Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Збірник задач
з електродинаміки

Львів
2015

УДК [537](075.8)
ББК 22.313я73
З 41

Автори: *М. В. Блажиєвська, О. І. Григорчак, Ю. С. Криницький (ред.), В. М. Мигаль, В. С. Пастухов, Р. О. Притула, А. А. Ровенчак (ред.), М. І. Самар*

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. Я. І. Шопа
(Львівський національний університет імені Івана Франка);
д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. сп. Ю. Г. Яремко
(Ін-т фізики конденсованих систем НАН України, м. Львів);
д-р С. В. Кондрат, науковий співробітник Дослідницького центру Юліха (Forschungszentrum Jülich, Німеччина)

Рекомендовано до друку Вченою радою
Львівського національного університету імені Івана Франка.
Протокол № 32/9 від 30 вересня 2014 р.

З 41 **Збірник задач з електродинаміки** / М. В. Блажиєвська, О. І. Григорчак, Ю. С. Криницький та ін. ; за ред. Ю. С. Криницького та А. А. Ровенчака. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2015. — 112 с.

Збірник складається з дев'яти розділів. Початок кожного розділу супроводжується коротким теоретичним вступом, у якому викладені основні означення, твердження та необхідні формули. До усіх задач, за винятком кількох доведень, подано відповіді. Складніші задачі супроводжуються вказівками та подекуди повними розв'язками.

Для студентів та аспірантів фізико-математичних спеціальностей університетів.

УДК [537](075.8)
ББК 22.313я73

ISBN 978-617-10-0190-9

1. Елементи векторного числення

Дотримуватимемось у тексті збірника таких домовленостей. Вектори позначатимемо жирними літерами: $\mathbf{a}, \mathbf{k}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Sigma}$ тощо, а компоненти векторів — відповідно нижніми індексами або номерами, наприклад: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$. Для радіус-вектора в декартовій системі координат використовуватимемо спеціальне позначення:

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \equiv x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k},$$

причому модуль вектора $|\mathbf{r}| \equiv r$, модуль $|\mathbf{E}| \equiv E$ тощо.

Для скалярного добутку двох векторів вживатимемо паралельно такі записи, залежно від громіздкості формул:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

а для векторного добутку: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Диференціальний оператор “набла” є вектором з такими компонентами в декартовій системі координат:

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

За його допомогою визначають різні диференціальні операції першого порядку. Дію оператора “набла” на скалярну функцію називають ***ґрадієнтом***, отримуючи в результаті вектор:

$$\operatorname{grad}\varphi \equiv \boldsymbol{\nabla}\varphi = \mathbf{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Диверґенцію визначають як дію вектора “набла” на векторну функцію, отримуючи скаляр:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} \equiv (\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Ротор беруть від векторної функції, отримуючи вектор:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{A} &\equiv [\boldsymbol{\nabla},\mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).\end{aligned} \tag{1.1}$$

Оператор Лапласа визначають як скалярний добуток вектора "набла" самого на себе:

$$\Delta \equiv (\boldsymbol{\nabla},\boldsymbol{\nabla}) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{1.2}$$

За допомогою ґрадієнта, диверґенції і ротора можна утворити такі операції другого порядку:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla},\mathbf{A}), \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi, \tag{1.4}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0, \tag{1.5}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0, \tag{1.6}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}. \tag{1.7}$$

Щоб отримати останню рівність, потрібно розписати подвійний векторний добуток за формулою "$bac - cab$":

$$[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}). \tag{1.8}$$

Для прикладу наведемо деякі результати дії диференціальних операцій першого порядку, що є своєрідною "табличкою множення". За їх допомогою надалі проводитимемо спрощення виразів:

$$\operatorname{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad \operatorname{grad}(\mathbf{a},\mathbf{r}) = \mathbf{a},$$

$$(\mathbf{a},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{r} = \mathbf{a}, \qquad \operatorname{grad} f(u) = \frac{df(u)}{du}\operatorname{grad} u,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{r} = 3, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{r} = 0.$$

Зокрема, часто виникає потреба розрахувати ґрадієнт від функції, що залежить лише від модуля радіус-вектора:

$$\operatorname{grad} f(r) = \frac{df(r)}{dr} \operatorname{grad} r = \frac{df(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{1.9}$$

Векторний добуток можна переписати з використанням ***символа Леві-Чівіти*** ε_{ijk}:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \tag{1.10}$$

де використано домовленість про "правило сум": за всіма індексами, які повторюються, відбувається підсумовування. При цьому орти

$$\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{i}, \qquad \mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{j}, \qquad \mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{k}. \tag{1.11}$$

Символ ε_{ijk} є повністю антисиметричним тензором третього ранґу:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{якщо } (i,j,k) = (1,2,3), (3,1,2), (2,3,1), \\ -1, & \text{якщо } (i,j,k) = (1,3,2), (3,2,1), (2,1,3), \\ \ \ 0 & \text{в усіх інших випадках } (i = j,\ j = k \text{ або } k = i). \end{cases} \tag{1.12}$$

Добуток символів Леві-Чівіти виражається таким визначником:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}. \tag{1.13}$$

Тут ***символ Кронекера***

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases} \tag{1.14}$$

Перетворювати об'ємні, поверхневі й контурні інтеґрали один в одного можна за допомогою таких двох інтеґральних теорем. ***Теорема Ґаусса***:

$$\int\limits_V \operatorname{div} \mathbf{A}\, dV = \oint\limits_S (\mathbf{A}, d\mathbf{S}), \tag{1.15}$$

де S — замкнута поверхня, яка обмежує об'єм V, елемент поверхні $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS$, причому $\mathbf{n}$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до S.

Теорема Стокса:

$$\oint_L (\mathbf{A}, d\mathbf{l}) = \int_S (\mathrm{rot}\,\mathbf{A}, d\mathbf{S}), \tag{1.16}$$

тут S — довільна поверхня, яка спирається на замкнутий контур L, елемент довжини $d\mathbf{l}$ дотичний до контура L.

Інтеґрування та диференціювання за просторовими змінними можна виконувати як у декартових координатах x, y, z, так і в деяких інших, зокрема сферичних і циліндричних.

Сферичні координати r, θ, ϕ:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi, \\ y &= r\sin\theta\sin\phi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Кут θ відраховується від осі Oz і змінюється в межах $[0;\pi]$. Кут ϕ відраховується від осі Ox у площині xOy і змінюється в межах $[0;2\pi)$. Зв'язок між ортами сферичної та декартової систем координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{i}\sin\theta\cos\phi + \mathbf{j}\sin\theta\sin\phi + \mathbf{k}\cos\theta, \\ \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{i}\cos\theta\cos\phi + \mathbf{j}\cos\theta\sin\phi - \mathbf{k}\sin\theta, \\ \mathbf{e}_\phi &= -\mathbf{i}\sin\phi + \mathbf{j}\cos\phi. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Елемент об'єму у сферичних координатах:

$$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi. \tag{1.19}$$

Диференціальні операції:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad} f &= \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}, && (1.20) \\
\operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial (A_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}, && (1.21) \\
\operatorname{rot} \mathbf{A} &= \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial (A_\phi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) + && (1.22) \\
&+ \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right), \\
\Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right]. && (1.23)
\end{aligned}
$$

Циліндричні координати r, ϕ, z:

$$
\begin{aligned}
x &= r \cos\phi, \\
y &= r \sin\phi, \\
z &= z.
\end{aligned}
\qquad (1.24)
$$

Кут ϕ відраховується від осі Ox у площині xOy і змінюється в межах $[0; 2\pi)$. Зв'язок між ортами циліндричної та декартової систем координат:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \mathbf{i} \cos\theta + \mathbf{j} \sin\theta, \\
\mathbf{e}_\phi &= -\mathbf{i} \sin\theta + \mathbf{j} \cos\theta, \\
\mathbf{e}_z &= \mathbf{k}.
\end{aligned}
\qquad (1.25)
$$

Елемент об'єму у циліндричних координатах:

$$
dV = r\, dr\, d\phi\, dz. \qquad (1.26)
$$

Диференціальні операції:

$$\operatorname{grad} f = \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}, \tag{1.27}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{A} = {} & \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \\ & + \mathbf{e}_\phi \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \mathbf{e}_z \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right),\end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{1.30}$$

Варто зазначити, що лапласіан від векторного поля, який у декартових координатах має простий вигляд

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{i}\Delta A_x + \mathbf{j}\Delta A_y + \mathbf{k}\Delta A_z, \tag{1.31}$$

у криволінійних координатах вже записується суттєво складніше через залежність ортів від координат, пор. (1.18) та (1.25). Тому часто виявляється простішим застосувати зв'язок

$$\Delta \mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{1.32}$$

1. Обчисліть ґрадієнт (вектори **a** та **b** — сталі, $\alpha = \mathrm{const}$):
   (a) $\operatorname{grad} \dfrac{1}{r}$;
   (b) $\operatorname{grad} \left\{(\mathbf{a},\mathbf{r}) e^{-\alpha r^2}\right\}$;
   (c) $\operatorname{grad} \left\{(\mathbf{a},\mathbf{r}) r\right\}$;
   (d) $\operatorname{grad} \dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{r})}{r^3}$;
   (e) $\operatorname{grad} (\mathbf{a},\mathbf{r})^{(\mathbf{b},\mathbf{r})}$;
   (f) $\operatorname{grad} ([\mathbf{a},\mathbf{r}],\mathbf{r})$;
   (g) $\operatorname{grad} e^{([\mathbf{a},\mathbf{r}],\mathbf{b})}$.
   (h) $\operatorname{grad} |[\mathbf{a},\mathbf{r}]|^2$.

2. Обчисліть диверґенцію (вектори $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ — сталі):

(a) $\operatorname{div} r\mathbf{r}$;

(b) $\operatorname{div}[\mathbf{a},\mathbf{r}]$;

(c) $\operatorname{div} \dfrac{\mathbf{r}}{r^2}$;

(d) $\operatorname{div} \Big\{(\mathbf{a},\mathbf{r})\mathbf{r}\Big\}$;

(e) $\operatorname{div} \dfrac{\mathbf{r}}{(\mathbf{a},\mathbf{r})}$;

(f) $\operatorname{div} \Big\{[\mathbf{a},\mathbf{r}]r\Big\}$;

(g) $\operatorname{div} \dfrac{[\mathbf{r},[\mathbf{r},\mathbf{a}]]}{r^5}$.

(h) $\operatorname{div} \dfrac{\mathbf{a}(\mathbf{b},\mathbf{r})}{r^3}$.

3. Обчисліть ротор (вектор $\mathbf{a}$ — сталий):

(a) $\operatorname{rot} r\mathbf{r}$;

(b) $\operatorname{rot}[\mathbf{a},\mathbf{r}]$;

(c) $\operatorname{rot} \dfrac{\mathbf{r}}{r^2}$;

(d) $\operatorname{rot} \dfrac{\mathbf{r}}{(\mathbf{a},\mathbf{r})}$;

(e) $\operatorname{rot} \dfrac{[\mathbf{r},[\mathbf{r},\mathbf{a}]]}{r^5}$;

(f) $\operatorname{rot} \Big\{(\mathbf{a},\mathbf{r})\mathbf{r}\Big\}$.

4. Обчисліть вирази (вектори $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ — сталі):

(a) $\operatorname{div} \dfrac{\operatorname{rot} \mathbf{r}(\mathbf{a},\mathbf{r})}{r^3}$;

(b) $\operatorname{rot} \dfrac{\operatorname{rot}[\mathbf{a},\mathbf{r}]}{r^3}$;

(c) $\operatorname{rot} \left[(\mathbf{a},\mathbf{r})\dfrac{\operatorname{rot}[\mathbf{a},\mathbf{r}]}{r^3}\right]$;

(d) $\operatorname{grad}\left([\mathbf{a},\mathbf{r}],\operatorname{rot}[\mathbf{r},\mathbf{b}]\right)$;

(e) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\operatorname{rot}[\mathbf{a},[\mathbf{r},\mathbf{b}]]$;

(f) $\operatorname{grad}\operatorname{div}[\mathbf{a},[\mathbf{r},\mathbf{b}]]$.

5. Доведіть тотожності (тут $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ і т. д.):

(a) $\operatorname{div}[\mathbf{A},\mathbf{B}] = (\mathbf{B},\operatorname{rot}\mathbf{A}) - (\mathbf{A},\operatorname{rot}\mathbf{B})$;

(b) $\operatorname{rot}[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} + (\mathbf{B},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} - (\mathbf{A},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}$;

(c) $\operatorname{grad}(\mathbf{A},\mathbf{B}) = [\mathbf{A},\operatorname{rot}\mathbf{B}] + [\mathbf{B},\operatorname{rot}\mathbf{A}] + (\mathbf{B},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} + (\mathbf{A},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}$;

(d) $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\operatorname{rot}\mathbf{A} - [\mathbf{A},\operatorname{grad}\varphi]$;

(e) $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\operatorname{div}\mathbf{A} + (\mathbf{A},\operatorname{grad}\varphi)$;

(f) $(\mathbf{C},\operatorname{grad}(\mathbf{A},\mathbf{B})) = (\mathbf{A},(\mathbf{C},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}) + (\mathbf{B},(\mathbf{C},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A})$;

(g) $(\mathbf{C}, \boldsymbol{\nabla})[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\mathbf{A}, (\mathbf{C}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}] - [\mathbf{B}, (\mathbf{C}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{A}]$;

(h) $(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{A})\mathbf{B} = (\mathbf{A}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} + \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A}$;

(i) $([\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathrm{rot}\,\mathbf{C}) = (\mathbf{B}, (\mathbf{A}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{C}) - (\mathbf{A}, (\mathbf{B}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{C})$;

(j) $[[\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{A}], \mathbf{B}] = \mathbf{A}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} - [\mathbf{A}, \mathrm{rot}\,\mathbf{B}] - [\mathbf{B}, \mathrm{rot}\,\mathbf{A}]$;

(k) $([\mathbf{A}, \boldsymbol{\nabla}], \mathrm{rot}\,\mathbf{B}) = (\mathbf{A}, \boldsymbol{\nabla})\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}, \Delta\mathbf{B})$.

6. Доведіть такі співвідношення для згорток символів Леві-Чівіти:

   (a) $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$; (b) $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{klm} = 2\delta_{im}$;

   (c) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$.

7. Знайдіть середні за всіма просторовими напрямками від таких виразів, де n_j — компоненти одиничного вектора $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$:

   (a) $\overline{n_j}$; (b) $\overline{n_j n_k}$; (c) $\overline{n_j n_k n_l}$; (d) $\overline{n_j n_k n_l n_m}$.

8. Знайдіть середні за всіма просторовими напрямками таких виразів:

   (a) $\overline{(\mathbf{a}, \mathbf{n})^2}$; (b) $\overline{(\mathbf{a}, \mathbf{n})(\mathbf{b}, \mathbf{n})}$; (c) $\overline{(\mathbf{a}, \mathbf{n})\mathbf{n}}$; (d) $\overline{[\mathbf{a}, \mathbf{n}]^2}$.

   Тут $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — сталі вектори, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — одиничний вектор.

9. Перетворіть інтеґрали по об'єму в інтеґрали по поверхні ($\mathbf{a}$ — сталий вектор, величини $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ та $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ є функціями від координат):

   (a) $\int\limits_V (\mathrm{grad}\,\varphi, \mathbf{a})dV$; (b) $\int\limits_V (\mathbf{a}, \mathrm{rot}\,\mathbf{B})dV$;

   (c) $\int\limits_V \Delta(\varphi\psi)dV$; (d) $\int\limits_V \Delta\varphi\,dV$;

   (e) $\int\limits_V \mathrm{div}[\mathbf{a}, \mathbf{B}]dV$; (f) $\int\limits_V (\mathbf{a}, \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B})dV$.

10. Обчисліть інтеґрали:

(a) $\oint\limits_S \mathbf{r}(\mathbf{a},\mathbf{n})\,dS$;

(b) $\oint\limits_S (\mathbf{a},\mathbf{r})[\mathbf{b},\mathbf{n}]\,dS$;

(c) $\oint\limits_S \mathbf{n}\varphi\,dS$;

(d) $\oint\limits_S [\mathbf{n},\mathbf{a}]\,dS$;

(e) $\oint\limits_S (\mathbf{n},\mathbf{b})\mathbf{a}\,dS$.

Вектори $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ — сталі, $\mathbf{n}$ — орт нормалі до поверхні S.

(f) $\oint\limits_L f\,d\mathbf{l}$.

(g) $\oint\limits_L u\,df$.

Інтеґрування відбувається вздовж замкнутого контура L;
f, u — функції.

2. Заряди і струми у вакуумі: вступні зауваження

У збірнику використовуємо так звану симетричну систему одиниць Ґаусса (CGS). У ній одиниця електричного заряду є похідною від механічних одиниць і визначається з закону Кулона у вигляді

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{2.1}$$

Другою характерною рисою цієї системи одиниць є однакова розмірність напруженості електричного поля $\mathbf{E}$ та індукції магнітного поля $\mathbf{B}$. Як наслідок, у рівняннях електромагнітного поля маємо коефіцієнти 4π та $1/c$, де c — швидкість світла у вакуумі.

На практиці найбільше розповсюдження має Міжнародна система одиниць (SI, Le Système international d'unités). Одиниця заряду — кулон — є незалежною від механічних одиниць і їй приписують окрему розмірність. Як наслідок, закон Кулона набуває вигляду

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{2.2}$$

де ε_0^{-1} відіграє роль електричної силової константи. Також використовують допоміжну магнітну силову константу $\mu_0 = \varepsilon_0^{-1}/c^2$. Електричні та магнітні поля в SI мають різні розмірності, а в рівняннях електромагнітного поля з'являються константи ε_0 і μ_0. Основною перевагою Міжнародної системи одиниць є те, що вона включає в себе всі практичні електричні та магнітні одиниці (кулон, ампер, вольт, ом тощо), які сформувались історично і поширилися ще перед її створенням.

Вигляд рівнянь електромагнітного поля в SI можна знайти в будь-якій стандартній літературі.

Система ***рівнянь Максвелла*** в диференціальній формі:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= 4\pi\rho(\mathbf{r},t),\\
\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= 0,\\
\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t},\\
\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \quad\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r},t),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

де $\rho(\mathbf{r},t)$ — об'ємна густина електричного заряду, а $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ — об'ємна густина електричного струму.

Внаслідок лінійності рівнянь електричне і магнітне поля задовольняють ***принцип суперпозиції***:

$$\mathbf{E}=\sum_i\mathbf{E}_i,\qquad \mathbf{B}=\sum_i\mathbf{B}_i, \tag{2.4}$$

де $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{B}_i$ — поля, які створюються підсистемами зарядів і струмів.

Через скалярний $\varphi(\mathbf{r},t)$ і векторний $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ потенціали вектори $\mathbf{E}$ та $\mathbf{B}$ виражаються так:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \;=\; -\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r},t)-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \;=\; \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t). \tag{2.6}$$

Рівняння для потенціалів

$$\Delta\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A}=-4\pi\rho, \tag{2.7}$$

$$\Delta\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}+\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \tag{2.8}$$

Векторний і скалярний потенціали визначенні з точністю до скалярної функції f (так звана ***калібрувальна*** або ***ґрадієнтна інваріантність***):

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\operatorname{grad}f,\qquad \varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{2.9}$$

Зважаючи на неоднозначність вибору потенціалів, на них можна накласти певні умови, які називають калібруваннями.

Калібрування Кулона:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{2.10}$$

Рівняння для потенціалів дещо спрощуються:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \tag{2.11}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\perp, \tag{2.12}$$

де

$$\mathbf{j}_\perp = \mathbf{j} - \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{2.13}$$

— ***поперечний струм***. Рівняння типу (2.11) називають ***рівнянням Пуассона***, а типу (2.12) — ***рівнянням д'Аламбера***. Для оператора (***даламберіана***) у правій частині використовують позначення

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Калібрування Лоренца:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \tag{2.14}$$

Рівняння для потенціалів у цьому калібруванні:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \tag{2.15}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{2.16}$$

Об'ємна густина енерґії електромагнітного поля w та об'ємна густина потоку енерґії електромагнітного поля $\mathbf{S}$ визначаються так:

$$w = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}, \qquad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]. \tag{2.17}$$

Закон збереження енерґії:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{j}, \mathbf{E}) + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \tag{2.18}$$

Густина заряду системи точкових зарядів $\{e_i\}$ в точках $\{\mathbf{r}_i\}$:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_i e_i \delta\big(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)\big), \tag{2.19}$$

де $\delta(\mathbf{r})$ — ***дельта-функція Дірака***, властивості якої описано нижче.

Густина струму системи точкових зарядів $\{e_i\}$ в точках $\{\mathbf{r}_i\}$, які рухаються зі швидкостями $\mathbf{v}_i$:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_i e_i \mathbf{v}_i \delta\big(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)\big). \tag{2.20}$$

Дельта-функція Дірака

Узагальнена функція $\delta(x)$ має такі властивості:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \tag{2.21}$$

причому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1 \tag{2.22}$$

або загальніше

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) f(x)\, dx = f(a). \tag{2.23}$$

Справедливі такі формули для складного арґумента:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \qquad \delta\big(g(x)\big) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x - x_i), \tag{2.24}$$

де x_i — нулі функції $g(x)$.

Ця функція просто узагальнюється на багатовимірні випадки, зокрема на тривимірний:

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = \delta(x-a_x)\delta(y-a_y)\delta(z-a_z). \tag{2.25}$$

Властивість (2.23) тут зручно переписати, ввівши позначення

$$d\mathbf{r} \equiv dx\,dy\,dz \equiv dV, \tag{2.26}$$

а саме:

$$\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{a}) f(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = f(\mathbf{a}). \tag{2.27}$$

Інтеґрування відбувається по всьому простору.

Перетворення Фур'є

Одновимірне перетворення Фур'є функції $f(x)$ визначається співвідношеннями:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk\, f_k\, e^{ikx}, \qquad f_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx}. \tag{2.28}$$

Його тривимірним аналогом (щодо просторових змінних) є:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\, f_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \qquad f_{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{r}\, f(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \tag{2.29}$$

де для зручності введено позначення для елементів об'єму

$$d\mathbf{r} = dx\,dy\,dz; \qquad d\mathbf{k} = dk_x\,dk_y\,dk_z.$$

Чотиривимірне перетворення Фур'є (щодо просторових змінних і часу):

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d\mathbf{k}\int d\omega\;\; F_{\mathbf{k}\omega}\, e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}, \\ F_{\mathbf{k}\omega} &= \int d\mathbf{r}\int dt\;\; F(\mathbf{r},t)\, e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Величини $f_k, f_{\mathbf{k}}, F_{\mathbf{k}\omega}$ називають ***фур'є-зображеннями***. Зрозуміло, що замість скалярної величини $F(\mathbf{r},t)$ може стояти й векторна $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$, тоді вектором буде й зображення $\mathbf{F}_{\mathbf{k}\omega}$.

Якщо проміжків інтеґрування не зазначено, то розуміємо інтеґрали по всьому просторовому об'єму і по всьому часовому інтервалу.

11. Знайдіть рівняння Максвелла (2.3) для фур'є-зображень.

12. Отримайте вираз для розв'язку $\varphi(\mathbf{r})$ рівняння Пуассона

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}),$$

використовуючи пряме й обернене перетворення Фур'є.

13. Знайдіть фур'є-зображення таких потенціалів:

(a) $\varphi(r) = \dfrac{A}{r}$ (потенціал Кулона);

(b) $\varphi(r) = \dfrac{Ae^{-\lambda r}}{r}$ (потенціал Юкави);

(c) $\varphi(r) = Ae^{-\lambda r^2}$;

(d) $\varphi(r) = A\left[e^{-2\lambda(r-a)} - 2e^{-\lambda(r-a)}\right]$ (потенціал Морзе);

(e) $\varphi(r) = \begin{cases} A, & r \leqslant a \\ 0, & r > a \end{cases}$

(f) $\varphi = A\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a})$
(цей потенціал ефективно відповідає взаємодії твердих сфер).

У наведених виразах $A, \lambda, a = \text{const}$, $\mathbf{a}$ — сталий вектор.

14. Знайдіть фур'є-зображення поперечного струму $\mathbf{j}^{\perp}_{\mathbf{k}}(t)$, яке відповідає одиничному заряду e, що рухається за законом $\mathbf{r}_0(t)$.

3. Електростатика у вакуумі

Якщо в рівняннях (2.3) величини не залежать від часу, то система розпадається на рівняння електростатики і магнітостатики. Електростатичне поле у вакуумі визначається такими рівняннями Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 4\pi\rho(\mathbf{r}), \\ \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

де $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ — вектор напруженості електричного поля, $\rho(\mathbf{r})$ — густина заряду.

Теорема Ґаусса для напруженості електричного поля має вигляд:

$$\oint\limits_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 4\pi \int\limits_V \rho\, dV = 4\pi q, \tag{3.2}$$

де замкнена поверхня S обмежує об'єм V.

Зв'язок між напруженістю електричного поля та скалярним потенціалом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r}). \tag{3.3}$$

розв'язок якого можна записати у вигляді:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int\limits_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' + \text{const}. \tag{3.4}$$

Для систем зарядів, обмежених у просторі, константу покладають рівною нулеві, забезпечуючи $\varphi = 0$ на безмежності. Беручи ґрадієнт, отримуємо напруженість електричного поля:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int\limits_V \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, dV'. \tag{3.5}$$

Якщо розподіл заряду заданий поверхневою густиною $\sigma(\mathbf{r})$ або лінійною густиною $\varkappa(\mathbf{r})$, то напруженість електричного поля визначається формулами:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int\limits_S \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, dS', \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int\limits_L \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\varkappa(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, d\ell', \tag{3.6}$$

де інтеґрування відбувається по двовимірній поверхні S або одновимірному контуру L відповідно.

Енерґія електростатичного поля обчислюється за формулою:

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho\varphi\, dV = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V E^2\, dV. \tag{3.7}$$

Енерґія взаємодії двох систем зарядів дорівнює:

$$W = \int \rho_1\varphi_2\, dV = \int \rho_2\varphi_1\, dV = \int \frac{\rho_1(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{r}_2)\, dV_1\, dV_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}, \tag{3.8}$$

де $\varphi_i(\mathbf{r})$ — потенціал, що створюється розподілом зарядів $\rho_i(\mathbf{r})$.

