тільки хвиля, що пройшла крізь нього

$$\psi_2 = Ce^{ikx}. \quad (4.41)$$

Інтегруючи рівняння Шредінгера в околі нуля знаходимо граничні умови (умови зшивання) для хвильової функції

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad (4.42)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\psi_2'(0) - \psi_1'(0)) = \alpha\psi_1(0) = \alpha\psi_2(0), \quad (4.43)$$

які приводять до таких рівнянь

$$A + B = C, \quad (4.44)$$

$$C - A + B = -i2\kappa C, \quad (4.45)$$

де ми ввели позначення $\kappa = \alpha m / \hbar^2 k$. Звідки знаходимо

$$B = -\frac{i\kappa}{1+i\kappa}A, \quad C = \frac{A}{1+i\kappa}. \quad (4.46)$$

Коефіцієнти тунелювання D і відбивання R запишемо

$$D = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{1}{1+\kappa^2}, \quad R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{\kappa^2}{1+\kappa^2}. \quad (4.47)$$

Для напівпрозорого випадку $D = R = 1/2$ і отже $\kappa = \pm 1$. Зауважимо, що для бар'єра будь-якої інтенсивності $C/B = i/\kappa$.

Домовимось позначати стан частинки з амплітудою A зліва від бар'єра через $|0\rangle$, а справа також з амплітудою A — через $|1\rangle$. Тоді у разі налітання частинки зліва на бар'єр (стан $|0\rangle$) процес розсіювання запишемо

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{1+i\kappa}(-i\kappa|0\rangle + |1\rangle) \quad (4.48)$$

а при налітанні справа (стан $|1\rangle$)

$$|1\rangle \rightarrow \frac{1}{1+i\kappa}(|0\rangle - i\kappa|1\rangle). \quad (4.49)$$

Як бачимо, дельта-потенціал робить певні перетворення над кубітом. Унітарний оператор, який відповідає цьому перетворенню у матричному вигляді, запишемо

$$\hat{U}(\kappa) = \frac{1}{1+i\kappa} \begin{pmatrix} -i\kappa & 1 \\ 1 & -i\kappa \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Для напівпрозорого бар'єра при $\kappa = 1$ ($\alpha > 1$) цей унітарний оператор з точністю до сталої фази збігається $\hat{U}_{\sqrt{\text{NOT}}}$

$$\hat{U}(1) = -i \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = -i \hat{U}_{\sqrt{\text{NOT}}}. \quad (4.51)$$

Отож напівпрозорий бар'єр чи подібно напівпрозоре дзеркало для фотона реалізовує однокубітовий $\hat{U}_{\sqrt{\text{NOT}}}$ оператор.

В границі $\alpha \rightarrow \infty$, який відповідає $\kappa \rightarrow \infty$, бар'єр повністю відбиває частинки. Відповідно до (4.48) і (4.49) в границі $\kappa \rightarrow \infty$ у разі налітання частинки зліва на бар'єр одержуємо

$$|0\rangle \rightarrow -|0\rangle \quad (4.52)$$

а при налітання справа (стан $|1\rangle$)

$$|1\rangle \rightarrow -|1\rangle. \quad (4.53)$$

Цьому перетворенню відповідає унітарний оператор

$$\hat{U}(\infty) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = e^{i\pi} \hat{1}, \quad (4.54)$$

тут $e^{i\pi} = -1$ відповідає за зміну фази на π під час відбивання від нескінченного бар'єра.

Розглянемо послідовне розсіяння на двох напівпрозорих бар'єрах, як зображено на рис. 4.1. Рух вздовж вертикальної осі є вільний. Ця схема відповідає інтерферометру Маха–Цандера для фотонів. Унітарний оператор, який відповідає перетворенню кубіта в цьому випадку, запишемо

$$\hat{U}(1)\hat{U}(\infty)\hat{U}(1) = -\hat{U}(1)^2 = \hat{U}_{\sqrt{\text{NOT}}}^2 = \hat{U}_{\text{NOT}}. \quad (4.55)$$

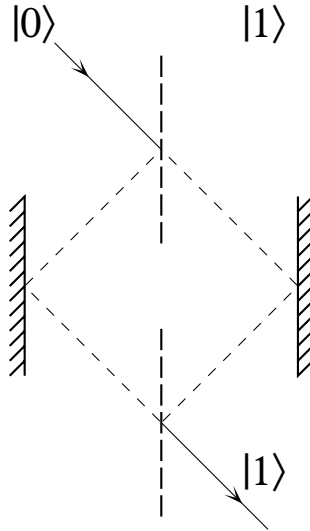


Рис. 4.1: Фізична реалізація квантового NOT-оператора.

Бачимо, що з допомогою інтерферометра Маха–Цандера можемо реалізувати $\hat{U}_{\text{NOT}}$ оператор.

На завершення цього параграфу зазначимо, що інтерференцію променів в інтерферометрі Маха–Цандера можна дослідити в простий спосіб, проаналізувавши зсув фаз між лівим і правим променем. Розглянемо наприклад імовірність потрапляння фотона в лівий детектор (рис. 4.1), якщо в інтерферометр фотон потрапляє також зліва. Між променем, який пройшов і променем, що відбився від напівпрозорого дзеркала, є зсув фаз на $\pi/2$. Тоді із рисунка бачимо, що зсув фаз між лівим і правим променем, які попадають в лівий детектор є π . Це означає, що промені повністю гасяться і імовірність фотона потрапити в лівий детектор рівна нулю. Таким чином, якщо фотон потрапляє в інтерферометр зліва, то на виході спрацює правий детектор, і навпаки.

4.5 Однокубітовий квантовий комп'ютер

З допомогою інтерферометра Маха–Цандера та квантового оракула можемо реалізувати однокубітовий комп'ютер, який розв'язує задачу Дойча для функції одної змінної.

Роль оракула виконує чорна скринька з двома наскрізними отворами. Лівий отвір відповідає за значення функції в нулі, а правий — в одиниці у такий спосіб. Під час проходження крізь лівий отвір фотон міняє фазу на $\pi f(0)$, тобто амплітуда множиться на $e^{i\pi f(0)} = (-1)^{f(0)}$, а при проходженні крізь правий — на $e^{i\pi f(1)} = (-1)^{f(1)}$. Для обчислення значення функції в нулі ми пускаємо промінь крізь лівий отвір. Якщо фаза не змінилася, то $f(0) = 0$, якщо змінилася на π , то $f(0) = 1$. Аналогічно для обчислення значення функції $f(1)$ пускаємо промінь крізь правий отвір. Отже, для отримання відповіді про значення функції $f(0)$ чи $f(1)$ ми пускаємо промінь в лівий чи правий отвори, відповідно.

У класичному випадку для того, щоби відповісти на питання про клас функції (змінна чи постійна) нам потрібно двічі звернутися до оракула. Перший раз пустити промінь на лівий отвір і дізнатись $f(0)$, другий раз — на правий і дізнатись $f(1)$.

Якщо на вхід оракула ми пустимо певну суперпозицію лівого і правого променів, що відповідає певному кубіту $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, то на виході отримаємо новий кубіт у стані $|\psi'\rangle = a(-1)^{f(0)}|0\rangle + b(-1)^{f(1)}|1\rangle = \hat{U}_f|\psi\rangle$, де унітарний оператор має вигляд

$$\hat{U}_f = \begin{pmatrix} (-1)^{f(0)} & 0 \\ 0 & (-1)^{f(1)} \end{pmatrix}.$$

В цьому випадку говорять, що ми маємо квантовий оракул, який розуміє питання мовою кубітів і дає відповідь також цією мовою.

Квантовий комп'ютер дає змогу за одне звернення до оракула відповісти на питання про клас функції. Схема його зображена на рис. 4.2. Цій схемі відповідає такий ланцюжок операторів:

$$\hat{U}(1)\hat{U}_f e^{i\pi} \hat{U}(1) = \hat{U}_{\sqrt{\text{NOT}}} \hat{U}_f \hat{U}_{\sqrt{\text{NOT}}} =$$

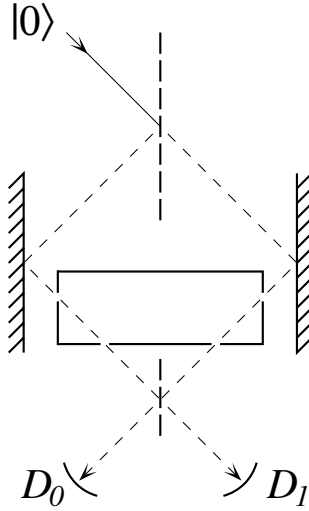


Рис. 4.2: Фізична реалізація схеми Дойча.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{f(0)} & 0 \\ 0 & (-1)^{f(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{-i}{2} ((-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} ((-1)^{f(0)} + \\
 &+ (-1)^{f(1)}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.56}
 \end{aligned}$$

Приготуємо початковий стан $|0\rangle$, що відповідає лівому вхідному променю. На виході отримаємо

$$\begin{aligned}
 &\hat{U}_{\sqrt{\text{NOT}}} \hat{U}_f \hat{U}_{\sqrt{\text{NOT}}} |0\rangle = \\
 &= \frac{-i}{2} ((-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}) |0\rangle + \frac{1}{2} ((-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}) |1\rangle. \tag{4.57}
 \end{aligned}$$

Звідси бачимо, що для постійної функції $f(0) = f(1)$ вихідний стан пропорційний до $|1\rangle$, тобто маємо правий вихідний промінь. Для змінної функції $f(0) \neq f(1)$ вихідний стан пропорційний до

$|0\rangle$, тобто маємо лівий вихідний промінь. Отже, якщо спрацював правий детектор D_1 , то функція є стала, якщо спрацював лівий детектор D_0 , то функція змінна. Звернемо увагу на те, що квантовий комп'ютер розв'язав задачу Дойча для функції одної змінної за одне обчислення (одне звертання до оракула). Тоді як у класичному випадку для цього потрібно двічі звернутися до оракула по два значення функції для двох значень аргументів.

Розділ 5

Вимірювання у квантовій механіці

5.1 Вимірювання проекції спіну на заданий напрям. Експеримент Штерна–Герлаха

Ми часто розглядали вимірювання проекції спіну частинки на заданий напрям. Тому важливо хоча би схематично описати реальний експеримент, який дає змогу виміряти проекцію спіну частинки на заданий напрям. Такий експеримент уперше провели О. Штерн і В. Герлах (O. Stern, W. Gerlach) у 1922 р. У цьому експерименті промінь атомів срібла пропускали крізь неоднорідне магнітне поле. Як наслідок промінь розщеплювався на два і на екрані спостерігали дві чіткі розділені позначки. Класична фізика не давала пояснення цьому явищу. Тільки квантова механіка пояснила цей експеримент і пов'язала його з наявністю спіну $s = 1/2$ для атома срібла. Нехай атоми рухаються вздовж осі x , магнітне поле спрямоване вздовж осі z і є неоднорідне. У лінійному наближенні за неоднорідністю

$$B_z(z) = B_0 + B'z, \quad B' = \left. \frac{\partial B_z(z)}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (5.1)$$

Енергія взаємодії магнітного моменту $\boldsymbol{\mu}$ з магнітним полем $\mathbf{B}$ дорівнює

$$\hat{V} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}. \quad (5.2)$$

де $\boldsymbol{\mu} = -g\mu_0\mathbf{s}/\hbar$, g — фактор Ланде, μ_0 — магнетон Бора. Для нейтральної частинки зі спіном $s = 1/2$ Гамільтоніан запишемо

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + (b_0 + b'z)\sigma_z, \quad (5.3)$$

де ми ввели позначення $b_0 = g\mu_0 B_0/2$, $b' = g\mu_0 B'/2$. Потенціальна енергія залежить тільки від z . Тому розщеплення променя нейтральних частинок, які вільно рухаються вздовж осі x , відбувається по осі z . Розглянемо рівняння руху Гайзенберга для координати частинки z

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p_z}{m}, \quad (5.4)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -b'\sigma_z, \quad (5.5)$$

$$\frac{d\sigma_z}{dt} = 0. \quad (5.6)$$

Звідки знаходимо

$$z(t) = -\frac{b't^2}{2m}\sigma_z + \frac{p_{z,0}}{m}t + z_0, \quad (5.7)$$

де z_0 і $p_{z,0}$ — оператори координати та імпульсу в початковий момент $t = 0$. Для масивних частинок ці оператори можемо замінити класичними величинами, які в початковий момент дорівнює нулю. Тому оператор координати $z(t)$ при $z_0 = 0$ і $p_{z,0} = 0$ пропорційний до z -компоненті матриці Паулі. Отже вимірювання координати z еквівалентне вимірюванню проєкції спіну на вісь z (напрямок магнітного поля). Оскільки σ_z має два власні значення ± 1 , то промінь розщеплюється на два. Величина розщеплення

променя, тобто відстань між розщепленими променями, дорівнює

$$\Delta z = b't^2 = \frac{g\mu_0 t^2}{2} \left. \frac{\partial B_z(z)}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (5.8)$$

де t — час руху атома у неоднорідному магнітному полі.

Власне, розщеплення променя на два свідчить про наявність у частинки спіну $s = 1/2$. Якщо б частинка володіла класичним магнітним моментом, то ми б спостерігали просто розмиття променя, пов'язане з наявністю у промені частинок з різним нахилом класичного магнітного моменту до магнітного поля і, відповідно, різними силами, що діють на частинки.

5.2 Чи можна виміряти квантовий стан

Нехай спіновий стан частинки заданий певним невідомим нам вектором. Довільний одночастинковий вектор стану з точністю до постійної фази $e^{i\alpha}$ запишемо

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + be^{i\phi}|\downarrow\rangle, \quad (5.9)$$

де a, b — дійсні додатні величини, які задовольняють умову нормування $a^2 + b^2 = 1$. Цей вектор, помножений на $e^{i\alpha}$ (α — постійна фаза), а саме, $e^{i\alpha}|\psi\rangle$, задає той самий фізичний стан. Тому виявити на експерименті $e^{i\alpha}$ є неможливим.

Поставимо питання чи можна визначити на експерименті спіновий стан (5.9) з точністю до сталої фази. Відповідь на це питання позитивна. Параметри вектора стану a, b, ϕ можна пов'язати з середніми значеннями z та x компонент оператора спіну, які вимірюються в досліді Штерна–Герлаха

$$\langle\sigma_z\rangle = a^2 - b^2, \quad (5.10)$$

$$\langle\sigma_x\rangle = 2ab \cos \phi. \quad (5.11)$$

Звідки з урахуванням умови нормування знаходимо

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \langle \sigma_z \rangle}, \quad (5.12)$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \langle \sigma_z \rangle}, \quad (5.13)$$

$$\cos \phi = \frac{\langle \sigma_x \rangle}{\sqrt{1 - \langle \sigma_z \rangle^2}}. \quad (5.14)$$

Отже, вектор стану визначається через середні значення спіну, для експериментального визначення яких, потрібно мати чистий ансамбль станів. Вектор стану одної квантової системи визначити не можна.

Розглянемо задачу про вимірювання вектора стану у випадку, коли відома певна інформація про нього. Нехай відомо, що спін перебуває в одному із станів $|\psi_1\rangle = |\psi_{\mathbf{a}}^+\rangle$ або $|\psi_2\rangle = |\psi_{\mathbf{b}}^+\rangle$. Тут кожен зі станів ми представили як власний стан оператора проекції спіну з додатним власним значенням на напрям $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$. Власні стани оператора проекції спіну на напрям $\mathbf{a}$ виразимо через власні стани оператора проекції спіну на напрям $\mathbf{b}$, і навпаки. Нехай вісь z спрямована вздовж напрямку $\mathbf{a}$. Напрямок $\mathbf{b}$ в цій системі координат визначаємо кутами ϕ і θ , і згідно з (2.14) і (2.15), маємо

$$|\psi_{\mathbf{b}}^+\rangle = \cos(\theta/2)|\psi_{\mathbf{a}}^+\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\phi}|\psi_{\mathbf{a}}^-\rangle, \quad (5.15)$$

$$|\psi_{\mathbf{b}}^-\rangle = -\sin(\theta/2)e^{-i\phi}|\psi_{\mathbf{a}}^+\rangle + \cos(\theta/2)|\psi_{\mathbf{a}}^-\rangle. \quad (5.16)$$

Звідси знаходимо зворотний зв'язок

$$|\psi_{\mathbf{a}}^+\rangle = \cos(\theta/2)|\psi_{\mathbf{b}}^+\rangle - \sin(\theta/2)e^{i\phi}|\psi_{\mathbf{b}}^-\rangle, \quad (5.17)$$

$$|\psi_{\mathbf{a}}^-\rangle = \sin(\theta/2)e^{-i\phi}|\psi_{\mathbf{b}}^+\rangle + \cos(\theta/2)|\psi_{\mathbf{b}}^-\rangle. \quad (5.18)$$

Нехай експериментатор створив один із можливих квантових станів, наприклад $|\psi_{\mathbf{b}}^+\rangle$. Він знає в якому стані є спін. Проте ми

цього не знаємо. Перед нами стоїть завдання, провівши певні вимірювання над системою, встановити в якому стані: $|\psi_{\mathbf{a}}^+\rangle$ чи $|\psi_{\mathbf{b}}^+\rangle$. Цікаво, що в цій задачі існує можливість визначити стан спіну за один вимір. Виберемо з однаковою імовірністю $p = 1/2$ один із двох напрямів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Нехай ми вибрали $\mathbf{b}$. Під час вимірювання проекції спіну, що є у стані $|\psi_{\mathbf{b}}^+\rangle$, на напрям $\mathbf{b}$ ми отримаємо додатне значення $+1$. Такий самий результат ми можемо одержати і у випадку, коли спин перебував у стані $|\psi_{\mathbf{a}}^+\rangle$. Тому не можемо сказати, в якому стані є спин. Імовірність цього негативного результату $p = 1/2$.