15. Визначте, які з перелічених виразів можуть описувати електростатичне поле:

   (a) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0\left(\mathbf{i}ay\cos ax + \mathbf{j}\sin ax + \mathbf{k}(az)^2\right)$;

   (b) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0\,\dfrac{r}{a}\,(2\mathbf{e}_r\phi\sin\theta + \mathbf{e}_\theta\phi\cos\theta + \mathbf{e}_\phi)$;

   (c) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 a\left(\mathbf{i}\sqrt{a}xy^2 + \mathbf{j}\sqrt{a}x^2y + \mathbf{k}xye^{-a(x^2+z^2)}\right)$;

   (d) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0\left(\mathbf{e}_r\dfrac{r}{a} + \mathbf{e}_z A\dfrac{\cos\phi}{r}\right)$.

16. На основі принципу суперпозиції розрахуйте напруженість електричного поля:

   (a) заряду $q > 0$, рівномірно розподіленого по кільцю радіуса a, на осі кільця;

(b) прямолінійної нитки довжиною $2l$, рівномірно зарядженої зарядом $q > 0$, в точці, віддаленій на відстані x від центра нитки і розміщеної симетрично відносно її кінців;

(c) нескінченно довгої нитки, рівномірно зарядженої з лінійною густиною $\varkappa$;

(d) безмежної поверхні, рівномірно зарядженої з поверхневою густиною σ;

(e) сфери радіуса a, рівномірно зарядженої з поверхневою густиною σ;

(f) кулі радіуса a, рівномірно зарядженої з об'ємною густиною ρ.

17. Круглий диск радіуса a рівномірно заряджений з поверхневою густиною σ. Визначте, в якій точці на осі диска напруженість електричного поля дорівнює $\pi\sigma$.

18. Круглий диск радіуса a товщиною b рівномірно заряджений по об'єму з густиною $\rho = \text{const}$. Знайдіть напруженість електричного поля на осі диску.

19. Знайдіть напруженість електричного поля, використовуючи теорему Ґаусса:

    (a) безмежної прямолінійної нитки, рівномірно зарядженої з лінійною густиною $\varkappa$;

    (b) безмежно довгого циліндра радіуса a, рівномірно зарядженого з поверхневою густиною зарядів σ;

    (c) безмежно довгого циліндра радіуса a, рівномірно зарядженого з об'ємною густиною зарядів ρ;

    (d) сфери радіуса a, рівномірно зарядженої з поверхневою густиною σ;

    (e) кулі радіуса a, рівномірно зарядженої з об'ємною густиною ρ.

20. Заряд q рівномірно розподілений по об'єму фігури, яка обмежена двома неконцентричними сферами з радіусами R_1 і R_2, $R_1 > R_2$; менша сфера повністю міститься всередині більшої. Відстань між центрами a. Знайдіть напруженість поля всередині меншої сфери.

21. Заряд q рівномірно розподілений по об'єму фігури, яка обмежена двома неконцентричними сферами з радіусами R_1 і R_2, $R_1 > R_2$; менша сфера повністю міститься всередині більшої. Відстань між центрами a. Знайдіть напруженість поля поза фігурою.

22. По об'єму фігури, яка обмежена двома неконцентричними безмежно довгими циліндрами з радіусами R_1 і R_2 ($R_1 > R_2$), рівномірно розподілений заряд з густиною ρ. Менший циліндр повністю міститься всередині більшого. Відстань між осями циліндрів a. Знайдіть напруженість поля всередині меншого циліндра.

23. По об'єму фігури, яка обмежена двома неконцентричними безмежно довгими циліндрами з радіусами R_1 і R_2 ($R_1 > R_2$), рівномірно розподілений заряд з густиною ρ. Менший циліндр повністю міститься всередині більшого. Відстань між осями циліндрів a. Знайдіть напруженість поля поза фігурою.

24. n меридіанів сфери радіуса a, кут між якими α, рівномірно заряджено з лінійно густиною заряду $\varkappa$. Знайдіть напруженість електричного поля в центрі сфери.

25. Знайдіть електричне поле кулі радіуса R, заряд у якій розподілений за законом $\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^n$, де r — відстань від центра кулі, $n > -3$ — довільне число.

26. Визначте напруженість електричного поля безмежного кругового циліндра радіуса R, зарядженого з об'ємною густиною:
    (a) $\rho = \rho_0 e^{-\alpha r}$;
    (b) $\rho = \rho_0 e^{-\alpha r^2}$.

27. В основному стані атома водню заряд електрона $(-e)$ розподілений з об'ємною густиною

$$\rho = -\frac{e}{\pi a^3}\; e^{-2r/a},$$

де a — борівський радіус, r — віддаль до ядра. Розрахуйте скалярний потенціал і напруженість електричного поля атома водню.

28. Знайдіть електричне поле безмежної плити товщиною a, яка рівномірно заряджена по об'єму з густиною ρ_0.

29. Знайдіть електричне поле безмежної плити товщиною $2a$, яка заряджена по об'єму з густиною $\rho = \rho_0 \left(1 - (z/a)^2\right)$.

30. Заряд розподілений по безмежному просторі за законом $\rho = \rho_0 \cos(\alpha x) \cos(\beta y) \sin(\gamma z)$. Знайдіть потенціал електричного поля φ.

31. Простір між двома концентричними сферами з радіусами R_1 і R_2, $R_1 < R_2$, заряджений з об'ємною густиною $\rho = \rho_0 \left(R_1/r\right)^2$. Визначте потенціал і напруженість електричного поля.

32. Простір між двома концентричними безмежно довгими циліндрами з радіусами R_1 і R_2, $R_1 < R_2$, заряджено з об'ємною густиною $\rho = \rho_0(R_1/r)$. Визначте потенціал і напруженість електричного поля.

33. На основі принципу суперпозиції розрахуйте потенціал електричного поля, що створює у вакуумі:
    (a) прямолінійний рівномірно заряджений із лінійною густиною $\varkappa$ відрізок довжиною $2l$ у будь-якій точці простору;
    (b) прямолінійна безмежна нитка, рівномірно заряджена з лінійною густиною $\varkappa$;
    (c) рівномірно заряджена з поверхневою густиною заряду σ сфера радіуса a;
    (d) рівномірно заряджена куля радіуса a. Заряд кулі q.

34. Знайдіть потенціал електричного поля, що створює рівномірно заряджена ($\sigma = \mathrm{const}$) поверхня кругового циліндра радіусом a і висотою H в будь-якій точці на його осі.

35. З допомогою рівняння Пуассона визначте потенціал і напруженість електричного поля, що створює:

    (a) однорідна куля радіуса a, рівномірно заряджена з об'ємною густиною $\rho = \mathrm{const}$.

    (b) рівномірно заряджена з поверхневою густиною заряду σ сфера радіуса a;

    (c) безмежний плоский шар товщиною $2a$, рівномірно заряджений з об'ємною густиною $\rho = \mathrm{const}$;

    (d) однорідний безмежно довгий круглий циліндр радіуса a, рівномірно заряджений з об'ємною густиною $\rho = \mathrm{const}$.

36. Знайдіть енерґію взаємодії U електронної хмари з ядром в атомі водню. Заряд електрона розподілений в атомі з об'ємною густиною
$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3}\, e^{-2r/a},$$
де e — елементарний заряд, a — борівський радіус.

37. Центри двох куль із зарядами q_1 та q_2 знаходяться на відстані a один від одного ($a > R_1 + R_2$, де R_1, R_2 — радіуси куль). Заряди розподілені сферично симетрично. Знайдіть енерґію U взаємодії куль.

4. Магнітостатика у вакуумі

У магнітостатиці вихідними є такі рівняння Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}), \\ \operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

де $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ — індукція магнітного поля, $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ — густина струму.

Якщо розподіл струмів володіє аксіальної симетрією, то корисною є інтеґральна форма рівняння (4.1) (теорема Стокса):

$$\oint\limits_L (\mathbf{B},\, d\boldsymbol{\ell}) = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S (\mathbf{j},\, d\mathbf{S}) = \frac{4\pi}{c} I, \tag{4.2}$$

тут інтеґрал йде по довільному замкнутому контуру L, I — повний струм, що протікає через довільну поверхню S, охоплену цим контуром.

Векторний потенціал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ так пов'язаний з індукцією магнітного поля:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}), \tag{4.3}$$

причому накладаємо також додаткову умову (***калібрування Кулона***):

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \tag{4.4}$$

Подібно до скалярного потенціалу, маємо для $\mathbf{A}$ рівняння Пуассона:

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{4.5}$$

звідки векторний потенціал системи струмів можна записати так:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV'. \tag{4.6}$$

Найчастіше буде потрібним вираз для лінійних струмів:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_L \frac{I\,d\boldsymbol{\ell}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{4.7}$$

звідки маємо ***закон Біо–Савара–Лапласа***: елемент струму $I\,d\boldsymbol{\ell}$ створює у вакуумі магнітне поле

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\frac{[I\,d\boldsymbol{\ell}, \mathbf{r}-\mathbf{r}']}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{4.8}$$

За принципом суперпозиції сумарне поле в даній точці можна отримати, проінтеґрувавши (4.8) за всіма елементами струму $d\boldsymbol{\ell}$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_L \frac{[I\,d\boldsymbol{\ell}, \mathbf{r}-\mathbf{r}']}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{4.9}$$

Потік індукції магнітного поля через поверхню S виражається формулою:

$$\Phi = \int\limits_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}). \tag{4.10}$$

38. Знайдіть магнітне поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, що відповідає такому векторному потенціалові:
    (a) $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}[\mathbf{B}_0, \mathbf{r}]$, де $\mathbf{B}_0$ — сталий вектор (симетричне калібрування);
    (b) $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = B_0 x\mathbf{j}$, де $B_0 = \mathrm{const}$, $\mathbf{j}$ — орт уздовж осі Oy (калібрування Ландау).

39. Використовуючи закон Біо–Савара–Лапласа, визначте індукцію магнітного поля, яке створює у вакуумі тонкий прямолінійний провідник довжиною $2L$, по якому тече струм силою I. Розгляньте граничний випадок $L \to \infty$.

40. По коловому контуру радіуса a тече струм I. Використовуючи закон Біо–Савара–Лапласа, визначте індукцію магнітного поля, яке створюється ним на осі контура.

41. Струм I протікає по дузі кола радіуса a з центральним кутом α. Обчисліть індукцію магнітного поля в центрі кола.

42. По кільцю радіуса R протікає струм силою I. Знайдіть величину індукції магнітного поля в центрі кільця безпосереднім інтеґруванням відповідного рівняння Максвелла.

43. В коло радіуса a вписано правильний n-кутник, по якому тече струм I. Знайдіть індукцію магнітного поля

    (а) в центрі n-кутника; розгляньте випадок $n \to \infty$;

    (б) будь-де на осі, що проходить через центр n-кутника.

44. Використовуючи вираз для загального розв'язку рівняння Пуассона, розрахуйте векторний потенціал, що створює у вакуумі прямолінійний струм I довжиною $2L$. Розгляньте граничний випадок $L \to \infty$.

45. Лінійний провідник має форму прямокутника зі сторонами $2a$ і $2b$, по якому протікає струм I. Обчисліть індукцію магнітного поля на осі, що проходить через центр прямокутника перпендикулярно до його площини.

46. Лінійний контур зі струмом I складається із двох паралельних напівбезмежних прямих, з'єднаних між собою півколом радіуса a. Обчисліть індукцію магнітного поля в центрі цього півкола.

47. За допомогою рівняння Пуассона визначте векторний потенціал та індукцію магнітного поля, яке створює струм I, рівномірно розподілений по перетину безмежно довгого циліндричного провідника радіуса a.

48. За допомогою рівняння Пуассона визначте векторний потенціал та індукцію магнітного поля, яке створює струм I, рівномірно розподілений по провіднику, що має форму безмежно довгого порожнього циліндра, зовнішній і внутрішній радіуси якого рівні відповідно a та b.

49. За допомогою теореми Стокса знайдіть індукцію магнітного поля, створеного протіканням струму I по безмежно довгому тонкому провіднику.

50. Струм I рівномірно розподілений по поверхні плоского кільця з внутрішнім і зовнішнім радіусами a і b відповідно. Обчисліть індукцію магнітного поля на осі кільця.

51. Визначте індукцію магнітного поля, яка створена постійним струмом I, що протікає по безмежному циліндричному провіднику радіуса a. Густина струму стала.

52. Всередині тонкої провідної циліндричної оболонки радіуса b знаходиться коаксіальний з нею провід радіуса a. По цих провідниках протікають постійні струми однакової величини I у протилежних напрямках. Визначте індукцію магнітного поля такої системи в усіх точках простору.

53. На магнітний тор густо намотано N витків ізольованого дроту, по якому проходить струм силою I. Радіус перерізу тора рівний a, відстань від центра тора до центра перерізу b. Знайдіть індукцію магнітного поля всередині тора і магнітний потік у ньому.

54. У магнітному полі, яке створене нескінчено довгим прямолінійним струмом, знаходиться квадрат зі стороною a. Сторона квадрата паралельна до провідника зі струмом. На якій відстані від провідника знаходиться сторона квадрата, якщо магнітний потік через площину квадрата рівний $\Phi = \frac{2I}{c} a \ln 3$?

55. На достатньо довгий залізний сердечник круглого перерізу радіуса a намотано рівномірно тонкий ізольований дріт кількістю n витків на одиницю довжини, по якому тече струм силою I. Знайдіть індукцію магнітного поля всередині сердечника.

56. Уздовж нескінченно довгої смужки ширини a протікає рівномірно розподілений по її ширині струм силою I. Знайдіть індукцію магнітного поля смужки.

57. По двох однакових нескінченно довгих паралельних пластинах, розташованих одна над одною, протікають струми протилежних напрямків. Ширина пластин a, відстань між ними b. Знайдіть силу взаємодії пластин на одиницю довжини.

58. Знайдіть векторний потенціал $\mathbf{A}$ та індукцію магнітного поля $\mathbf{B}$ двох прямолінійних паралельних струмів I, які течуть у різних напрямках. Відстань між провідниками рівна $2a$.

59. Знайдіть магнітне поле $\mathbf{B}$, створене двома паралельними площинами, по яких протікають струми з поверхневою густиною j. Розгляньте два випадки взаємної орієнтації струмів: в одному напрямку, в різних напрямках.

60. Знайдіть векторний потенціал $\mathbf{A}$ та магнітне поле $\mathbf{B}$, які створює в довільній точці тонке кільце радіуса a зі струмом I. Результат виразіть через еліптичні інтеґрали.

5. Мультипольні розклади

Загальний розклад скалярного потенціалу за мультиполями:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_V r'^n P_n(\cos\theta)\rho(\mathbf{r}')\, dV', \qquad \theta = (\widehat{\mathbf{r}', \mathbf{r}}), \tag{5.1}$$

де $P_n(\cos\theta)$ — поліноми Лежандра. У явному вигляді розклад за мультиполями можна записати так:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{r} + \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{r})}{r^3} + \frac{3}{2r^5} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} x_j x_k Q_{jk} + \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{r^{2n+1}} \frac{(2n-1)!!}{n!} \sum_{k_1=1}^{3} \dots \sum_{k_n=1}^{3} x_{k_1} \dots x_{k_n} Q_{k_1 \dots k_n}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

У цьому виразі q — повний заряд

$$q = \sum_i e_i \qquad \text{або} \qquad q = \int\limits_V \rho(\mathbf{r}')\, dV', \tag{5.3}$$

де перший вираз записано для системи точкових зарядів, другий — для неперервного розподілу з густиною $\rho(\mathbf{r})$.

Електричний дипольний момент :

$$\mathbf{d} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i \qquad \text{або} \qquad \mathbf{d} = \int\limits_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}')\, dV'. \tag{5.4}$$

Електричний квадрупольний момент системи точкових зарядів:

$$Q_{jk} = \sum_i e_i \left(x_j^{(i)} x_k^{(i)} - \frac{r_i^2}{3} \delta_{jk} \right), \tag{5.5}$$

де $x_j^{(i)}$ — j-та компонента радіус-вектора i-тої частинки $\mathbf{r}_i$, а $r_i = |\mathbf{r}_i|$.

Для неперервного розподілу зарядів цей вираз записують так:

$$Q_{jk} = \int\limits_V \left(x'_j x'_k - \frac{r'^2}{3}\delta_{jk} \right) \rho(\mathbf{r}')\, dV'. \tag{5.6}$$

Вищі мультипольні моменти ($n \geqslant 3$) визначаються аналогічно з урахування відповідної симетризації. Зокрема, випадок $n = 3$ називають ***октупольним моментом***:

$$Q_{jkl} = \sum_i e_i \left[x_j^{(i)} x_k^{(i)} x_l^{(i)} - \frac{r_i^2}{5} \left(x_j^{(i)}\delta_{kl} + x_k^{(i)}\delta_{jl} + x_l^{(i)}\delta_{jk} \right) \right], \tag{5.7}$$

який можна отримати з (5.1) після низки нескладних перетворень.

Подібним способом можна розкласти й векторний потенціал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Магнітний дипольний момент системи точкових зарядів:

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c} \sum_i e_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i] \tag{5.8}$$

а для неперервного розподілу, що визначається густиною струму $\mathbf{j}(\mathbf{r})$:

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c} \int\limits_V [\mathbf{r}, \mathbf{j}(\mathbf{r}')]\, dV' \tag{5.9}$$

У дипольному наближенні векторний потенціал дорівнює

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{[\mathfrak{m}, \mathbf{r}]}{r^3}, \tag{5.10}$$

оскільки доданка, що відповідає монополю, — аналога виразу з повним зарядом q у формулі (5.2) — для магнітного поля не існує.

61. Знайдіть вирази для електричного і магнітного полів, що відповідають дипольному наближенню

$$\varphi_{\mathrm{d}}(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{r})}{r^3} \qquad \text{та} \qquad \mathbf{A}_{\mathrm{d}}(\mathbf{r}) = \frac{[\mathfrak{m}, \mathbf{r}]}{r^3}.$$

62. Покажіть, що дипольний момент електрично нейтральної системи не залежить від вибору початку системи координат.

63. Покажіть, що тензор квадрупольного моменту аксіально симетричного розподілу зарядів має лише одну незалежну компоненту.

64. Знайдіть потенціал електричного поля, яке створює у вакуумі аксіально симетричний квадруполь з моментом

$$Q_{zz} = Q; \qquad Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{Q}{2}.$$

65. Знайдіть електричне поле диполя на великій відстані від нього. Заряди дорівнюють $\pm q$, відстань між ними a.

66. Знайдіть електричне поле на великій відстані від системи зарядів, які розміщені у вершинах квадрата зі стороною a. Однойменні заряди величиною $\pm q$ знаходяться на протилежних вершинах.

67. Покажіть, що розподіл зарядів $\rho(\mathbf{r}) = -(\mathbf{d}, \boldsymbol{\nabla})\delta(\mathbf{r})$ описує елементарний диполь з моментом $\mathbf{d}$, розташований у початку координат.

68. Знайдіть електричний дипольний момент $\mathbf{d}$ і квадрупольний момент Q_{jk} тривісного еліпсоїда з півосями a, b, c. Густина заряду $\rho = \text{const}$.

69. Визначте потенціал електричного поля (з точністю до квадрупольного члена), яке створює еліпсоїд обертання з півосями a та b ($b < a$) на великих відстанях. Заряд q рівномірно розподілений по еліпсоїду.

70. Знайдіть електричний дипольний момент $\mathbf{d}$ і компоненту Q_{zz} квадрупольного моменту кулі радіусом R, якщо густина заряду $\rho(z) = \rho_0(1 + z/R)$, $\rho_0 = \text{const}$. Центр кулі збігається з початком координат.

71. Знайдіть електричний дипольний момент **d** і компоненту квадрупольного моменту Q'_{zz}, де $Q'_{ij} = \int x'_i x'_j \rho(\mathbf{r}')\, dV'$, тривісного еліпсоїда з півосями a, b, c. Густина заряду $\rho(z) = \rho_0 z/c$, $\rho_0 = \mathrm{const}$. Центр еліпсоїда збігається з початком координат.

72. Знайдіть дипольний і компоненту Q_{zz} квадрупольного моменту рівномірно зарядженого (з поверхневою густиною σ) тонкого диска радіуса R, який лежить у площині xOy.

73. Знайдіть квадрупольний момент тонкої плоскої пластини, однорідно зарядженої з поверхневою густиною σ, якщо:

    (a) форма пластини — прямокутник зі сторонами a, b;

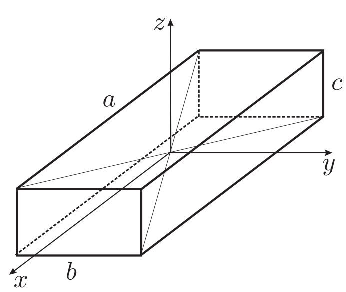
    (b) форма пластини — еліпс із півосями a, b.

74. Знайдіть дипольний і квадрупольний моменти відрізка довжиною a, зарядженого з лінійною густиною $\varkappa$, який лежить на осі Ox так, що його центр збігається з початком координат.

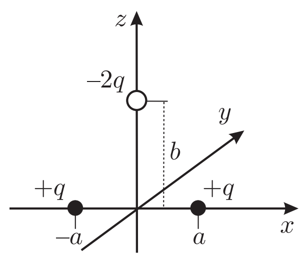
75. Два коаксіальні рівномірно заряджені тонкі круглі кільця, з радіусами a і b та зарядами q і $-q$ відповідно, знаходяться в одній площині. Знайдіть потенціал електричного поля цієї системи на великих відстанях від неї.

76. Знайдіть дипольний момент системи однакових зарядів, які на площині розміщені у вершинах правильного $2n$-кутника.

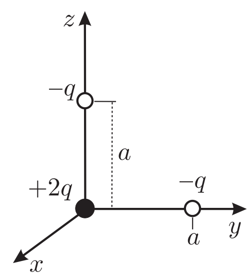
77. У вершинах правильного шестикутника з стороною $2a$ розміщено почергово різнойменні заряди величиною q. Знайдіть перший незникаючий член розкладу потенціалу на великих відстанях.

78. 

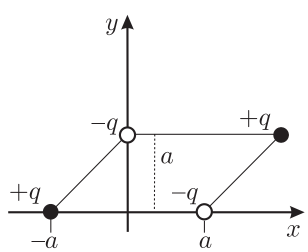
Знайдіть квадрупольний момент прямокутного паралелепіпеда зі сторонами a, b, c, рівномірно зарядженого з густиною $\rho = \mathrm{const}$. Центр паралелепіпеда збігається з початком координат (див. рис.).

79. 

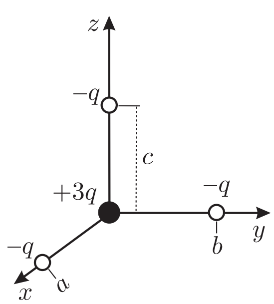
Знайдіть дипольний і квадрупольний моменти системи зарядів величинами $+q$, $+q$, $-2q$, розміщених у вершинах рівнобедреного трикутника (див. рис.).

80. 

Знайдіть дипольний і квадрупольний моменти системи зарядів величинами $+q$, $+q$, $-2q$, розміщених у вершинах рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом a (див. рис.).

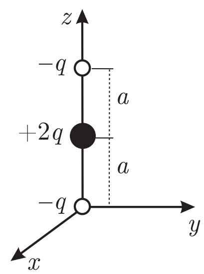
81. 

Знайдіть дипольний і квадрупольний моменти системи чотирьох зарядів величинами $\pm q$, які розміщені у вершинах паралелограма (див. рис.).

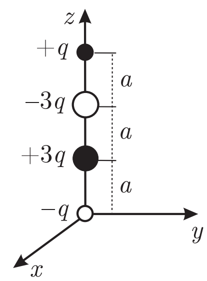
82. 

Знайдіть дипольний і квадрупольний моменти системи чотирьох зарядів величинами $-q$, $-q$, $-q$, $+3q$, які розміщені у вершинах трикутної піраміди (див. рис.).

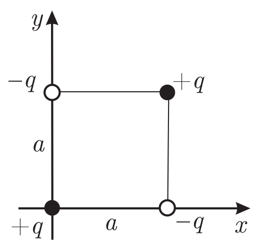
83. Знайдіть перший незникаючий на великих відстанях доданок скалярного потенціалу систем зарядів, зображених на рисунках:



(a)

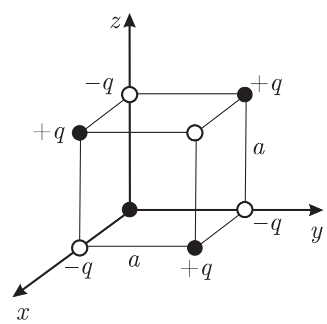


(b)



(c)

заряди розміщені у вершинах квадрата зі стороною a;



(d)

заряди розміщені у вершинах куба зі стороною a.

84. Знайдіть магнітний дипольний момент рівномірно зарядженої сферичної поверхні радіуса R, яка обертається навколо своєї осі зі сталою кутовою швидкістю ω. Повний заряд сфери Q.

85. Певний розподіл струму створює магнітне поле з потенціалом $\mathbf{A}(r,\theta,\phi) = \mathbf{e}_\phi \, \dfrac{A_0 \sin\theta}{r} \, e^{-\lambda r}$, де $A_0, \lambda = \mathrm{const}$. Знайдіть густину струму $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ і магнітний дипольний момент такої системи.

6. Теорія випромінювання

Скалярний і векторний потенціали електромагнітного поля з урахуванням ефектів запізнення, які пов'язані зі скінченною швидкістю поширення електромагнітних взаємодій, можна записати через так звані ***запізнювальні потенціали***:

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \int\limits_V \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) dV', \tag{6.1}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) dV', \tag{6.2}$$

де V — об'єм, у якому зосереджені заряди.

Для точкового заряду отримаємо ***потенціали Лієнара–Віхерта***:

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \left.\frac{e}{R(\tau) - \frac{1}{c}\mathbf{R}(\tau)\mathbf{v}(\tau)}\right|_{\tau = t - \frac{R(\tau)}{c}}, \tag{6.3}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \left.\frac{\mathbf{v}(\tau)}{c}\frac{e}{R(\tau) - \frac{1}{c}\mathbf{R}(\tau)\mathbf{v}(\tau)}\right|_{\tau = t - \frac{R(\tau)}{c}}, \tag{6.4}$$

де $\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)$, $\mathbf{r}_0(\tau)$ — радіус-вектор, який задає положення частинки в момент часу τ.

Нехай лінійні розміри системи зарядів обмежені величиною l. На великих віддалях r від системи, $r \gg l \geqslant r'$ достатньо обмежитись розкладом $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \simeq r - (\mathbf{n}, \mathbf{r}')$, де $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Векторний потенціал набуде вигляду:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \simeq \frac{1}{cr}\int\limits_V \mathbf{j}\left(\mathbf{r}',\ t - \frac{r}{c} + \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{r}')}{c}\right) dV'. \tag{6.5}$$

Розглянемо електромагнітне поле на великих віддалях від нашої системи зарядів — у хвильовій зоні: $r \gg \lambda \gg l$. Оскільки довжина випромінюваної хвилі велика порівняно з лінійними розмірами системи $\lambda \gg l$, то густину струму $\mathbf{j}$ під інтеґралом можна розкласти в ряд за $\frac{(\mathbf{n},\mathbf{r}')}{c}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}_{\mathrm{d}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{A}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{A}_{\mathrm{Q}}(\mathbf{r},t) + \ldots, \tag{6.6}$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{d}}(\mathbf{r},t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr}, \tag{6.7}$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t) = \frac{\left[\dot{\mathfrak{m}}\left(t-\frac{r}{c}\right),\, \mathbf{n}\right]}{cr}, \tag{6.8}$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{Q}}(\mathbf{r},t) = \frac{\ddot{\mathbf{Q}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{2c^2 r}, \tag{6.9}$$

де $\mathbf{A}_{\mathrm{d}}(\mathbf{r},t)$ — дипольне, $\mathbf{A}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t)$ — магнітно-дипольне, $\mathbf{A}_{\mathrm{Q}}(\mathbf{r},t)$ — квадрупольне наближення для векторного потенціалу; $\dot{\mathbf{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$ — похідна за часом від електричного дипольного моменту

$$\mathbf{d}\left(t-\frac{r}{c}\right) = \int\limits_V \mathbf{r}'\,\rho\left(\mathbf{r}',\, t-\frac{r}{c}\right)\, dV';$$

$\dot{\mathfrak{m}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$ — похідна за часом від магнітного дипольного моменту

$$\mathfrak{m}\left(t-\frac{r}{c}\right) = \frac{1}{2c}\int\limits_V \left[\mathbf{r}',\, \mathbf{j}\left(\mathbf{r}',\, t-\frac{r}{c}\right)\right]\, dV';$$

$\ddot{\mathbf{Q}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$ — друга похідна за часом від вектора, компоненти якого

$$Q_j\left(t-\frac{r}{c}\right) = n_k\, Q_{jk}\left(t-\frac{r}{c}\right),$$
$$Q_{jk}\left(t-\frac{r}{c}\right) = \int\limits_V \rho\left(\mathbf{r}',\, t-\frac{r}{c}\right)\left(x'_j x'_k - \frac{r'^2}{3}\,\delta_{jk}\right)\, dV',$$

де Q_{jk} — тензор квадрупольного моменту системи, n_k — компоненти одиничного вектора $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

Магнітне поле $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ та електричне поле $\mathbf{E}$, які відповідають випромінюванню, можна обчислити за простішими формулами:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}[\dot{\mathbf{A}},\mathbf{n}], \qquad \mathbf{E} = [\mathbf{B},\mathbf{n}]. \tag{6.10}$$

Інтенсивність випромінювання (втрата енерґії за одиницю часу):

$$I = I_{\mathrm{d}} + I_{\mathrm{m}} + I_{\mathrm{Q}} + I_{\mathrm{A}}, \tag{6.11}$$

$$I_{\mathrm{d}} = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3}, \tag{6.12}$$

$$I_{\mathrm{m}} = \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3}, \tag{6.13}$$

$$I_{\mathrm{Q}} = \frac{1}{20c^5}\dddot{Q}_{jk}\dddot{Q}_{jk}, \tag{6.14}$$

$$I_{\mathrm{A}} = -\frac{4}{3c^3}(\dddot{\mathbf{T}}, \ddot{\mathbf{d}}), \tag{6.15}$$

де I_{d}, I_{m}, I_{Q} — інтенсивності дипольного, магнітно-дипольного, квадрупольного випромінювання відповідно. Усі величини взято в момент часу $t - \frac{r}{c}$. Доданок I_{A} — інтенсивність так званого анапольного випромінювання, в означенні якої фіґурує вектор — ***анапольний момент*** або ***тороїдність***:

$$\mathbf{T}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{10c}\int\limits_V dV' \left\{\left(\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right), \mathbf{r}'\right)\mathbf{r}' - 2r'^2\,\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right)\right\}. \tag{6.16}$$

Заряджена частинка, що рухається з прискоренням, тобто під впливом деякої зовнішньої сили $\mathbf{F}$, зазнає впливу ***сили радіаційного гальмування***

$$\mathbf{F}_{\mathrm{rad.}} = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}}. \tag{6.17}$$

Якщо $\mathbf{F}$ — пружна сила, $\mathbf{F} = -m\omega_0\mathbf{r}$, то $\mathbf{F}_{\mathrm{rad.}}$ називають ***силою променистого тертя***:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{rad.fr.}} = -\frac{2e^2\omega_0^2}{3c^3}\dot{\mathbf{r}}. \tag{6.18}$$

86. Переконайтесь, що запізнювальні потенціали задовольняють рівняння д'Аламбера

$$\Box\varphi(\mathbf{r}, t) = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \qquad \Box\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

87. Покажіть, що для ізольованої системи, яка складається з N частинок з однаковим питомим зарядом ($e_i/m_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \ldots, N$), інтенсивність дипольного випромінювання I_{d} дорівнює нулеві.

88. Через конденсатор пролетіла частинка масою m і зарядом q. Відстань між обкладками конденсатора рівна l, а напруженість електричного поля $\mathbf{E}$ в конденсаторі однорідна і постійна. Кут між вектором $\mathbf{E}$ і напрямком швидкості частинки $\mathbf{v_0}$ під час вльоту дорівнює α. Знаки заряду q і $\cos\alpha$ однакові. Оцініть енергію, яку під час прольоту через конденсатор частинка втрачає на дипольне випромінювання.

89. Система N частинок з однаковими масами m та електричними зарядами $e_k = ke_0$, де e_0 — елементарний заряд, $k = 1, \ldots, N$, перебуває в постійному електричному полі напруженістю $\mathbf{E}$. Нехтуючи взаємодією між частинками, знайдіть інтенсивність дипольного випромінювання такої системи.

90. Електрон масою m і зарядом e пролітає на великій віддалі a від нерухомого ядра з зарядом $Z|e|$. У безмежно віддалений момент часу $t = -\infty$ електрон мав швидкість за абсолютною величиною рівну v_0. Нехтуючи викривленням траєкторії, знайдіть енергію $\mathcal{E}$, яку електрон втрачає на дипольне випромінювання за час прольоту.

91. У класичній моделі атома, яку запропонував Резерфорд, електрон масою m і зарядом e обертається по коловій орбіті навколо нерухомого ядра з зарядом $Z|e|$. Знайдіть закон зменшення повної енергії електрона $\mathcal{E}$ за рахунок дипольного випромінювання. Обчисліть час $t_{\text{п}}$, через який електрон впаде на ядро внаслідок втрати енергії на дипольне випромінювання. У початковий момент часу $t_0 = 0$ електрон знаходився на віддалі R від ядра.

92. Частинка масою m і зарядом e пролітає по діаметру кулі радіуса R, всередині якої рівномірно розподілений заряд Q. Заряди частинки і кулі протилежного знака. Перед вльотом у кулю частинка мала кінетичну енерґію $\mathcal{E}_0$. Знайдіть енерґію $\mathcal{E}$, яку частинка втрачає на дипольне випромінювання під час прольоту через кулю.

93. Частинка масою m і зарядом e здійснює гармонічні коливання з частотою ω (гармонічний осцилятор). Знайдіть напруженість електричного та індукцію магнітного полів у хвильовій зоні та середню за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність дипольного випромінювання.

94. Найпростіша лінійна антена — це тонкий прямолінійний провідник завдовжки l, по якому тече струм $J = J_0 \cos \omega t$, причому антена настільки коротка, що струм вважають незмінним по всій її довжині. Знайдіть середню за період зміни струму $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність випромінювання антени.

95. Покажіть, що для ізольованої системи, яка складається з N частинок з однаковим питомим зарядом ($e_i/m_i = e/m = \text{const}$, $i = 1, 2, \ldots, N$), інтенсивність магнітно-дипольного випромінювання I_m дорівнює нулеві.

96. Покажіть, що магнітно-дипольне випромінювання відсутнє у системі, яка складається з двох заряджених частинок, які рухаються з нерелятивістськими швидкостями.

97. Найпростіша рамкова антена — це прямокутна рамка зі сторонами a і b, по якій тече лінійний струм силою $J = J_0 \cos \omega t$. Визначте середню за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність магнітно-дипольного випромінювання.

98. Знайдіть напруженість електричного та індукцію магнітного полів у хвильовій зоні та середню за період коливань $T = 2\pi/\omega$

інтенсивність випромінювання магнітного диполя, момент якого $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \cos(\omega t + \alpha)$.

99. Частинка масою m і зарядом e під дією пружної сили може здійснювати гармонічні коливання з частотою ω_0 (гармонічний осцилятор). Враховуючи силу радіаційного тертя, знайдіть середню за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність дипольного випромінювання осцилятора, який здійснює вимушені коливання в зовнішньому електричному полі напруженістю $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$.

100. Покажіть, що замість запізнювальних потенціалів $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ і $\varphi(\mathbf{r}, t)$, зв'язаних умовою Лоренца, можна ввести одну векторну функцію $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t)$, через яку виражаються електромагнітні потенціали: $\varphi = -\operatorname{div} \mathbf{Z}$, $\mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}$. Величину $\mathbf{Z}$ називають вектором Герца або поляризаційним оператором. Своєю чергою, розподіл зарядів і струмів електронейтральної системи в цьому випадку доцільно описувати векторном поляризації $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$, заданим за допомогою співвідношень $\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}$, $\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$.

101. Електромагнітне поле рухомого точкового заряду описують скалярним φ і векторним $\mathbf{A}$ потенціалами Лієнара–Віхерта

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{s(\tau)}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}(\tau)}{c} \frac{e}{s(\tau)},$$

де $s(\tau) = R(\tau) - \frac{1}{c}\big(\mathbf{R}(\tau), \mathbf{v}(\tau)\big)$, $\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)$, $R(\tau) = |\mathbf{R}(\tau)|$, а $\mathbf{r}_0(\tau)$ та $\mathbf{v}(\tau)$ — відповідно координата і швидкість заряду в момент часу τ. Моменти часу спостереження t і часу запізнення τ пов'язані співвідношенням $\tau = t - R(\tau)/c$.

(a) Запишіть $\varphi(\mathbf{r}, t)$ і $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ у вигляді рядів за степенями $1/c$.

(b) Отримайте аналогічні формули у вакуумі для випадку кулонівського калібрування потенціалів.

(c) Обчисліть напруженість електричного та індукцію магнітного полів.

102. Заряд рухається зі сталою швидкістю $\mathbf{v}$. Виразіть потенціали Лієнара–Віхерта через координату заряду в момент часу спостереження t.

103. Виразіть напруженість електричного та індукцію магнітного полів заряду, що рівномірно рухається зі сталою швидкістю $\mathbf{v}$, через його координату в момент часу спостереження t.

104. Знайдіть фур'є-зображення потенціалів Лієнара–Віхерта, напруженості електричного та індукції магнітного полів, якщо заряд рухається зі сталою швидкістю.

105. Запишіть потенціали електромагнітного поля рівномірно рухомого точкового заряду при кулонівському калібруванні.

106. Система заряджених частинок локалізована в об'ємі V. Нехтуючи випромінюванням, знайдіть загальну формулу для енерґії взаємодії частинок.

107. Обчисліть енерґію взаємодії системи точкових зарядів з точністю до $1/c^2$ включно.

108. Обчисліть енерґію взаємодії системи зарядів, які рухаються зі сталою швидкістю v. Розгляньте випадок $v \to c$.

7. Теорія відносності

У просторі Мінковського положення ***світової точки*** задається чотири-вектором координат x^μ. Ми будемо розглядати простір Мінковського, в якому ***контраваріантні*** (з верхніми індексами) і ***коваріантні*** (з нижніми індексами) складові чотири-вектора A^μ пов'язані співвідношенням:

$$A^0 = A_0, \qquad A^i = -A_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Якщо система відліку K' рухається відносно K зі швидкістю V уздовж осі x, то при переході від однієї системи до іншої компоненти чотири-вектора перетворюються за законом перетворення тензора першого ранґу:

$$A^\mu = \alpha^\mu_\nu(\beta) A'^{\,\nu}, \qquad A'^{\,\mu} = \alpha^\mu_\nu(-\beta) A^\nu, \tag{7.1}$$

де маємо на увазі ***правило сум Айнштайна***: за індексами, що повторюються двічі (раз згори і раз знизу) відбувається підсумовування від 0 до 3. Матриця перетворення

$$\alpha^\mu_\nu(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тут введено скорочені позначення $\beta = V/c$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$. Переходи між контраваріантними і коваріантними складовими здійснюють за допомогою метричного тензора $g_{\mu\nu}$:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \qquad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu. \tag{7.2}$$

де метричний тензор визначається матрицею

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

У формалізмі чотири-векторів деякі величини, які використовують в описі електромагнітного поля, означають так:

1) чотири-вектор координати

$$x^\mu = (ct, \mathbf{r}), \qquad x_\mu = (ct, -\mathbf{r}).$$

Тобто його контраваріантні компоненти $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$.

Для чотири-вектора координати, розписуючи (7.1) покомпонентно, отримаємо так звані ***перетворення Лоренца***:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{7.3}$$

Для компонент звичайного вектор швидкості $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ справедливий ***релятивістський закон додавання швидкостей***:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \tag{7.4}$$

тобто вони не є компонентами 4-вектора. Натомість чотири-швидкість визначають як похідну від вектора x^μ за ***власним часом*** τ:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \qquad d\tau = dt\sqrt{1 - \beta^2}. \tag{7.5}$$

Аналогічно отримують чотири-прискорення $w^\mu = \dfrac{du^\mu}{d\tau}$.

2) чотиривимірний потенціал електромагнітного поля

$$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A}),$$

де φ і $\mathbf{A}$ — векторний і скалярний потенціали відповідно.

3) чотири-вектор густини електричного струму

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}),$$

де ρ і $\mathbf{j}$ — густини струму і заряду відповідно.

4) чотиривимірний хвильовий вектор

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right),$$

де ω і $\mathbf{k}$ — відповідно частота і хвильовий вектор плоскої електромагнітної хвилі.

У просторі Мінковського складові векторів $\mathbf{E}$ та $\mathbf{B}$ є компонентами антисиметричного ***тензора електромагнітного поля*** $F^{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}; \qquad F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}. \tag{7.6}$$

Матриця 4-тензора $F^{\mu\nu}$ має вигляд:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Рівняння Максвелла можна записати у контраваріантній формі через тензор електромагнітного поля так:

$$\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 0, \tag{7.7}$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \tag{7.8}$$

Компоненти чотири-тензора перетворюються як добуток компонент двох чотири-векторів. Для чотири-тензора другого ранґу закон перетворення має вигляд:

$$F^{\mu\nu} = \alpha^{\mu}_{\rho}\alpha^{\nu}_{\sigma}F'^{\,\rho\sigma}. \tag{7.9}$$

Із (7.6) та (7.9) формули перетворення компонент тензора електромагнітного поля є такими:

$$E_x = E'_x, \qquad E_y = \gamma(E'_y + \beta B'_z), \qquad E_z = \gamma(E'_z - \beta B'_y),$$
$$B_x = B'_x, \qquad B_y = \gamma(B'_y - \beta E'_z), \qquad B_z = \gamma(B'_z + \beta E'_y).$$

У векторній формі ці рівняння мають компактний вигляд:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel}, \qquad \mathbf{E}_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{E}'_{\perp} - [\mathbf{V}, \mathbf{B}']/c\right),$$
$$\mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel}, \qquad \mathbf{B}_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}'_{\perp} + [\mathbf{V}, \mathbf{E}']/c\right),$$

де $\mathbf{E}_{\parallel}, \mathbf{B}_{\parallel}$ — проекції векторів $\mathbf{E}$ та $\mathbf{B}$ на напрямок швидкості $\mathbf{V}$, а $\mathbf{E}_{\perp}, \mathbf{B}_{\perp}$ — їх проекції на площину, перпендикулярну до $\mathbf{V}$.

109. Знайдіть компоненти 4-вектора швидкості.

110. Виразіть компоненти 4-вектора прискорення через тривимірну швидкість і прискорення.

111. Узагальніть формули перетворення Лоренца для довільної орієнтації осей координат обох систем відліку щодо напрямку їх відносного руху.

112. Виведіть закон перетворення для тривимірного вектора швидкості при переході від однієї системи відліку до іншої у випадку довільної орієнтації осей координат. Покажіть, що за абсолютною величиною результуюча швидкість

$$v = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}' + \mathbf{V})^2 - [\mathbf{v}', \mathbf{V}/c]^2}}{1 + (\mathbf{v}', \mathbf{V})/c^2}.$$

113. Виведіть закон перетворення для тривимірного вектора прискорення при переході від однієї системи відліку до іншої у випадку довільної орієнтації осей координат.

114. Виведіть закон перетворення для $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, де v — швидкість матеріальної точки відносно розглядуваної системи відліку.

115. Ракета рухається прямолінійно зі сталим прискоренням a_0 у власній системі відліку. Скільки часу (за "земним годинником") триватиме розгін ракети до швидкості $v_1 = 0.8c$?

116. Годинник рухається вздовж осі x системи K зі швидкістю u. Як зміняться покази годинника в системі K', яка рухається зі швидкістю v відносно системи K?

117. Виберемо за годинник циліндричну порожнину висотою l з абсолютно відбивними стінками, між якими рухається імпульс світла. Період коливання такої системи рівний $t = 2l/c$. Знайдіть період коливання такого годинника, якщо він рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$.

118. Два однакових стрижні довжиною l_0 (у "власній" або супутній системі відліку) розміщені вздовж прямої і рухаються назустріч один одному з однаковими швидкостями v (відносно деякої системи відліку). Яка довжина одного зі стрижнів у системі відліку, пов'язаній з другим?

119. Переконайтесь в інваріантності квадратичної форми

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2$$

при перетвореннях Лоренца.

120. Доведіть, що метричний тензор інваріантний при перетвореннях Лоренца.

121. Запишіть перетворення Лоренца для симетричного тензора другого ранґу.

122. Запишіть перетворення Лоренца для антисиметричного тензора другого ранґу.

123. Знайдіть перетворення Лоренца для компонент тензора електромагнітного поля $F^{\mu\nu}$.

124. Знайдіть вираз для інваріанта $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ через електричне та магнітне поля.

125. Знайдіть вираз для інваріанта $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ електромагнітного поля. Тут $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ — узагальнення символа Леві-Чівіти (повністю антисиметричний тензор четвертого ранґу).

126. У вакуумі відносно деякої системи координат (K) є взаємно перпендикулярні електричне ($\mathbf{E} = \mathrm{const}$) і магнітне ($\mathbf{B} = \mathrm{const}$) поля, причому $E < B$. Вкажіть таку систему відліку (K'), відносно якої поле чисто магнітне, і знайдіть його індукцію.

127. У вакуумі відносно деякої системи координат (K) є взаємно перпендикулярні електричне ($\mathbf{E} = \mathrm{const}$) і магнітне ($\mathbf{B} = \mathrm{const}$) поля, причому $E > B$. Вкажіть таку систему відліку (K'), відносно якої поле чисто електричне, і знайдіть його напруженість.

128. В інерціальній системі координат K є лише однорідне електричне поле $\mathbf{E}$. Знайдіть модулі векторів $\mathbf{E}'$ і $\mathbf{B}'$ в системі координат K', яка рухається відносно системи K зі сталою швидкістю $\mathbf{v}$ під кутом α до вектора $\mathbf{E}$.

129. В інерціальній системі координат K є однорідні електричне $\mathbf{E}$ й магнітне $\mathbf{B}$ поля одного напрямку. Знайдіть модулі векторів $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$ та кут між ними в системі координат K', яка рухається зі сталою швидкістю $\mathbf{v}$ в напрямку, перпендикулярному до векторів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$.

130. Знайдіть швидкість системи відліку, в якій електричне і магнітне поля паралельні. Розгляньте випадок руху системи координат перпендикулярно відносно площини, в якій лежать вектори $\mathbf{E}$ та $\mathbf{B}$.

131. Розрахуйте потенціали електромагнітного поля, яке створює у вакуумі точковий зарядом e, що рухається рівномірно і прямолінійно зі швидкістю $\mathbf{v}$.

132. Обчисліть напруженість електричного $\mathbf{E}$ та індукцію магнітного $\mathbf{B}$ полів для точкового заряду e, що рухається у вакуумі рівномірно і прямолінійно зі швидкістю $\mathbf{v}$.

133. Знайдіть електромагнітне поле точкового електричного диполя з моментом $\mathbf{d}$, який рухається зі сталою швидкістю $\mathbf{v}$.

134. Користуючись інваріантністю заряду щодо переходу між інерціальними системами відліку, переконайтесь на прикладі рівномірно рухомого точкового заряду в тому, що величини $(c\rho, \mathbf{j})$ справді утворюють 4-вектор j^μ.

135. Монохроматичне світло частоти ω_0 падає нормально на поверхню плоского дзеркала, яке рухається рівномірно зі швидкістю $\mathbf{v}$ в напрямку поширення світла. Знайдіть частоту відбитого світла.

136. Монохроматична плоска електромагнітна хвиля частоти ω_1 падає під кутом α_1 на плоске дзеркало, яке рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$ в напрямку своєї нормалі назустріч падаючій хвилі. Визначте кут відбивання від рухомого дзеркала α_2 і частоту відбитої хвилі ω_2.

137. Визначте закон руху релятивістської зарядженої частинки масою m і зарядом e в однорідному постійному магнітному полі.

138. Визначте закон руху релятивістської зарядженої частинки масою m і зарядом e в однорідному постійному електричному полі.

139. Вважаючи, що при малих швидкостях $p^2 \ll (mc)^2$, де p — імпульс частинки, знайдіть наближену залежність енерґії частинки від її імпульсу з точністю до $\left(\frac{p^2}{m^2c^2}\right)^2$.

140. Знайдіть загальну формулу для функції Лаґранжа системи заряджених частинок. Випромінюванням нехтуємо.

141. Обчисліть функцію Лаґранжа системи заряджених частинок з точністю до $1/c^2$ включно.

142. Обчисліть функцію Лаґранжа системи заряджених частинок у наближенні їх рівномірного руху.

143. Частинка з енерґією W_0 і масою спокою m налітає на нерухому частинку масою M. Знайти енерґію розсіяної частинки як функцію кута розсіяння.

8. Електродинаміка середовища

Під впливом електромагнітного поля в середовищі виникають так звані ***індуковані (зв'язані) заряди і струми***, спричинені внутрішньомолекулярним перерозподілом заряджених частинок.

Густини зв'язаних зарядів ρ' та струмів $\mathbf{j}'$ виражають через вектори поляризації $\mathbf{P}$ та намагніченості $\mathbf{M}$:

$$\rho' = -\operatorname{div}\mathbf{P}, \qquad \mathbf{j}' = c\operatorname{rot}\mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \tag{8.1}$$

Для опису електричного та магнітного поля зручно використовувати величини:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}, \tag{8.2}$$

де $\mathbf{D}$ — вектор електричного зміщення (електрична індукція), $\mathbf{H}$ — напруженість магнітного поля

З системи рівнянь (2.3), відокремлюю внески зв'язаних зарядів і струмів, отримуємо рівняння Максвелла в середовищі:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = 4\pi\rho_0(\mathbf{r},t),\\
&\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0,\\
&\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t},\\
&\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t},
\end{aligned} \tag{8.3}$$

де $\rho_0(\mathbf{r},t)$ та $\mathbf{j}_0(\mathbf{r},t)$ — відповідно густини вільних зарядів і струмів.

Вектори поляризації та електричної індукції для переважної більшості речовин досить просто пов'язані з напруженістю електричного поля:

$$\mathbf{P} = \varkappa\mathbf{E}, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \tag{8.4}$$

де $\varkappa$ — діелектрична сприйнятливість, а $\varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa$ — діелектрична проникність середовища.

Використовуватимемо також таке співвідношення між напруженістю магнітного поля і магнітною індукцією:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{8.5}$$

де χ — магнітна сприйнятливість, $\mu = 1 + 4\pi\chi$ — магнітна проникність середовища. Ця рівність з доброю точністю описує діа- та парамагнетики в широкому діапазоні величин магнітного поля.

Загалом залежності $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ та $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ чи, що те саме, $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ та $\mathbf{B}(\mathbf{H})$, називають ***матеріальними рівняннями***. Для задач, пов'язаних із поширенням струму в провідниках, додатково використовують залежність густини струму від напруженості електричного поля $\mathbf{j}(\mathbf{E})$, яку часто можна записати у простому вигляді:

$$\mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}, \tag{8.6}$$

де σ — питома (електро)провідність. Це рівняння — ***закон Ома в диференціальній формі***.

На межі двох середовищ із різними значеннями діелектричної та магнітної сприйнятливостей вектори, що характеризують електромагнітне поле, можуть змінюватися стрибкоподібно. У відповідних розрахунках слід враховувати такі ***граничні умови***:

$$\begin{aligned} &D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma_0, \qquad B_{2n} - B_{1n} = 0,\\ &P_{2n} - P_{1n} = -\sigma',\\ &E_{n2} - E_{n1} = 4\pi(\sigma_0 + \sigma'). \end{aligned} \tag{8.7}$$

де σ_0, σ' позначають відповідно поверхневі густини вільних та індукованих зарядів на границі розділу. Індекс n означає проекції на одиничний вектор нормалі до поверхні розділу середовищ, спрямований із середовища 1 у середовище 2 (див. рис. 8.1).

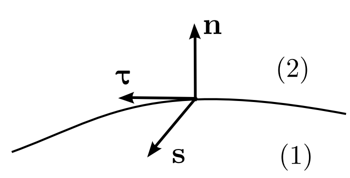


Рис. 8.1.