Нехай ми вибрали напрям $\mathbf{a}$. При вимірюванні проекції спіну, що перебуває у стані $\psi_{\mathbf{b}}^+$, на напрям $\mathbf{a}$ ми отримаємо з імовірністю $\cos^2(\theta/2)/2$ додатну проекцію. Множник $1/2$ — це імовірність вибору напрямку $\mathbf{a}$. У цьому випадку ми знову нічого не можемо сказати про стан спіну. З імовірністю $\sin^2(\theta/2)/2$ ми отримаємо від'ємну проекцію. Це є той щасливий випадок, коли ми точно можемо сказати, в якому стані є спин. Від'ємну проекцію на напрям $\mathbf{a}$ отримаємо тільки в єдиному випадку, а саме, коли спин перебуває в стані $\psi_{\mathbf{b}}^+$. Отже, імовірність за одне вимірювання дізнатися в якому стані є спин

$$p_1 = \frac{1}{2} \sin^2(\theta/2). \quad (5.19)$$

Імовірність, що ми не зможемо відповісти на питання про стан спіну за одне вимірювання

$$p_0 = \frac{1}{2}(1 + \cos^2(\theta/2)). \quad (5.20)$$

Тепер ми легко можемо знайти імовірність отримати відповідь на питання про стан спіну за n вимірювань. Нехай експериментатор створив n копій спіну в певному стані. Тоді імовірність отримати негативну відповідь на питання про стан дорівнює p_0^n . Імовірність того, що за n експериментів ми точно встановили стан, в якому є спин, дорівнює

$$p_n = 1 - p_0^n = 1 - \frac{1}{2^n}(1 + \cos^2(\theta/2))^n. \quad (5.21)$$

При великих n імовірність точно встановити стан різко зростає і прямує до одиниці.

При $n = 1$ ми повертаємось до (5.19). Проаналізуємо детально цей результат. Звернемо увагу, що при $\mathbf{b} \rightarrow -\mathbf{a}$, тобто $\theta \rightarrow \pi$ імовірність точно встановити стан за одне вимірювання $p_1 \rightarrow 1/2$. З іншого боку, при $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ ($\theta = \pi$) з (5.15) маємо $|\psi_{\mathbf{b}}^+\rangle = e^{i\phi}|\psi_{\mathbf{a}}^-\rangle$ і, отже, два стани, в яких може бути спін, є ортогональні один до другого і є власними станами оператора проекції спіну на напрям $\mathbf{a}$ з додатним та від'ємним власним значенням, відповідно. Тоді за одне вимірювання можемо точно, з імовірністю одиниця, сказати в якому стані є спін. Якщо в ході вимірювання ми отримали додатну проекцію спіну на $\mathbf{a}$, то спін є в стані $|\psi_{\mathbf{a}}^+\rangle$, якщо від'ємну — то спін є у стані $|\psi_{\mathbf{a}}^-\rangle$. Як бачимо, $\lim \theta \rightarrow \pi$ дає імовірність $p_1 = 1/2$ отримати позитивну відповідь, а при точному значенні $\theta = \pi$ з імовірністю $p_1 = 1$ знаємо, в якому стані спін. На перший погляд видається, що ми отримали суперечливий результат. Проте і перший, і другий результат є правильним і в цьому випадку границя $\lim \theta \rightarrow \pi$ не збігається зі значенням при $\theta = \pi$. Причиною цього є таке. Навіть нескінченно мале відхилення θ від π спричинює те, що стан $|\psi_{\mathbf{b}}^+\rangle$, хоч і прямує до $|\psi_{\mathbf{a}}^-\rangle$, може дати поряд з негативною проекцією також додатну проекцію на напрям $\mathbf{a}$. Тому отримавши під час вимірювання проекції спіну на напрям $\mathbf{a}$ додатне значення, ми не можемо гарантувати (дати достовірну відповідь), що система є саме в стані $|\psi_{\mathbf{a}}^+\rangle$. І тільки коли отримаємо від'ємну проекцію на $\mathbf{a}$, ми гарантовано можемо сказати, що це спричинив стан $|\psi_{\mathbf{b}}^+\rangle$, а не $|\psi_{\mathbf{a}}^+\rangle$. А це може відбутися з імовірністю $1/2$. Тому і виходить різниця між границею $\lim \theta \rightarrow \pi$ та точним значенням $\theta = \pi$.

5.3 Вимірювання без взаємодії

Поставимо запитання, яке на перший погляд виглядає дивним, принаймні з класичного погляду: Чи можна виявити наявність абсолютно чутливої бомби всередині чорної скриньки так, щоб вона не вибухнула? Класична фізика дає негативну відповідь на

це запитання. З її погляду будь-яке вимірювання, проведене для виявлення бомби, означає взаємодію з нею. Оскільки бомба є абсолютно чутливою, то навіть зникаючі мала взаємодія спричинить її вибух. Квантова фізика дає позитивну відповідь на поставлене запитання, як парадоксально би це не виглядало.

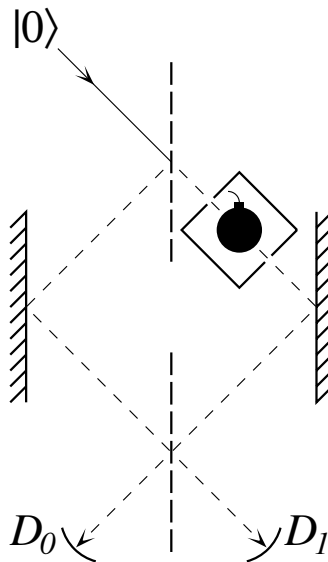


Рис. 5.1: Схема виявлення абсолютно чутливої бомби.

Розглянемо схему, зображену на рис. 5.1. Чорна скринька, в якій може бути бомба, розміщена у правому плечі інтерферометра Маха–Цандера. Скринька містить вхідний і вихідний отвори для фотона. Нехай фотон потрапляє на перше (верхнє) дзеркало інтерферометра зліва. Якщо бомби немає, то внаслідок інтерференції, як показано у параграфі 4.5, фотон потрапить у детектор D_1 . Проаналізуємо, що трапиться за наявності бомби. Інтерференція при цьому порушується. Внаслідок розсіювання на першому напівпрозорому дзеркалі фотон з однаковою імовірністю $1/2$ пройде чи відіб'ється від нього. Під час проходження крізь дзеркало фотон потрапить на бомбу і вона вибухне. Отож, у цьому експерименті

з імовірністю $1/2$ бомба вибухне. У разі відбивання від першого дзеркала фотон потрапляє далі на друге напівпрозоре дзеркало і, отже, з імовірністю $1/4$ спрацює лівий детектор D_0 і з імовірністю $1/4$ — правий детектор D_1 .

Якщо спрацював правий детектор, то ми нічого не можемо сказати про наявність чи відсутність бомби, бо детектор D_1 завжди спрацює (з імовірністю 1) за відсутності бомби, а також може спрацювати і за умови її наявності. Детектор D_0 може спрацювати лише за наявності бомби, бо при її відсутності працює тільки детектор D_1 . Отже, якщо спрацював детектор D_0 , то бомба точно є в чорній скриньці. При цьому бомба не вибухнула, оскільки фотон потрапив в детектор D_0 лівим плечем інтерферометра і ніяк не провзаємодіяв з нею.

Висновок є такий. Якщо нам пощастило (імовірність $1/4$) і спрацював лівий детектор D_0 , то бомба точно наявна у чорному ящику і вона не вибухнула. Якщо спрацював правий детектор D_1 (імовірність $1/4$), то ми не знаємо відповіді на питання. І нарешті, в половині експериментів (імовірність $1/2$) нам не пощастить і бомба вибухне.

У випадку, коли спрацював детектор D_1 (імовірність $1/4$), і ми не знаємо відповіді на питання, можемо повторити експеримент. Продовжуючи у такий спосіб ланцюжок експериментів знаходимо, що імовірність виявити бомбу так, щоб вона не вибухнула, дорівнює

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{3}, \quad (5.22)$$

а імовірність того, що бомба вибухне в результаті експериментів, становить $2/3$.

Розділ 6

Геометрія простору квантових станів

6.1 Відстань між квантовими станами

У цьому параграфі ми означимо відстань між квантовими станами. Скористаємося аксіоматичним підходом. Відстань між квантовими станами $|\psi_1\rangle$ і $|\psi_2\rangle$ повинна задовольняти такі властивості

$$d(|\psi_1\rangle, |\psi_1\rangle) = 0, \quad d(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) > 0, \quad \text{коли } |\psi_1\rangle \neq |\psi_2\rangle, \quad (6.1)$$

$$d(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = d(|\psi_2\rangle, |\psi_1\rangle), \quad (6.2)$$

$$d(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) \leq d(|\psi_1\rangle, |\psi_3\rangle) + d(|\psi_3\rangle, |\psi_2\rangle). \quad (6.3)$$

Найсуттєвіші обмеження на можливі означення відстані $d(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle)$ накладає нерівність трикутника (6.3). Наведемо приклади відстаней, які найчастіше використовуються.

Відстань Фубіні–Студі (Fubini–Study) означена так

$$d^{(\text{FS})}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = \gamma \sqrt{1 - |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2}, \quad (6.4)$$

γ — довільний множник, який з міркувань зручності часто вибирають 1, 2, чи $\sqrt{2}$.

Інше означення відстані між квантовими станами ґрунтується на узагальненні на квантовий випадок відстані між векторами.

Оскільки у квантовому випадку вектор стану визначений з точністю до довільної фази ϕ , то природно означити відстань як мінімально можливу

$$d^{(\min)}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = \gamma \inf_{\phi} ||\psi_1\rangle - e^{i\phi}|\psi_2\rangle|. \quad (6.5)$$

Запишемо скалярний добуток у вигляді

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = e^{i\alpha}|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|. \quad (6.6)$$

Тоді

$$d^{(\min)}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = \gamma \inf_{\phi} \sqrt{2 - 2 \cos(\phi + \alpha) |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|}. \quad (6.7)$$

Цей вираз досягає мінімального значення при $\cos(\phi + \alpha) = 1$ і, отже

$$d^{(\min)}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = \gamma \sqrt{2(1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|)}. \quad (6.8)$$

Ще одне означення відстані між квантовими станами було запропоновано Вуттерсом (Wootters)

$$d^{(W)}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = \gamma \arccos |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|. \quad (6.9)$$

Ця відстань має зміст кута між векторами станів.

Зауважимо, що для випадку двох близьких станів введені означення стають еквівалентними. Нехай

$$|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 = 1 - \delta^2, \quad (6.10)$$

де δ є малою величиною. Тоді в лінійному наближенні за δ знаходимо

$$d^{(\text{FS})}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = d^{(\min)}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = d^{(W)}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = \gamma\delta. \quad (6.11)$$

Отже, усі три означення для близьких станів $|\psi_1\rangle$ і $|\psi_2\rangle$ повністю збігаються.

На завершення цього параграфа розглянемо змішані стани. Одне із найпростіших означень відстані між двома змішаними станами ґрунтується на нормі Гільберта–Шмідта (Hilbert–Schmidt)

$\|\hat{A}\|_2 \equiv \sqrt{\text{Sp}(\hat{A}^+ \hat{A})}$. Відстань Гільберта–Шмідта між двома змішаними станами, які описуються матрицями густини $\hat{\rho}_1$ і $\hat{\rho}_2$ означена так

$$\begin{aligned} d^{(HS)}(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) &= \gamma' \|(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_2)\|_2 = \gamma' \sqrt{\text{Sp}(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_2)^2} = \\ &= \gamma' \sqrt{\text{Sp} \hat{\rho}_1^2 + \text{Sp} \hat{\rho}_2^2 - 2 \text{Sp} \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

У граничному випадку, коли $\hat{\rho}_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ і $\hat{\rho}_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ описують чисті стани, знаходимо

$$\begin{aligned} d^{(HS)}(|\psi_1\rangle\langle\psi_1|, |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) &= \gamma' \sqrt{2} \sqrt{1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2} = \\ &= \frac{\gamma' \sqrt{2}}{\gamma} d^{(FS)}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Бачимо, що для чистих станів відстань Гільберта–Шмідта (6.12) збігається з відстанню Фубіні–Студі (6.4) при $\gamma' \sqrt{2} = \gamma$.

Огляд проблеми відстані між квантовими станами можна знайти у праці [15].

6.2 Метрика простору квантових станів

Розглянемо диференціальну метрику простору чистих квантових станів. Нехай квантовий стан $|\psi\rangle = |\psi(\xi)\rangle$ характеризується сукупністю дійсних параметрів $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^k)$. Для n -вимірного квантового простору $k = 2(n - 1)$. Справді, довільний квантовий стан можна розкласти за n базисними векторами. При цьому маємо n комплексних коефіцієнтів розкладу, або $2n$ дійсних параметрів. Умова нормування і те, що квантовий стан визначений з точністю до сталої фази, незалежними залишають $2n - 2$ дійсних параметри.

Уведені в попередньому параграфі відстані між квантовими станами для близьких станів збігаються. Тому не має значення яким означенням скористатись. Розглянемо квадрат відстані Фубіні–Студі між двома близькими квантовими станами

$$ds^2 = \gamma^2 (1 - |\langle\psi(\xi)|\psi(\xi + d\xi)\rangle|^2). \quad (6.14)$$

Розкладемо стан в ряд Тейлора з точністю до другого порядку за $d\xi$

$$|\psi(\xi + d\xi)\rangle = |\psi\rangle + |\psi_i\rangle d\xi^i + \frac{1}{2}|\psi_{ij}\rangle d\xi^i d\xi^j, \quad (6.15)$$

де

$$|\psi_i\rangle = \frac{\partial}{\partial \xi^i} |\psi\rangle, \quad |\psi_{ij}\rangle = \frac{\partial^2}{\partial \xi^i \partial \xi^j} |\psi\rangle, \quad (6.16)$$

за двома однаковими індексами, які повторюються, відбувається сумування. Знаходимо

$$\begin{aligned} |\langle\psi(\xi)|\psi(\xi + d\xi)\rangle|^2 &= \left| 1 + \langle\psi|\psi_i\rangle d\xi^i + \frac{1}{2}\langle\psi|\psi_{ij}\rangle d\xi^i d\xi^j \right|^2 = \\ &= 1 + (\langle\psi|\psi_i\rangle^* + \langle\psi|\psi_i\rangle) d\xi^i + \\ &+ \left(\langle\psi|\psi_i\rangle^* \langle\psi|\psi_j\rangle + \frac{1}{2}(\langle\psi|\psi_{ij}\rangle + \langle\psi|\psi_{ij}\rangle^*) \right) d\xi^i d\xi^j. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Візьмемо до уваги, що $\langle\psi|\psi_i\rangle^* = \langle\psi_i|\psi\rangle$. Тоді множник біля $d\xi^i$ дорівнює нулю. Справді

$$\langle\psi|\psi_i\rangle^* + \langle\psi|\psi_i\rangle = \langle\psi_i|\psi\rangle + \langle\psi|\psi_i\rangle = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \langle\psi|\psi\rangle = \frac{\partial}{\partial \xi^i} 1 = 0. \quad (6.18)$$

Тому

$$\begin{aligned} |\langle\psi(\xi)|\psi(\xi + d\xi)\rangle|^2 &= \\ &= 1 + \left(\langle\psi|\psi_i\rangle^* \langle\psi|\psi_j\rangle + \frac{1}{2}(\langle\psi|\psi_{ij}\rangle + \langle\psi|\psi_{ij}\rangle^*) \right) d\xi^i d\xi^j = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(\langle\psi|\psi_i\rangle^* \langle\psi|\psi_j\rangle + \langle\psi|\psi_j\rangle^* \langle\psi|\psi_i\rangle + \\ &+ \langle\psi|\psi_{ij}\rangle + \langle\psi|\psi_{ij}\rangle^*) d\xi^i d\xi^j. \end{aligned} \quad (6.19)$$