Танґенціальні компоненти (проекції на одиничний вектор $\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}$, дотичний до межі розділу, див. рис. 8.1) задовольняють такі умови:

$$
\begin{aligned}
&H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c}\lambda_{0s}, \qquad E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0, \\
&M_{2\tau} - M_{1\tau} = \frac{1}{c}\lambda'_s, \\
&B_{2\tau} - B_{1\tau} = \frac{4\pi}{c}\left(\lambda_{0s} + \lambda'_s\right),
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

де $\boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\lambda}'$ позначають відповідно лінійні густини вільних та індукованих струмів на поверхні розділу. Індекс s означає проекцію на вектор $\mathbf{s} = [\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}]$ (див. рис. 8.1). Ці рівності також можна переписати у векторному вигляді:

$$
\begin{aligned}
&[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2] - [\mathbf{n}, \mathbf{H}_1] = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\lambda}_0, \qquad [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2] - [\mathbf{n}, \mathbf{E}_1] = 0, \\
&[\mathbf{n}, \mathbf{M}_2] - [\mathbf{n}, \mathbf{M}_1] = \frac{1}{c}\boldsymbol{\lambda}'.
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

Теорему Ґаусса для середовища записують так:

$$
\oint\limits_S (\mathbf{D},\, d\mathbf{S}) = 4\pi \int\limits_V \rho_0\, dV = 4\pi q_0, \tag{8.10}
$$

де ρ_0, q_0 відповідають вільним зарядам.

Теорема Стокса у стаціонарному випадку для середовища має вигляд:

$$
\oint\limits_L (\mathbf{H},\, d\boldsymbol{\ell}) = \frac{4\pi}{c} \int\limits_S (\mathbf{j}_0,\, d\mathbf{S}) = \frac{4\pi}{c} I_0, \tag{8.11}
$$

де $\mathbf{j}_0$, I_0 відповідають вільним струмам.

Енерґія електромагнітного поля в середовищі визначається так:

$$
W = \frac{1}{8\pi} \int\limits_V \Big[(\mathbf{E}, \mathbf{D}) + (\mathbf{B}, \mathbf{H})\Big]\, dV. \tag{8.12}
$$

Ємність конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \tag{8.13}$$

де φ_1, φ_2 — потенціали першої та другої обкладок відповідно, а q — заряд першої обкладки (на другій обкладці заряд $-q$).

Якщо зовнішнє поле створюється лінійним струмом I_2, що протікає по замкнутому контуру 2, то магнітний потік від нього через деякий замкнутий контур 1 записують у вигляді:

$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} L_{12} I_2,$$

де

$$L_{12} = \mu \oint\limits_{L_1} \oint\limits_{L_2} \frac{(d\boldsymbol{\ell}_1, d\boldsymbol{\ell}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

— коефіцієнт взаємоіндукції (індуктивність) двох лінійних контурів. Тут $d\boldsymbol{\ell}_2$, $d\boldsymbol{\ell}_2$ — елементи цих контурів.

144. Куля радіуса a з однорідного діелектрика з діелектричною проникністю ε внесена в однорідне електричне поле $\mathbf{E}_0$. Знайдіть поле після внесення кулі.

145. Провідна незаряджена куля радіуса a внесена в однорідне електричне поле $\mathbf{E}_0$. Знайдіть поле після внесення кулі.

146. Безмежна прямолінійна нитка рівномірно заряджена з лінійною густиною $\varkappa$ й оточена однорідним діелектриком з проникністю ε_1, який має форму циліндра з радіусом R. Простір зовні циліндра заповнений безмежним однорідним діелектриком із проникністю ε_2. Знайдіть напруженість поля $\mathbf{E}$, яке створює нитка, а також вектор поляризації $\mathbf{P}$.

147. Поверхня безмежно довгого круглого циліндра з радіусом R рівномірно заряджена з поверхневою густиною σ. Циліндр перебуває в неоднорідному діелектричному середовищі з проникністю $\varepsilon = \varepsilon(r)$, де r — відстань до осі циліндра. Знайдіть електричне поле $\mathbf{E}$ і вектор поляризації $\mathbf{P}$.

148. Однорідна діелектрична куля радіуса a рівномірно заряджена по об'єму. Повний заряд кулі q, її діелектрична проникність ε_1, діелектрична проникність середовища ε_2. Обчисліть вектори $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, густини розподілу зв'язаних зарядів на поверхні (σ') і всередині (ρ') кулі.

149. Безмежну рівномірно заряджену площину з обидвох сторін оточує однорідний діелектрик з проникністю ε. Поверхнева густина вільних зарядів σ_0. Знайдіть напруженість поля $\mathbf{E}$, яке створює площина.

150. Точковий заряд q розміщений на плоскій границі розділу двох однорідних безмежних діелектриків з проникностями ε_1, ε_2. Знайдіть потенціал електричного поля φ та вектори $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$.

151. Плоский конденсатор заповнений діелектриком, проникність якого змінюється як $\varepsilon = \varepsilon_1(1+x/a)$, де a — відстань між обкладками з площами S, а вісь x перпендикулярна до них. Нехтуючи крайовими ефектами, знайдіть ємність конденсатора та розподіл індукованих зарядів.

152. Провідна куля радіусом a оточена концентричним шаром діелектрика. Зовнішній радіус шару b, діелектрична проникність діелектрика ε. Розрахуйте ємність кулі C.

153. Центр провідної кулі радіуса R, яка містить заряд q, розміщений на плоскій границі розділу двох однорідних безмежних діелектриків з проникностями ε_1, ε_2. Знайдіть потенціал електричного поля φ, а також розподіл зарядів (σ_0 та σ') на поверхні кулі.

154. Провідна заряджена сфера радіуса a оточена безмежним діелектриком, проникність якого $\varepsilon = \varepsilon(r)$, де r — віддаль від центра кулі. Заряд кулі q. Знайдіть напруженість поля, створеного кулею, а також поверхневу густину зв'язаних зарядів на межі кулі та діелектрика.

155. Всередині сферичного конденсатора з радіусами обкладок a і b діелектрична проникність змінюється за законом

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1 = \text{const} & \text{при } a \leqslant r < c, \\ \varepsilon_2 = \text{const} & \text{при } c \leqslant r \leqslant b, \end{cases}$$

де $a < c < b$.

Знайдіть ємність конденсатора, розподіл зв'язаних (індукованих) зарядів.

156. Знайдіть ємність сферичного конденсатора, заповненого наполовину однорідним діелектриком з проникністю ε_1, а наполовину — однорідним діелектриком з проникністю ε_2. Границя розділу між ними — площина, що проходить через центр обкладок. Радіуси обкладок a та b.

157. Знайдіть ємність циліндричного конденсатора. Його довжина l, радіуси обкладок a та b. Простір між обкладками конденсатора заповнений двома коаксіальними шарами однорідних діелектриків з проникностями ε_1 та ε_2. Границя між діелектриками — циліндрична поверхня радіуса c. Крайовими ефектами знехтуйте.

158. Точковий заряд q знаходиться в центрі двох концентричних сфер з радіусами r_1 і r_2. Проміжок між сферами заповнений діелектриком з проникністю ε. Обчисліть напруженість електричного поля $\mathbf{E}$ та вектор поляризації $\mathbf{P}$ у проміжку між сферами, а також величини зв'язаних зарядів q_1', q_2' на поверхнях сфер.

159. Знайдіть ємність плоского конденсатора. Площа поверхні обкладок S, а між ними — два плоскопаралельних шари однорідних діелектриків. Товщина першого шару — d_1, діелектрична проникність ε_1, другого — відповідно d_2 і ε_2. Крайовими ефектами знехтуйте.

160. Сферичний конденсатор з радіусами внутрішньої обкладки a і зовнішньої b заповнений діелектриком, проникність якого змінюється як $\varepsilon = \varepsilon_1(1 + \gamma r)$, де r — відстань від центру конденсатора. Знайдіть ємність такого сферичного конденсатора.

161. Циліндричний конденсатор висотою l з радіусами внутрішньої обкладки a і зовнішньої b, заповнений діелектриком, проникність якого змінюється як $\varepsilon = \varepsilon_1(1 + \gamma r)$, де r — відстань від центру конденсатора. Знайдіть ємність такого циліндричного конденсатора. Крайовими ефектами знехтуйте.

162. По безмежній прямолінійній нитці тече струм I. Вона оточена однорідним магнетиком з проникністю μ_1, який має форму циліндра з радіусом R. Простір зовні циліндра заповнений безмежним однорідним магнетиком із проникністю μ_2. Знайдіть індукцію поля $\mathbf{B}$, яке створює нитка, а також вектор намагніченості $\mathbf{M}$.

163. По поверхні безмежно довгого круглого циліндра з радіусом R, вздовж його твірних протікає рівномірно розподілений поверхневий струм густини j. Циліндр перебуває в неоднорідному магнітному середовищі з проникністю $\mu = \mu(r)$, де r — відстань до осі циліндра. Знайдіть магнітне поле $\mathbf{B}$ і вектор намагніченості $\mathbf{M}$.

164. Куля радіуса a з однорідного магнетика з проникністю μ внесена в однорідне магнітне поле $\mathbf{B}_0$. Знайдіть поле після внесення кулі.

165. По безмежній площині в одному напрямі тече рівномірний поверхневий струм з густиною j. З обидвох сторін площина оточена однорідним магнетиком з проникністю μ. Знайдіть магнітне поле $\mathbf{B}$, яке створює площина.

166. Прямолінійний провідник, по якому тече струм I, розміщений на плоскій границі розділу двох однорідних безмежних магнетиків з проникностями μ_1, μ_2. Знайдіть потенціал магнітного поля $\mathbf{A}$ та вектори $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$.

167. Знайдіть намагніченість діелектрика з поляризацією $\mathbf{P}$, який рухається зі швидкістю $v \to c$.

168. Простір між обкладками сферичного конденсатора, зовнішім радіусом r_1 та внутрішнім r_2, заповнено середовищем з питомою провідністю σ. Між обкладками конденсатора підтримують сталу різницю потенціалів U. Знайдіть опір між обкладками конденсатора та силу струму.

169. Простір між обкладками циліндричного конденсатора, зовнішім радіусом r_1 та внутрішнім r_2, заповнено середовищем з питомою провідністю σ. Між обкладками конденсатора підтримують сталу різницю потенціалів U. Знайдіть опір між обкладками конденсатора та силу струму на одиницю довжини конденсатора.

170. Між обкладками циліндричного конденсатора, зовнішім радіусом r_1 та внутрішнім r_2, підтримують сталу різницю потенціалів U. Простір між обкладками в області $r_1 < r < r_0$ заповнено середовищем з питомою провідністю σ_1, а в області $r_0 < r < r_2$ — σ_2. Знайдіть опір між обкладками конденсатора та силу струму на одиницю довжини конденсатора.

171. Між обкладками сферичного конденсатора, зовнішім радіусом r_1 та внутрішнім r_2, підтримують сталу різницю потенціалів U. Простір між обкладками в області $r_1 < r < r_0$ заповнено

середовищем з питомою провідністю σ_1, а в області $r_0 < r < r_2$ — σ_2. Знайдіть опір між обкладками конденсатора та силу струму.

172. Знайдіть коефіцієнти взаємоіндукції двох однакових контурів у вигляді квадрата зі стороною a. Сторони контурів розміщені паралельно один відносно одного на відстані b.

173. Знайдіть коефіцієнт взаємоіндукції двох концентричних кіл радіусами відповідно a та b, які розміщенні у паралельних площинах на відстані h.

174. Знайдіть коефіцієнт взаємоіндукції між контуром провідника у вигляді квадрата зі стороною a, по якому протікає струм силою I_2, та безмежно довгим провідником із струмом I_1, які розміщені в одній площині. Сторона квадрата паралельна до безмежно довгого провідника і знаходиться на відстані b.

175. Знайдіть коефіцієнт взаємоіндукції між контуром провідника у вигляді правильного трикутника зі стороною a, по якому протікає струм силою I_2, та безмежно довгим провідником із струмом I_1, які розміщені в одній площині. Сторона трикутника паралельна до безмежно довгого провідника і знаходиться на відстані b.

176. Знайдіть коефіцієнт взаємоіндукції між тором і безмежно довгим провідником, розташованим вздовж його осі. На тор круглого перерізу радіуса a намотано N витків дроту. Відстань від центра перерізу тора до його осі рівна b.

177. Знайдіть коефіцієнт самоіндукції одиниці довжини безмежно довгої котушки радіусом a. Кількість витків дроту котушки на одиницю довжини — n. Магнітна проникність котушки μ.

178. На тор круглого перерізу радіуса a рівномірно намотано N витків дроту. Центр перерізу тора знаходиться на відстані b від її осі. Магнітна проникність сердечника μ. Знайдіть самоіндукцію тора.

9. Квазістаціонарні явища

Квазістаціонарне наближення відповідає тому, що густину струму зміщення $\partial\mathbf{D}/\partial t$ вважають нехтівно малою порівняно з густиною струму провідності $\mathbf{j}$. Рівняння Максвелла у цьому наближенні мають вигляд:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_0, \tag{9.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{9.2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{9.3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0. \tag{9.4}$$

За умов високої провідності σ густиною вільних зарядів у провіднику можна знехтувати, $\rho_0 \simeq 0$. Враховуючи зв'язки $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ та $\mathbf{j}_0 = \sigma\mathbf{E}$, отримаємо після нескладних перетворень:

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \Delta\mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}. \tag{9.5}$$

Магнітна гідродинаміка описує процеси в рухомих провідних рідинах і газах. Якщо ділянка середовища рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$, то для густини струму матимемо:

$$\mathbf{j}_0 = \rho_0\mathbf{v} + \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v},\mathbf{B}]\right). \tag{9.6}$$

У таких середовищах $\mu \simeq 1$, тобто $\mathbf{B} \simeq \mathbf{H}$, отже й

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{9.7}$$

Завдяки високій провідності знову $\rho_0 \simeq 0$, тому напруженість магнітного поля $\mathbf{H}$ в рідкому провіднику визначає рівняння

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H} + \mathrm{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}], \tag{9.8}$$

причому швидкість $\mathbf{v}$ знаходять на підставі гідродинамічних співвідношень. У найпростішому підході застосовують ***рівняння Ейлера***:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{\tau}\boldsymbol{\nabla} p + \frac{1}{\tau}\left(\rho_0 \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{j}_0, \mathbf{H}]\right), \tag{9.9}$$

де τ — густина речовини, а p — тиск. Це рівняння відповідає наближенню нев'язкої рідини. Цю систему також доповнюють ***законом збереження маси (рівнянням неперервності)***:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathrm{div}(\tau\mathbf{v}) = 0 \tag{9.10}$$

або

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + (\mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla})\tau + \tau\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \frac{d\tau}{dt} + \tau\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0. \tag{9.11}$$

179. Закон Фарадея про електромагнітну індукцію у випадку нерухомого контура L формулюють так:

$$\oint\limits_L (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\frac{1}{c}\int\limits_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, d\mathbf{S}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

де Φ — магнітний потік через контур L. Покажіть, що врахування руху контура дає змогу записати загальніший вираз,

$$\mathscr{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt},$$

та з'ясуйте зміст електрорушійної сили $\mathscr{E}$.

180. Покажіть, що в границі $l_0 \to 0$ закон Ройтера–Зондгаймера (Reuter & Sondheimer, 1948)

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{r}) = \frac{3\sigma}{4\pi l_0}\int \frac{\mathbf{R}(\mathbf{R},\mathbf{E}(\mathbf{r}'))}{R^4}\, e^{-R/l_0}\, dV', \qquad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}',$$

який є нелокальним узагальненням закону Ома, переходить у звичайний закон Ома.

181. Визначте розподіл густини струму за перерізом провідника циліндричної форми, в якому протікає змінний струм з частотою ω. Проаналізуйте границю великих частот. Магнітна проникність матеріалу провідника μ.

182. Система складається з двох коаксіальних провідників у формі циліндра провідністю σ_1 і магнітною проникністю μ_1 при $r < a$ та σ_2 і μ_2 при $a < r < b$ відповідно, електрично з'єднаних по $r = a$. Повний струм через переріз провідників дорівнює $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}_0 e^{i\omega t}$. Розрахуйте розподіл струму та магнітне поле.

183. Покажіть на підставі рівнянь магнітогідродинаміки, що обертальний рух середовища не спричиняє ґенерації магнітного поля.

184. У стисливій нев'язкій ідеально провідній рідині густиною τ_0 в однорідному магнітному полі $\mathbf{H}_0$ поширюються магнітогідродинамічні хвилі вздовж напрямку $\mathbf{k}$. Нехай кут між векторами $\mathbf{H}_0$ і $\mathbf{k}$ дорівнює θ, причому $\theta \neq 0, \pi/2$. Покажіть, що існують три різні хвилі із фазовими швидкостями

$$\begin{aligned} u_1^2 &= (v_\mathrm{A}\cos\theta)^2, \\ u_{2,3}^2 &= \frac{1}{2}(s^2 + v_\mathrm{A}^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(s^2 + v_\mathrm{A}^2)^2 - 4s^2 v_\mathrm{A}^2\cos^2\theta}, \end{aligned}$$

де s — швидкість звуку в рідині, а $v_\mathrm{A} = H_0/\sqrt{4\pi\tau_0}$ — альфвенівська швидкість.

185. Нестислива нев'язка ідеально провідна рідина зі сталою густиною τ_0 перебуває в однорідному статичному магнітному полі $\mathbf{H}_0$ і в ґравітаційному полі з потенціалом ψ. Покажіть, що існують магнітогідродинамічні хвилі довільної амплітуди і форми $\mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, які задовольняють рівняння

$$(\mathbf{H}_0, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{H}_1 = \pm\sqrt{4\pi\tau_0}\,\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t},$$

$$\mathbf{H}_1 = \pm\sqrt{4\pi\tau_0}\,\mathbf{v},$$

$$p + \tau_0\psi + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1)^2 = \text{const}.$$

Відповіді, вказівки, розв'язки

Елементи векторного числення

1. (a) $-\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$; (b) $\big(\mathbf{a}-2\alpha(\mathbf{a},\mathbf{r})\mathbf{r}\big)e^{-\alpha r^2}$; (c) $\mathbf{a}r+(\mathbf{a},\mathbf{r})\dfrac{\mathbf{r}}{r}$;

(d) $\dfrac{\mathbf{a}}{r^3}-\dfrac{3(\mathbf{a},\mathbf{r})}{r^5}\mathbf{r}$; (e) $(\mathbf{a},\mathbf{r})^{(\mathbf{b},\mathbf{r})}\left\{\mathbf{b}\ln(\mathbf{a},\mathbf{r})+\dfrac{(\mathbf{b},\mathbf{r})}{(\mathbf{a},\mathbf{r})}\mathbf{a}\right\}$; (f) 0;

(g) $e^{([\mathbf{a},\mathbf{r}],\mathbf{b})}[\mathbf{b},\mathbf{a}]$.

2. (a) $4r$; (b) 0; (c) $\dfrac{1}{r^2}$; (d) $4(\mathbf{a},\mathbf{r})$; (e) $\dfrac{2}{(\mathbf{a},\mathbf{r})}$;

(f) 0; (g) $2\dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{r})}{r^5}$; (h) $\dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{r^3}-\dfrac{3(\mathbf{a},\mathbf{r})(\mathbf{b},\mathbf{r})}{r^5}$.

3. (a) 0; (b) $2\mathbf{a}$; (c) 0; (d) $-\dfrac{[\mathbf{a},\mathbf{r}]}{(\mathbf{a},\mathbf{r})^2}$; (e) $\dfrac{2}{r^5}[\mathbf{r},\mathbf{a}]$; (f) $[\mathbf{a},\mathbf{r}]$.

4. (a) 0; (b) $\dfrac{6}{r^5}[\mathbf{a},\mathbf{r}]$; (c) $\dfrac{6[\mathbf{a},\mathbf{r}]}{(\mathbf{a},\mathbf{r})r^5}$; (d) $2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$; (e) 0; (f) 0.

6. З виразу (1.13) нескладно отримати $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=\begin{vmatrix}\delta_{ik}&\delta_{il}&\delta_{im}\\\delta_{jk}&\delta_{jl}&\delta_{jm}\\\delta_{kk}&\delta_{kl}&\delta_{km}\end{vmatrix}$. Після розкриття визначника з урахуванням очевидної згортки $\delta_{kk}=3$ будемо мати результат (a), а далі з його використанням послідовно (b) і (c).

7. Середнє за всіма просторовими напрямками визначається як інтеґрал за повним тілесним кутом

$$\overline{(\ldots)}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega=4\pi}(\ldots)\,d\Omega.$$

Крім безпосереднього інтеґрування можна також скористатися трансформаційними властивостями відповідних величин (тензорів), компоненти яких не повинні залежати від вибору системи координат.

(a) $\overline{n_j}=0$; (b) $\overline{n_jn_k}=\dfrac{1}{3}\delta_{jk}$; (c) $\overline{n_jn_kn_l}=0$;

(d) $\overline{n_jn_kn_ln_m}=\dfrac{1}{15}\left(\delta_{jk}\delta_{lm}+\delta_{jl}\delta_{km}+\delta_{jm}\delta_{kl}\right)$.

8. (a) $\dfrac{a^2}{3}$; (b) $\dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{3}$; (c) $\dfrac{\mathbf{a}}{3}$; (b) $\dfrac{2a^2}{3}$;

9. (a) $\oint\limits_S(\varphi\mathbf{a}, d\mathbf{S})$; (b) $\oint\limits_S([\mathbf{B},\mathbf{a}], d\mathbf{S})$; (c) $\oint\limits_S(\varphi\,\mathrm{grad}\,\psi + \psi\,\mathrm{grad}\,\varphi, d\mathbf{S})$;

(d) $\oint\limits_S(\mathrm{grad}\,\varphi, d\mathbf{S})$; (e) $\oint\limits_S([\mathbf{a},\mathbf{B}], d\mathbf{S})$; (f) $\oint\limits_S([\mathrm{rot}\,\mathbf{B},\mathbf{a}], d\mathbf{S})$.

10. (a) $\mathbf{a}V$; (b) $[\mathbf{b},\mathbf{a}]V$; (c) $\int\limits_V \mathrm{grad}\,\varphi\; dV$; (d) 0; (e) 0.

(f) $\int\limits_S [d\mathbf{S}, \boldsymbol{\nabla} f]$; (g) $\int\limits_S ([\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} f], d\mathbf{S})$. Вказівка: $df = (\boldsymbol{\nabla} f, d\mathbf{l})$.

Заряди і струми у вакуумі: вступні зауваження

11. Перепишемо всі величини, які входять у рівняння Максвелла, через фур'є-зображення:

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d\mathbf{k}\,d\omega\,\rho_{\mathbf{k},\omega}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)},\\
\mathbf{j}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d\mathbf{k}\,d\omega\,\mathbf{j}_{\mathbf{k},\omega}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)},\\
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d\mathbf{k}\,d\omega\,\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)},\\
\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d\mathbf{k}\,d\omega\,\mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}.
\end{aligned}$$

З рівняння $\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho$ матимемо:

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int d\mathbf{k}\,d\omega\,(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}e^{i\mathbf{kr}})e^{-i\omega t} = 4\pi\frac{1}{(2\pi)^4}\int d\mathbf{k}\,d\omega\,\rho_{\mathbf{k},\omega}e^{i\mathbf{kr}}e^{-i\omega t}$$

або, виконуючи елементарні перетворення, для фур'є-зображень:

$$i(\mathbf{k}, \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}) = 4\pi\rho_{\mathbf{k},\omega}.$$

Аналогічно з рівняння $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$ отримаємо:

$$(\mathbf{k}, \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega}) = 0.$$

З рівняння $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ матимемо:

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int d\mathbf{k}\,d\omega\,[\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}e^{i\mathbf{kr}}]e^{-i\omega t} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d\mathbf{k}\,d\omega\,\mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega}e^{i\mathbf{kr}}\frac{\partial}{\partial t}e^{-i\omega t},$$

що після перетворень дає:

$$[\mathbf{k}, \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}] = \frac{\omega}{c}\mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega}. \tag{10.12}$$

Останнє рівняння $\operatorname{rot}\mathbf{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ після проведення аналогічних перетворень набуде вигляду:

$$[\mathbf{k}, \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega}] = -\frac{\omega}{c}\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} - \frac{4\pi}{c}\, i\mathbf{j}_{\mathbf{k},\omega}.$$

12. Скалярний потенціал і густина заряду через фур'є-зображення виражаються так:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\,\varphi_{\mathbf{k}}\,e^{i\mathbf{kr}}, \qquad \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\,\rho_{\mathbf{k}}\,e^{i\mathbf{kr}}.$$

Рівняння Пуассона набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\,(-k^2)\varphi_{\mathbf{k}}\,e^{i\mathbf{kr}} \quad &= \quad 4\pi\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\,\rho_{\mathbf{k}}\,e^{i\mathbf{kr}}, \\ -k^2\varphi_{\mathbf{k}} = -4\pi\rho_{\mathbf{k}} \quad &\Rightarrow \quad \varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi\rho_{\mathbf{k}}}{k^2}. \end{aligned}$$

Звідси скалярний потенціал

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\,e^{i\mathbf{kr}}\,\frac{1}{k^2}\underbrace{\int dV'\,\rho(\mathbf{r}')e^{-i\mathbf{kr}'}}_{\rho_{\mathbf{k}}},$$

Або

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int dV'\,\rho(\mathbf{r}')\int d\mathbf{k}\,\frac{1}{k^2}\,e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}.$$

Цей інтеґрал зручно брати у сферичних координатах, де θ — кут між векторами $\mathbf{k}$ й $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Увівши позначення

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}' = \mathbf{R}; \qquad \mathbf{kR} = kR\cos\theta$$

та записавши елемент об'єму в $\mathbf{k}$-просторі

$$d\mathbf{k} = dk_x\,dk_y\,dk_z = k^2\,dk\,d\psi\,\sin\theta\,d\theta,$$

для інтеґрала за $\mathbf{k}$ отримаємо:

$$\int d\mathbf{k}\,\frac{1}{k^2}\,e^{i\mathbf{kR}} = \int\limits_0^\infty dk\,k^2\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\,e^{ikR\cos\theta} =$$

$$= 4\pi\int_0^\infty dk\,\frac{1}{2ikR}\left(e^{ikR} - e^{-ikR}\right) = \frac{4\pi}{R}\underbrace{\int\limits_0^\infty dx\,\frac{\sin x}{x}}_{=\pi/2} = \frac{2\pi^2}{R}.$$

У підсумку для скалярного потенціалу знаходимо:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int dV'\,\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

13. У завданнях (a)–(e) зручно перейти до сферичних координат, записавши добуток $\mathbf{kr} = kr\cos\theta$.

(a) $\varphi_k = \dfrac{4\pi A}{k^2}$.

Безпосередньо розрахувати фур'є-зображення не вдається через погану збіжність інтеґрала за r. Однак, зробивши реґуляризацію шляхом домноження підінтеґральної функції на $e^{-\lambda r}$, $\lambda \to +0$, отримаємо результат завдання (b), де покладемо $\lambda = 0$. Цікаво зауважити, що залежність $\varphi(r)$ лише від модуля радіус-вектора дає таку ж залежність у фур'є-зображенні φ_k — від модуля $|\mathbf{k}| = k$.

(b) $\varphi_k = \dfrac{4\pi A}{k^2+\lambda^2}$; (c) $\varphi_k = A\left(\dfrac{\pi}{\lambda}\right)^{3/2} e^{-k^2/4\lambda}$;

(d) $\varphi_k = 16\pi A e^{\lambda a}\left[\dfrac{e^{\lambda a}}{(4\lambda^2+k^2)^2} - \dfrac{1}{(\lambda^2+k^2)^2}\right]$;

(e) $\varphi_k = \dfrac{4\pi A}{k^3}\left(\sin ak - ak\cos ak\right)$. (f) $\varphi_{\mathbf{k}} = Ae^{-i\mathbf{ka}}$.

14. Густина заряду $\rho(\mathbf{r},t) = e\delta\big(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)\big)$; перетворення Фур'є потенціалу щодо просторових змінних буде

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\,e^{i\mathbf{kr}}\varphi_{\mathbf{k}}(t).$$

З рівняння Пуассона $\Delta\varphi(\mathbf{r},t) = -4\pi e\delta\big(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)\big)$ для фур'є-зображень матимемо

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{4\pi e}{k^2}e^{-i\mathbf{kr}_0(t)}.$$

З означення поперечного струму

$$\mathbf{j}_\perp(\mathbf{r},t) = \mathbf{j}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi(\mathbf{r},t)}{\partial t},$$

записаного через фур'є-зображення

$$\mathbf{j}^\perp_\mathbf{k}(t) = \mathbf{j}_\mathbf{k}(t) - \frac{1}{4\pi}(i\mathbf{k})\frac{\partial\varphi_\mathbf{k}(t)}{\partial t},$$

де, як нескладно показати, $\mathbf{j}_\mathbf{k}(t) = e\mathbf{v}(t)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)}$, матимемо остаточно

$$\mathbf{j}^\perp_\mathbf{k}(t) = e\left[\mathbf{v} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k},\mathbf{v})}{k^2}\right]e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)}.$$

Тут використано позначення швидкості $\dot{\mathbf{r}}_0(t) = \mathbf{v}(t)$. Вираз у дужках — це поперечна складова швидкості

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k},\mathbf{v})}{k^2}, \qquad \text{де} \quad \mathbf{v}_\parallel \parallel \mathbf{k}.$$

Електростатика у вакуумі

15. Треба перевірити умову $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$.

(a) і (b) — може описувати електростатичне поле, (c) і (d) — не може. Потрібно звернути увагу на системи координат, в яких задано компоненти векторів.

16. (a) $E_z = \dfrac{z\,q}{(z^2+a^2)^{3/2}}$.

При $z \gg a$, $E_z = \dfrac{q}{z^2}$, тобто на великих віддалях кільце веде себе як точковий заряд.

(b) $E_x = \dfrac{q}{x\sqrt{l^2+x^2}}$. На великих віддалях $x \gg l$ маємо поле точкового заряду $E_x = \dfrac{q}{x^2}$.

(c) $E_x = \dfrac{2\varkappa}{x}$.

(d) $E = 2\pi\sigma$.

(e) $E = 0$, $r < a$; $E = 4\pi\sigma\dfrac{a^2}{r^2}$, $r > a$.

(f) $E = \dfrac{4}{3}\pi\rho r$, $r < a$; $E = \dfrac{4\pi\rho a^3}{3r^2}$, $r > a$.

17. $z = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

18. $E = 2\pi\rho\left(b + \sqrt{a^2 + (z - b/2)^2} - \sqrt{a^2 + (z + b/2)^2}\right)$.

19. (a) $E = \dfrac{2\varkappa}{r}$. (b) $E = 0$, $r < a$; $E = \dfrac{4\pi\sigma a}{r}$, $r > a$.

(c) $E = 2\pi\rho r$, $r < a$; $E = \dfrac{2\pi\rho a^2}{r}$, $r > a$.

(d) $E = 0$, $r < a$; $E = 4\pi\sigma\dfrac{a^2}{r^2}$, $r > a$.

(e) $\mathbf{E} = \dfrac{Q}{a^3}\mathbf{r}$, $r < a$; $\mathbf{E} = \dfrac{Q}{r^3}\mathbf{r}$, $r > a$.

20. $\mathbf{E} = \dfrac{q\mathbf{a}}{R_1^3 - R_2^3}$.

21. Всередині фігури поза порожниною: $\mathbf{E} = \dfrac{q}{R_1^3 - R_2^3}\left(\mathbf{r} - \dfrac{R_2^3}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{a})\right)$.

Зовні фігури: $\mathbf{E} = \dfrac{q}{R_1^3 - R_2^3}\left(\dfrac{R_1^3}{r^3}\mathbf{r} - \dfrac{R_2^3}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{a})\right)$.

22. $\mathbf{E} = 2\pi\rho\mathbf{a}$.

23. Всередині фігури поза порожниною: $\mathbf{E} = 2\pi\rho\left(\mathbf{r} - \dfrac{R_2^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^2}(\mathbf{r} - \mathbf{a})\right)$.

Зовні фігури: $\mathbf{E} = 2\pi\rho\left(\dfrac{R_1^2}{r^2}\mathbf{r} - \dfrac{R_2^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^2}(\mathbf{r} - \mathbf{a})\right)$.

24. $E = 0$.

25. $E = \dfrac{4\pi\rho_0 r}{n + 3}\left(\dfrac{r}{R}\right)^n$, $r < R$; $E = \dfrac{4\pi\rho_0 R^3}{(n + 3)r^2}$, $r > R$.

26. (a) $E = \dfrac{4\pi\rho_0}{\alpha^2 r}\left(1 - e^{-\alpha r} - \alpha r e^{-\alpha r}\right)$, $r < R$;

$E = \dfrac{4\pi\rho_0}{\alpha^2 r}\left(1 - e^{-\alpha R} - \alpha R e^{-\alpha R}\right)$, $r > R$.

(b) $E = \dfrac{2\pi\rho_0}{\alpha r}\left(1 - e^{-\alpha r^2}\right)$, $r < R$; $E = \dfrac{2\pi\rho_0}{\alpha r}\left(1 - e^{-\alpha R^2}\right)$, $r > R$.

27. Скалярний потенціал електричного поля атома водню складається з потенціалу поля ядра (протона) і потенціалу поля електрона

$$
\begin{aligned}
\varphi(r) &= \frac{e}{r} - \frac{e}{\pi a^3} \int \frac{e^{-2r'/a}}{|\,\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3 r' = \\
&= \frac{e}{r} - \frac{2e}{a^3} \int\limits_{-1}^{+1} dx \int\limits_0^{\infty} \frac{{r'}^2\, e^{-2r'/a}}{\sqrt{r^2 + {r'}^2 - 2rr'x}}\, dr' = \\
&= \frac{e}{r} - \frac{2e}{a^3 r} \int\limits_0^{\infty} r'\, e^{-2r'/a} (r + r' - |\, r - r'|)\, dr' = \\
&= \frac{e}{r} - \frac{4e}{a^3 r} \left[\int\limits_0^{r} (r')^2\, e^{-2r'/a}\, dr' + r \int\limits_r^{\infty} r'\, e^{-2r'/a}\, dr' \right] = \\
&= e \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{r} \right) e^{-2r/a} .
\end{aligned}
$$

Напруженість електричного поля атома водню

$$
\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} \varphi(r) = -\frac{d\varphi(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{e}{r^2} \left(1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2} \right) e^{-2r/a}\, \frac{\mathbf{r}}{r} .
$$

28. $E = 4\pi\rho_0 z$, $z < a/2$; $E = 2\pi\rho_0 a$, $z > a/2$. Початок системи координат знаходиться по середині плити товщиною a.

29. $E = 4\pi\rho_0 \left(z - \dfrac{z^3}{3a^2} \right)$, $z < a$; $E = \dfrac{8}{3}\pi\rho a$, $z > a$. Початок системи координат знаходиться по середині плити товщиною $2a$.

30. $\varphi = \dfrac{4\pi\rho_0}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cos\alpha x \cos\beta y \sin\gamma z$.

31. $r \leqslant R_1$: $\quad E_1 = 0$, $\ \varphi_1 = \dfrac{q}{R_2 - R_1} \ln \dfrac{R_2}{R_1}$;

$R_1 \leqslant r \leqslant R_2$: $\quad E_2 = \dfrac{q(r - R_1)}{(R_2 - R_1) r^2}$, $\ \varphi_2 = \dfrac{q}{R_2 - R_1} \left(1 - \ln \dfrac{r}{R_2} - \dfrac{R_1}{r} \right)$;

$r \geqslant R_2$: $\quad E_3 = \dfrac{q}{r^2}$, $\ \varphi_3 = \dfrac{q}{r}$, де $q = 4\pi\rho_0 R_1^2 (R_2 - R_1)$.

32. $r \leqslant R_1$: $\quad E_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$;

$R_1 \leqslant r \leqslant R_2$: $\quad E_2 = 4\pi\rho_0 R_1 \left(1 - \dfrac{R_1}{r} \right)$,

$$\varphi_2 = 4\pi\rho_0 R_1 \left(R_1 - r + R_1 \ln \frac{r}{R_1} \right);$$

$r \geqslant R_2$: $\quad E_3 = \dfrac{4\pi\rho_0 R_1 (R_2 - R_1)}{r},$

$$\varphi_3 = 4\pi\rho_0 R_1 \left(R_1 - R_2 + R_1 \ln \frac{r}{R_1} - R_2 \ln \frac{r}{R_2} \right).$$

33. (a) Якщо початок циліндричної системи координат помістити в середині відрізка, а вісь z направити вздовж нього, то для довільної точки поля потенціал

$$\varphi(r, z) = \int\limits_{-l}^{+l} \frac{\varkappa\, dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}}.$$

Після інтеґрування отримаємо

$$\varphi(r, z) = \varkappa \ln \frac{z + l + \sqrt{r^2 + (z + l)^2}}{z - l + \sqrt{r^2 + (z - l)^2}}.$$

(b) Для безмежної нитки потенціал не залежить від z, тому, поклавши $z = 0$, за умови $l \gg r$ одержимо

$$\varphi(r) = \mathrm{const} - 2\varkappa \ln r.$$

(c) $\varphi = \dfrac{q}{a}, \quad r < a; \qquad \varphi = \dfrac{q}{r}, \quad r > a.$

(d) $\varphi = \dfrac{3q}{2a} - \dfrac{qr^2}{2a^3}, \quad r < a; \qquad \varphi = \dfrac{q}{r}, \quad r > a.$

34. $\varphi = 2\pi a\sigma \ln \dfrac{(2z + H) + \sqrt{4a^2 + (2z + H)^2}}{(2z - H) + \sqrt{4a^2 + (2z - H)^2}}$

35. (a) Поле володіє сферичною симетрією, тому в сферичних координатах рівняння Пуассона всередині кулі

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = -4\pi\rho, \quad r < a,$$

поза кулею

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = 0, \quad r > a.$$

Граничні умови

$$\varphi_1 \Big|_{r=a} = \varphi_2 \Big|_{r=a},$$

$$\frac{d\varphi_1}{dr} \Big|_{r=a} = \frac{d\varphi_2}{dr} \Big|_{r=a}.$$

Розв'язки

$$\varphi_1 = -\frac{2\pi\rho}{3} r^2 - \frac{c_1}{r} + c_2, \qquad \varphi_2 = -\frac{c_3}{r} + c_4.$$

Оскільки φ_1 при $r \to 0$ має бути скінченним, а $\varphi_2 = 0$ при $r \to \infty$, тому $c_1 = c_4 = 0$. Сталі інтеґрування c_2 і c_3 знайдемо з граничних умов:

$$c_2 = \frac{q}{a} + \frac{2\pi\rho a^2}{3}, \qquad c_3 = -q.$$

Остаточно

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{2\pi\rho}{3}(a^2 - r^2), \qquad & \mathbf{E}_1 &= \frac{q}{a^3}\mathbf{r}, \\ \varphi_2 &= \frac{q}{r}, & \mathbf{E}_2 &= \frac{q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \end{aligned}$$

(b) $\varphi_1 = 4\pi\sigma a$, $\mathbf{E}_1 = 0$, $r < a$; $\varphi_2 = \dfrac{4\pi a^2\sigma}{r} = \dfrac{q}{r}$, $\mathbf{E}_2 = \dfrac{q}{r^2}\dfrac{\mathbf{r}}{r}$, $r > a$.

(c) Направимо вісь z перпендикулярно до шару, а початок відліку помістимо в середній площині. У результаті, прирівнюючи на границях шару значення $\varphi(z)$ та $E_z = -d\varphi/dz$, отримаємо:

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = 4\pi\rho a\left(z + \frac{a}{2}\right), \quad E_z = -4\pi\rho a, \quad z < -a; \\ &\varphi_2 = -2\pi\rho z^2, \quad E_z = 4\pi\rho z, \quad -a < z < a; \\ &\varphi_3 = 4\pi\rho a\left(-z + \frac{a}{2}\right), \quad E_z = 4\pi\rho a, \quad z > a. \end{aligned}$$

Від середньої площини до поверхні шару поле росте лінійно з відстанню, але направлене у протилежні сторони по різних сторонах від середньої площини. На поверхні поле за абсолютною величиною досягає максимального значення. Поза шаром поле постійне і рівне цьому максимальному значенню.

(d) Поле володіє аксіальною симетрією, $\varphi = \varphi(R)$, тому у циліндричних координатах рівняння Пуассона

$$\begin{aligned} &\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\,\frac{d\varphi_1(R)}{dR}\right) = -4\pi\rho, \quad 0 < R < a, \\ &\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\,\frac{d\varphi_2(R)}{dR}\right) = 0, \quad R > a. \end{aligned}$$

$\varphi_1 = -\pi\rho R^2$, $E_R = -\dfrac{d\varphi_1}{dR} = 2\pi\rho R$, $0 < R < a$;

$$\varphi_2 = \pi\rho a^2\left(2\ln\frac{a}{R} - 1\right),\;\; E_R = -\frac{d\varphi_2}{dR} = \frac{2\pi\rho a^2}{R},\;\; R > a.$$

Всередині циліндра поле росте з відстанню прямо пропорційно радіусу, поза циліндром — зменшується обернено пропорційно радіусу.

36. $U = -\dfrac{e^2}{a}$.

37. $U = -\dfrac{q_1 q_2}{a}$.

Магнітостатика у вакуумі

38. (a) $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0$; (b) $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0\mathbf{k}$.

39. $B = \dfrac{I}{cr}\left(\dfrac{L-z}{\sqrt{r^2+(L-z)^2}} + \dfrac{L+z}{\sqrt{r^2+(L+z)^2}}\right),\quad B\Big|_{L\to\infty} = \dfrac{2I}{cr}$.

40. $B = \dfrac{I}{c}\dfrac{2\pi a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}$.

41. $B = \dfrac{\alpha I}{ca}$.

42. $B = \dfrac{2\pi I}{ca}$.

43. (a) $B = \dfrac{2I}{ca} n \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$. У границі $n \to \infty$ поле $B = \dfrac{2I\pi}{ca}$;

(b) $B = \dfrac{naI\cos\frac{\pi}{n}}{c\sqrt{a^2+z^2}}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{a^2+z^2} - a\sin\frac{\pi}{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{a^2+z^2} + a\sin\frac{\pi}{n}}\right\}$.

44. $A_x = A_y = 0,\; A_z = \dfrac{I}{c}\ln\dfrac{z+L+\sqrt{r^2+(z+L)^2}}{z-L+\sqrt{r^2+(z-L)^2}}$;

$A_z\Big|_{L\to\infty} = \mathrm{const} - \dfrac{2I}{c}\ln r$.

45. $B = \dfrac{4abI}{c\sqrt{a^2+b^2+z^2}}\left(\dfrac{1}{a^2+z^2} + \dfrac{1}{b^2+z^2}\right)$.

46. $B = \dfrac{(2+\pi)I}{ca}$.

47. $A_z = \begin{cases} -\dfrac{I}{c}\dfrac{r^2}{a^2} + \dfrac{I}{c} - \dfrac{2I}{c}\ln a, & r < a; \\ -\dfrac{2I}{c}\ln r, & r > a. \end{cases}$; $B_\theta = \begin{cases} \dfrac{2I}{ca^2}r, & r < a; \\ \dfrac{2I}{cr}, & r > a. \end{cases}$

48. $A_z = \begin{cases} 0, & r < b; \\ -\dfrac{I}{c}\dfrac{r^2-b^2}{a^2-b^2} + 2\dfrac{I}{c}\dfrac{b^2}{a^2-b^2}\ln\dfrac{r}{b}, & b < r < a; \\ -\dfrac{2I}{c}\ln\dfrac{r}{a} + 2\dfrac{I}{c}\dfrac{b^2}{a^2-b^2}\ln\dfrac{a}{b} - \dfrac{I}{c}, & r > a. \end{cases}$;

$B = \begin{cases} 0, & r < b; \\ \dfrac{2I}{cr}\dfrac{r^2-b^2}{a^2-b^2}, & b < r < a; \\ \dfrac{2I}{cr}, & r > a. \end{cases}$

49. $B = \dfrac{2I}{cR}$.

50. $B_z = \dfrac{2\pi I}{c(b-a)}\left(\ln\dfrac{b+\sqrt{b^2+z^2}}{a+\sqrt{a^2+z^2}} - \dfrac{b}{\sqrt{b^2+z^2}} + \dfrac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$.

51. $B = \dfrac{2I}{c}\dfrac{R}{a^2}$, $R < a$; $\quad B = \dfrac{2I}{cR}$, $R > a$.

52. $B = \dfrac{2I}{ca^2}r$, $r \leqslant a$; $\quad B = \dfrac{2I}{cr}$, $a \leqslant r \leqslant b$; $\quad B = 0$, $r > b$.

53. Нехтуючи розсіянням магнітного потоку зовні тора, можна вважати силові лінії магнітного поля колами з центром на осі тора. Використавши теорему Стокса, отримаємо

$$B = \frac{2IN}{cR}.$$

На рисунку 10.1 зображено переріз тора вздовж його осі.

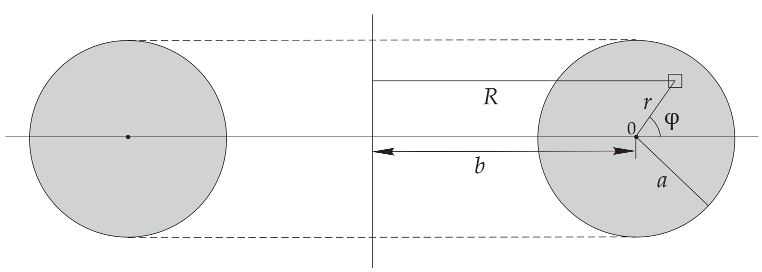


Рис. 10.1.

Для знаходження магнітного потоку використаємо формулу (4.10):

$$\Phi = \int\limits_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = \frac{2IN}{c} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{a} \frac{r\,dr\,d\varphi}{b + r\cos\varphi} = \frac{4\pi}{c} IN \left(b - \sqrt{b^2 - a^2} \right).$$

54. $x = \dfrac{a}{2}$.

55. $B = \dfrac{4\pi I}{c} n$.

56. $B_x = \dfrac{2I}{ca} \left(\operatorname{arctg} \dfrac{a + 2x}{2y} + \operatorname{arctg} \dfrac{a - 2x}{2y} \right)$, $B_y = \dfrac{I}{ca} \ln \dfrac{(2x - a)^2 + 4y^2}{(2x + y)^2 + 4y^2}$, $B_z = 0$.

57. $f = \dfrac{4I^2}{c^2 a^2} \left(a \operatorname{arctg} \dfrac{a}{b} - \dfrac{1}{2} b \ln \dfrac{a^2 + b^2}{b^2} \right)$.

58. $A_z = \dfrac{I}{c} \ln \dfrac{(a + x)^2 + y^2}{(a - x)^2 + y^2}$, $B_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} = -\dfrac{8I}{c} \dfrac{axy}{[(a + x)^2 + y^2][(a - x)^2 + y^2]}$,
$B_y = -\dfrac{\partial A_z}{\partial x} = -\dfrac{2I}{c} \left(\dfrac{a - x}{(a - x)^2 + y^2} - \dfrac{a + x}{(a + x)^2 + y^2} \right)$.

59. 1) Між площинами $B = \dfrac{4\pi}{c} j$, поза площинами $B = 0$;
2) між площинами $B = 0$, поза площинами $B = \dfrac{4\pi}{c} j$.

60. У циліндричній системі координат, вісь z якої перпендикулярна до площини кільця і проходить через його центр, компоненти векторного потенціалу мають вигляд:

$$A_\alpha = \frac{2I}{c} a \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos\phi\, d\phi}{\sqrt{r^2 + a^2 + z^2 - 2ar\cos\phi}}, \qquad A_z = A_r = 0.$$

Цей інтеґрал можна виразити через еліптичні інтеґрали Лежандра. Покладемо $\phi = \pi + 2\beta$ та $k^2 = \dfrac{4ar}{(a + r)^2 + z^2}$ і отримаємо

$$A_\alpha = \frac{2I}{c} \left(\frac{a}{r} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right],$$

де $K(k) = \displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\beta}}$ та $E(k) = \displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\beta}\, d\beta$ — повні еліптичні інтеґрали Лежандра.

Компоненти магнітного поля в циліндричних координатах

$$B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha); \qquad B_r = -\frac{\partial A_\alpha}{\partial z}; \qquad B_\alpha = 0.$$

Якщо підставити значення векторного потенціалу, то отримаємо для індукції магнітного поля в довільній точці:

$$B_r = \frac{2I}{c}\frac{z}{r\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left[-K(k) + \frac{a^2+r^2+z^2}{(a-r)^2+z^2}E(k)\right],$$

$$B_z = \frac{2I}{c}\frac{1}{\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left[K(k) + \frac{a^2-r^2-z^2}{(a-r)^2+z^2}E(k)\right],$$

$$B_\alpha = 0.$$

Мультипольні розклади

61. $$\mathbf{E}_{\mathrm{d}}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{r},\mathbf{d})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{d}}{r^3} = \frac{3(\mathbf{n},\mathbf{d})\mathbf{n}-\mathbf{d}}{r^3},$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{d}}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{r},\mathfrak{m})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathfrak{m}}{r^3} = \frac{3(\mathbf{n},\mathfrak{m})\mathbf{n}-\mathfrak{m}}{r^3}, \quad \text{де} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

62. При переміщенні початку координат з однієї точки в іншу радіус-вектор i-тої точки у новій системі запишеться $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$, де $\mathbf{a}$ — постійний вектор, $\mathbf{r}_i$ — радіус-вектор i-тої точки у старій системі координат. Для електрично нейтральної системи $\sum\limits_i q_i = 0$. Тому її дипольний момент

$$\mathbf{d}' = \sum_i q_i\mathbf{r}'_i = \sum_i q_i(\mathbf{r}_i+\mathbf{a}) = \sum_i q_i\mathbf{r}_i + \mathbf{a}\sum_i q_i = \mathbf{d}.$$

63. Тензор квадрупольного моменту має вигляд:

$$Q_{jk} = \int \rho(\mathbf{r})\left(x_j x_k - \frac{r^2}{3}\delta_{jk}\right)dV.$$

Вісь симетрії спрямуємо вздовж осі z циліндричної системи координат, тоді

$$Q_{xx} = \int \rho(R,z)\left(x^2 - \frac{r^2}{3}\right)\ R\,dR\,dz\,d\varphi.$$

Оскільки $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + z^2$, то

$$Q_{xx} = \int \rho(R,z)\left(x^2 - \frac{r^2}{3}\right) R\; dR\; dz\; d\varphi =$$

$$= \int\int \rho(R,z)\; R\; dR\; dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\; \left(R^2\cos^2\varphi - \frac{(R^2+z^2)}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3}\int\int \rho(R,z)\; R(R^2 - 2z^2)\; dR\; dz,$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = \int \rho(R,z)\; R^3\; dR\; dz \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi\; d\varphi = 0,$$

$$Q_{xz} = \int \rho(R,z)\; R^3\; dR\; dz \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\; d\varphi = 0,$$

$$Q_{yy} = \frac{\pi}{3}\int\int \rho(R,z)\; R\; dR\; dz(R^2 - 2z^2),$$

$$Q_{yz} = Q_{zx} = Q_{zy} = 0,$$

$$Q_{zz} = \frac{2\pi}{3}\int\int \rho(R,z)\; R\; dR\; dz(2z^2 - R^2).$$

Отже

$$Q_{zz} = Q, \quad Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q.$$

64. Скалярний потенціал квадруполя

$$\varphi = \sum_{j,k} \frac{3x_j x_k}{2r^5}\; Q_{jk},$$

де

$$Q_{jk} = \int \rho(\mathbf{r})\left(x_j x_k - \frac{r^2}{3}\delta_{jk}\right) dV$$

— тензор квадрупольного моменту. На основі результатів попередньої задачі

$$\begin{aligned}
\varphi &= \sum_{j,k} \frac{3x_j x_k Q_{jk}}{2r^5} = \frac{3(x^2 Q_{xx} + y^2 Q_{yy} + z^2 Q_{zz})}{2r^5} = \\
&= \frac{1}{2r^5}\left(-\frac{3}{2}x^2 Q - \frac{3}{2}y^2 Q + 3z^2 Q\right) = \frac{3Q}{4r^5}(2z^2 - x^2 - y^2) = \\
&= \frac{3Q}{4r^5}(3z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)) = \frac{3Q}{4r^5}(3z^2 - r^2).
\end{aligned}$$

У сферичних координатах $z = r\cos\theta$, тому

$$\varphi = \frac{3Q}{4r^5}\left(3r^2\cos^2\theta - r^2\right) = \frac{3Q}{4r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right).$$

65. $E = \dfrac{qa}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$.

66. $\mathbf{E} = -\dfrac{3qa^2}{r^7}\left[y(4x^2-y^2-z^2)\mathbf{i} + x(4y^2-x^2-z^2)\mathbf{j} + 5xyz\mathbf{k}\right]$.

67. Вказівка: потрібно показати, що всі мультипольні моменти, окрім дипольного, рівні нулю.

68. $\mathbf{d} = 0; \quad Q = \dfrac{4\pi}{45}\rho abc\begin{pmatrix} 2a^2-b^2-c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2b^2-a^2-c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c^2-a^2-b^2 \end{pmatrix}$.