На останньому етапі перетворень ми симетризували доданок

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi_i\rangle^* \langle\psi|\psi_j\rangle d\xi^i d\xi^j &= \\ &= \frac{1}{2} (\langle\psi|\psi_i\rangle^* \langle\psi|\psi_j\rangle + \langle\psi|\psi_j\rangle^* \langle\psi|\psi_i\rangle) d\xi^i d\xi^j. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Після підстановки (6.19) в (6.14) маємо

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j, \quad (6.21)$$

де метричний тензор

$$g_{ij} = -\frac{\gamma^2}{2} \left(\langle \psi | \psi_i \rangle^* \langle \psi | \psi_j \rangle + \langle \psi | \psi_j \rangle^* \langle \psi | \psi_i \rangle + \right. \\ \left. + \langle \psi | \psi_{ij} \rangle + \langle \psi | \psi_{ij} \rangle^* \right). \quad (6.22)$$

Метричний тензор набуде дещо іншого вигляду, якщо скористатись тотожністю

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \langle \psi | \psi \rangle = \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\langle \psi | \psi_j \rangle + \langle \psi_j | \psi \rangle) = \\ = \langle \psi | \psi_{ij} \rangle + \langle \psi_{ij} | \psi \rangle + \langle \psi_i | \psi_j \rangle + \langle \psi_j | \psi_i \rangle. \quad (6.23)$$

Звідки

$$\langle \psi | \psi_{ij} \rangle + \langle \psi_{ij} | \psi \rangle = -\langle \psi_i | \psi_j \rangle - \langle \psi_j | \psi_i \rangle. \quad (6.24)$$

В результаті метричний тензор одержить вигляд

$$g_{ij} = \frac{\gamma^2}{2} (\langle \psi_i | \psi_j \rangle + \langle \psi_j | \psi_i \rangle - \langle \psi_i | \psi \rangle \langle \psi | \psi_j \rangle - \langle \psi_j | \psi \rangle \langle \psi | \psi_i \rangle) = \\ = \gamma^2 \text{Re} (\langle \psi_i | \psi_j \rangle - \langle \psi_i | \psi \rangle \langle \psi | \psi_j \rangle). \quad (6.25)$$

6.3 Метрика двовимірного квантового простору

Розглянемо двовимірний квантовий простір, прикладом якого може бути простір векторів станів спіну $s = 1/2$. Довільний вектор стану двовимірного простору, згідно з параграфом 2.1, можемо записати так

$$|\psi\rangle = |\psi(\theta, \phi)\rangle = \cos(\theta/2) |\uparrow\rangle + \sin(\theta/2) e^{i\phi} |\downarrow\rangle. \quad (6.26)$$

Роль параметрів ξ у цьому випадку виконують два кути θ і ϕ , які задають точку на сфері Блоха.

Для того, щоби знайти метрику цього квантового простору, обчислимо необхідні похідні

$$|\psi_\theta\rangle = \frac{\partial}{\partial\theta}|\psi(\theta, \phi)\rangle = -\frac{1}{2}\sin(\theta/2)|\uparrow\rangle + \frac{1}{2}\cos(\theta/2)e^{i\phi}|\downarrow\rangle, \quad (6.27)$$

$$|\psi_\phi\rangle = \frac{\partial}{\partial\phi}|\psi(\theta, \phi)\rangle = i\sin(\theta/2)e^{i\phi}|\downarrow\rangle. \quad (6.28)$$

Тоді

$$\langle\psi|\psi_\theta\rangle = 0, \quad \langle\psi|\psi_\phi\rangle = i\sin^2(\theta/2), \quad (6.29)$$

$$\langle\psi_\theta|\psi_\theta\rangle = \frac{1}{4}, \quad \langle\psi_\phi|\psi_\phi\rangle = \sin^2(\theta/2), \quad (6.30)$$

$$\langle\psi_\theta|\psi_\phi\rangle = \frac{i}{2}\cos(\theta/2)\sin(\theta/2). \quad (6.31)$$

Обчислюємо компоненти метричного тензора

$$g_{\theta\theta} = \gamma^2\text{Re}(\langle\psi_\theta|\psi_\theta\rangle - \langle\psi_\theta|\psi\rangle\langle\psi|\psi_\theta\rangle) = \frac{\gamma^2}{4}, \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} g_{\phi\phi} &= \gamma^2\text{Re}(\langle\psi_\phi|\psi_\phi\rangle - \langle\psi_\phi|\psi\rangle\langle\psi|\psi_\phi\rangle) = \\ &= \gamma^2\text{Re}(\sin^2(\theta/2) - \sin^4(\theta/2)) = \frac{\gamma^2}{4}\sin^2\theta, \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} g_{\theta\phi} &= \gamma^2\text{Re}(\langle\psi_\theta|\psi_\phi\rangle - \langle\psi_\theta|\psi\rangle\langle\psi|\psi_\phi\rangle) = \\ &= \gamma^2\text{Re}\frac{i}{2}\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) = 0. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Як наслідок метрика двовимірною квантового простору

$$ds^2 = \frac{\gamma^2}{4}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (6.35)$$

Як бачимо, це є метрика сфери радіусом $\gamma/2$. Зручно вибрати $\gamma = 2$. Тоді (6.35) стає метрикою сфери Блоха одиничного радіуса.

З'ясуємо зміст різних відстаней, означених в параграфі 6.1, для двовимірною квантового простору. При цьому вважатимемо $\gamma = 2$. Для спрощення розглянемо відстань між станом $|\psi_1\rangle = |\uparrow\rangle$ і довільним станом $|\psi_2\rangle = |\psi(\theta, \phi)\rangle$. Зауважимо, що цим станам відповідають точки на сфері Блоха. Тоді

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\uparrow|\psi(\theta, \phi)\rangle = \cos(\theta/2). \quad (6.36)$$

Для відстані Фубіні–Студі маємо

$$d^{(FS)}(|\uparrow\rangle, |\psi(\theta, \phi)\rangle) = 2\sqrt{1 - \cos^2(\theta/2)} = 2\sin(\theta/2). \quad (6.37)$$

Підкреслимо, що це довжина хорди між точками на сфері Блоха, які відповідають квантовим станам $|\psi_1\rangle = |\uparrow\rangle$ і $|\psi_2\rangle = |\psi(\theta, \phi)\rangle$. Зазначимо, що θ — це кут, під яким видно хорду з центра сфери Блоха. Отриманий результат можемо записати у вигляді

$$d^{(FS)} = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|, \quad (6.38)$$

де $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ — вектори на сфері Блоха, кут між якими θ .

Мінімальна відстань

$$d^{(\min)}(|\uparrow\rangle, |\psi(\theta, \phi)\rangle) = 2\sqrt{2(1 - |\cos(\theta/2)|)} = \quad (6.39)$$

$$= 2\sqrt{2(1 - \cos(\theta/2))} = 4\sin(\theta/4),$$

тут ми врахували, що θ змінюється від 0 до π і тому $\cos(\theta/2) \geq 0$. Відстань $d^{(\min)}$ — це сума двох хорд, кожен з яких видно під кутом $\theta/2$.

Відстань Вуттерса

$$d^{(W)}(|\uparrow\rangle, |\psi(\theta, \phi)\rangle) = 2\arccos \cos(\theta/2) = \theta. \quad (6.40)$$

Це є довжина геодезичної (дуги найбільшого кола), проведеної на сфері Блоха між точками, які відповідають квантовим станам $|\psi_1\rangle = |\uparrow\rangle$ і $|\psi_2\rangle = |\psi(\theta, \phi)\rangle$.

Відстані $d^{(FS)}$, $d^{(\min)}$ і $d^{(W)}$ між двома квантовими станами, яким відповідають точки A і B на сфері Блоха, зображені на рисунку. Як видно з рис. 6.1, виконуються такі нерівності

$$d^{(FS)} \leq d^{(\min)} \leq d^{(W)}. \quad (6.41)$$

Хоча ця нерівність доведена для двовимірного квантового простору, вона є справедлива для простору довільної вимірності. Справді, досліджуючи відстань між двома станами, ми можемо обмежитись двовимірним підпростором, до якого вони належать.

Цікаво зауважити, що із визначеного у цьому параграфі змісту відстані Фубіні–Студі між квантовими станами $d^{(FS)}$ є очевидним виконання для неї правила трикутника (6.3).

На завершення цього параграфа розглянемо відстань (6.12) між двома змішаними станами, які у двовимірному випадку задаються матрицями густини

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}), \quad \hat{\rho}_2 = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}), \quad (6.42)$$

де вектори $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$ для змішаних станів розміщені всередині сфери Блоха. Тоді при $\gamma' = \gamma/\sqrt{2} = \sqrt{2}$, коли для чистих станів відстань Гільберта–Шмідта (6.12) збігається з відстанню Фубіні–Студі (6.4), знаходимо

$$\begin{aligned} d^{(HS)}(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) &= \sqrt{2} \sqrt{\text{Sp}(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_2)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\text{Sp}((\mathbf{a} - \mathbf{b})\boldsymbol{\sigma})^2} = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|. \end{aligned} \quad (6.43)$$

При обчисленні ми врахували, що $((\mathbf{a} - \mathbf{b})\boldsymbol{\sigma})^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$ і для двовимірного простору $\text{Sp } \hat{1} = 2$.

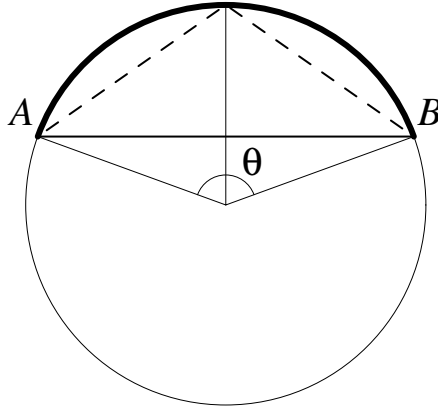


Рис. 6.1: Прямая суцільна лінія — відстань Фубіні–Студі між двома квантовими станами, яким відповідають точки A і B на сфері Блоха, ламана пунктирна — мінімальна відстань, жирна дуга — відстань Вуттерса.

Розділ 7

Еволюція квантової системи

7.1 Швидкість еволюції

Розглянемо еволюцію квантової системи на малому проміжку часу Δt від t до $t + \Delta t$. Миттєву швидкість еволюції квантового стану природно означити так

$$v_\psi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}, \quad (7.1)$$

де Δs позначає відстань між двома квантовими станами

$$\Delta s = d(|\psi(t)\rangle, |\psi(t + \Delta t)\rangle) = \gamma \sqrt{1 - |\langle \psi(t) | \psi(t + \Delta t) \rangle|^2}. \quad (7.2)$$

Нагадаємо, що в параграфі 6.1 ми дали декілька означень відстаней між квантовими станами, які для близьких станів збігаються. Очевидно, що для малого Δt стан $|\psi(t + \Delta t)\rangle$ мало відрізняється від $|\psi(t)\rangle$. Тому у цьому випадку байдуже, яким означенням користуватись. Щоби знайти відстань у просторі станів, яку проходить квантова система під час еволюції за час Δt , обчислимо скалярний добуток, який входить в означення відстані між квантовими станами. Розкладемо $|\psi(t + \Delta t)\rangle$ в ряд Тейлора з точністю

до $(\Delta t)^2$

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle = |\psi(t)\rangle + |\dot{\psi}(t)\rangle \Delta t + \frac{1}{2} |\ddot{\psi}(t)\rangle (\Delta t)^2, \quad (7.3)$$

де ми ввели позначення $|\dot{\psi}(t)\rangle = \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle$, $|\ddot{\psi}(t)\rangle = \frac{\partial^2}{\partial t^2} |\psi(t)\rangle$. З цією ж точністю знаходимо

$$\begin{aligned} |\langle \psi(t) | \psi(t + \Delta t) \rangle|^2 &= \left| 1 + \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle \Delta t + \frac{1}{2} \langle \psi(t) | \ddot{\psi}(t) \rangle (\Delta t)^2 \right|^2 = \\ &= 1 + (\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle + \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle^*) \Delta t + \\ &+ \left(|\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle|^2 + \frac{1}{2} (\langle \psi(t) | \ddot{\psi}(t) \rangle + \langle \psi(t) | \ddot{\psi}(t) \rangle^*) \right) (\Delta t)^2. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle + \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle^* &= \\ &= \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle + \langle \dot{\psi}(t) | \psi(t) \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \frac{\partial}{\partial t} 1 = 0, \end{aligned} \quad (7.5)$$

маємо

$$\begin{aligned} |\langle \psi(t) | \psi(t + \Delta t) \rangle|^2 &= \\ &= 1 + \left(|\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle|^2 + \frac{1}{2} (\langle \psi(t) | \ddot{\psi}(t) \rangle + \langle \psi(t) | \ddot{\psi}(t) \rangle^*) \right) (\Delta t)^2. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Підставивши отриманий скалярний добуток в (7.2), знаходимо

$$\Delta s = \gamma \sqrt{-\frac{1}{2} (\langle \psi(t) | \ddot{\psi}(t) \rangle + \langle \psi(t) | \ddot{\psi}(t) \rangle^*) - |\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle|^2} \Delta t. \quad (7.7)$$

Вектор стану еволюціонує згідно з рівнянням Шредінґера

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle. \quad (7.8)$$

Звідки

$$\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\hat{H}(t)|\psi(t)\rangle, \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial^2|\psi(t)\rangle}{\partial t^2} = \frac{1}{i\hbar}\frac{\partial\hat{H}(t)}{\partial t}|\psi(t)\rangle - \frac{1}{\hbar^2}\hat{H}^2|\psi(t)\rangle. \quad (7.10)$$

Підставимо отримані похідні від вектора стану в (7.6) і (7.7). Як наслідок маємо

$$\begin{aligned} & |\langle\psi(t)|\psi(t+\Delta t)\rangle|^2 = \\ & = 1 - \left(\langle\psi(t)|\hat{H}^2|\psi(t)\rangle - \langle\psi(t)|\hat{H}|\psi(t)\rangle^2 \right) \frac{(\Delta t)^2}{\hbar^2} = \\ & = 1 - \langle\psi(t)|(\Delta\hat{H})^2|\psi(t)\rangle \frac{(\Delta t)^2}{\hbar^2} \end{aligned} \quad (7.11)$$

і для шляху еволюції

$$\Delta s = \frac{\gamma}{\hbar} \sqrt{\langle\psi(t)|(\Delta\hat{H})^2|\psi(t)\rangle} \Delta t, \quad (7.12)$$

де оператор флуктуації енергії $\Delta\hat{H} = \hat{H} - \langle\psi(t)|\hat{H}|\psi(t)\rangle$. Під час отримання цього результату ми врахували, що $\frac{\partial\hat{H}(t)}{\partial t}$ є ермітовим оператором і в разі підстановки другої похідної в (7.7) внесок від нього скорочується.

Для швидкості еволюції (7.1) отримуємо

$$v_\psi = \frac{ds}{dt} = \frac{\gamma}{\hbar} \sqrt{\langle\psi(t)|(\Delta\hat{H})^2|\psi(t)\rangle}. \quad (7.13)$$

Маючи швидкість еволюції, можемо знайти шлях, який пройде квантова система під час від часу t_1 до t_2

$$s = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v_\psi dt. \quad (7.14)$$

Звернемо увагу на такий цікавий факт. Якщо гамільтоніан не залежить від часу, то швидкість еволюції є сталою. Це стає зро-

зуміло, коли написати рівняння для оператора квадратичної флуктуації енергії у представленні Гайзенберґа

$$\frac{d(\Delta\hat{H})^2}{dt} = \frac{\partial(\Delta\hat{H})^2}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[(\Delta\hat{H})^2, \hat{H}]. \quad (7.15)$$

Оскільки $[(\Delta\hat{H})^2, \hat{H}] = 0$ і для незалежного від часу гамільтоніану $\frac{\partial(\Delta\hat{H})^2}{\partial t} = 0$, знаходимо $\frac{d(\Delta\hat{H})^2}{dt} = 0$. Це означає, що середньоквадратична флуктуація енергії є сталою під час еволюції квантової системи, якщо гамільтоніан явно не залежить від часу. А це своєю чергою, означає, що в цьому випадку $v_\psi = \text{const}$.

Наприклад, розглянемо швидкість квантової еволюції спіну $s = 1/2$ в магнітному полі з гамільтоніаном

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad (7.16)$$

де ω пропорційна до величини магнітного поля, ϕ і θ — кути сферичної системи координат, які задають напрям магнітного поля $\mathbf{n}$.