Вказівка: для розрахунку відповідних інтеґралів зручно перейти до узагальнених сферичних координат:

$$\begin{aligned} x &= a\eta\sin\theta\cos\phi, \\ y &= b\eta\sin\theta\sin\phi, \\ z &= c\eta\cos\theta, \end{aligned}$$

де $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

69. Виберемо Ox за вісь обертання. Тоді отримаємо

$\varphi(\mathbf{r}) = q\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{(a^2-b^2)x^2 + (2b^2-2a^2)y^2 + (a^2-b^2)z^2}{10r^5}\right)$.

70. $\mathbf{d} = \left(0;\ 0;\ \dfrac{4\pi\rho_0 R^4}{15}\right); \quad Q_{zz} = 0.$

71. $\mathbf{d} = \left(0;\ 0;\ \dfrac{4}{15}\rho_0\pi abc^2\right); \quad Q'_{zz} = 0.$

72. $\mathbf{d} = 0; \quad Q_{zz} = -\dfrac{\pi\sigma R^4}{6}$.

Диск розміщено у площині xOy, його центр — у початку координат.

73. (a) Нехай прямокутник лежить у площині xOy, початок координат збігається з точкою перетину діагоналей прямокутника, сторона довжиною a паралельна до осі Ox, а сторона довжиною b — до осі Oy.

$$Q = \frac{1}{36}\sigma ab\begin{pmatrix} 2a^2-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2b^2-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2-b^2 \end{pmatrix}.$$

(b) Нехай еліпс лежить у площині xOy, початок координат збігається з центром еліпса, піввісь довжиною a лежить на осі Ox, а піввісь довжиною b — на осі Oy.

$$Q = \frac{1}{12}\sigma\pi ab \begin{pmatrix} 2a^2 - b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2b^2 - a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 - b^2 \end{pmatrix}.$$

74. $\mathbf{d} = 0$; $\qquad Q = \dfrac{\varkappa a^3}{36} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Відрізок лежить на осі Ox, його центр — у початку координат.

75. $\varphi(\mathbf{r}) = \dfrac{q(a^2 - b^2)(r^2 - 3z^2)}{4r^5}.$ Для визначеності кільця поміщено у площину xOy, їх центр — у початку координат.

76. $\mathbf{d} = 0$.

77. Розмістимо шестикутник у площині xOy, як показано на рис. 10.2. Дипольний і квадрупольний моменти системи дорівнюють нулеві. Ненульові компоненти тензора октупольного моменту: $Q_{xxx} = -12qa^3$, $Q_{xyy} = Q_{yxy} = Q_{yyx} = 12qa^3$.

Отже, $\varphi(\mathbf{r}) = 30qa^3 \dfrac{(3y^2 - x^2)x}{r^7}.$

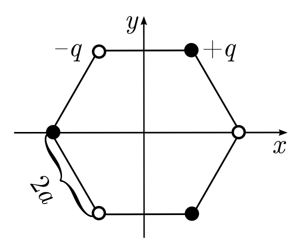


Рис. 10.2.

78. $Q = \dfrac{abc}{36}\rho \begin{pmatrix} 2a^2 - b^2 - c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2b^2 - a^2 - c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c^2 - b^2 - a^2 \end{pmatrix}.$

79. $\mathbf{d} = -qb(0;\ 0;\ 2)$; $\qquad Q = \dfrac{2q}{3} \begin{pmatrix} 2a^2 + b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2b^2 - a^2 \end{pmatrix}.$

80. $\mathbf{d} = -qa(0;\ 1;\ 1)$; $\qquad Q = \dfrac{qa^2}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

81. $\mathbf{d} = 0;\qquad Q = \dfrac{2qa^2}{3}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

82. $\mathbf{d} = -q(a;\ b;\ c);$

$$Q = -\frac{q}{3}\begin{pmatrix} 2a^2-b^2-c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2b^2-a^2-c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c^2-b^2-a^2 \end{pmatrix}.$$

83. (a) $\varphi(\mathbf{r}) = qa^2\,\dfrac{(r^2-3z^2)}{r^5}$ (лінійний квадруполь);

(b) $\varphi(\mathbf{r}) = qa^3\,\dfrac{(15z^3-9r^2z)}{r^7}$ (лінійний октуполь) ;

(c) $\varphi(\mathbf{r}) = qa^2\,\dfrac{3xy}{r^5}$; (d) $\varphi(\mathbf{r}) = -qa^3\,\dfrac{15xyz}{r^7}$.

84. Розіб'ємо сферу на елементарні кільця, площина яких перпендикулярна до осі обертання. Розглянемо одне з таких кілець. Його площа $dS = 2\pi R^2\cos\theta\,d\theta$, а заряд $dQ = \sigma\,dS = \dfrac{Q}{2}\cos\theta\,d\theta$, де $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$ — поверхнева густина заряду сфери. Обертання кільця з періодом $T = 2\pi/\omega$ еквівалентне протіканню струму величиною $dI = \dfrac{dQ}{T} = \dfrac{\omega Q}{4\pi}\cos\theta\,d\theta$ по контуру радіуса $R\cos\theta$. Магнітний дипольний момент такого контура дорівнює $d\mathfrak{m} = \dfrac{1}{c}dI\pi(R\cos\theta)^2 = \dfrac{\omega Q}{4c}R^2\cos^3\theta\,d\theta$ і напрямлений уздовж осі обертання сфери. Після інтеґрування отримаємо: $\mathfrak{m} = \omega QR^2/3c$.

85. Векторний потенціал задано у сферичних координатах, відповідні диференціальні операції див. на стор. 7. Безпосереднім розрахунком переконуємося, що $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, тобто справедливе калібрування Кулона, в якому рівняння для векторного потенціалу $\Delta\mathbf{A} = -\dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}$. Враховуючи, що лапласіан тут можна записати як $\Delta\mathbf{A} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}$, отримаємо для струму

$$\mathbf{j} = \mathbf{e}_\phi\,\frac{c}{4\pi}\,\frac{A_0\sin\theta}{r}\,e^{-\lambda r}\left(\frac{2}{r^2}-\lambda^2\right).$$

В означенні магнітного диполя $\mathfrak{m}$ фіґурує векторний добуток $[\mathbf{r},\mathbf{j}] = -\mathbf{e}_\theta\,rj_\phi$:

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\int[\mathbf{r},\mathbf{j}]\,dV = \frac{1}{2c}\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^{\infty}dr\,r^2\int\limits_0^{\pi}d\theta\,\sin\theta\,\mathbf{k}(-\cos\theta)rj_\phi = 0.$$

Цей результат для магнітного дипольного моменту, $\mathfrak{m} = 0$, є очевидним із поведінки $\mathbf{A}$ на великих відстанях: у розкладі за $1/r$ немає доданків $\sim 1/r^2$, які відповідають дипольному наближенню.

Теорія випромінювання

86. Вказівка: виконайте безпосереднє диференціювання у відповідних виразах для скалярного потенціалу. Для полегшення розрахунків варто скористатися формулою для лапласіана від добутку скалярних функцій

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2(\boldsymbol{\nabla} f, \boldsymbol{\nabla} g) + g\Delta f$$

та відомим виразом $\Delta \dfrac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

Рівняння для векторного потенціалу перевіряється за аналогією після покомпонентного запису $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z$.

87. Вказівка: врахувати, що повний імпульс ізольованої системи є інтеґралом руху.

88. $\mathcal{E} = \dfrac{2q^3Ev_0}{3c^3m}\left[\sqrt{\dfrac{2qEl}{mv_0^2} + \cos^2\alpha} - \cos\alpha\right].$

89. $I_\mathrm{d} = \dfrac{2}{3c^3}\left(\dfrac{e_0^2E}{m}\dfrac{(2N+1)(N+1)N}{6}\right)^2.$

90. Енерґія випромінювання електрона, враховуючи рівняння руху

$$\mathcal{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_p\,dt = \frac{2e^2}{3c^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ddot{\mathbf{r}}^2\,dt = \frac{2Z^2e^6}{3m^2c^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r^4}\,dt.$$

Вважаючи траєкторію електрона прямолінійною і нехтуючи зміною його швидкості,

$$r = \sqrt{a^2 + v_0^2t^2},$$

звідки

$$\mathcal{E} = \frac{\pi Z^2e^6}{3m^2c^3v_0a^3}.$$

91. Враховуючи рівняння руху і коловий характер орбіти

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2},$$

повна енерґія електрона

$$\mathcal{E} = -\frac{Ze^2}{2r}.$$

Тоді інтенсивність дипольного випромінювання

$$I_{\mathrm{d}} = \frac{2e^2\ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3} = \frac{32\,\mathcal{E}^4}{3c^3(mZe)^2} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt},$$

з початковою умовою

$$\mathcal{E}\Big|_{t=0} = -\frac{Ze^2}{2R}.$$

Час падіння електрона на ядро ($\mathcal{E} \to -\infty$):

$$t_{\text{п}} = \frac{m^2c^3R^3}{4Ze^4} \simeq 1.56 \cdot 10^{-11} \text{ с},$$

де враховано, що в системі Ґаусса заряд електрона дорівнює

$$e \simeq 4.8032 \cdot 10^{-10} \text{ од. СГСЕ}.$$

92. Рівняння руху частинки

$$\ddot{x} = e\,\frac{Q}{mR^3}\,x.$$

Енерґія, яка втрачається частинкою під час прольоту через кулю:

$$\mathcal{E} = \int\limits_{-R}^{+R} I_{\mathrm{d}}\,\frac{dx}{\dot{x}} = \int\limits_{-R}^{+R} \frac{2Q^2e^4x^2}{3c^3m^2R^6}\,\frac{dx}{\dot{x}}.$$

Оскільки енерґія випромінювання $\mathcal{E}$ мала, то наближенно скориставшись законом збереження енерґії $\mathcal{E}_0 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)$ знайдемо швидкість частинки

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0}{m} + \frac{e\,Q}{mR^3}\,(x^2 - R^2)}.$$

Остаточно отримаємо

$$\mathcal{E} = \frac{2Qe^3}{3mc^2R^2}\sqrt{\frac{|e\,Q|}{mc^2R}}\left[\left(\frac{2\mathcal{E}_0R}{|e\,Q|} + 1\right)\arcsin\frac{1}{\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0R}{|e\,Q|} + 1}} - \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0R}{|e\,Q|}}\right].$$

93. Дипольний момент частинки

$$\mathbf{d} = e\mathbf{l} = e\mathbf{l}_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

$\mathbf{l}_0$ — постійний вектор, α — початкова фаза. Індукція магнітного поля

$$\mathbf{B} = -\frac{e\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)}{c^2 r^2} [\mathbf{l}_0,\, \mathbf{r}].$$

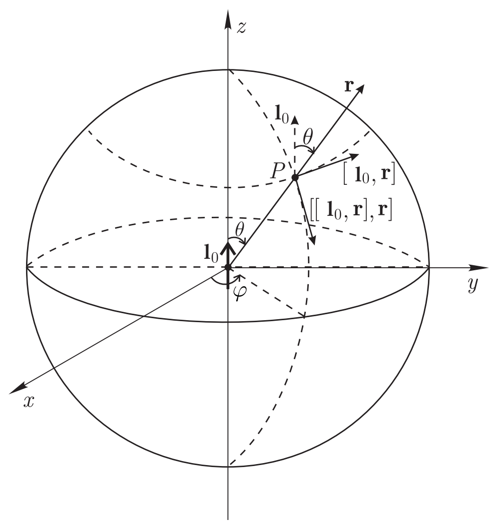


Рис. 10.3.

Складові вектора $[\mathbf{l}_0,\, \mathbf{r}]$ дорівнюють (див. рис. 10.3)

$$[\mathbf{l}_0,\, \mathbf{r}]_r = [\mathbf{l}_0,\, \mathbf{r}]_\theta = 0, \quad [\mathbf{l}_0,\, \mathbf{r}]_\varphi = r l_0 \sin\theta,$$

тому

$$B_r = B_\theta = 0, \quad B_\varphi = -\frac{e\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)\, l_0 \sin\theta}{c^2 r}.$$

Напруженість електричного поля

$$\mathbf{E} = -\frac{e\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)}{c^2 r^3} [[\mathbf{l}_0,\, \mathbf{r}],\, \mathbf{r}].$$

Складові вектора $[[\mathbf{l}_0,\, \mathbf{r}],\, \mathbf{r}]$ дорівнюють

$$[[\mathbf{l}_0,\, \mathbf{r}],\, \mathbf{r}]_r = [[\mathbf{l}_0,\, \mathbf{r}],\, \mathbf{r}]_\varphi = 0, \quad [[\mathbf{l}_0,\, \mathbf{r}],\, \mathbf{r}]_\theta = r^2 l_0 \sin\theta,$$

тому

$$E_r = E_\varphi = 0, \quad E_\theta = -\frac{e\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)\, l_0 \sin\theta}{c^2 r}.$$

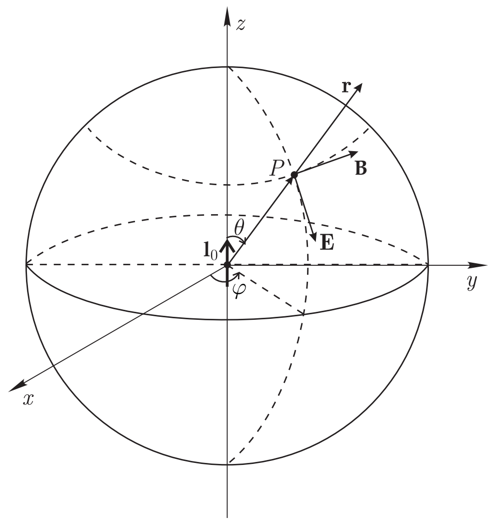


Рис. 10.4.

У кожній точці хвильової зони вектори $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{r}$ взаємо перпендикулярні і утворюють правогвинтову систему, причому $\mathbf{E}$ спрямований по дузі меридіана, $\mathbf{B}$ — по дузі паралелі (див. рис. 10.4). Середня за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність дипольного випромінювання:

$$\langle I_\mathrm{d} \rangle = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3}\, dt = \frac{\omega^4 e^2 l_0^2}{3c^3}.$$

94. Оскільки довжина антени фіксована, то електричний дипольний момент $d = e(t)\, l$ буде змінюватися з часом за рахунок зміни заряду $e(t)$ на одному з кінців антени. Усереднене за період зміни струму $T = 2\pi/\omega$ значення інтенсивності дипольного випромінювання

$$\langle I_\mathrm{d} \rangle = \frac{1}{T} \int\limits_0^T I_\mathrm{d}\, dt = \frac{J_0^2 l^2 \omega^2}{3c^3}.$$

95. Вказівка: врахувати, що повний момент імпульсу ізольованої системи є інтеґралом руху.

96. Вказівка: від координат частинок $\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2$ перейти до координат центра мас і відносного руху

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

97. Магнітно-дипольний момент

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\int [\mathbf{r},\ \mathbf{j}]\, dV = \frac{J}{2c}\oint\limits_L [\mathbf{r},\ d\mathbf{l}],$$

де J — сила струму, а L — контур провідника. Далі,

$$\frac{1}{2}\oint\limits_L [\mathbf{r},\, d\mathbf{l}] = \int\limits_S d\mathbf{S} = \mathbf{S} = ab\mathbf{n},$$

де $\mathbf{n}$ — одиничний вектор нормалі до поверхні, натягнутої на контур зі струмом L. Усереднене за період зміни струму $T = 2\pi/\omega$ значення інтенсивності магнітно-дипольного випромінювання

$$\langle I_\mathrm{m}\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_0^T I_\mathrm{m}\, dt = \frac{a^2b^2J_0^2\omega^4}{3c^5}.$$

98. Напруженість електричного поля

$$\mathbf{E} = \frac{\omega^2\cos(\omega(t - r/c) + \alpha)}{c^2r^2}\,[\mathbf{m}_0,\, \mathbf{r}].$$

Складові вектора $[\mathbf{m}_0,\, \mathbf{r}]$ дорівнюють (рис. 10.5).

$$[\mathbf{m}_0,\, \mathbf{r}]_r = [\mathbf{m}_0,\, \mathbf{r}]_\theta = 0, \quad [\mathbf{m}_0,\, \mathbf{r}]_\varphi = rm_0\sin\theta,$$

тому

$$E_r = E_\theta = 0, \quad E_\varphi = \frac{\omega^2\cos(\omega(t - r/c) + \alpha)\, m_0\sin\theta}{c^2r}.$$

Індукція магнітного поля

$$\mathbf{B} = -\frac{\omega^2\cos(\omega(t - r/c) + \alpha)}{c^2r^3}\,[[\mathbf{m}_0,\, \mathbf{r}],\, \mathbf{r}].$$

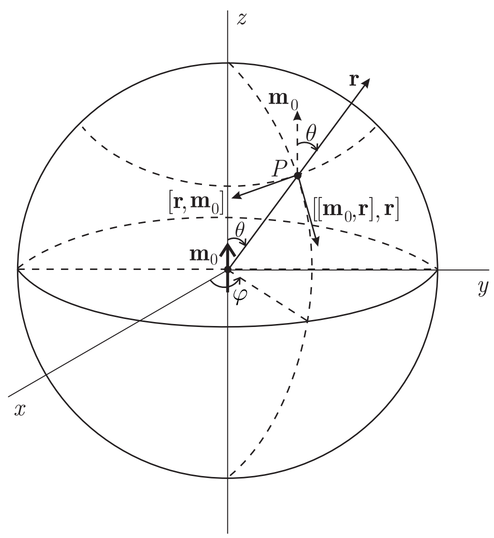


Рис. 10.5.

Складові вектора $[[\mathbf{m}_0,\,\mathbf{r}],\,\mathbf{r}]$ дорівнюють

$$[[\mathbf{m}_0,\,\mathbf{r}],\,\mathbf{r}]_r = [[\mathbf{m}_0,\,\mathbf{r}],\,\mathbf{r}]_\varphi = 0, \quad [[\mathbf{m}_0,\,\mathbf{r}],\,\mathbf{r}]_\theta = r^2 m_0 \sin\theta,$$

тому

$$B_r = B_\varphi = 0, \quad B_\theta = -\frac{\omega^2 \cos(\omega(t - r/c) + \alpha)\, m_0 \sin\theta}{c^2 r}.$$

У кожній точці хвильової зони вектори $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{r}$ взаємо перпендикулярні і утворюють правогвинтову систему, причому $\mathbf{B}$ спрямований по дузі меридіана, $\mathbf{E}$ — по дузі паралелі (див. рис. 10.6). Отже, поле магнітного диполя може бути отримане з поля випромінювання електричного диполя (див. задачу 93) шляхом заміни: $e\mathbf{l}_0 \to \mathbf{m}_0, \mathbf{E} \to \mathbf{B}, \mathbf{B} \to -\mathbf{E}$.
Середня за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність магнітно-дипольного випромінювання:

$$\langle I_{\mathrm{m}} \rangle = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3}\, dt = \frac{\omega^4 m_0^2}{3c^3}.$$

99. Рівняння руху має вигляд:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2 \mathbf{r} - \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0\, \cos\omega t.$$

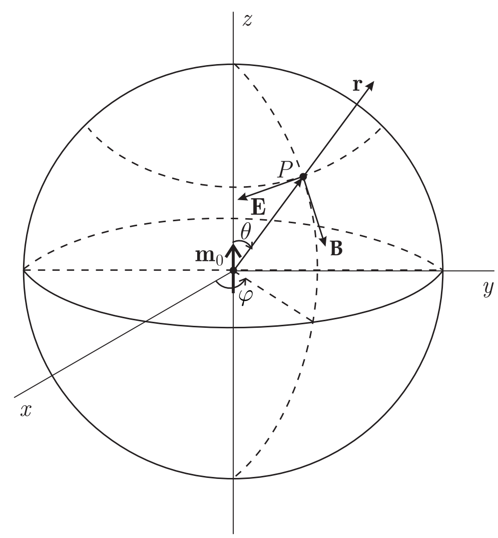


Рис. 10.6.

Розв'язок неоднорідного рівняння зручно шукати в комплексній формі, для чого пишемо в правій частині $e^{i\omega t}$ замість $\cos\omega t$ (беручи в остаточних виразах дійсну частину)

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} - \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m}\,\mathbf{E}_0\,e^{i\omega t}.$$

Оскільки сила радіаційного тертя значно менша від пружної сили, то в першому наближенні однорідне рівняння є рівнянням гармонічного осцилятора. Тому

$$\dddot{\mathbf{r}} = -\,\omega_0^2\dot{\mathbf{r}}.$$

Отже, ми приходимо до рівняння для коливань з тертям

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\,\mathbf{E}_0\,e^{i\omega t}.$$

де

$$\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}.$$

Частковий інтеґрал шукаємо у вигляді $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 e^{i\omega t}$. Для $\mathbf{r}_1$

$$\mathbf{r}_1 = \frac{e\mathbf{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)},$$

а

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0\, e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}.$$

Звідки

$$\ddot{\mathbf{r}}^2 = \frac{\omega^4 e^2 \mathbf{E}_0^2 \left(\mathrm{Re}\left\{e^{i(\omega t - \varphi)}\right\}\right)^2}{m^2\rho^2} = \frac{\omega^4 e^2 \mathbf{E}_0^2\, \cos^2(\omega t - \varphi)}{m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2)}.$$

де

$$\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}, \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

Середня за період $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність випромінювання осцилятора

$$\langle I_{\mathrm{d}} \rangle = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \ddot{\mathbf{r}}^2\, dt = \frac{e^4\mathbf{E}_0^2}{3c^3 m^2}\ \frac{\omega^4}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2)}.$$

100. Вектор Герца задовольняє рівняння д'Аламбера

$$\Delta\mathbf{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{P},$$

в чому легко переконатися так: якщо до обох частин цього рівняння застосувати послідовно оператори $-\,\mathrm{div}$ та $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}$, то отримаємо рівняння для електроманітних потенціалів. Його розв'язок за аналогією з запізнювальними потенціалами:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,\mathbf{P}\left(\mathbf{r}',\ t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)\, dV'.$$

Напруженість електричного та індукція магнітного полів

$$\mathbf{E} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{Z} - 4\pi\mathbf{P}, \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{Z}.$$

101. Зручно використати загальні формули для запізнювальних потенціалів

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)\, dV',$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)\, dV'.$$

Зобразивши ρ і $\mathbf{j}$ рядами Тейлора за степенями $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$, знайдемо

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}',t)\left(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)^n dV',$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\frac{1}{c}\int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\left(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)^n dV'.$$

(a) Для точкового заряду $\rho(\mathbf{r}',t) = e\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0(t))$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}',t) = e\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0(t))$. Тоді

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{e}{R} + \frac{e}{2c^2}\left(\frac{v^2}{R} - \frac{(\mathbf{R},\mathbf{v})^2}{R^3} - \frac{(\mathbf{R},\dot{\mathbf{v}})}{R}\right) + \sum_{n\geqslant 3}\frac{e(-1)^n}{n!c^n}\frac{d^n}{dt^n}R^{n-1},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{e\mathbf{v}}{cR} - \frac{e}{c^2}\dot{\mathbf{v}} + \sum_{n\geqslant 2}\frac{e(-1)^n}{n!c^{n+1}}\frac{d^n}{dt^n}\mathbf{v}R^{n-1},$$

де $\mathbf{R} = \mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)$, $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)|$.

(b) Використаємо ґрадієнтне перетворення потенціалів

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Вибравши функцію f так, щоб потенціал φ' став кулонівським, $\varphi'(\mathbf{r},t) = e/R$, знайдемо:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{e}{2c}\left(\frac{\mathbf{v}}{R} + \frac{\mathbf{R}(\mathbf{R},\mathbf{v})}{R^3}\right) - \frac{2}{3}\frac{e}{c^2}\dot{\mathbf{v}} + \\ &+ e\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{n!c^{n+1}}\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{n+1}{n+2}\mathbf{v} - \frac{n-1}{n+2}\frac{\mathbf{R}(\mathbf{R},\mathbf{v})}{R^2}\right)R^{n-1}.\end{aligned}$$

(c) Усі величини в правих сторонах цих співвідношень беруть у такі ж моменти часу й у таких точках простору, як і в лівих. Тому диференціювання у формулах $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ нескладне. Отримуємо

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{e}{cR^3}[\mathbf{v},\mathbf{R}] + e\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n(n-1)}{n!c^{n+1}}\frac{d^n}{dt^n}[\mathbf{v},\mathbf{R}]R^{n-3}, \\ \mathbf{E} &= e\frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{e}{2c^2}\left\{\frac{\mathbf{R}}{R^3}\left(v^2 - 3\frac{(\mathbf{R},\mathbf{v})^2}{R^2}\right) - \frac{1}{R}\left(\dot{\mathbf{v}} + \frac{\mathbf{R}(\mathbf{R},\dot{\mathbf{v}})}{R^2}\right)\right\} + \\ &+ \frac{2e}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}} + \sum_{n\geqslant 3}\frac{(-1)^n n}{(n+1)!c^{n+1}}\frac{d^n}{dt^n}\left(n\mathbf{v} - (n-2)\frac{\mathbf{R}(\mathbf{R},\mathbf{v})}{R^2}\right)R^{n-2}.\end{aligned}$$

102. Як видно з рисунка 10.7,

$$\mathbf{v}\frac{R}{c} + \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}.$$

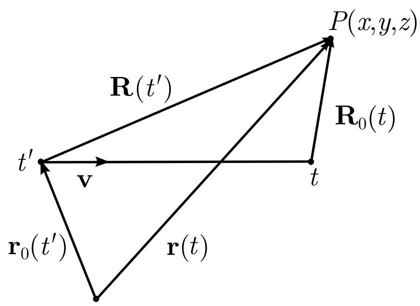


Рис. 10.7.

Піднісши обидва боки рівності до квадрату, знайдемо рівняння для визначення R:

$$R^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - 2R\frac{(\mathbf{v}, \mathbf{R}_0)}{c} - R_0^2 = 0.$$

Звідси

$$R = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{R}_0)/c}{1 - v^2/c^2} + \left[\frac{(\mathbf{v}, \mathbf{R}_0)^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^2} + \frac{R_0^2}{1 - v^2/c^2}\right]^{1/2}.$$

З першої формули видно, що

$$\frac{(\mathbf{v}, \mathbf{R})}{c} = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{R}_0)}{c} + R\frac{v^2}{c^2}.$$

Використавши знайдене значення для R, отримаємо

$$R - \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{R})}{c} = R_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{R}_0)^2}{R_0^2 c^2}\right)^{1/2} = R_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta_0\right)^{1/2},$$

де θ_0 — кут між векторами $\mathbf{v}$ та $\mathbf{R}_0$. Отже,

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R_0}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta_0}}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{v}}{cR_0}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta_0}}.$$

103. $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = e\dfrac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2} + \dfrac{(\mathbf{v}, \mathbf{R}_0)^2}{c^2 R_0^2}\right)^{-3/2},$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{e}{c}\frac{[\mathbf{v},\mathbf{R}_0]}{R_0^3}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{(\mathbf{v},\mathbf{R}_0)^2}{c^2 R_0^2}\right)^{-3/2}.$$

Як бачимо,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}[\mathbf{v},\mathbf{E}].$$

104. При русі зі сталою швидкістю координата заряду $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{v}t$. Тому

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(\mathbf{r},t) = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t).$$

Звідси знаходимо рівняння для фур'є-зображення $\varphi_{\mathbf{k}}(t)$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t^2} + k^2\varphi_{\mathbf{k}}(t) = 4\pi e\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t}.$$

Його розв'язок має вигляд

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{4\pi e}{k^2 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{c^2}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t} \equiv \frac{4\pi e}{k^2\left(1 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{k^2c^2}\right)}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)}.$$

Аналогічно

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{4\pi e\mathbf{v}}{ck^2}\frac{1}{\left(1 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{k^2c^2}\right)}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)}.$$

З цих рівнянь отримуємо:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{k}} = i[\mathbf{k},\mathbf{A}_{\mathbf{k}}] = i\frac{4\pi e}{c}\frac{[\mathbf{k},\mathbf{v}]}{k^2 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{c^2}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)},$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -i\frac{4\pi e}{k^2 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{c^2}}\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}\mathbf{v})}{c^2}\right)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)}.$$

Звідси видно, що

$$\mathbf{B}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{c}[\mathbf{v},\mathbf{E}_{\mathbf{k}}].$$

Це узгоджується з результом попередньої задачі.

105. Використавши в попередній задачі ґрадієнтне перетоврення потенціалів

$$\varphi'_{\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}} - \frac{1}{c}\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial t}, \quad \mathbf{A}'_{\mathbf{k}} = \mathbf{A}_{\mathbf{k}} + i\mathbf{k}f_{\mathbf{k}},$$

бачимо, що при

$$f_{\mathbf{k}} = i\frac{4\pi ec}{k^2}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)}\frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2c^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v})^2},$$

потенціали електромагнітного поля запишуться

$$\varphi'_{\mathbf{k}}(t) = \frac{4\pi e}{k^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)},$$

$$\mathbf{A}'_{\mathbf{k}}(t) = \frac{4\pi e}{ck^2} \frac{\mathbf{v} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v})/k^2}{1 - (\mathbf{k}\mathbf{v})^2/k^2c^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)}.$$

106. Повну енерґію частинок будемо ототожнювати з енерґією поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + B^2) dV.$$

З означення потенціалів і рівнянь Максвелла знаходимо

$$E^2 = -\operatorname{div}(\mathbf{E}\varphi) + 4\pi\rho\varphi - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{E}\right),$$

$$B^2 = -\operatorname{div}[\mathbf{B}, \mathbf{A}] + \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}, \mathbf{A}) + \frac{1}{c}\left(\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right).$$

При нехтуванні випромінюванням інтеґрали від членів з диверґенцією зникають. Тоді

$$W = W_1 + W_2,$$

де

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2} \int \left(\rho\varphi + \frac{1}{c}(\mathbf{j}, \mathbf{A})\right) dV, \\ W_2 &= \frac{1}{8\pi c} \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} - \varphi \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) dV \\ &+ \frac{1}{8\pi c^2} \int \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2 - \left(\mathbf{A}, \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right)\right] dV. \end{aligned}$$

При кулонівському калібруванні $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, перший інтеґрал у W_2 зникає:

$$W_2 = \frac{1}{8\pi c^2} \int \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2 - \left(\mathbf{A}, \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right)\right] dV.$$

При лоренцівському калібруванні $\operatorname{div} \mathbf{A} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$. Тоді

$$W_2 = \frac{1}{8\pi c^2} \int \left[\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2 - \left(\mathbf{A}, \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right)\right] dV.$$

Іноді зручно потенціали і джерела поля виразити черех їх фур'є-зображення. Матимемо

$$\begin{aligned} W_1 &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{2}\varphi_{\mathbf{k}}\rho^*_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2c}(\mathbf{A}_{\mathbf{k}}, \mathbf{j}^*_{\mathbf{k}})\right], \\ W_2 &= \frac{1}{8\pi c}\int d\mathbf{k}\left[i(\mathbf{A}_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})\frac{\partial \varphi^*_{\mathbf{k}}}{\partial t} - i\varphi^*_{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial \mathbf{A}_{\mathbf{k}}}{\partial t}, \mathbf{k}\right)\right] + \\ &+ \frac{1}{8\pi c^2}\int d\mathbf{k}\left[\left|\frac{\partial \mathbf{A}_{\mathbf{k}}}{\partial t}\right|^2 - \left(\mathbf{A}^*_{\mathbf{k}}, \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}}}{\partial t^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Щоб знайти енерґію взаємодії, потрібно в $W_1 + W_2$ виключити члени самодії (вони розбіжні).

107. Енерґія взаємодії частинок не залежить від калібрування потенціалів поля. Тому для простоти розрахунків розглянемо випадок кулонівського калібрування, які описано формулами із задачі 101. Оскільки $\mathbf{A} \sim 1/c$, то доданком W_2 з попередньої задачі можна знехтувати. Отже,

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int\left(\rho\varphi + \frac{1}{c}(\mathbf{j}, \mathbf{A})\right)dV = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j\neq l}\frac{e_j e_l}{r_{jl}}\left\{1 + \frac{1}{2c^2}[(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_l) - (\mathbf{n}_{jl}, \mathbf{v}_j)(\mathbf{n}_{jl}, \mathbf{v}_l)]\right\}, \end{aligned}$$

де

$$\mathbf{r}_{jl} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l, \qquad \mathbf{n}_{jl} = \mathbf{r}_{jl}/r_{jl}.$$

Формулу можна записати у "$\mathbf{k}$-просторі", якщо використати результати задачі 105. Матимемо

$$W = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\sum_{j\neq l}\frac{2\pi e_j e_l}{k^2}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_{jl}}\left(1 + \frac{1}{c^2}\left[(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_l) - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{v}_j)(\mathbf{k}, \mathbf{v}_l)}{k^2}\right]\right).$$

108. Зручно використати загальну формулу для повної енерґії у "$\mathbf{k}$-просторі":

$$W = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2 + |\mathbf{B}_{\mathbf{k}}|^2}{8\pi}.$$

Підставивши значення $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ і $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}$ із задачі 104, отримаємо

$$\begin{aligned} W &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{2\pi}{k^2}\sum_{j\neq l}e_j e_l e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{jl}}\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left[(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_l) - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{v}_j)(\mathbf{k}, \mathbf{v}_l)}{k^2}\right]\times\right. \\ &\times \left.\left(1 + \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{v}_j)(\mathbf{k}, \mathbf{v}_l)}{k^2c^2}\right)\frac{1}{s_j s_l}\right\}, \qquad s_j = 1 - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{v}_j)^2}{k^2c^2}. \end{aligned}$$

При $c \to \infty$ звідси з точністю до $1/c^2$ включно отримуємо результати попередньої задачі. Легко переконатись, що в ультрарелятивістському випадку $\mathbf{v} = c\frac{\mathbf{p}}{p}$ ($\mathbf{p}$ — імпульс), енерґія W не буде залежати від c.

Теорія відносності

109. $u^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$.

110. $w^\mu = \left(\dfrac{\gamma^4}{c}(\mathbf{va}), \gamma^2\mathbf{a} + \dfrac{\gamma^2\mathbf{v}}{c^2}(\mathbf{va})\right)$.

111. $\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \dfrac{\mathbf{V}(\mathbf{r}'\mathbf{V})}{V^2} + \gamma\dfrac{\mathbf{V}(\mathbf{r}'\mathbf{V})}{V^2} + \gamma\mathbf{V}t', \quad t = \gamma\left(t' + \dfrac{(\mathbf{r}'\mathbf{V})}{c^2}\right)$.

112. $\mathbf{v} = \left[\mathbf{V} + \mathbf{v}'\sqrt{1-\beta^2} + \dfrac{\mathbf{V}(\mathbf{v}'\mathbf{V})}{V^2}\left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right)\right]\left(1 + \dfrac{(\mathbf{v}'\mathbf{V})}{c^2}\right)^{-1}$.

113. $\mathbf{a} = (1-\beta^2)\left(1 + \dfrac{(\mathbf{v}'\mathbf{V})}{c^2}\right)^{-2}\mathbf{a}' - \dfrac{(\mathbf{a}'\mathbf{V})\left(1-\beta^2\right)}{c^2}\left(1 + \dfrac{(\mathbf{v}'\mathbf{V})}{c^2}\right)^{-3} \times$

$$\times\left(\mathbf{v}' + \frac{c^2}{V^2}\left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right)\mathbf{V}\right).$$

114. $\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = \sqrt{\left(1 - \dfrac{v'^2}{c^2}\right)}\sqrt{\left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right)}\left(1 + \dfrac{(\mathbf{v}'\mathbf{V})}{c^2}\right)^{-1}$.

115. Враховуючи розв'язок задачі 113, запишемо для прискорення

$$a' = a\frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1 - vV/c^2)^3} = a_0.$$

Якщо врахувати, що швидкість системи відліку V збігається з миттєвою швидкістю ракети v, то час польоту

$$\Delta t = \frac{1}{a_0}\int_0^{v_1}\frac{dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{4}{3}\frac{c}{a_0}.$$

116. $\Delta t' = \Delta t\left(1 - \dfrac{(u-v)^2c^2}{(c^2-uv)^2}\right)^{-1/2}$, Δt — покази годинника у власній системі координат, $\Delta t'$ — покази годинника в системі координат K'.

117. $t = \dfrac{2l}{c}\gamma$.

118. $l = l_0 \dfrac{1 - v^2/c^2}{1 + v^2/c^2}.$

121. Закон перетворення для тензора другого ранґу виглядає так: $A^{\mu\nu} = \alpha^{\mu}_{\rho}\alpha^{\nu}_{\sigma}A'^{\rho\sigma}$. Для спрощення можна розглядати компоненти тензора як добутки компонент 4-векторів (зберігаючи порядок запису), $A^{\mu\nu} = B^{\mu}C^{\nu}$, і послідовно застосовувати перетворення Лоренца до B^{μ}, C^{ν}. Потрібно врахувати, що для симетричного тензора другого ранґу компоненти $A^{\nu\mu} = A^{\mu\nu}$. У результаті отримаємо:
$A^{00} = \gamma^2 A'^{00} + \beta\gamma^2(A'^{01} + A'^{10}) + \beta^2\gamma^2 A'^{11}$,
$A^{01} = \beta\gamma^2(A'^{00} + A'^{11}) + \gamma^2 A'^{01} + \beta^2\gamma^2 A'^{10}$, $A^{02} = \gamma A'^{02} + \beta\gamma A'^{12}$,
$A^{03} = \gamma A'^{03} + \beta\gamma A'^{13}$, $A^{11} = \beta\gamma^2(A'^{00} + A'^{11}) + \gamma^2 A'^{10} + \beta^2\gamma^2 A'^{01}$,
$A^{13} = \gamma A'^{13} + \beta\gamma A'^{03}$, $A^{23} = A'^{23}$, решта $A^{\nu\nu} = A'^{\nu\nu}$, $A^{\nu\mu} = A^{\mu\nu}$.

122. $A^{\nu\nu} = 0$, $A^{\nu\mu} = -A^{\mu\nu}$, $A^{01} = A'^{01}$, $A^{02} = \gamma A'^{02} + \beta\gamma A'^{12}$, $A^{03} = \gamma A'^{03} + \beta\gamma A'^{13}$, $A^{13} = \gamma A'^{13} + \beta\gamma A'^{03}$. Вказівка: закон перетворення має аналогічний вигляд, як у задачі 121, але потрібно врахувати, що $A^{\nu\mu} = -A^{\mu\nu}$.

123. $$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \beta B'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \beta B'_y}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$B_x = B'_x, \quad B_y = \frac{B'_y - \beta E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B_z = \frac{B'_z + \beta E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

124. $B^2 - E^2 = \text{inv}.$

125. $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = \text{inv}.$

126. $\mathbf{E}' = 0, \quad B' = B'_z = \sqrt{B^2 - E^2}.$

127. $\mathbf{B}' = 0, \quad E' = E'_z = \sqrt{E^2 - B^2}.$

128. $$E' = E\sqrt{\frac{1 - \beta^2\cos^2\alpha}{1-\beta^2}}, \quad B' = \frac{\beta E \sin\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

129. $$E' = \frac{\sqrt{E^2 + \beta^2 B^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B' = \frac{\sqrt{B^2 + \beta^2 E^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$\cos\alpha = \frac{EB\left(1-\beta^2\right)}{\sqrt{(E^2 + \beta^2 B^2)\,(B^2 + \beta^2 E^2)}}.$$

130. $$\mathbf{v} = [\mathbf{E}, \mathbf{B}]\frac{E^2 + B^2 - \sqrt{(E^2 - B^2)^2 + 4(\mathbf{E}, \mathbf{B})^2}}{2[\mathbf{E}, \mathbf{B}]^2}.$$

131. $\varphi = \dfrac{e}{\sqrt{(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}}, \qquad \mathbf{A} = \dfrac{\mathbf{v}}{c}\varphi.$

132. $\mathbf{E} = \dfrac{e(1-\beta^2)}{\left[(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)\right]^{3/2}} \left(x - vt,\, y\sqrt{1-\beta^2},\, z\sqrt{1-\beta^2}z\right),$

$\mathbf{B} = \left[\dfrac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{E}\right].$

133. $$\mathbf{E} = -\frac{\gamma\mathbf{d}}{\left[(x-vt)^2\gamma^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} + \frac{3\gamma(\mathbf{d},\mathbf{r})(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)}{\left[(x-vt)^2\gamma^2 + y^2 + z^2\right]^{5/2}} + \\ + \frac{3\gamma^3(\mathbf{d},\mathbf{v})(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)}{\left[(x-vt)^2\gamma^2 + y^2 + z^2\right]^{5/2}} \left(\frac{(\mathbf{r},\mathbf{v})}{c^2} - t\right).$$

134. Запишемо густину струму в системі K у вигляді $\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = e\delta(x-vt)\delta(y)\delta(z)$. Надалі достатньо обмежитися залежністю від x. Застосувавши до арґумента дельта-функції перетворення Лоренца і релятивістський закон додавання швидкостей, отримаємо:

$$c\rho = ce\delta(x-vt) = ce\delta\left(\frac{x' + v_0t'}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{v' + v_0}{1 + v'v_0/c^2}\,\frac{t' + v_0x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) =$$
$$= ce\delta\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+v'v_0/c^2}(x' - v't')\right) = e\frac{c + v'v_0/c}{\sqrt{1-\beta^2}}\delta(x'-v't') = \frac{c\rho' + \beta j'_x}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

де використано властивість дельта-функції (2.24) та враховано, що $\rho'v' = j'_x$. Аналогічно переконуємося, що

$$j_x = ev\delta(x-vt) = \frac{j'_x + \beta c\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

тобто величини $c\rho$ і j_x перетворюються як компоненти 4-вектора, що і треба було показати.

135. $\omega = \dfrac{1-\beta}{1+\beta}\omega_0.$

136. $\omega_2 = \omega_1\dfrac{(1-\beta\cos\alpha_1)(1-\beta\cos\alpha_2)}{1-\beta^2}, \quad \cos\alpha_2 = \dfrac{(1+\beta^2)\cos\alpha_1 - 2\beta}{1+\beta^2-2\beta\cos\alpha_1}.$

137. Радіус гвинтової лінії $r = \dfrac{mc^2v_0\sin\alpha}{eB\sqrt{c^2-v_0^2}}$, а крок $h = \dfrac{2\pi mc^2}{eB\sqrt{c^2-v_0^2}}v_0\cos\alpha$ (α — кут між $\mathbf{v}$ і $\mathbf{B}$).

138. Загальний розв'язок рівняння руху можна записати у вигляді:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{n}_E \frac{mc^2}{eE}\sqrt{1 + \left[e\mathbf{E}t + \mathbf{p}_0\right]^2/m^2c^2} +$$
$$+ (\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}_E\cos\alpha)\,\frac{cp_0}{eE}\ln\left|\frac{eEt}{mc} + \frac{p_0\cos\alpha}{mc} + \sqrt{1 + \frac{(e\mathbf{E}t + \mathbf{p}_0)^2}{m^2c^2}}\right|,$$

причому $\mathbf{n}_E = \mathbf{E}/E,\ \mathbf{n}_0 = \mathbf{p}_0/p_0,\ \cos\alpha = (\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_E)$, де $\mathbf{p}_0$ — початковий імпульс.

139. $\mathcal{E} = mc^2 + \dfrac{p^2}{2m} - \dfrac{1}{8}\dfrac{p^4}{m^3c^2}$.

140. Функція Лаґранжа системи взаємодіючих частинок визначається формулою

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)dV + \int\left(\frac{1}{c}(\mathbf{j}, \mathbf{A}) - \rho\varphi\right)dV + \mathcal{L}_0,$$

де $\mathcal{L}_0$ — лаґранжіан системи невзаємодіючих частинок. Враховуючи результати задачі 106 бачимо, що

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{c}(\mathbf{j}, \mathbf{A}) - \rho\varphi\right)dV + \frac{1}{8\pi c}\int\left[\left(\mathbf{A}, \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{E}\right)\right]dV.$$

Оскільки, другий доданок має вигляд повної похідної за часом, то його можна відкинути. Таким чином

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{c}\big(\mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\big) - \rho(\mathbf{r}, t)\varphi(\mathbf{r}, t)\right]dV,$$

або, якщо використати фур'є-зображення потенціалів і джерел

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{c}\big(\mathbf{j}^*_{\mathbf{k}}(t), \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)\big) - \rho^*_{\mathbf{k}}(t)\varphi_{\mathbf{k}}(t)\right] + \mathcal{L}_0 \equiv \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_0.$$

141. Провівши розрахунки, подібні до виконаних у задачі 107, знайдемо

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sum_{j\neq l}\frac{e_je_l}{r_{jl}}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}\left[(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_l) - (\mathbf{n}_{jl}, \mathbf{v}_j)(\mathbf{n}_{jl}, \mathbf{v}_l)\right]\right\} + \mathcal{L}_0,$$

де $\mathbf{n}_{jl} = \mathbf{r}_{jl}/r_{jl}$.

142. Зручно виходити із загального виразу для $\mathcal{L}_i$ (задача 140). Використавши значення $\varphi_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ (див. задачу 104) і симетризувавши вираз, знайдемо

$$\mathcal{L}_i = -\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{j\neq l} \frac{\pi e_j e_l}{k^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{jl}} \frac{1}{s_j s_l}(s_j + s_l)\left(1 - \frac{(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_l)}{c^2}\right),$$

де $s_j = 1 - \dfrac{(\mathbf{k}, \mathbf{v}_j)^2}{k^2 c^2}$.

Зробимо далі такі перетворення:

$$\begin{aligned}(\mathbf{k}, \mathbf{v}_j)^2 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{jl}} &= i(\mathbf{k}, \mathbf{v}_j)\left(\frac{d}{dt} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}\right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_l} = i(\mathbf{k}, \mathbf{v}_j)\frac{d}{dt}\left(e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_l}\right) - \\ &- i(\mathbf{k}, \mathbf{v}_j) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}\left(\frac{d}{dt} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_l}\right).\end{aligned}$$

Оскільки функція Лаґранжа — однозначна з точністю до доданків, які є повними похідними за часом, і враховуючи, що частинки рухаються зі сталою швидкістю $\frac{d\mathbf{r}_j}{dt} = \mathbf{v}_j = \text{const}$, попередній вираз запишеться

$$(\mathbf{k}, \mathbf{v}_j)^2 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{jl}} = -i(\mathbf{k}, \mathbf{v}_j) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}\left(\frac{d}{dt} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_l}\right) = (\mathbf{k}, \mathbf{v}_j)(\mathbf{k}, \mathbf{v}_l) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{jl}}.$$

У результаті маємо

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i &= -\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{j\neq l} \frac{2\pi e_j e_l}{k^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{jl}} \frac{1}{s_j s_l}\left(1 - \frac{(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_l)}{c^2}\right) \times \\ &\times \left(1 - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{v}_j)(\mathbf{k}, \mathbf{v}_l)}{k^2 c^2}\right).\end{aligned}$$

Виділивши доданок з кулонівською взаємодією, отримаємо

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i = &-\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{j\neq l} \frac{2\pi e_j e_l}{k^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{jl}} + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{j\neq l} \frac{2\pi e_j e_l}{k^2} \times \\ &\times e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{jl}} \frac{1}{c^2 s_j s_l}\left[(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_l) - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{v}_j)(\mathbf{k}, \mathbf{v}_l)}{k^2}\right]\left[1 - \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{v}_j)(\mathbf{k}, \mathbf{v}_l)}{k^2 c^2}\right].\end{aligned}$$

Якщо в кожному з цих виразів обмежитись врахуванням лише членів, пропорційних до $1/c^2$, то отримаємо результат задачі 141.

143. Енерґія розсіяної частинки визначається рівнянням:

$$W(W_0 + Mc^2) - W_0 Mc^2 - m^2c^4 = \sqrt{W_0^2 - m^2c^4}\sqrt{W^2 - m^2c^4}\cos\theta.$$

Електродинаміка середовища

144. $\mathbf{E}^{\text{int}} = \dfrac{3}{\varepsilon+2}\mathbf{E}_0, \quad \mathbf{E}^{\text{ext}} = \mathbf{E}_0 + \dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\left(-\dfrac{a^3}{r^3}\mathbf{E}_0 + 3a^3\dfrac{(\mathbf{E}_0,\mathbf{r})}{r^5}\mathbf{r}\right).$

145. $\mathbf{E}^{\text{int}} = 0, \quad \mathbf{E}^{\text{ext}} = \left(1-\dfrac{a^3}{r^3}\right)\mathbf{E}_0 + 3a^3\dfrac{(\mathbf{E}_0,\mathbf{r})}{r^5}\mathbf{r}.$

146. $E_{r1} = \dfrac{1}{\varepsilon_1}\dfrac{2\varkappa}{r}$, $P_{r1} = \dfrac{\varepsilon_1-1}{4\pi\varepsilon_1}\dfrac{2\varkappa}{r}$, $E_{r2} = \dfrac{1}{\varepsilon_2}\dfrac{2\varkappa}{r}$, $P_{r2} = \dfrac{\varepsilon_2-1}{4\pi\varepsilon_2}\dfrac{2\varkappa}{r}$,
де r — радіальна циліндрична координата.

147. $\mathbf{E}^{\text{int}} = 0, \quad \mathbf{P}^{\text{int}} = 0, \quad E_r^{\text{ext}} = \dfrac{1}{\varepsilon(r)}\dfrac{4\pi R\sigma}{r}, \quad P_r^{\text{ext}} = \dfrac{\varepsilon(r)-1}{\varepsilon(r)}\dfrac{R\sigma}{r},$
де r — радіальна циліндрична координата.

148. $\mathbf{D}_1 = \dfrac{q}{a^3}\mathbf{r}, \quad \mathbf{E}_1 = \dfrac{1}{\varepsilon_1}\dfrac{q}{a^3}\mathbf{r}, \quad \mathbf{D}_2 = \dfrac{q}{r^3}\mathbf{r}, \quad \mathbf{E}_2 = \dfrac{1}{\varepsilon_2}\dfrac{q}{r^3}\mathbf{r},$
$\sigma' = \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2} - \dfrac{1}{\varepsilon_1}\right)\dfrac{q}{a^2}, \quad \rho' = -\dfrac{3q}{4\pi a^3}\dfrac{\varepsilon_1-1}{\varepsilon_1}.$

149. $E = \dfrac{2\pi\sigma}{\varepsilon}$. Поле перпендикулярне до площини і напрямлене по обидва боки від неї.

150. $\varphi_1 = \varphi_2 = \dfrac{2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{q}{r}, \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \dfrac{2q}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3},$
$\mathbf{D}_1 = \dfrac{2q\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{D}_2 = \dfrac{2q\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}.$

151. $C = \dfrac{\varepsilon_1 S}{4\pi a\ln 2}, \quad \sigma'\Big|_{x=0} = -\dfrac{q}{S}\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_1}\right), \sigma'\Big|_{x=a} = \dfrac{q}{S}\left(1-\dfrac{1}{2\varepsilon_1}\right),$
$\rho' = -\dfrac{qa}{\varepsilon_1 S(x+a)^2}$, де q — заряд обкладки з координатою $x = 0$.

152. $C = \dfrac{\varepsilon ab}{b + a(\varepsilon-1)}$. Вказівка: для розрахунку ємності потрібно уявно зарядити кулю та знайти її потенціалів відносно $r = \infty$.

153. $\varphi^{\text{int}} = \dfrac{2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{q}{R}, \quad \varphi^{\text{ext}} = \dfrac{2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{q}{r},$
$\sigma_{01} = \dfrac{q\varepsilon_1}{2\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}, \quad \sigma_1' = -\dfrac{q(\varepsilon_1-1)}{2\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)},$
$\sigma_{02} = \dfrac{q\varepsilon_2}{2\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}, \quad \sigma_2' = -\dfrac{q(\varepsilon_2-1)}{2\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}.$

154. $\mathbf{E}^{\text{int}} = 0, \quad \mathbf{E}^{\text{ext}} = \dfrac{1}{\varepsilon(r)} \dfrac{q}{r^3} \mathbf{r}, \quad \sigma' = -\dfrac{q}{4\pi a^2} \left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon(a)} \right).$

155. $C = \left[\dfrac{1}{\varepsilon_1} \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{c} \right) + \dfrac{1}{\varepsilon_2} \left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b} \right) \right]^{-1}, \quad \sigma'_a = -\dfrac{q}{4\pi a^2} \dfrac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1},$
$\sigma'_b = \dfrac{q}{4\pi b^2} \dfrac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2}, \quad \sigma'_c = \dfrac{q}{4\pi c^2} \left(\dfrac{1}{\varepsilon_2} - \dfrac{1}{\varepsilon_1} \right),$ де q — заряд внутрішньої обкладки.