Розглянемо стан

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

Для знаходження швидкості еволюції в цьому стані обчислимо

$$\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \cos \theta. \quad (7.18)$$

Далі враховуючи, що $\hat{H}^2 = (\hbar\omega/2)^2$ для квадрата флуктуації енергії, маємо

$$\langle\psi|(\Delta\hat{H})^2|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{H}^2|\psi\rangle - (\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle)^2 = \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 \sin^2 \theta. \quad (7.19)$$

Отже

$$v_\psi = \gamma \frac{\omega}{2} |\sin \theta|. \quad (7.20)$$

Зазначимо, що швидкість еволюції є максимальною $v_{\psi}^{\max} = \frac{\gamma\omega}{2}$, коли $\theta = \pi/2$, тобто магнітне поле перпендикулярне до осі z , вздовж якої напрямлений спін, що перебуває в стані (7.17). Більше того, ця швидкість максимально можлива для цієї системи.

Це можна показати також у такий спосіб. Власні значення гамільтоніану (7.16) дорівнюють $\pm\hbar\omega/2$. Тоді, максимально можливий квадрат флуктуації енергії є

$$\langle\psi|(\Delta\hat{H})^2|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{H}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle^2 \leq \langle\psi|\hat{H}^2|\psi\rangle = (\hbar\omega/2)^2. \quad (7.21)$$

Звідки $\max\langle\psi|(\Delta\hat{H})^2|\psi\rangle = (\hbar\omega/2)^2$ досягається при $\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = 0$. Отже, максимально можлива швидкість еволюції дворівневої системи

$$v_{\psi}^{\max} = \gamma\frac{\omega}{2} = \gamma\frac{\Delta E}{2\hbar}, \quad (7.22)$$

де $\Delta E = \hbar\omega$ — відстань між двома енергетичними рівнями.

7.2 Квантова брахістохрона

Квантову задачу брахістохрони формулюють подібно до класичного випадку. Зафіксуємо вихідний $|\psi_i\rangle$ і кінцевий $|\psi_f\rangle$ стани квантової системи. Потрібно знайти такий оптимальний гамільтоніан з фіксованою відстанню між найбільшою і найменшою власними енергіями, щоб еволюція від фіксованого початкового стану до фіксованого кінцевого стану відбулася за найкоротший час. Така задача була вперше зформульована у праці [21].

Розглянемо насамперед двовимірну квантову систему. Для конкретності нехай це спін $s = 1/2$. Будь-який стан у двовимірному випадку можна охарактеризувати одиничним вектором $\mathbf{a}$, який впирається у сферу Блоха, а саме, будь-який стан може бути представлений як власний стан оператора проєкції спіну на певний напрям $\mathbf{a}$. Виберемо систему координат так, щоб вектор $\mathbf{a}_i$ початкового стану був спрямований вздовж осі z . Тоді початковий стан

$$|\psi_i\rangle = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.23)$$

Кінцевий стан запишемо так

$$|\psi_f\rangle = \cos \frac{\theta_f}{2} e^{-i\phi_f} |\uparrow\rangle + \sin \frac{\theta_f}{2} |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_f}{2} e^{-i\phi_f} \\ \sin \frac{\theta_f}{2} \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

де θ_f, ϕ_f — кути, які задають напрям кінцевого вектора $\mathbf{a}_f$.

Найзагальніший гамільтоніан у двовимірному просторі можемо записати як гамільтоніан спіну в магнітному полі (7.16). Справді, три матриці Паулі плюс одинична матриця утворюють повний базис у просторі матриць 2×2 . Тоді гамільтоніан в двовимірному просторі запишемо як лінійну комбінацію матриць Паулі і одиничної матриці. Проте одинична матриця впливає лише на початок відліку енергії і її можемо не враховувати. Як наслідок одержуємо гамільтоніан (7.16). Оператор еволюції з цим гамільтоніаном зручно представити так

$$e^{-i\hat{H}t/\hbar} = e^{-i\omega(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})t/2} = \cos \frac{\omega t}{2} - i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \sin \frac{\omega t}{2}. \quad (7.25)$$

Нагадаємо, що $\mathbf{n}$ задає напрям магнітного поля, ω пропорційна до величини магнітного поля, яка є фіксованою. Після нескладних обчислень знаходимо еволюцію вектора стану

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi_i\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\omega t}{2} - i \sin \frac{\omega t}{2} \cos \theta \\ -i \sin \frac{\omega t}{2} \sin \theta e^{i\phi} \end{pmatrix} = \\ &= e^{i(\phi-\pi/2)} \begin{pmatrix} (\cos^2 \frac{\omega t}{2} + \sin^2 \frac{\omega t}{2} \cos^2 \theta)^{1/2} e^{i(\alpha-\phi+\pi/2)} \\ \sin \frac{\omega t}{2} \sin \theta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

де

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \frac{\omega t}{2} \cos \theta. \quad (7.27)$$

Вектор стану $|\psi(t)\rangle$ повинен досягнути $|\psi_f\rangle$. Зауважимо, що вектори станів визначені з точністю до постійної фази. Тому $|\psi(t)\rangle$ і $|\psi_f\rangle$ можуть відрізнятися на постійний фазовий множник. З урахуванням цього, порівнюючи (7.26) і (7.24), знаходимо

$$\sin \frac{\omega t}{2} \sin \theta = \sin \frac{\theta_f}{2}, \quad (7.28)$$

$$\phi = \phi_f + \alpha + \pi/2. \quad (7.29)$$

Звідки час еволюції

$$t = \frac{2}{\omega} \arcsin \left(\frac{\sin \theta_f/2}{\sin \theta} \right). \quad (7.30)$$

Найменший час еволюції, який відповідає квантовій брахістохроні, досягається при $\theta = \pi/2$

$$t_{\min} = \frac{\theta_f}{\omega}. \quad (7.31)$$

Тоді $\alpha = 0$ і

$$\phi = \phi_f + \pi/2. \quad (7.32)$$

Отже, квантова брахістохрона реалізується, коли магнітне поле перпендикулярне до осі z : $\theta = \pi/2$ і $\phi = \phi_f + \pi/2$.

Ми знайшли квантову брахістохрону для двовимірного простору. Покажемо, що цей результат є справедливий для квантового простору будь-якої скінченної вимірності n . Виберемо в n -вимірному просторі двовимірний підпростір, в якому розміщені початковий $|\psi_i\rangle$ і кінцевий $|\psi_f\rangle$ вектори стану квантової системи і розглянемо проблему брахістохрони у цьому підпросторі. Задача зводиться до тільки що розглянутої. Проте потрібно показати, що отриманий час є мінімально можливий і у n -вимірному просторі. Оскільки швидкість еволюції v_ψ є постійною, то час еволюції $t = S/v_\psi$, де S — шлях, який пройшла система під час еволюції в просторі квантових станів. Зазначимо, що саме відстань Вуттерса має зміст довжини шляху, який з'єднує стани $|\psi_i\rangle$ і $|\psi_f\rangle$ при русі

по геодезичній. Тобто, відстань Вуттерса — це мінімально можливий шлях між двома квантовими станами $|\psi_i\rangle$ і $|\psi_f\rangle$

$$S_{\min} = d^{(W)} = \gamma \arccos |\langle \psi_f | \psi_i \rangle| = \gamma \frac{\theta_f}{2}. \quad (7.33)$$

Шлях, який пройде квантова система при еволюції, згідно з нерівністю трикутника (6.3), не може бути меншим від (7.33).

Максимально можлива швидкість еволюції квантової системи визначається максимально можливою квадратичною флуктуацією енергії

$$\max \langle (\Delta \hat{H})^2 \rangle = \left(\frac{\Delta E}{2} \right)^2 = \left(\frac{\hbar \omega}{2} \right)^2, \quad (7.34)$$

де $\Delta E = \hbar \omega$ — відстань між найвищим і найнижчим енергетичним рівнем n -вимірної квантової системи. Тоді

$$v_{\psi}^{\max} = \gamma \frac{\max \sqrt{\langle (\Delta \hat{H})^2 \rangle}}{\hbar} = \gamma \frac{\omega}{2} \quad (7.35)$$

і мінімально можливий час еволюції між $|\psi_i\rangle$ і $|\psi_f\rangle$ є

$$t_{\min} = \frac{S_{\min}}{v_{\psi}^{\max}} = \frac{d^{(W)}}{v_{\psi}^{\max}} = \frac{\theta_f}{\omega}. \quad (7.36)$$

Як бачимо, мінімальний час (7.31) точно дорівнює мінімально можливому (7.36). Отже, квантова брахістохрона з мінімально можливим часом реалізовується у підпросторі початкового і кінцевого станів.

Зауважимо, що крім обмеження на фіксовану відстань між найбільшим і найменшим власним значення гамільтоніан може мати низку додаткових обмежень, пов'язаних з розглядом тієї чи іншої квантової системи. Так, наприклад, гамільтоніан спіну $s = 1$, що знаходиться у магнітному полі сталої величини, має тільки два вільні параметри (кути, які задають напрям магнітного поля). Тоді як загальний гамільтоніан у тривимірному гільбертовому просторі представляється ермітовою матрицею 3×3 , яка

містить дев'ять вільних параметрів. З урахуванням одного обмеження, яке фіксує відстань між найбільшою і найменшою власною енергією, маємо вісім вільних параметрів. При накладених додаткових обмеженнях на гамільтоніан квантова брахістохрона не обов'язково реалізовується в підпросторі початкового і кінцевого станів. На прикладі спіну $s = 1$ ця задача була розглянута в [22].

7.3 Ефект Зенона ($Z\eta\nu\nu$, Zeno)

Спостереження, які ми проводимо над класичною системою, не впливають на її стан. Тому ми можемо неперервно стежити за її еволюцією і ніяк не впливати на неї. Зовсім інша картина є у квантовому випадку. Неперервне спостереження за квантовою системою приводить до зупинки еволюції, стан квантової системи перестає змінюватися. Це явище називають квантовим ефектом Зенона або квантовим парадоксом Зенона. Піонерські дослідження в цьому напрямі вперше провів Халфін у 1958 р. (див. огляд [17]). Згодом це явище описали Сударшан (George Sudarshan) і Місра (Baidyanaith Misra) в Техаському університеті в 1977 р. [18] (див. також http://en.wikipedia.org/wiki/Zeno_effect). Історичний огляд квантового ефекту Зенона можна знайти в [19, 20].

Нехай у початковий момент часу квантова система є в стані $|\psi(0)\rangle = |\psi_0\rangle$. Розглянемо еволюцію її протягом часу t , коли через кожні проміжки часу $\Delta t = t/n$ ми проводимо вимірювання над системою, метою якого є з'ясувати, в якому із ортогональних станів $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, \dots, |\psi_i\rangle, \dots$, що утворюють повний базис, знаходиться система. Тут маємо на увазі, що таке вимірювання можна фізично реалізувати. Під час вимірювань прилад проектує стан квантової системи на один із цих станів. Між вимірами квантова система еволюціонує відповідно до рівняння Шредінґера. Нехай на першому проміжку вектор стану еволюціонує від $|\psi_0\rangle$ до $|\psi(\Delta t)\rangle$. Згідно з постулатом про вимірювання імовірність того, що під час вимірювання ми знайдемо систему у стані $|\psi_0\rangle$, дорів-

нює

$$P_0 = |\langle \psi_0 | \psi(\Delta t) \rangle|^2. \quad (7.37)$$

Розглянемо випадок досить великої кількості вимірювань n , які проводяться над системою на проміжку часу від 0 до t . Тоді час унітарної еволюції Δt між сусідніми вимірюваннями є малий. Скориставшись результатом (7.11) з точністю до $(\Delta t)^2$ маємо

$$P_0 = 1 - \frac{(\Delta t)^2}{\hbar^2} \langle \psi_0 | (\Delta \hat{H})^2 | \psi_0 \rangle, \quad (7.38)$$

де $\Delta \hat{H} = \hat{H} - \langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle$.

Знаходимо імовірність того, що після вимірювання система буде в стані $|\psi_i\rangle$, де $(i \neq 0)$. У квадратичному наближенні по Δt і враховуючи ортогональність $\langle \psi_i | \psi_0 \rangle = 0$, маємо

$$\begin{aligned} P_i &= |\langle \psi_i | \psi(\Delta t) \rangle|^2 = |\langle \psi_i | \psi(0) \rangle + \langle \psi_i | \dot{\psi}(0) \rangle \Delta t|^2 = \\ &= |\langle \psi_i | \dot{\psi}(0) \rangle|^2 (\Delta t)^2 = |\langle \psi_i | \hat{H} | \psi_0 \rangle|^2 \frac{(\Delta t)^2}{\hbar^2}, \end{aligned} \quad (7.39)$$

де ми використали рівняння Шредінгера

$$i\hbar |\dot{\psi}(0)\rangle = \hat{H} |\psi(0)\rangle.$$

Очевидно, що сума імовірностей всіх можливостей дорівнює одиниці

$$\sum_i P_i = P_0 + \sum_{i \neq 0} P_i = 1. \quad (7.40)$$

Справді

$$\begin{aligned} \sum_i P_i &= 1 + \frac{(\Delta t)^2}{\hbar^2} \times \\ &\times \left(-\langle \psi_0 | (\Delta \hat{H})^2 | \psi_0 \rangle + \sum_{i \neq 0} |\langle \psi_i | \hat{H} | \psi_0 \rangle|^2 \right) \end{aligned} \quad (7.41)$$

і покажемо, що вираз у круглих дужках дорівнює нулю

$$\begin{aligned}
 & - \langle \psi_0 | (\Delta \hat{H})^2 | \psi_0 \rangle + \sum_{i \neq 0} |\langle \psi_i | \hat{H} | \psi_0 \rangle|^2 = \\
 & = -\langle \psi_0 | \hat{H}^2 | \psi_0 \rangle + \langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle^2 + \sum_{i \neq 0} |\langle \psi_i | \hat{H} | \psi_0 \rangle|^2 = \\
 & = -\langle \psi_0 | \hat{H}^2 | \psi_0 \rangle + \sum_i |\langle \psi_i | \hat{H} | \psi_0 \rangle|^2 = \\
 & = -\langle \psi_0 | \hat{H}^2 | \psi_0 \rangle + \sum_i \langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \hat{H} | \psi_0 \rangle = \\
 & = -\langle \psi_0 | \hat{H}^2 | \psi_0 \rangle + \langle \psi_0 | \hat{H}^2 | \psi_0 \rangle = 0,
 \end{aligned} \tag{7.42}$$

де ми скористались ермітовістю гамільтоніану $\langle \psi_i | \hat{H} | \psi_0 \rangle^* = \langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_i \rangle$ і повнотою сукупності вибраних векторів $\sum_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = 1$.

Знайдемо тепер імовірність того, що в момент часу t після проведення n вимірів квантова система залишиться в стані ψ_0 . З точністю до $(\Delta t)^2$ внесок до цієї імовірності дають вимірювання, в кожному з яких отримуємо стан ψ_0 і ланцюжок результатів вимірювань виглядає так:

$$\psi_0 \rightarrow \psi_0 \rightarrow \psi_0 \cdots \rightarrow \psi_0. \tag{7.43}$$

Якщо в одному з вимірювань отримуємо $|\psi_i\rangle$ ($i \neq 0$), а у всіх інших — $|\psi_0\rangle$, то відповідний ланцюжок набуде вигляду

$$\psi_0 \rightarrow \psi_0 \rightarrow \psi_0 \cdots \rightarrow \psi_0 \rightarrow \psi_i \rightarrow \psi_0 \cdots \rightarrow \psi_0. \tag{7.44}$$

Кожній стрілці від $|\psi_0\rangle$ до $|\psi_0\rangle$ відповідає імовірність P_0 , а стрілці від $|\psi_0\rangle$ до $|\psi_i\rangle$ і від $|\psi_i\rangle$ до $|\psi_0\rangle$ відповідає імовірність P_i . Імовірність процесу (7.44) становить $P_0^{n-2} P_i^2$ і, внаслідок P_i^2 , пропорційна до $(\Delta t)^4$. Існує $N - 1$ способів розмістити $|\psi_i\rangle$ між $|\psi_0\rangle$. Тому імовірність процесів, в яких хоча би в одному з вимірювань отримуємо $|\psi_i\rangle$ ($i \neq 0$), для великих N пропорційна $(\Delta t)^4 N = t^4 / N^3$. З точністю до $(\Delta t)^2 = t^2 / N^2$ ці процеси можемо не враховувати.

Отож з точністю до $(\Delta t)^2$ імовірність отримати в час t стан $|\psi_0\rangle$ визначається процесом (7.43)

$$P = P_0^n = \left(1 - \frac{(\Delta t)^2}{\hbar^2} \langle \psi_0 | (\Delta \hat{H})^2 | \psi_0 \rangle \right)^n \simeq$$

$$\simeq \exp \left(-\frac{t^2}{\hbar^2 n} \langle \psi_0 | (\Delta \hat{H})^2 | \psi_0 \rangle \right). \quad (7.45)$$

В границі $n \rightarrow \infty$, яка відповідає неперервному слідкуванню за квантовою системою, $P \rightarrow 1$. Це означає, що стан квантової системи в цьому випадку не змінюється. Неперервне спостереження за квантовою системою приводить до припинення її еволюції.

7.4 Адіабатична теорема

Адіабатичну теорему відкрили Макс Борн (Max Born) і Владімір Фок у 1928 р. [23]. За цією теоремою квантова система залишається у своєму власному стані, якщо її гамільтоніан змінюється досить повільно і є щілина між власною енергією, що відповідає цьому стану, та іншими енергетичними рівнями.

Нехай гамільтоніан залежить від сукупності параметрів $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, які повільно змінюються в часі

$$\alpha_i = \alpha_i(t/T), \quad (7.46)$$

де T — це є час необхідний, щоби параметри гамільтоніану змінилися від $\alpha_i(0)$ до $\alpha_i(1)$. Границя $T \rightarrow \infty$ відповідає повільній (адіабатичній) зміні параметрів. При зміні параметрів змінюється в часі і сам гамільтоніан

$$\hat{H} = \hat{H}(t/T) = \hat{H}(\alpha_1(t/T), \alpha_2(t/T), \dots, \alpha_n(t/T)). \quad (7.47)$$

Вектор стану задовольняє нестационарне рівняння Шредінгера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H}(t/T) |\psi\rangle. \quad (7.48)$$

Введемо нову часову змінну $\tau = t/T$ і перепишемо рівняння еволюції

$$i\hbar \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \tau} |\psi\rangle = \hat{H}(\tau) |\psi\rangle. \quad (7.49)$$

Шукаємо розв'язок у вигляді

$$|\psi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E(t') dt'} |\phi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} T \int_0^T E(\tau') d\tau'} |\phi\rangle, \quad (7.50)$$

де в експоненті виділені швидкі осциляції в часі і припустимо, що $|\phi\rangle = |\phi(\tau)\rangle$ є плавною функцією часу τ . Для $|\phi\rangle$ отримуємо рівняння

$$E(\tau)|\phi\rangle + i\hbar \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \tau} |\phi\rangle = \hat{H}(\tau)|\phi\rangle. \quad (7.51)$$

В границі великого T , нехтуючи доданками порядку $1/T$, отримуємо таке рівняння

$$E(\tau)|\phi\rangle = \hat{H}(\tau)|\phi\rangle. \quad (7.52)$$

Це є рівняння на власні значення $E(\tau)$ і власні функції $|\phi(\tau)\rangle$ гамільтоніана в заданий момент часу. Оскільки $H(\tau)$ є плавною функцією τ , то власна функція є також плавною функцією τ і наше попереднє припущення про розв'язок (7.50) є правильним. Отже, в адіабатичному наближенні в разі повільній зміні параметрів гамільтоніана розв'язок часового рівняння Шредінгера має вигляд (7.50), де $E(\tau)$ і $|\phi(\tau)\rangle$ задовольняють стаціонарне рівняння Шредінгера у фіксований момент часу. Якщо стан є невироджений, даному енергетичному рівневі відповідає один власний стан, то під час адіабатичної еволюції квантова система перебуватиме в цьому єдиному стані. Ситуація є складнішою у випадку виродження енергетичного рівня, наприклад двократного виродження, коли тому самому власному значенню $E(\tau)$ відповідають два власні вектори $|\phi_1\rangle$ і $|\phi_2\rangle$. Тоді розв'язком на власні значення є також лінійна комбінація

$$|\phi\rangle = c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle, \quad (7.53)$$

де $c_1 = c_1(\tau)$ і $c_2 = c_2(\tau)$ можуть бути різними функціями часу і тоді стан $|\phi\rangle$ під час еволюції може змінюватися. Якщо є нескінченно близькі рівні, то розв'язок нестаціонарного рівняння Шредінгера також треба шукати у вигляді лінійної комбінації власних векторів, які відповідають цим близьким рівням. Тоді квантовий

стан при еволюції може змінюватись як наслідок зміни співвідношення між коефіцієнтами в лінійній комбінації. Тому для адіабатичної теореми важливо, щоби була щілина між власною енергією, що відповідає розгляненому стану, та іншими енергетичними рівнями.

7.5 Фаза Беррі (Berry)

У попередньому параграфі ми визначили адіабатичну теорему, нехтуючи доданками пропорційними $1/T$. Фактично це є нульовий порядок теорії збурень за $1/T$. В цьому параграфі ми розглянемо перший порядок теорії збурень, тобто врахуємо доданки, пропорційні до $1/T$ в першій степені. Шукаємо розв'язок рівняння (7.51) у вигляді

$$|\phi(\tau)\rangle = c(\tau)e^{i\gamma(\tau)} \left(|\phi_0(\tau)\rangle + z(\tau)\frac{1}{T}|\phi_1(\tau)\rangle \right), \quad (7.54)$$

де нормовані на одиницю вектори $|\phi_0(\tau)\rangle$ і $|\phi_1(\tau)\rangle$ відповідають нульовому і першому порядку теорії збурень за $1/T$, $c(\tau)$ — множник нормування, $z(\tau)$ задає лінійну комбінацію двох векторів, $\gamma(\tau)$ називається фазою Беррі. Зазначимо, що вектори $|\phi_0(\tau)\rangle$ і $|\phi_1(\tau)\rangle$ завжди можна вибрати ортогональними один до одного, тобто $\langle\phi_0(\tau)|\phi_1(\tau)\rangle = 0$. Справді, якщо $|\phi_1\rangle = c_1|\phi_0\rangle + c_1'|\phi_1'\rangle$ є лінійною комбінацією $|\phi_0\rangle$ і ортогонального до нього $|\phi_1'\rangle$, то вектор $|\phi_0\rangle$ з першого порядку теорії збурень завжди можна доєднати до того ж самого вектора з нульового порядку. Отже ми приходимо до (7.54) з ортогональними векторами $|\phi_0(\tau)\rangle$ і $|\phi_1(\tau)\rangle$. Для множника нормування знаходимо

$$c(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z(\tau)|^2/T^2}}. \quad (7.55)$$

Підставляємо (7.54) в (7.51). Враховуючи тільки доданки не вище першого порядку по $1/T$, маємо

$$E(\tau)c(\tau)e^{i\gamma(\tau)}|\phi_0(\tau)\rangle + \frac{z(\tau)}{T}E(\tau)c(\tau)e^{i\gamma(\tau)}|\phi_1(\tau)\rangle +$$

$$+\frac{1}{T}i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}c(\tau)e^{i\gamma(\tau)}|\phi_0(\tau)\rangle = \quad (7.56)$$

$$= c(\tau)e^{i\gamma(\tau)}\hat{H}(\tau)|\phi_0(\tau)\rangle + \frac{z(\tau)}{T}c(\tau)e^{i\gamma(\tau)}\hat{H}(\tau)|\phi_1(\tau)\rangle.$$

У нульовому порядку по $1/T$ отримуємо рівняння для $|\phi_0\rangle$

$$E(\tau)|\phi_0\rangle = \hat{H}(\tau)|\phi_0\rangle, \quad (7.57)$$

яке очевидно збігається з (7.52).

В доданках, пропорційних $1/T$, в рівнянні (7.56) з точністю до першого порядку по $1/T$ множник нормування $c(\tau)$ можна замінити нульовим наближенням $c(\tau) = 1$. Тоді, врахувавши перший порядок за $1/T$, одержуємо рівняння

$$E(\tau)z(\tau)e^{i\gamma(\tau)}|\phi_1(\tau)\rangle + i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}e^{i\gamma(\tau)}|\phi_0(\tau)\rangle = \quad (7.58)$$

$$= z(\tau)e^{i\gamma(\tau)}\hat{H}(\tau)|\phi_1(\tau)\rangle.$$

Знайдемо спочатку $\gamma(\tau)$. Помножимо ліву і праву частини цього рівняння на $|\phi_0\rangle$, яка є ортогональною до $|\phi_1\rangle$, і врахуємо, що внаслідок ермітовості гамільтоніану

$$\langle\phi_0|\hat{H}|\phi_1\rangle = \langle\phi_1|\hat{H}|\phi_0\rangle^* = E(\tau)\langle\phi_0|\phi_1\rangle^* = 0. \quad (7.59)$$

Одержуємо рівняння, яке визначає $\gamma(\tau)$

$$\langle\phi_0(\tau)|\frac{\partial}{\partial\tau}e^{i\gamma(\tau)}|\phi_0(\tau)\rangle = 0, \quad (7.60)$$

або

$$i\frac{\partial\gamma(\tau)}{\partial\tau} + \langle\phi_0(\tau)|\frac{\partial}{\partial\tau}|\phi_0(\tau)\rangle = 0. \quad (7.61)$$

Повернемося тепер до вихідного часу $t = T\tau$ і запишемо результат для фази Беррі у вигляді

$$\dot{\gamma} = i\langle\phi_0|\dot{\phi}_0\rangle, \quad (7.62)$$

де введені позначення $\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t}$, $|\dot{\phi}_0\rangle = \frac{\partial}{\partial t}|\phi_0\rangle$.

Для того, щоби знайти з (7.58) $|\phi_1\rangle$, зручно увести ненормований вектор $|\tilde{\phi}_1\rangle = z(\tau)|\phi_1\rangle$, для якого отримуємо рівняння

$$\hat{H}(\tau)|\tilde{\phi}_1(\tau)\rangle - E(\tau)|\tilde{\phi}_1(\tau)\rangle = e^{-i\gamma(\tau)}i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}e^{i\gamma(\tau)}|\phi_0(\tau)\rangle. \quad (7.63)$$

Розв'язавши це неоднорідне рівняння, знайдемо шуканий вектор $|\tilde{\phi}_1\rangle$ і відповідно $|\phi_1\rangle$. Зауважимо, що $|z(\tau)|^2 = \langle\tilde{\phi}_1|\tilde{\phi}_1\rangle$.

Врахуємо, що залежність від часу зумовлена залежністю параметрів гамільтоніану від часу, і розглянемо фазу Беррі

$$\dot{\gamma} = i \sum_{i=1}^n \langle\phi_0(\alpha)|\frac{\partial}{\partial\alpha_i}|\phi_0(\alpha)\rangle\dot{\alpha}_i = i\langle\phi_0(\alpha)|\frac{\partial}{\partial\alpha}|\phi_0(\alpha)\rangle\dot{\alpha}, \quad (7.64)$$

або

$$d\gamma = i\langle\phi_0(\alpha)|\frac{\partial}{\partial\alpha}|\phi_0(\alpha)\rangle d\alpha. \quad (7.65)$$

Звернемо увагу на такий важливий момент. Фаза Беррі γ є нульового порядку по $1/T$, хоча для її отримання потрібно врахувати перший порядок малості по $1/T$.

Нехтуючи доданками $1/T$, еволюцію власного вектора стану запишемо:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E(t')dt' + i\gamma(t)}|\phi_0(t)\rangle, \quad (7.66)$$

де перший доданок в експоненті називають динамічною фазою, а другий — фазою Беррі.

Розглянемо еволюцію квантової системи, під час якої в просторі параметрів α за час T вона здійснює рух по замкнутому контурі C . Тоді $|\phi_0(0)\rangle = |\phi_0(T)\rangle$ і вектор стану в час T є

$$|\psi(T)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^T E(t')dt' + i\gamma(T)}|\phi_0(0)\rangle. \quad (7.67)$$

Хоча гамільтоніан за час T повернувся до свого вихідного, тобто $\hat{H}(T) = \hat{H}(0)$, хвильова функція отримала додаткову фазу, яка називається фазою Беррі

$$\gamma(C) = i \oint_C \langle\phi_0(\alpha)|\frac{\partial}{\partial\alpha}|\phi_0(\alpha)\rangle d\alpha. \quad (7.68)$$

По своїй природі фаза Беррі є геометричною фазою і визначається рухом квантової системи вздовж контура C в просторі параметрів і не залежить від часу T , за який квантова система пройшла цей контур. Якщо фаза не залежить від шляху, то вона називається квантовою топологічною фазою.

Для прикладу розглянемо фазу Беррі для спіну $s = 1/2$ у повільно змінному за напрямом $\mathbf{n}$ магнітному полі, який описується гамільтоніаном (7.16). Нехай спін знаходиться у власному стані з додатнім власним значенням $\hbar\omega/2$ і описується вектором стану

$$|\psi_{\mathbf{n}}^+\rangle = |\psi^+(\phi, \theta)\rangle = \cos(\theta/2)|\uparrow\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\phi}|\downarrow\rangle. \quad (7.69)$$

Нагадаємо, що відповідні власні значення були знайдені в параграфі 2.1 (див. (2.14)). Роль повільно змінних параметрів виконують два кути ϕ і θ . Для знаходження фази Беррі (7.68) обчислимо

$$\frac{\partial}{\partial\phi}|\psi^+(\phi, \theta)\rangle = i\sin(\theta/2)e^{i\phi}|\downarrow\rangle, \quad (7.70)$$

$$\langle\psi^+(\phi, \theta)|\frac{\partial}{\partial\phi}|\psi^+(\phi, \theta)\rangle = i\sin^2(\theta/2), \quad (7.71)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}|\psi^+(\phi, \theta)\rangle = -\frac{1}{2}\sin(\theta/2)|\uparrow\rangle + \frac{1}{2}\cos(\theta/2)e^{i\phi}|\downarrow\rangle, \quad (7.72)$$

$$\langle\psi^+(\phi, \theta)|\frac{\partial}{\partial\theta}|\psi^+(\phi, \theta)\rangle = 0. \quad (7.73)$$

Тоді

$$\gamma(C) = -\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta/2)d\phi. \quad (7.74)$$

У випадку, коли магнітне поле повільно прецесує навколо осі z зі сталим кутом θ , для фази Беррі знаходимо

$$\gamma(C) = -\sin^2(\theta/2) \int_0^{2\pi} d\phi = -2\pi \sin^2(\theta/2). \quad (7.75)$$

На завершення цього параграфу зазначимо, що вперше квантові фази відкрив Ааронов (Aharonov) і Бом (Bohm) ще 1959 р.

(аналіз цього ефекту можна знайти, наприклад, в [24]). Було показано, що заряджена частинка, яка рухається навколо лінії магнітного потоку (тонкого нескінченного соленоїда) набуває квантової топологічної фази. Через двадцять п'ять років Ааронов і Кашер (Casher) визначили, що магнітний диполь, який рухається навколо електрично зарядженої лінії, також набуває квантової топологічної фази. Згодом Хі (He) і МакКеллар (McKellar), і незалежно від них Вілкенс (Wilkins), передбачили існування квантової топологічної фази для електричного диполя, який рухається навколо лінії магнітних зарядів (монополів). Зазначимо, що оскільки в природі не існує магнітних зарядів, було запропоновано кілька фізичних систем, які моделюють лінію магнітних зарядів (див. [25] і літературу там). Виявляється, що квантові фази є загальною рисою будь-якого мультиполя, який рухається в електричному полі. Огляд з цієї тематики та зв'язок між різними квантовими фазами можна знайти в [25, 26, 27].

Розділ 8

Декогеренція

8.1 Спін у флуктуюючому магнітному полі

Розглянемо ансамбль спінів, поміщених у нульове середнє магнітне поле з просторовими флуктуаціями. Кожен зі спінів має своє просторове розміщення і внаслідок просторових флуктуацій поля різні спіни розміщені у різних магнітних полях. Для спрощення припустимо, що напрям магнітного поля не змінюється, а флуктує лише величина магнітного поля. Вибравши напрям поля вздовж осі z , гамільтоніан i -го спіну запишемо

$$H_i = \omega_i s_i^z = \frac{\hbar \omega_i}{2} \sigma_i^z, \quad (8.1)$$

де магнітне поле є пропорційне до ω_i . Імовірність того, що i -ий спін знаходиться у відповідному полі визначається функцією розподілу $P(\omega)$.

Вектор стану кожного зі спінів еволюціонує згідно з гамільтоніаном (8.1)

$$|\psi_i(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_i t/\hbar} |\psi_i(0)\rangle. \quad (8.2)$$

Нехай у початковий момент часу всі спіни перебувають у тому самому стані

$$|\psi_i(0)\rangle = |\psi(0)\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle \quad (8.3)$$

і утворюють чистий ансамбль, де умова нормування $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Для еволюції вектора стану знаходимо

$$|\psi_\omega(t)\rangle = ae^{-i\omega t/2}|\uparrow\rangle + be^{i\omega t/2}|\downarrow\rangle, \quad (8.4)$$

де кожному зі спінів відповідає своя частота $\omega = \omega_i$.