156. $C = \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} \right)^{-1}.$ **157.** $C = l \left[\dfrac{2}{\varepsilon_1} \ln \dfrac{c}{a} + \dfrac{2}{\varepsilon_2} \ln \dfrac{b}{c} \right]^{-1}.$

158. $\mathbf{E} = \dfrac{q}{\varepsilon r^3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{P} = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi} \dfrac{q}{\varepsilon r^3} \mathbf{r}, \quad q_1 = -\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q, \quad q_2 = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q.$

159. $C = \dfrac{S}{4\pi} \left(\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2} \right)^{-1}.$

160. $C = \varepsilon_1 \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \gamma \ln \dfrac{(1 + \gamma b)a}{(1 + \gamma a)b} \right)^{-1}.$

161. $C = \dfrac{l\varepsilon_1}{2} \ln^{-1} \dfrac{(1 + \gamma a)b}{(1 + \gamma b)a}.$

162. $B_{\phi 1} = \mu_1 \dfrac{2I}{cr}, \quad M_{\phi 1} = \dfrac{\mu_1 - 1}{4\pi} \dfrac{2I}{cr}, \quad B_{\phi 2} = \mu_2 \dfrac{2I}{cr}, \quad M_{\phi 2} = \dfrac{\mu_2 - 1}{4\pi} \dfrac{2I}{cr},$
де r — радіальна циліндрична координата.

163. $\mathbf{B}^{\text{int}} = 0, \quad \mathbf{M}^{\text{int}} = 0, \quad B_\phi^{\text{ext}} = \mu(r) \dfrac{4\pi R j}{cr}, \quad M_\phi^{\text{ext}} = \Big(\mu(r) - 1 \Big) \dfrac{Rj}{cr},$
де r — радіальна циліндрична координата.

164. $\mathbf{B}^{\text{int}} = \dfrac{3\mu}{\mu + 2} \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{B}^{\text{ext}} = \mathbf{B}_0 + \dfrac{\mu - 1}{\mu + 2} \left(-\dfrac{a^3}{r^3} \mathbf{B}_0 + 3a^3 \dfrac{(\mathbf{B}_0, \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} \right).$

165. $B = \mu \dfrac{2\pi j}{c}.$

166. $A_{z1} = A_{z2} = \dfrac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \dfrac{4I}{c} \ln \dfrac{1}{r}, \quad B_{\phi 1} = B_{\phi 2} = \dfrac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \dfrac{4I}{cr},$
$H_{\phi 1} = \dfrac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \dfrac{4I}{cr}, \quad H_{\phi 2} = \dfrac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \dfrac{4I}{cr},$
де r — радіальна циліндрична координата.

167. $\mathbf{M} = \dfrac{[\mathbf{P}, \mathbf{v}]}{c}.$

168. $I = 4\pi\sigma \dfrac{U r_1 r_2}{r_2 - r_1}, \quad R = \dfrac{1}{4\pi\sigma}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right).$

169. $I = 2\pi\sigma U \ln^{-1}\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right), \quad R = \dfrac{1}{2\pi\sigma}\ln\dfrac{r_2}{r_1}.$

170. $I = 2\pi U\left[\dfrac{1}{\sigma_1}\ln\dfrac{r_0}{r_1} + \dfrac{1}{\sigma_2}\ln\dfrac{r_2}{r_0}\right]^{-1}, \quad R = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{1}{\sigma_1}\ln\dfrac{r_0}{r_1} + \dfrac{1}{\sigma_2}\ln\dfrac{r_2}{r_0}\right).$

171. $I = 4\pi U\left[\dfrac{1}{\sigma_1}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_0}\right) + \dfrac{1}{\sigma_2}\left(\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{r_2}\right)\right]^{-1},$

$R = \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{\sigma_1}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_0}\right) + \dfrac{1}{\sigma_2}\left(\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{r_2}\right)\right).$

172. Коефіцієнт взаємоіндукції визначається формулою:

$$L_{12} = \oint\limits_{L_1}\oint\limits_{L_2} \frac{(d\boldsymbol{\ell}_1, d\boldsymbol{\ell}_2)}{r_{12}},$$

де $d\boldsymbol{\ell}_1$, $d\boldsymbol{\ell}_2$ — елементи першого та другого контурів відповідно, а r_{12} — відстань між ними. Систему координат виберемо в центрі одного з контурів (див. рис. 10.8).

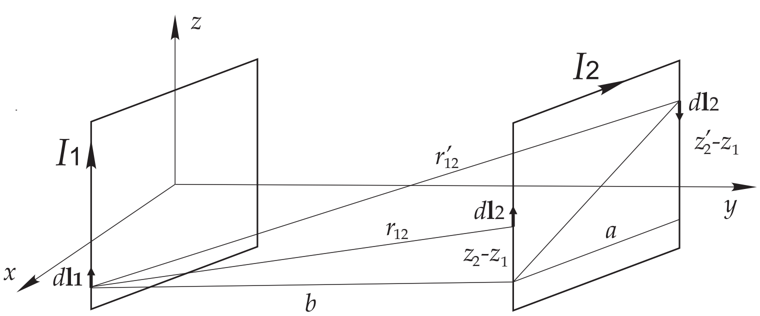


Рис. 10.8.

Кожен із контурів складається з чотирьох ділянок. Виберемо обхід контурів за годинниковою стрілкою. У такому випадку скалярний добуток елементів контурів $(d\boldsymbol{\ell}_1, d\boldsymbol{\ell}_2) = 0$ для перпендикулярних сторін. Отже, внесок в інтеґрал будуть давати лише ті сторони контурів, які лежать в одній площині. У результаті можемо записати:

$$L_{12} = 4\left[\int\limits_{-a/2}^{a/2}\int\limits_{-a/2}^{a/2} \frac{dz_1 dz_2}{\sqrt{b^2 + (z_2 - z_1)^2}} - \int\limits_{-a/2}^{a/2}\int\limits_{-a/2}^{a/2} \frac{dz_1 dz_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + (z_2 - z_1)^2}}\right].$$

Після інтеґрування отримаємо:

$$L_{12} = 8\left(a \ln \frac{a^2 + b^2 + a\sqrt{a^2 + b^2}}{b\left(\sqrt{2a^2 + b^2} + a\right)} + \sqrt{2a^2 + b^2} - 2\sqrt{a^2 + b^2} + b\right).$$

173. Помістимо систему координат у центр одного з контурів та перейдемо до полярної системи координат (див. рис.10.9).

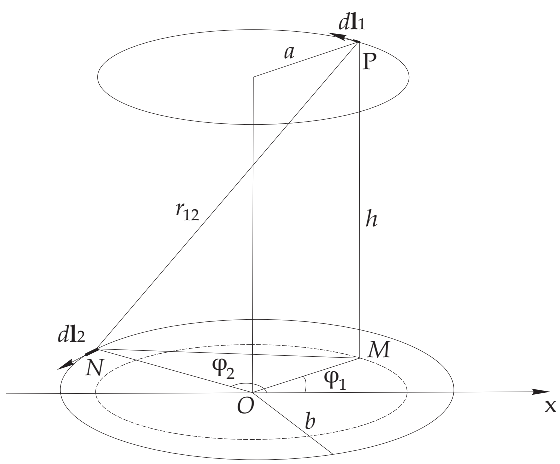


Рис. 10.9.

Кут φ_1 задає положення елемента $d\boldsymbol{\ell}_1$, а кут φ_2 — $d\boldsymbol{\ell}_2$. Із трикутника MNP відстань між елементами контурів $d\boldsymbol{\ell}_1$ і $d\boldsymbol{\ell}_2$ дорівнює $r_{12} = h^2 + y^2$. Тут $y = MN$. Величину y знайдемо з трикутника OMN за теоремою косинусів: $y^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$. З трикутника OMN можна легко розписати скалярний добуток векторів: $(d\boldsymbol{\ell}_1, d\boldsymbol{\ell}_2) = d\ell_1 d\ell_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$. Виразимо елементи контурів через відповідні кути $d\ell_1 = a\, d\varphi_1$, $d\ell_2 = b\, d\varphi_2$. Зібравши все разом, отримаємо:

$$L_{12} = ab \oint_0^{2\pi} d\varphi_1 \oint_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) d\varphi_2}{\sqrt{h^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}}. \qquad (10.13)$$

Далі робимо заміну змінних $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ та, проінтеґрувавши, знайдемо індуктивність:

$$L_{12} = 4\pi\sqrt{(a+b)^2 + h^2}\left[\left(1 - \frac{2ab}{(a+b)^2 + h^2}\right) K - E\right],$$

де K та E — еліптичні інтеґрали Лежандра (див. задачу 60).

174. Виберемо систему координат так як показано на рисунку 10.10. Коефіцієнт взаємоіндукції можна знайти через потік вектора індукції магнітного поля

$$L_{12} = \frac{c\Phi_{12}}{I_1}.$$

Далі розрахуємо потік Φ_{12}:

$$\Phi_{12} = \int (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = \int B\, dS.$$

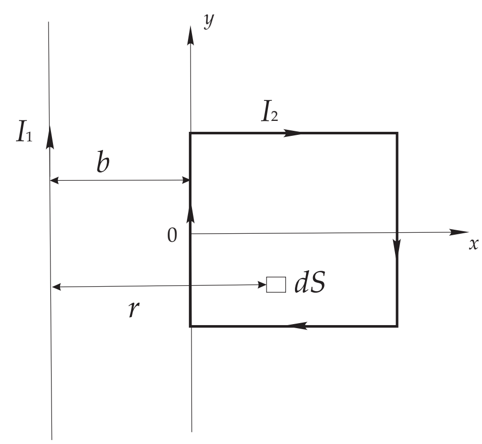


Рис. 10.10.

Магнітна індукція, яку створює безмежно довгий провідник на відстані r, дорівнює $B = 2I_1/cr$. Отже,

$$L_{12} = \frac{c}{I_1}\int B\, dS = 2\int\limits_0^a dx \int\limits_{-a/2}^{a/2} \frac{dy}{x+b} = 2a \ln\frac{b+a}{b}.$$

175. $L_{12} = 2\left(a + \frac{2b}{\sqrt{3}}\right)\ln\left(1 + \frac{a\sqrt{3}}{2b}\right) - 2a.$

Вказівка: спосіб розв'язку аналогічний до задачі 174.

176. $L_{12} = 4\pi\mu N\left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right).$

Вказівка: для знаходження магнітного потоку скористатись розв'язком задачі 53.

177. Енерґія магнітного поля пов'язана із індуктивністю котушки наступним виразом:

$$W = \frac{LI^2}{2c^2} = \frac{\mu}{8\pi}\int H^2 dV.$$

Напруженість магнітного поля безмежно довгої котушки знайдемо аналогічно до задачі 55, з використанням теореми Стокса для середовища: $H = \dfrac{4\pi I}{c}n$. Далі розрахуємо інтеґрал та знайдемо самоіндукцію одиниці довжини котушки: $L = 4\pi\mu a^2 n^2$.

178. Провівши аналогічні розрахунки до задачі 53, знайдемо напруженість магнітного поля котушки: $H = \dfrac{2IN}{cR}$. Енерґія магнітного поля

$$W = \frac{\mu}{8\pi}\int H^2 dV = \frac{\mu}{8\pi}\frac{4I^2N^2}{c^2}\int\frac{dV}{R^2} = \frac{LI^2}{2c^2}.$$

Після розрахунку інтеґрала (див. 53) отримаємо:

$$L = 4\pi\mu N^2\left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right).$$

Квазістаціонарні явища

179. Нехай елемент контура $d\mathbf{l}$ рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$. Зміна магнітного потоку за час dt, спричинена рухом контура, буде

$$\delta\Phi = -dt\oint_L (\mathbf{B}, [d\mathbf{l}, \mathbf{v}]).$$

Звідси повна швидкість зміни магнітного потоку

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \oint_L ([\mathbf{v}, \mathbf{B}], d\mathbf{l}).$$

Закон Фарадея про електромагнітну індукцію набуде вигляду

$$\oint_L (\mathbf{E}', d\mathbf{l}) = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \qquad \text{де} \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Цей вираз відповідає ефективній (діючій) напруженості електричного поля в рухомому контурі. За його допомогою записується істинна е. р. с.

$$\mathscr{E} = \oint_L (\mathbf{E}', d\mathbf{l}),$$

зважаючи на те, що на заряди в провіднику діє повна сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]\right) = e\mathbf{E}'.$$

180. У малому об'ємі радіуса l_0 електричне поле можна вважати сталим. Спрямуємо вісь z уздовж вектора $\mathbf{E}$ і перепишемо інтеґрал у сферичних координатах:

$$\begin{aligned} j_{0z} &= \frac{3\sigma}{4\pi l_0}\int \frac{z(\mathbf{R}, \mathbf{E}(\mathbf{r}'))}{R^4}\, e^{-R/l_0}\, dV' = \\ &= \frac{3\sigma}{4\pi l_0}\, 2\pi E \int\limits_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int\limits_0^{\infty} dR\, R^2\, \frac{R\cos\theta R\cos\theta}{R^2} e^{-R/l_0} = \sigma E, \end{aligned}$$

інші проекції дорівнюють нулеві. Звідси маємо $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}) = \sigma\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

181. Всередині провідника електричне поле задовольняє рівняння

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},$$

яке в циліндричній системі координат з віссю z уздовж осі провідника має вигляд

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right) + k^2 E_z = 0, \qquad k = \frac{1+i}{\delta},$$

де $\delta = c/\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}$ — так звана глибина проникнення. Розв'язок, скінченний у точці $r = 0$, записують через функцію Бесселя $J_0(kr)$:

$$E_z(r,t) = \mathrm{const}\, J_0(kr) e^{-i\omega t}.$$

Розподіл густини струму отримуємо з $\mathbf{j}_0 = \sigma\mathbf{E}$.

Магнітне поле можна знайти за допомогою рівняння

$$\frac{i\omega}{c}H_\varphi = (\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_\varphi = -\frac{\partial E_z}{\partial r},$$

що дає

$$H = H_\varphi = -i\,\mathrm{const}\sqrt{\frac{4\pi\sigma i}{\omega}}\, J_1(kr) e^{-i\omega t},$$

де стала — та ж сама, яка фіґурує у виразі для електричного поля. Її можна визначити з умови, що на поверхні провідника $H = 2I/ca$, де a — його радіус, а I — повний струм у провіднику.

Границю великих частот ($a/\delta \gg 1$) нескладно знайти, скориставшись асимптотичною формулою для функцій Бесселя

$$J_0\left(x\sqrt{2i}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{(1-i)x},$$

звідки матимемо:

$$E_z = \text{const} \cdot \exp\left\{-\frac{a-r}{\delta} + i\left(\frac{a-r}{\delta} - \omega t\right)\right\}.$$

182. Переріз провідника зображено на рис. 10.11. З рівнянь Максвелла у квазістатичному наближенні можна отримати таке співвідношення для векторного потенціалу:

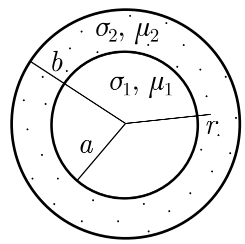


Рис. 10.11.

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Беручи до уваги часову залежність струму, для похідної за часом маємо $\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = i\omega \mathbf{A}$.

Рівняння для векторного потенціалу $\mathbf{A} = \mathbf{e}_z A(r)$ запишемо в циліндричній системі координат:

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} = k^2 A, \qquad \text{де} \quad k^2 = \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} i.$$

Це рівняння – типу рівняння Бесселя. Взагалі кажучи, його розв'язки записують через так звані функції Кельвіна $\mathrm{ber}(r)$, $\mathrm{ker}(r)$, однак для спрощення записуватимемо їх через більш відомі функції $I_0(r)$, $K_0(r)$. Враховуючи асимптотики цих функцій, в різних областях матимемо:

$$A(r) = C_1 \frac{I_0(k_1 r)}{I_0(k_1 a)}, \qquad \text{якщо} \quad r < a,$$
$$A(r) = C_2 \frac{I_0(k_2 r)}{I_0(k_2 a)} + C_3 \frac{K_0(k_2 r)}{I_0(k_2 a)}, \qquad \text{якщо} \quad a < r < b,$$

причому $k_m^2 = \dfrac{4\pi\sigma_m\mu_m\omega}{c^2} i,\ m = 1, 2.$

Магнітне та електричне поля дорівнюють відповідно:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}(\mathbf{e}_z A) = -\mathbf{e}_\phi \frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial r} = \mathbf{e}_\phi H(r),$$
$$\mathbf{E} = -i\omega \mathbf{A}.$$

Із граничних умов

$$2\pi b H(b) = \mathcal{I}_0, \qquad E(a-0) = E(a+0), \qquad H(a-0) = H(a+0)$$

матимемо рівняння на константи

$$C_1 = C_2 + C_3, \qquad -\frac{\mu_2 \mathcal{I}_0}{2\pi k_2 b} = C_2 \frac{I_1(k_2 a)}{I_0(k_2 a)} - C_3 \frac{K_1(k_2 a)}{K_0(k_2 a)},$$
$$C_1 \frac{I_1(k_1 a)}{I_0(k_1 a)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{k_2}{k_1} \left[C_2 \frac{I_1(k_2 a)}{I_0(k_2 a)} - C_3 \frac{K_1(k_2 a)}{K_0(k_2 a)} \right],$$

де враховано, що $I_0'(r) = I_1(r)$, $K_0'(r) = -K_1(r)$.

За межами провідника магнітне поле буде

$$H(r) = \frac{\mathcal{I}_0}{2\pi r}, \qquad r \geqslant b.$$

Всередині отримаємо струми $\mathcal{I}_1$ для $r < a$ та $\mathcal{I}_2$ для $a < r < b$:

$$\mathcal{I}_1 = 2\pi a H(a) = -2\pi a C_1 \frac{k_1}{\mu_1} \frac{I_1(k_1 a)}{I_0(k_1 a}, \qquad \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_0 - \mathcal{I}_1.$$

183. Перепишемо рівняння (9.8) для поля $\mathbf{H}$ в циліндричних координатах. Обертальний рух означає, що швидкість має лише ϕ-складову, $v_\phi = v$, яка не залежить від ϕ, тоді можна показати, що r- і z-компоненти рівняння будуть такими:

$$\frac{\partial H_r}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) H_r, \qquad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta H_z.$$

Домножуючи останнє рівняння на H_z та інтеґруючи за об'ємом, взявши додатково у правій стороні інтеґрал частинами, отримаємо:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V H_z^2 \, dV = -\frac{c^2}{4\pi\sigma} \int\limits_V (\operatorname{grad} H_z)^2 \, dV < 0.$$

Отже, $\dfrac{\partial |H_z|}{\partial t} < 0$ і на підставі подібних міркувань $\dfrac{\partial H_r}{\partial t} < 0$. Це означає, що при $t \to \infty$ величини $|H_r|, |H_z| \to 0$, а отже $[\mathbf{v}, \mathbf{H}] = \mathbf{e}_r v H_z - \mathbf{e}_z v H_r \to 0$. Тому рівняння для поля стає

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}.$$

Після скалярного домноження на $\mathbf{H}$ та інтеґрування за об'ємом (як вище) матимемо:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V H^2\,dV = -\frac{c^2}{4\pi\sigma}\int\limits_V (\operatorname{rot}\mathbf{H})^2\,dV < 0,$$

тобто з часом величина поля $H \to 0$, що й треба було показати.

184. В ідеально провідній рідині $\sigma = \infty$, а густина вільних зарядів $\rho = 0$. Розглядатимемо малі збурення магнітного поля $\mathbf{h}$ на тлі зовнішнього поля $\mathbf{H}_0$, густини τ' на тлі τ_0, а також тиску p' щодо рівноважного p_0, тобто $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$, $\tau = \tau_0 + \tau'$, $p = p_0 + p'$. Оскільки у стані рівноваги рідина нерухома, то швидкість її руху $\mathbf{v}$ також можна вважати малою. Струм $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{H}$, збурення тиску й густини пов'язані через швидкість звуку: $p' = s^2\tau'$. Система рівнянь (9.7)–(9.10) з точністю до першого порядку за малими величинами набуде вигляду:

$$\operatorname{div}\mathbf{h} = 0, \qquad \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v},\mathbf{h}], \qquad \frac{\partial\tau'}{\partial t} + \tau_0\operatorname{div}\mathbf{v} = 0,$$
$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{s^2}{\tau_0}\boldsymbol{\nabla}\rho' - \frac{1}{4\pi\tau_0}[\mathbf{H}_0,\operatorname{rot}\mathbf{h}].$$

Розв'язки цієї системи шукатимемо як плоскі хвилі $\sim e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$, де фазова швидкість $u = \omega/k$. Система рівнянь перейде в алґебраїчну:

$$(\mathbf{k},\mathbf{h}) = 0, \qquad -\omega\mathbf{h} = [\mathbf{k},[\mathbf{v},\mathbf{h}]], \qquad -\omega\tau' + \tau_0(\mathbf{k},\mathbf{v}) = 0,$$
$$-\omega\mathbf{v} = -\frac{s^2}{\tau_0}\rho'\mathbf{k} - \frac{1}{4\pi\tau_0}[\mathbf{H}_0,[\mathbf{k},\mathbf{h}]].$$

Перше рівняння дає $\mathbf{k} \perp \mathbf{h}$. Виберемо напрямок $\mathbf{k}$ за вісь x, а площину векторів $\mathbf{k}$ та $\mathbf{H}_0$ — за площину xy. Після виключення τ' рівняння покомпонентно запишуться так:

$$uh_z = -v_z H_x, \qquad uv_z = -\frac{H_x}{4\pi\tau_0}h_z,$$
$$uh_y = v_x H_y - v_y H_x, \qquad uv_y = -\frac{H_x}{4\pi\tau_0}h_y, \qquad (u^2 - s^2)v_x = \frac{H_y}{4\pi\tau_0}h_y,$$

де $H_x = H_0\cos\theta$, $H_y = H_0\sin\theta$.

Умова сумісності перших двох рівнянь дає перший очікуваний результат $u_1^2 = (v_\mathrm{A}\cos\theta)^2$, а з інших трьох матимемо вирази для $u_{2,3}$.

185. В нестисливій ідеально провідній рідині $\sigma = \infty$, густина $\tau_0 = \mathrm{const}$, заряд $\rho = 0$, струм $\mathbf{j}_0 = \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}$. Система рівнянь (9.7)–(9.10) набуде вигляду:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}], \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{\tau_0}\boldsymbol{\nabla}(p + \tau_0\psi) - \frac{1}{4\pi\tau_0}[\mathbf{H}, \mathrm{rot}\,\mathbf{H}],$$

де в останньому рівнянні враховано ґравітаційне поле. Повне магнітне поле $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1$. Після елементарних перетворень матимемо:

$$\mathrm{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] = (\mathbf{H}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} - (\mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{H}_1,$$
$$[\mathbf{H}, \mathrm{rot}\,\mathbf{H}] = \boldsymbol{\nabla}\frac{H^2}{2} - (\mathbf{H}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{H}_1.$$

Переписуючи рівняння з похідними за часом у вигляді

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{H}_1 \quad &= \quad (\mathbf{H}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}, \\
\frac{\partial (\tau_0 \mathbf{v})}{\partial t} + (\mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla})\tau_0\mathbf{v} \quad &= \quad \frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} - \boldsymbol{\nabla}\left(p + \tau_0\psi + \frac{H^2}{8\pi}\right),
\end{aligned}$$

і зауваживши, що з міркувань розмірності $\mathbf{H} \sim \sqrt{\tau_0}\,\mathbf{v}$ з точністю до числового коефіцієнта, можемо дійти висновку про справедливість рівнянь з умови задачі.

Література

[1] *Алексеев А. И.* Сборник задач по классической электродинамике / А. И. Алексеев. — Москва : Наука, 1977. — 319 с.

[2] *Батыгин В. В.* Сборник задач по электродинамике / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. — 2-е изд. перераб. — Москва : Наука, 1970. — 504 с.

[3] *Векштейн Е. Г.* Сборник задач по электродинамике / Е. Г. Векштейн. — Москва : Высшая школа, 1966. — 288 с.

[4] *Гречко Л. Г.* Сборник задач по теоретической физике / Л. Г. Гречко, В. И. Сугаков,О. Ф. Томасевич, А. М. Федорченко. — Москва : Высшая школа, 1972. — 336 с.

[5] *Джексон Дж.* Классическая электродинамика / Дж. Джексон. — Москва : Мир, 1965. — 703 с.

[6] *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика : учеб. пособие : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Т. II : Теория поля. — 7-е изд., испр. — Москва : Наука, 1988. — 512 с.

[7] *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика : учеб. пособие : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Т. VIII : Электродинамика сплошных сред. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Наука, 1982. — 621 с.

[8] *Меледин Г. В.* Электродинамика в задачах. Ч. I: Электродинамика частиц и полей : учеб. пособие / Г. В. Меледин, В. С. Черкасский. — Новосибирск : НГУ, 2003. — 221 с.

[9] *Мигаль В. М.* Випромінювання електромагнітних хвиль: Методичні вказівки до розв'язування задач з вибраних розділів електродинаміки для студентів III курсу фізичного факультету / В. М. Мигаль. — Львів : ЛДУ, 1999. — 32 с.

[10] *Обуховський В. В.* Збірник задач для контрольних робіт з електродинаміки / В. В. Обуховський. — Київ : Вид-во Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка, 2003. — 153 с.

[11] Справочник по специальным функциям / Под ред. *М. Абрамовица и И. Стиган.* — Москва : Наука, 1979.— 832 с.

[12] *Терлецкий Я. П.* Электродинамика: Учеб. пособие для студентов физ. спец. университетов / Я. П. Терлецкий, Ю. П. Рыбаков . — 2-е изд., перераб. — Москва : Высшая школа, 1990. — 352 с.

[13] MathWorld: the web most extensive mathematics resource. — Available from: `http://mathworld.wolfram.com`.

[14] *Moon P.* Field Theory Handbook : Including Coordinate Systems, Differential Equations and Their Solutions / P. Moon, D. E. Spencer. — Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1971. — VI, 236 p.

[15] *Mrozynski G.* Electromagnetic Field Theory : A Collection of Problems / G. Mrozynski, M. Stallein. — Wiesbaden : Springer Vieweg, 2013. — xii, 272 p.

[16] *Zangwill A.* Modern Electrodynamics / A. Zangwill. — Cambridge University Press, 2012. — 977 p.

Зміст

Навчальне видання

Блажиєвська Мар'яна Владиславівна,
Григорчак Орест Іванович,
Криницький Юрій Степанович,
Мигаль Василь Михайлович,
Пастухов Володимир Степанович,
Притула Роман Олександрович,
Ровенчак Андрій Адамович,
Самар Микола Іванович

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

Текст надруковано в авторській редакції

Формат 60×90 $^1\!/_{16}$
Умовн. друк. арк. 7.0
Зам. . Наклад 150 прим.

Видавець і виготовлювач:

Львівський національний університет імені Івана Франка.
вул. Університетська 1, м. Львів, 79000

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців виготівників та розповсюджувачів
видавничої продукції
Серія ДК №3059 від 13.12.2007 р.