Ансамбль спінів визначається матрицею густини

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\psi_{\omega_i}(t)\rangle \langle \psi_{\omega_i}(t)| = \\ &= \int d\omega P(\omega) |\psi_\omega(t)\rangle \langle \psi_\omega(t)| = \langle |\psi_\omega(t)\rangle \langle \psi_\omega(t)| \rangle_\omega, \end{aligned} \quad (8.5)$$

де $\langle \cdots \rangle_\omega$ означає усереднення за величиною магнітного поля з функцією розподілу $P(\omega)$. Тоді матрицю густини запишемо

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= |a|^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| + |b|^2 |\downarrow\rangle \langle \downarrow| + \\ &+ ab^* \langle e^{-i\omega t} \rangle_\omega |\uparrow\rangle \langle \downarrow| + a^* b \langle e^{i\omega t} \rangle_\omega |\downarrow\rangle \langle \uparrow|, \end{aligned} \quad (8.6)$$

або в матричному вигляді, де за базисні вектори вибрано $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \langle e^{-i\omega t} \rangle_\omega \\ a^* b \langle e^{i\omega t} \rangle_\omega & |b|^2 \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Наголосимо на тому, що у початковий момент часу $t = 0$ матриця густини

$$\hat{\rho}(0) = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^* b & |b|^2 \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

відповідає чистому ансамблю, в якому кожен спін є в тому самому стані (8.3). Цей стан є суперпозицією станів $|\uparrow\rangle$ і $|\downarrow\rangle$, за яку відповідають недіагональні елементи матриці густини (8.8).

Розглянемо наприклад гауссовий розподіл

$$P(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} e^{-\omega^2/2\gamma}. \quad (8.9)$$

Зауважимо, що $\langle \omega \rangle_\omega = 0$ і $\langle \omega^2 \rangle_\omega = \gamma$. У цьому випадку знаходимо

$$\langle e^{-i\omega t} \rangle_\omega = \langle e^{i\omega t} \rangle_\omega = e^{-\gamma t^2/2} \quad (8.10)$$

і матрицю густини запишемо

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^*e^{-\gamma t^2/2} \\ a^*be^{-\gamma t^2/2} & |b|^2 \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

Недіагональні матричні елементи в границі $t \rightarrow \infty$ прямують до нуля і для матриці густини маємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

Це є діагональна матриця густини з двома власними значеннями $|a|^2$ і $|b|^2$. Вона описує змішаний ансамбль, в якому з імовірністю $|a|^2$ знайдемо спін у стані $|\uparrow\rangle$ і з імовірністю $|b|^2$ в стані $|\downarrow\rangle$. Вихідний когерентний стан, який слугує суперпозицією цих станів є повністю знищений гауссовими флуктуаціями магнітного поля в границі великих часів. Цей процес називають декогеренцією.

Зазначимо, що незалежно від вихідного стану декогеренція, зумовлена взаємодією (8.1) з флуктуюючим магнітним полем, приводить до змішаного ансамблю з діагональною матрицею густини саме в базисі власних векторів матриці Паулі σ^z , що входить у взаємодію. Ці вектори $|\uparrow\rangle$ і $|\downarrow\rangle$ називають вказівними векторами чи вказівними станами (pointer states). Процес вибору цих станів, спричинений декогеренцією, називають einselection. Ця назва походить від environment-induced superselection. Вказівні стани є стабільними відносно декогеренції. Справді, нехай у початковий момент часу всі спіни знаходяться у стані $|\uparrow\rangle$, що відповідає в (8.3) випадку $a = 1$, $b = 0$. Матрицю густини у початковий момент часу тоді запишемо $\hat{\rho}(0) = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$ і вона описує чистий ансамбль. Як бачимо з (8.11), декогеренція у цьому випадку не впливає на матрицю густини

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\rho}(0). \quad (8.13)$$

Так само, другий вказівний стан $|\downarrow\rangle$ також є стабільним відносно декогеренції. Детальніше ознайомитись з уведеними поняттями можна в огляді [28].

Для іншого прикладу з функцією розподілу

$$P(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \quad (8.14)$$

знаходимо, що

$$\langle e^{-i\omega t} \rangle_\omega = \langle e^{i\omega t} \rangle_\omega = e^{-\gamma t} \quad (8.15)$$

і також відбувається декогеренція.

Проте можна навести приклад, коли система осцилює між когерентним чистим та декогерентним змішаним ансамблями. Розглянемо функцію розподілу

$$P(\omega) = \frac{1}{2} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)). \quad (8.16)$$

Магнітне поле з однаковою імовірністю $1/2$ набуває два протилежні напрями і є однакове за величиною, пропорційною до ω_0 . У цьому випадку для матриці густини отримуємо

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos \omega_0 t \\ \cos \omega_0 t & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.17)$$

яка, як бачимо, осцилює між чистим та змішаним ансамблями.

8.2 Точна модель декогеренції

Розглянемо декогеренцію спіну, який взаємодіє із зовнішнім оточенням, що є сукупністю гармонічних осциляторів. Точно розв'язувана модель такої системи задається гамільтоніаном

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_s + \hat{H}_b + \hat{H}_{sb} = \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} \sigma_z + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} + \hbar\sigma_z \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} (g_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ + g_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}), \end{aligned} \quad (8.18)$$

де $V = L^D$ — об'єм періодичності системи, D — вимірність простору, $\mathbf{k}$ — хвильовий вектор, компоненти якого набувають значень $k_\alpha = \frac{2\pi}{L} n_\alpha$, $n_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\alpha = 1, 2, \dots, D$, гамільтоніан $\hat{H}_s$

описує спіни у зовнішньому магнітному полі, $\hat{H}_b$ — гамільтоніан зовнішнього оточення, яке задається набором гармонічних осциляторів, $\hat{H}_{sb}$ описує взаємодію спіну з оточенням. Якщо роль зовнішнього оточення виконує проста кубічна кристалічна ґратка, то тоді хвильовий вектор пробігає значення у першій зоні Бріллюена $-\frac{\pi}{a} < k_\alpha \leq \frac{\pi}{a}$.

Нехай у початковий момент часу спіни і оточення є нескорельованими і їхній стан задається матрицею густини

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_s(0)\hat{\rho}_b, \quad (8.19)$$

де спінова матриця густини

$$\hat{\rho}_s(0) = \frac{1}{2}(1 + \sigma_x) \quad (8.20)$$

описує чистий ансамбль, коли спіни перебувають у суперпозиційному стані

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle). \quad (8.21)$$

Оточення перебуває в рівноважному стані з матрицею густини

$$\hat{\rho}_b = \frac{1}{Z_b} e^{-\beta \hat{H}_b}, \quad (8.22)$$

де статистична сума

$$Z_b = \text{Sp } e^{-\beta \hat{H}_b}, \quad (8.23)$$

$\beta = 1/T$ — обернена температура.

Еволюцію в часі матриці густини описують рівнянням (1.124). Оскільки гамільтоніан містить тільки діагональну спінову матрицю σ_z , то при еволюції діагональні і недіагональні елементи матриці густини не переплутуються. Представимо матрицю густини як суму діагональної і недіагональної частин

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}^{(d)}(t) + \hat{\rho}^{(n)}(t). \quad (8.24)$$

Тоді кожна із цих частин незалежно задовольняє рівняння (1.124).

Запишемо розв'язок для діагональної частини матриці густини

$$\hat{\rho}(t)^{(d)} = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}^{(d)}(0) e^{i\hat{H}t/\hbar} = \hat{\rho}_s(0) e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}_b e^{i\hat{H}t/\hbar}, \quad (8.25)$$

де ми врахували, що $\hat{\rho}^{(d)}(0) = \hat{\rho}_s^{(d)}(0) \hat{\rho}_b$ і те, що $\hat{\rho}_s^{(d)}(0) = (1/2) \hat{1}$ є з множником $1/2$ одиничною матрицею, яка очевидно комутує з $\hat{H}$. Спінову матрицю густини знаходимо, згортаючи за бозонними ступенями вільності повну матрицю густини

$$\hat{\rho}_s^{(d)}(t) = \hat{\rho}_s^{(d)}(0) \text{Sp}_b e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}_b e^{i\hat{H}t/\hbar}. \quad (8.26)$$

Після циклічної перестановки операторів під шпуром знаходимо

$$\hat{\rho}_s^{(d)}(t) = \hat{\rho}_s^{(d)}(0) \text{Sp}_b \hat{\rho}_b = \hat{\rho}_s^{(d)}(0) = \frac{1}{2} \hat{1}. \quad (8.27)$$

Зазначимо, що в обчисленні діагональної частини матриці густини важлива є комутація $\hat{\rho}_s^{(d)}(0)$ з гамільтоніаном. Недіагональна частина матриці густини $\hat{\rho}_s^{(n)}(0) = \frac{1}{2} \sigma_x$ не комутує з гамільтоніаном. Тому простий спосіб обчислення, застосований для діагональної частини, у випадку недіагональної частини не може бути використаний.

Будемо шукати недіагональну частину матриці густини у вигляді

$$\hat{\rho}^{(n)}(t) = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{\rho}_{\text{int}}^{(n)}(t) e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}, \quad (8.28)$$

де $\hat{H}_0 = \hat{H}_s + \hat{H}_b$. Тому одержуємо рівняння для матриці густини в представленні взаємодії

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_{\text{int}}^{(n)}(t)}{\partial t} = [\hat{H}_{sb}(t), \hat{\rho}_{\text{int}}^{(n)}(t)], \quad (8.29)$$

де

$$\hat{H}_{sb}(t) = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{H}_{sb} e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}. \quad (8.30)$$

Скористаємося тотожністю (9.3), доведення якої описано в останньому розділі. Застосовуючи (9.3) до (8.30), отримаємо:

$$\hat{H}_{sb}(t) = \hbar \sigma_z \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} (g_{\mathbf{k}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} b_{\mathbf{k}}^+ + g_{\mathbf{k}}^* e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} b_{\mathbf{k}}). \quad (8.31)$$

Розв'язок рівняння (8.29) для недіагональної частини матриці густини запишемо у вигляді

$$\hat{\rho}_{\text{int}}^{(n)}(t) = e^{-i\sigma_z \hat{A}(t)} \hat{\rho}^{(n)}(0) e^{i\sigma_z \hat{A}(t)}, \quad \hat{\rho}^{(n)}(0) = \frac{1}{2} \sigma_x \hat{\rho}_b, \quad (8.32)$$

де

$$\hat{A}(t) = \sum_{\mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{k}}(t) b_{\mathbf{k}}^+ + \xi_{\mathbf{k}}^*(t) b_{\mathbf{k}}), \quad (8.33)$$

$\xi_{\mathbf{k}}(t)$ — невідома функція, яка, як видно з (8.32), повинна задовольняти початкову умову $\xi_{\mathbf{k}}(0) = 0$. Рівняння для $\xi_{\mathbf{k}}(t)$ знайдемо, підставивши (8.32) в рівняння (8.29). Нам потрібно обчислити похідну по часу від $\hat{\rho}_{\text{int}}^{(n)}(t)$. З огляду на це зауважимо, що

$$[\hat{A}'(t), \hat{A}(t)] = \sum_{\mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{k}}'^* \xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}}' \xi_{\mathbf{k}}^*) = \gamma, \quad (8.34)$$

де штрих означає похідну за часом, γ є функцією від часу, яка має неоператорний характер і комутує з $\hat{A}$ і $\hat{A}'$. Тому в обчисленні похідної від $e^{i\sigma_z \hat{A}(t)}$ використовуємо (9.8) і отримуємо

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_{\text{int}}^{(n)}(t)}{\partial t} &= \left(\hbar \sigma_z \hat{A}' \frac{\gamma}{2} \hbar \sigma_z \right) \hat{\rho}_{\text{int}}^{(n)}(t) - \\ &- \hat{\rho}_{\text{int}}^{(n)}(t) \left(\hbar \sigma_z \hat{A}' - \frac{\gamma}{2} \hbar \sigma_z \right) = \\ &= [\hbar \sigma_z \hat{A}', \hat{\rho}_{\text{int}}^{(n)}(t)] + \frac{\hbar \gamma}{2} (\sigma_z \hat{\rho}_{\text{int}}^{(n)}(t) + \hat{\rho}_{\text{int}}^{(n)}(t) \sigma_z). \end{aligned} \quad (8.35)$$

Оскільки недіагональна частина матриці густини $\hat{\rho}_{\text{int}}^{(n)}$ антикомутує з σ_z , останній доданок дорівнює нулю. Отже,

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_{\text{int}}^{(n)}(t)}{\partial t} = [\hbar \sigma_z \hat{A}', \hat{\rho}_{\text{int}}^{(n)}(t)]. \quad (8.36)$$

З умови, що $\hat{\rho}_{\text{int}}^{(n)}(t)$ повинна задовольняти рівняння (8.29) маємо

$$\hbar \sigma_z \hat{A}' = H_{sb}(t), \quad (8.37)$$

звідки одержуємо рівняння для $\xi_{\mathbf{k}}(t)$

$$\xi'_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}} g_{\mathbf{k}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}. \quad (8.38)$$

З урахуванням початкової умови $\xi_{\mathbf{k}}(0) = 0$ знаходимо розв'язок

$$\xi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{g_{\mathbf{k}}}{i\omega_{\mathbf{k}}} (e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} - 1). \quad (8.39)$$

Тепер ми готові написати вираз для еволюції недіагональної частини матриці густини

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(n)}(t) &= e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} e^{-i\sigma_z \hat{A}(t)} \frac{1}{2} \sigma_x \hat{\rho}_b e^{i\sigma_z \hat{A}(t)} e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_x e^{i\sigma_z \omega t} e^{-i\hat{H}_b/\hbar} e^{i\sigma_z \hat{A}(t)} \hat{\rho}_b e^{i\sigma_z \hat{A}(t)} e^{i\hat{H}_b t/\hbar}. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Тут ми врахували тотожність

$$e^{\hat{B}\sigma_z} \sigma_x = \sigma_x e^{-\hat{B}\sigma_z}, \quad (8.41)$$

де $\hat{B}$ — довільний оператор, який комутує з σ_x . Доведення цієї тотожності ґрунтується на властивості матриць Паулі $\sigma_x \sigma_z = -\sigma_z \sigma_x$. Розкладаємо експоненту в лівій стороні (8.41) в ряд Тейлора і в кожному з доданків ряду переставляємо σ_x справа наліво. В n -му члені ряду маємо

$$\begin{aligned} (\hat{B}\sigma_z)^n \sigma_x &= \hat{B}\sigma_z \cdots \hat{B}\sigma_z \hat{B}\sigma_z \sigma_x = \hat{B}\sigma_z \cdots \hat{B}\sigma_z \sigma_x (-\hat{B}\sigma_z) = \\ &= \hat{B}\sigma_z \cdots \sigma_x (-\hat{B}\sigma_z) (-\hat{B}\sigma_z) = \\ &= \sigma_x (-\hat{B}\sigma_z) \cdots (-\hat{B}\sigma_z) (-\hat{B}\sigma_z) = \sigma_x (-\hat{B}\sigma_z)^n. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Після цього збираючи ряд в експоненту отримуємо тотожність (8.41).

Для знаходження спінової матриці густини візьмемо шпур за бозонними ступенями вільності і, використовуючи циклічну перестановку операторів під шпуром, маємо

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_s^{(n)}(t) &= \frac{1}{2} \sigma_x e^{i\sigma_z \omega t} \text{Sp}_b e^{-i\hat{H}_b t/\hbar} e^{i\sigma_z \hat{A}(t)} \hat{\rho}_b e^{i\sigma_z \hat{A}(t)} e^{i\hat{H}_b t/\hbar} = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_x e^{i\sigma_z \omega t} \text{Sp}_b \hat{\rho}_b e^{2i\sigma_z \hat{A}(t)} = \frac{1}{2} \sigma_x e^{i\sigma_z \omega t} \langle e^{2i\sigma_z \hat{A}(t)} \rangle_b. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Розраховуємо усереднення за бозонною підсистемою

$$\begin{aligned}
 \langle e^{2i\sigma_z \hat{A}(t)} \rangle_b &= \text{Sp}_b \hat{\rho}_b e^{2i\sigma_z \hat{A}(t)} = \\
 &= \prod_{\mathbf{k}} \text{Sp}_{b_{\mathbf{k}}} \frac{1}{Z_{\mathbf{k}}} e^{-\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}} e^{2i\sigma_z (\xi_{\mathbf{k}}(t) b_{\mathbf{k}}^+ + \xi_{\mathbf{k}}^*(t) b_{\mathbf{k}})} = \\
 &= \prod_{\mathbf{k}} \langle e^{2i\sigma_z (\xi_{\mathbf{k}}(t) b_{\mathbf{k}}^+ + \xi_{\mathbf{k}}^*(t) b_{\mathbf{k}})} \rangle_{\mathbf{k}}, \tag{8.44}
 \end{aligned}$$

де $Z_{\mathbf{k}} = 1 / (1 - e^{-\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}}})$ — статистична сума $\mathbf{k}$ -ої бозонної моди. Тут ми скористалися тим, що різні бозонні моди під усередненням за бозонною підсистемою не переплутані між собою і тому повне середнє розпадається на добуток незалежних середніх по кожній бозонній моді.

Використаємо далі (9.39) і отримуємо

$$\langle e^{2i\sigma_z \hat{A}(t)} \rangle_b = \prod_{\mathbf{k}} e^{-4|\xi_{\mathbf{k}}(t)|^2 (\langle b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} \rangle + 1/2)} = e^{-\Gamma(t)}, \tag{8.45}$$

де

$$\begin{aligned}
 \Gamma(t) &= \sum_{\mathbf{k}} 4|\xi_{\mathbf{k}}(t)|^2 (\langle b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} \rangle + 1/2) = \sum_{\mathbf{k}} 4|\xi_{\mathbf{k}}(t)|^2 (\langle b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} \rangle + 1/2) = \\
 &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} 16|g_{\mathbf{k}}|^2 \frac{\sin^2(\omega_{\mathbf{k}} t/2)}{\omega_{\mathbf{k}}^2} (\langle b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} \rangle + 1/2), \tag{8.46}
 \end{aligned}$$

середнє число заповнення для $\mathbf{k}$ -ої моди

$$\langle b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}}} - 1}. \tag{8.47}$$

В границі $V \rightarrow \infty$ переходимо від суми до інтегралу

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} (\dots) &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int dk_1 \int dk_2 \dots \int dk_D (\dots) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k (\dots) \tag{8.48}
 \end{aligned}$$

і отримуємо

$$\Gamma(t) = \frac{16}{(2\pi)^D} \int d^D k |g_{\mathbf{k}}|^2 \frac{\sin^2(\omega_{\mathbf{k}} t/2)}{\omega_{\mathbf{k}}^2} (\langle b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} \rangle + 1/2). \tag{8.49}$$

Остаточний результат для спінової матриці густини запишемо

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_s(t) &= \frac{1}{2} \left(1 + \sigma_x e^{i\omega\sigma_z t} e^{-\Gamma(t)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + (\sigma_x \cos \omega t + \sigma_y \sin \omega t) e^{-\Gamma(t)} \right)\end{aligned}\quad (8.50)$$

або у матричному вигляді

$$\hat{\rho}_s(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\omega t - \Gamma(t)} \\ e^{i\omega t - \Gamma(t)} & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.51)$$

Декогеренція пов'язана з множником $e^{-\Gamma(t)}$ в недіагональних елементах спінової матриці густини. Як бачимо з (8.49), $\Gamma(t) \geq 0$ і це спричинює зменшення недіагональних елементів матриці густини. Зазначимо, що $\Gamma(t)$ складається з двох частин

$$\Gamma(t) = \Gamma_T(t) + \Gamma_0(t), \quad (8.52)$$

де функція

$$\Gamma_T(t) = \frac{16}{(2\pi)^D} \int d^D k |g_{\mathbf{k}}|^2 \frac{\sin^2(\omega_{\mathbf{k}} t/2)}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \langle b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} \rangle, \quad (8.53)$$

спричинена тепловими флуктуаціями і дорівнює нулю при нульовій температурі, оскільки середні числа заповнення $\langle b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} \rangle = 0$ при $T = 0$,

$$\Gamma_0(t) = \frac{8}{(2\pi)^D} \int d^D k |g_{\mathbf{k}}|^2 \frac{\sin^2(\omega_{\mathbf{k}} t/2)}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \quad (8.54)$$

є спричинена нульовими квантовими флуктуаціями і не залежить від температури.

Дослідимо $\Gamma(t)$ для тривимірної кристалічної ґратки $D = 3$. Для спрощення вважатимемо, що $g_{\mathbf{k}} = g = \text{const}$. Фононні коливання описуємо в рамках моделі Дебая. Дисперсійне співвідношення $\omega_{\mathbf{k}} = ck$, де $k = |\mathbf{k}|$. Кубічну зону Бріллюена замінюємо сферичною зоною з радіусом k_0 з тим самим об'ємом

$$\left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 = \frac{4\pi}{3} k_0^3. \quad (8.55)$$

Обчислимо $\Gamma_0(t)$. Переходимо в (8.54) до сферичної системи координат і після інтегрування за кутовими змінними маємо

$$\begin{aligned}\Gamma_0(t) &= |g|^2 \frac{8}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{k_0} k^2 dk \frac{\sin^2(ckt/2)}{(ck)^2} = \\ &= |g|^2 \frac{8}{(2\pi)^3} 4\pi \frac{1}{c^2} \int_0^{k_0} dk \frac{1}{2} (1 - \cos(ckt)) = \frac{2|g|^2 k_0}{(\pi)^2 c^2} \left(1 - \frac{\sin(ck_0 t)}{ck_0 t} \right).\end{aligned}\quad (8.56)$$

В границі $t \rightarrow \infty$ знаходимо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma_0(t) = \frac{2|g|^2 k_0}{(\pi)^2 c^2}. \quad (8.57)$$

Аналогічно розглянемо $\Gamma_T(t)$

$$\begin{aligned}\Gamma_T(t) &= |g|^2 \frac{16}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{k_0} k^2 dk \frac{\sin^2(ckt/2)}{(ck)^2} \frac{1}{e^{\beta \hbar ck} - 1} = \\ &= |g|^2 \frac{16}{(2\pi)^3} 4\pi \frac{1}{c^2} \int_0^{k_0} dk \frac{1}{2} (1 - \cos(ckt)) \frac{1}{e^{\beta \hbar ck} - 1}.\end{aligned}\quad (8.58)$$

Дослідимо асимптотику $t \rightarrow \infty$. У цій границі $\cos(ckt)$ стає швидко осцилюючою функцією. Тоді інтеграл з косинусом, помноженим на плавну функцію, дорівнює нулю. Для того, щоб скористатись цим фактом перетворимо підінтегральний вираз, виділивши у функції чисел заповнення асимптотика при $k \rightarrow 0$

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} + f(x), \quad (8.59)$$

де

$$f(x) = \frac{x + 1 - e^x}{x(e^x - 1)} \quad (8.60)$$

є скінченною пивною функцією, тут ми ввели позначення $x = \beta \hbar ck$. Перепишемо $\Gamma_T(t)$ так

$$\begin{aligned}\Gamma_T(t) &= \frac{8|g|^2}{(\pi)^2 c^2} \int_0^{k_0} dk \sin^2(ckt/2) \left(\frac{1}{\beta \hbar ck} + f(\beta \hbar ck) \right) = \\ &= \Gamma_T^{(1)}(t) + \Gamma_T^{(2)}(t).\end{aligned}\quad (8.61)$$

Перший інтеграл після заміни змінної інтегрування $ckt/2 = x$ запишемо

$$\Gamma_T^{(1)}(t) = T \frac{8|g|^2}{(\pi)^2 c^3 \hbar} \int_0^{ck_0 t/2} dx \frac{\sin^2(x)}{x}. \quad (8.62)$$

Використовуючи асимптотичну поведінку інтегралу для великого значення верхньої межі

$$\int_0^x dx \frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{1}{2} (\ln x + \ln 2 + \gamma + O(1/x)), \quad x \rightarrow \infty, \quad (8.63)$$

де $\gamma = 0.5772156649 \dots$ — стала Ейлера, знаходимо

$$\Gamma_T^{(1)}(t) = T \frac{4|g|^2}{(\pi)^2 c^3 \hbar} (\ln(ck_0 t/2) + \ln 2 + \gamma) + O(1/t), \quad t \rightarrow \infty. \quad (8.64)$$

Розглянемо другий інтеграл

$$\begin{aligned} \Gamma_T^{(2)}(t) &= \frac{8|g|^2}{(\pi)^2 c^2} \int_0^{k_0} dk \sin^2(ckt/2) f(\beta \hbar ck) = \\ &= \frac{4|g|^2}{(\pi)^2 c^2} \int_0^{k_0} dk (1 - \cos(ckt)) f(\beta \hbar ck). \end{aligned} \quad (8.65)$$

Для плавної скінченної функції f при $t \rightarrow \infty$

$$\int_0^{k_0} dk \cos(ckt) f(\beta \hbar ck) = 0. \quad (8.66)$$

Як наслідок при $t \rightarrow \infty$

$$\Gamma_T^{(2)}(t) = \frac{4|g|^2}{(\pi)^2 c^2} \int_0^{k_0} dk f(\beta \hbar ck) = T \frac{4|g|^2}{(\pi)^2 c^3 \hbar} \int_0^{\beta \hbar ck_0} dx f(x), \quad (8.67)$$

де ми провели заміну змінної інтегрування $\beta \hbar ck = x$. Оскільки $f(x)$ є плавною скінченною функцією в скінченних межах інтегрування, то інтеграл в (8.67) збігається до скінченного значення

$$\int_0^y f(x) dx = \int_0^y \frac{x+1-e^x}{x(e^x-1)} dx = -y - \ln \frac{y}{e^y-1}. \quad (8.68)$$

Тоді для великих часів

$$\Gamma_T^{(2)}(t) = -T \frac{4|g|^2}{(\pi)^2 c^3 \hbar} \left(\hbar c k_0 / T + \ln \frac{\hbar c k_0 / T}{e^{\hbar c k_0 / T} - 1} \right). \quad (8.69)$$

В границі низьких температур $T \rightarrow 0$ функція $\Gamma_T^{(2)}(t)$ прямує до нуля за законом:

$$\Gamma_T^{(2)}(t) = T \frac{4|g|^2}{(\pi)^2 c^3 \hbar} \ln(T / \hbar c k_0). \quad (8.70)$$

За високих температур $T \rightarrow \infty$ функція $\Gamma_T^{(2)}(t)$ виходить на константу

$$\Gamma_T^{(2)}(t) = -\frac{2|g|^2 k_0}{(\pi)^2 c^2}. \quad (8.71)$$

Декогеренція визначається функцією $\Gamma(t) = \Gamma_0(t) + \Gamma_T(t) = \Gamma_0(t) + \Gamma_T^{(1)}(t) + \Gamma_T^{(2)}(t)$. Як бачимо з (8.67), $\Gamma_T^{(2)}(t)$ виходить на константу в границі великих часів, тоді як $\Gamma_T^{(1)}(t)$ розбігається за логарифмічним законом при великих часах згідно з (8.64). Своєю чергою $\Gamma_0(t)$, згідно з (8.57), також виходить на константу в границі великих часів. Нагадаємо, що $\Gamma_T^{(1)}(t)$ і $\Gamma_T^{(2)}(t)$ спричинені тепловими коливаннями ґратки і при нульовій температурі $\Gamma_T^{(1)}(t) = \Gamma_T^{(2)}(t) = 0$, тоді як $\Gamma_0(t)$, спричинене нульовими квантовими коливаннями, не залежить від температури і відмінне від нуля. Отже, навіть при нулю температури відбувається декогеренція, спричинена нульовими квантовими коливаннями.

8.3 Декогеренція кота Шредінгера

У цьому параграфі ми розглянемо декогеренцію квантової системи, яка складається з N незваємодіючих спінів, поміщених у просторово флуктуюче магнітне поле. У початковий момент часу вона перебуває у суперпозиційному стані

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow \dots \downarrow\rangle). \quad (8.72)$$

Такий стан називають станом кота Шредінгера. Стан $|\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle$ відповідає живому коту, а стан $|\downarrow\downarrow \dots \downarrow\rangle$ — мертвому. Отже, кіт перебуває у квантовому стані, який є суперпозицією стану живого і мертвого кота.

Оскільки спіни не взаємодіють між собою, то еволюція кожного із них відбувається незалежно. Для матриці густини N спінів, подібно як для одного (див.(8.6)), тоді отримуємо

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2} \left(|\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle \langle \uparrow\uparrow \dots \uparrow| + |\downarrow\downarrow \dots \downarrow\rangle \langle \downarrow\downarrow \dots \downarrow| + \right. \quad (8.73) \\ \left. + (\langle e^{-i\omega t} \rangle_{\omega})^N |\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle \langle \downarrow\downarrow \dots \downarrow| + (\langle e^{i\omega t} \rangle_{\omega})^N |\downarrow\downarrow \dots \downarrow\rangle \langle \uparrow\uparrow \dots \uparrow| \right).$$

Наприклад, з функцією розподілу (8.14) маємо

$$(\langle e^{-i\omega t} \rangle_{\omega})^N = (\langle e^{i\omega t} \rangle_{\omega})^N = e^{-N\gamma t}. \quad (8.74)$$

Отже, чим більша система, тим швидше відбувається декогеренція. Для макроскопічних систем, які містять порядку числа Авогадро атомів, тобто $\sim 10^{23}$ атомів, декогеренція відбувається миттєво і матриця густини тоді має вигляд

$$\hat{\rho}(\infty) = \frac{1}{2} \left(|\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle \langle \uparrow\uparrow \dots \uparrow| + |\downarrow\downarrow \dots \downarrow\rangle \langle \downarrow\downarrow \dots \downarrow| \right).$$

Це є матриця густини, яка відповідає змішаному ансамблю, де з однаковою імовірністю $1/2$ ми знайдемо живого або мертвого кота, що відповідає класичній ситуації: кіт є або живим, або мертвим.

Отже, декогеренція спричинює те, що реалізувати стан, який є суперпозицією живого і мертвого кота є надзвичайно складно. Для цього потрібно майже ідеально ізолювати квантову систему від зовнішніх впливів. Чим більше частинок містить квантова система, тим кращою має бути ізоляція і для макроскопічної кількості частинок цього досягнути практично майже неможливо.

Розділ 9

Операторні тотожності та середні значення функцій від бозонних операторів

9.1 Тотожності для функцій від бозонних операторів

Нехай b і b^+ — бозонні оператори знищення та породження, які задовольняють переставне співвідношення

$$[b, b^+] = 1. \quad (9.1)$$

Для певної функції f маємо тотожність:

$$bf(b^+b) = f(bb^+)b = f(b^+b + 1)b, \quad (9.2)$$

яка стає очевидною після розкладу функції f в ряд Тейлора. Тоді

$$e^{-\gamma b^+b} b e^{\gamma b^+b} = e^{\gamma} b, \quad (9.3)$$

де γ є довільним комплексним числом.

Ще одна корисна тотожність

$$e^{\alpha b} e^{\gamma b^+} = e^{\alpha\gamma} e^{\gamma b^+} e^{\alpha b}. \quad (9.4)$$

Для доведення цієї властивості використаємо таке представлення для бозонних операторів

$$b = \frac{d}{dx}, \quad b^+ = x. \quad (9.5)$$

Тоді

$$e^{\alpha b} e^{\gamma b^+} = e^{\alpha \frac{d}{dx}} e^{\gamma x} = e^{\gamma(x+\alpha)} e^{\alpha \frac{d}{dx}} = e^{\alpha \gamma} e^{\gamma x} e^{\alpha \frac{d}{dx}} = e^{\alpha \gamma} e^{\gamma b^+} e^{\alpha b}. \quad (9.6)$$

Тут ми скористались властивістю оператора трансляції, а саме — операторною рівністю $e^{\alpha \frac{d}{dx}} f(x) = f(x + \alpha) e^{\alpha \frac{d}{dx}}$.

9.2 Похідна за параметром

Розглянемо оператор $\hat{A}(t)$, залежний від параметра t . Нехай

$$[\hat{A}'(t), \hat{A}(t)] = \gamma, \quad (9.7)$$

де $\hat{A}'(t) = \frac{d\hat{A}(t)}{dt}$, γ — комутує з $\hat{A}$ і $\hat{A}'$, наприклад, γ може бути комплексним числом. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\hat{A}(t)} &= e^{\hat{A}(t)} \left(\hat{A}'(t) + \frac{\gamma}{2} \right) = \left(\hat{A}'(t) - \frac{\gamma}{2} \right) e^{\hat{A}(t)} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\hat{A}'(t) e^{\hat{A}(t)} + e^{\hat{A}(t)} \hat{A}'(t) \right). \end{aligned} \quad (9.8)$$

Для доведення цієї властивості розкладемо $e^{\hat{A}}$ в ряд Тейлора і візьмемо похідну від кожного з доданків

$$\frac{d}{dt} \hat{A}^n = \sum_{m=0}^{n-1} \hat{A}^m \hat{A}' \hat{A}^{n-1-m}. \quad (9.9)$$

Зауважимо, що є таке представлення для операторів $\hat{A}$ і $\hat{A}'$, які задовольняють комутаційне співвідношення (9.7)

$$\hat{A}' = \gamma \frac{d}{dx}, \quad \hat{A} = x. \quad (9.10)$$

Продовжимо обчислення (9.9) у цьому представленні

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{n-1} \hat{A}^m \hat{A}' \hat{A}^{n-1-m} &= \sum_{m=0}^{n-1} x^m \gamma \frac{d}{dx} x^{n-1-m} = \\
 &= \sum_{m=0}^{n-1} x^{n-1} \gamma \frac{d}{dx} + \gamma \sum_{m=0}^{n-1} x^{n-2} (n-1-m) = \\
 &= nx^{n-1} \gamma \frac{d}{dx} + \gamma \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} = n \hat{A}^{n-1} \hat{A}' + \gamma \frac{n(n-1)}{2} \hat{A}^{n-2}.
 \end{aligned} \tag{9.11}$$

Отже,

$$\frac{d}{dt} \hat{A}^n = n \hat{A}^{n-1} \hat{A}' + \gamma \frac{n(n-1)}{2} \hat{A}^{n-2}. \tag{9.12}$$

Для похідної від експоненти отримуємо

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} e^{\hat{A}} &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{d}{dt} \hat{A}^n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} n \hat{A}^{n-1} \hat{A}' + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \gamma \frac{n(n-1)}{2} \hat{A}^{n-2} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \hat{A}^{n-1} \hat{A}' + \frac{\gamma}{2} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-2)!} \hat{A}^{n-2} = e^{\hat{A}} \hat{A}' + \frac{\gamma}{2} e^{\hat{A}}, \tag{9.13}
 \end{aligned}$$

що і доводить першу рівність в (9.8). Враховуючи, що

$$\hat{A}' e^{\hat{A}} = \gamma \frac{d}{dx} e^x = \gamma e^x + e^x \gamma \frac{d}{dx} = \gamma e^{\hat{A}} + e^{\hat{A}} \hat{A}' \tag{9.14}$$

отримуємо дві рівності в (9.8).

9.3 Тотожність Вейля

У цьому параграфі ми розглянемо тотожність, яку довів Вейль у 1928 р.

Якщо комутатор $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$ комутує з кожним з операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$, тобто $[\hat{C}, \hat{A}] = [\hat{C}, \hat{B}] = 0$, то має місце тотожність

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{B}} e^{\hat{A}} e^{[\hat{A}, \hat{B}]/2} \tag{9.15}$$

або еквівалентна тотожність

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}. \quad (9.16)$$

Другу тотожність отримуємо з першої за допомогою заміни $\hat{A} \rightarrow \hat{B}$ і $\hat{B} \rightarrow \hat{A}$.

Для доведення тотожності Вейля ми скористаємось таким представленням операторів

$$\hat{A} = \frac{d}{dx}, \quad \hat{B} = x\hat{C}, \quad (9.17)$$

де $\hat{C}$ комутує зі змінною x і оператором похідної d/dx . Розглянемо в цьому представленні оператор

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{(\frac{d}{dx}+x\hat{C})}. \quad (9.18)$$

Скористаємось далі очевидною тотожністю

$$\frac{d}{dx} + x\hat{C} = e^{-\hat{C}x^2/2} \frac{d}{dx} e^{\hat{C}x^2/2}. \quad (9.19)$$

Тоді

$$e^{(\frac{d}{dx}+x\hat{C})} = \exp\left(e^{-\hat{C}x^2/2} \frac{d}{dx} e^{\hat{C}x^2/2}\right) = e^{-\hat{C}x^2/2} e^{\frac{d}{dx}} e^{\hat{C}x^2/2}. \quad (9.20)$$

Останню рівність отримуємо після розкладу $\exp$ в ряд.

Розглянемо дію цього оператора на певну функцію

$$\begin{aligned} e^{(\frac{d}{dx}+x\hat{C})}\psi(x) &= e^{-\hat{C}x^2/2} e^{\frac{d}{dx}} e^{\hat{C}x^2/2}\psi(x) = e^{-\hat{C}x^2/2} e^{\hat{C}(x+1)^2/2}\psi(x+1) \\ &= e^{-\hat{C}x^2/2} e^{\hat{C}(x+1)^2/2} e^{\frac{d}{dx}}\psi(x). \end{aligned} \quad (9.21)$$

Тут ми скористались дією оператора трансляції $e^{\frac{d}{dx}}f(x) = f(x+1)$. Отже, одержуємо таку операторну рівність

$$e^{(\frac{d}{dx}+x\hat{C})} = e^{((x+1)^2-x^2)\hat{C}/2} e^{\frac{d}{dx}}. \quad (9.22)$$

Після перетворення правої сторони рівняння остаточно знаходимо співвідношення

$$e^{(\frac{d}{dx}+x\hat{C})} = e^x e^{\frac{d}{dx}} e^{\hat{C}/2}, \quad (9.23)$$

яке, з урахуванням (9.17), доводить тотожність Вейля.

9.4 Середні значення функцій від бозонних операторів

Позначимо $|n\rangle$ власні стани оператора чисел заповнення

$$b^+b|n\rangle = n|n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.24)$$

Оператори знищення та породження діють на ці стани так

$$b|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad b^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (9.25)$$

Запишемо квантово-механічні середні значення від добутку операторів знищення і породження. Використовуючи правила дії операторів b і b^+ , маємо

$$\langle n|(b^+)^m b^m|n\rangle = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad (9.26)$$

коли $n \geq m$ і таке середнє дорівнює нулю, коли $n < m$. Так само знаходимо

$$\langle n|b^m(b^+)^m|n\rangle = (n+1)(n+2)\cdots(n+m) = \frac{(n+m)!}{n!}, \quad (9.27)$$

де відмінний від нуля результат має місце для довільних n і m .

Для квантово-механічного середнього в стані $|n\rangle$ від добутку експонент знаходимо

$$\langle n|e^{\gamma b^+} e^{\alpha b}|n\rangle = \sum_{m=0}^n \frac{(n)!}{(m!)^2(n-m)!} (\alpha\gamma)^m, \quad (9.28)$$

$$\langle n|e^{\alpha b} e^{\gamma b^+}|n\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(m!)^2 n!} (\alpha\gamma)^m. \quad (9.29)$$

Цей результат отримуємо після розкладу експонент в ряд, і використовуючи (9.26) та (9.27).

Розглянемо тепер статистичне середнє з гамільтоніаном $H = \hbar\omega b^+b$

$$\begin{aligned} \langle e^{\alpha b} e^{\gamma b^+} \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} \langle n|e^{\alpha b} e^{\gamma b^+}|n\rangle = \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(m!)^2 n!} (\alpha\gamma)^m e^{-\beta\hbar\omega n}, \end{aligned} \quad (9.30)$$

де статистична сума

$$Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}. \quad (9.31)$$

Зауважимо таку рівність

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{m!n!} x^n = (1-x)^{-m-1}, \quad (9.32)$$

яку ми отримаємо, розклавши функцію в правій стороні рівності в ряд Тейлора. Враховуючи цю рівність, продовжимо обчислення (9.30)

$$\begin{aligned} \langle e^{\alpha b} e^{\gamma b^+} \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha\gamma)^m}{m!} \left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)^{-m-1} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha\gamma)^m}{m!} Z^m = e^{\alpha\gamma Z}. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Статистичну суму (9.31) пов'яжемо з середнім від оператора числа частинок

$$\begin{aligned} \langle b^+ b \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta\hbar\omega n} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} - 1 = Z - 1. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Отже,

$$Z = \langle b^+ b \rangle + 1 = \langle b b^+ \rangle. \quad (9.35)$$

Тому

$$\langle e^{\alpha b} e^{\gamma b^+} \rangle = e^{\alpha\gamma(\langle b^+ b \rangle + 1)} = e^{\alpha\gamma\langle b b^+ \rangle}. \quad (9.36)$$

З урахуванням (9.4), отримуємо

$$\langle e^{\gamma b^+} e^{\alpha b} \rangle = e^{\alpha\gamma\langle b^+ b \rangle}. \quad (9.37)$$

Застосуємо тотожність Вейля

$$e^{\gamma b^+ + \alpha b} = e^{\gamma b^+} e^{\alpha b} e^{\alpha\gamma/2} \quad (9.38)$$

до (9.37). Як наслідок маємо ще одну рівність для статистичного середнього

$$\langle e^{\gamma b^+ + \alpha b} \rangle = e^{\alpha\gamma(\langle b^+ b \rangle + 1/2)}. \quad (9.39)$$

Список літератури

- [1] *Дирак П.* Принципы квантовой механики / *П. Дирак.* — Москва : Наука, 1979.
- [2] *Einstein A.* Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? / *A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen* // *Phys. Rev.* — 1935. — V. 47. — P. 777–780.
- [3] *Bell J. S.* On the Einstein–Podolsky–Rosen paradox / *J. S. Bell* // *Physics.* — 1964. — V. 1. — P. 195–200.
- [4] *Aspect A.* Experimental test of Bell’s inequalities using time-varying analyzers / *A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger* // *Phys. Rev. Lett.* — 1982. — V. 49. — P. 1804–1807.
- [5] Bell’s Theorem, Quantum theory, and Conception of Universe / Edited by *M. Kafatos.* — Dordrecht : Kluwer, 1989.
- [6] *Greenberg D. M.* Bell’s theorem without inequality / *D. M. Greenberg, M. A. Horne, A. Shimony, A. Zeilinger* // *Am. J. Phys.* — 1990. — V. 58. — P. 1131–1143.
- [7] *Laloë F.* Correlating more than two particles in quantum mechanics / *F. Laloë* // *Curr. Sci.* — 1995. — V. 68. — P. 1026–1035.
- [8] *Wootters W. K.* A single quantum cannot be cloned / *W. K. Wootters, W. H. Zurek* // *Nature.* — 1982. — V. 299. — P. 802–803.

- [9] *Dieks D.* Communication by EPR devices / *D. Dieks* // Phys. Lett. A. — 1982. — V. 92. — P. 271–272.
- [10] *Bennet C. H.* Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einshtein–Podolsky–Rosen channels / *C. H. Bennet, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters* // Phys. Rev. Lett. — 1993. — V. 70. — P. 1895–1899.
- [11] *Bouwmeester D.* Experimental quantum teleportation / *D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger* // Nature. — 1997. — V. 390. — P. 575–579.
- [12] *Фейнман Р. Ф.* Квантово-механические ЭВМ / *Р. Ф. Фейнман* // Усп. физ. наук. — 1986. — Т. 149, вып. 4. — С. 671–688.
- [13] *Крохмальський Т.* Квантові комп'ютери: Основи й алгоритми (короткий огляд) / *Т. Крохмальський* // Журнал фізичних досліджень. — 2004. — Т. 8. — С. 1–15.
- [14] *Китаев А.* Классические и квантовые вычисления / *А. Китаев, А. Шень, М. Вьялий.* — Москва : Изд-во Московского центра непрерывного математического образования, 1999.
- [15] *Dodonov V. V.* Energy-sensitive and “classical-like” distances between quantum states / *V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, A. Wunsche* // Phys. Scripta. — 1999. — V. 59. — P. 81–89; quant-ph/9810085.
- [16] *Barenco A.* Elementary gates for quantum computation / *A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. A. Smolin, H. Weinfurter* // Phys. Rev. A. — 1995. — V. 52. — P. 3457–3467.
- [17] *Халфин Л. А.* Квантовый эффект Зенона / *Л. А. Халфин* // Усп. физ. наук. — 1990. — Т. 160. — С. 185–188.
- [18] *Misra B.* The Zeno's paradox in quantum theory / *B. Misra, E. C. G. Sudarshan* // J. Phys. — 1977. — V. 18. — P. 756–763.

- [19] *Facchi P.* Quantum Zeno dynamics: mathematical and physical aspects / *P. Facchi, S. Pascazio* // J. Phys A.: Math. Theor. — 2008. — V. 171. — 493001.
- [20] *Facchi P.* Quantum Zeno dynamics and quantum Zeno subspaces / *P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio* // J. Phys.: Conf. Ser. — 2009. — V. 196. — 012017.
- [21] *Carlini A.* Time-optimal quantum evolution / *A. Carlini, A. Hosoya, T. Koike, Y. Okudaira* // Phys. Rev. Lett. — 2006. — V. 96. — 060503.
- [22] *Frydryszak A. M.* Quantum brachistochrone problem for a spin-1 system in a magnetic field / *A. M. Frydryszak, V. M. Tkachuk* // Phys. Rev. A. — 2008. — V. 77. — 014103.
- [23] *Born M.* Beweis des Adiabatenatzes / *M. Born, V. Fock* // Zeitschrift für Physik. — 1928. — V. 51. — P. 165–180.
- [24] *Вакарчук І. О.* Квантова механіка : Підручник / *І. О. Вакарчук*. — 3-тє вид., доп. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2007.
- [25] *Tkachuk V. M.* Quantum topological phase of an electric dipole circulating around a ferromagnetic wire / *V. M. Tkachuk* // Phys. Rev. A. — 2000. — V. 62. — 052112.
- [26] *Anandan J.* The geometric phase / *J. Anandan* // Nature. — 1992. — V. 360. — P. 307–313.
- [27] *Dowling J. P.* Maxwell duality, Lorentz invariance, and topological phase / *J. P. Dowling, C. P. Williams, J. D. Franson* // Phys. Rev. Lett. — 1999. — V. 83. — P. 2486–2489.
- [28] *Zurek W. H.* Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical / *W. H. Zurek* // Rev. Mod. Phys. — 2003. — V. 75. — P. 715–765.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Абсолютно чутлива бомба 91

Белла

- вимірювання 61
- стани 53, 61

Блоха

- вектор 39
- сфера 39

Бра-, кет-вектори 7, 8

Відстань

- Вуттерса 94, 100
- Гільберта–Шмідта 95
- мінімальна 94, 100
- Фубіні–Студі 93, 100

Інтерферометр

Маха–Цандера 80, 91

Квантовий парадокс Зенона 109

Класичні дужки Пуассона 26

Клонування 57

Комутатор 13

Кубіт 35, 68

Матриці Паулі 36

Метричний тензор 97

Міра заплутаності 52

Модель Дебая 128

Оператор

- Адамара 70
- антилінійний 53
- ермітовий 10, 11
- заперечення 71
- знищення 133
- зсуву фази 71
- контрольованого заперечення 73
- контрольованого зсуву фази 73
- лінійний 10
- породження 133

— проектування 12

— спіну 36

— спряжений 11

— узгодженості 53

— унітарний 20

— чисел заповнення 137

Оракул квантовий 75, 82, 82

Принцип

— локальності 46

— причинності 46

— суперпозиції 7

Прямий добуток 40

Редукція вектора стану 21, 45

Розклад Шмідта 41

Середнє число заповнення 127

Статистичне середнє 137

Статистична сума 123

Тотожність Якобі 13

Узгодженість

див. Міра заплутаності

Функція збалансована 75

Шредінгера рівняння

— кіт 132

— стаціонарне 113

— часове (нестационарне) 29

CNOT-оператор *див.* Оператор контрольованого заперечення

NOT-оператор *див.* Оператор заперечення

XOR-оператор *див.* Оператор контрольованого заперечення

$\sqrt{\text{NOT}}$ -оператор 72

Навчальне видання

ТКАЧУК Володимир Михайлович

Фундаментальні проблеми квантової механіки

Навчальний посібник

Редактор

Анна Габрук

Комп'ютерна верстка

Олена Кіктева

Технічний редактор

Світлана Сеник

Формат 60 × 90 $\frac{1}{16}$ Умовн. друк. арк. 8.4

Наклад 350 прим. Зам. .

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів
видавничої продукції
Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

Віддруковано у книжковій друкарні “Коло”
вул. Бориславська, 8, м. Дрогобич, Львівська обл., 82100

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів
видавничої продукції
Серія ДК № 498 від 20.06.2001 р.

Ткачук В. М.

Т 48 Фундаментальні проблеми квантової механіки. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2011. — 144 с.

Посібник складається з дев'яти розділів: “Математичні основи квантової механіки”, “Двостанові квантові системи”, “Квантові комунікації”, “Квантові обчислення та квантові комп'ютери”, “Вимірювання у квантовій механіці”, “Геометрія простору квантових станів”, “Еволюція квантової системи”, “Декогеренція”, “Операторні тотожності та середні значення функцій від бозонних операторів”. Він присвячений фундаментальним проблемам квантової механіки і його можна розглядати як доповнення до традиційних підручників з квантової механіки.

Для студентів, аспірантів фізико-математичних спеціальностей університетів, викладачів та науковців.

ISBN 978-966-613-850-0

УДК 530.145
ББК 22.31я73