

1. Елементи векторного числення

Дотримуватимемось у тексті збірника таких домовленостей. Вектори позначатимемо жирними літерами: \mathbf{a} , \mathbf{k} , \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{\Sigma}$ тощо, а компоненти векторів — відповідно нижніми індексами або номерами, наприклад: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$. Для радіус-вектора в декартовій системі координат використовуватимемо спеціальне позначення:

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \equiv x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k},$$

причому модуль вектора $|\mathbf{r}| \equiv r$, модуль $|\mathbf{E}| \equiv E$ тощо.

Для скалярного добутку двох векторів вживатимемо паралельно такі записи, залежно від громіздкості формул:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

а для векторного добутку: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Диференціальний оператор “набла” є вектором з такими компонентами в декартовій системі координат:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

За його допомогою визначають різні диференціальні операції першого порядку. Дію оператора “набла” на скалярну функцію називають *ґradientом*, отримуючи в результаті вектор:

$$\text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Диверґенцію визначають як дію вектора “набла” на векторну функцію, отримуючи скаляр:

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv (\nabla, \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Ротор беруть від векторної функції, отримуючи вектор:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &\equiv [\nabla, \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Оператор Лапласа визначають як скалярний добуток вектора “набла” самого на себе:

$$\Delta \equiv (\nabla, \nabla) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.2)$$

За допомогою градієнта, дивергенції і ротора можна утворити такі операції другого порядку:

$$\text{grad div } \mathbf{A} = \nabla(\nabla, \mathbf{A}), \quad (1.3)$$

$$\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi, \quad (1.4)$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0, \quad (1.5)$$

$$\text{rot grad } \varphi = 0, \quad (1.6)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}. \quad (1.7)$$

Щоб отримати останню рівність, потрібно розписати подвійний векторний добуток за формулою “ $bac - cab$ ”:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (1.8)$$

Для прикладу наведемо деякі результати дії диференціальних операцій першого порядку, що є своєрідною “табличкою множення”. За їх допомогою надалі проведитимемо спрощення виразів:

$$\text{grad } r = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

$$(\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{a},$$

$$\text{div } \mathbf{r} = 3,$$

$$\text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}) = \mathbf{a},$$

$$\text{grad } f(u) = \frac{df(u)}{du} \text{grad } u,$$

$$\text{rot } \mathbf{r} = 0.$$

Зокрема, часто виникає потреба розрахувати градієнт від функції, що залежить лише від модуля радіус-вектора:

$$\text{grad } f(r) = \frac{df(r)}{dr} \text{grad } r = \frac{df(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.9)$$

Векторний добуток можна переписати з використанням *символа Леві-Чівіті* ε_{ijk} :

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \quad (1.10)$$

де використано домовленість про “правило сум”: за всіма індексами, які повторюються, відбувається підсумовування. При цьому орти

$$\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{k}. \quad (1.11)$$

Символ ε_{ijk} є повністю антисиметричним тензором третього рангу:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{якщо } (i, j, k) = (1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1), \\ -1, & \text{якщо } (i, j, k) = (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3), \\ 0 & \text{в усіх інших випадках } (i = j, j = k \text{ або } k = i). \end{cases} \quad (1.12)$$

Добуток символів Леві-Чівіті виражається таким визначником:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}. \quad (1.13)$$

Тут *символ Кронекера*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases} \quad (1.14)$$

Перетворювати об’ємні, поверхневі й контурні інтеграли один в одного можна за допомогою таких двох інтегральних теорем. **Теорема Гаусса:**

$$\int_V \text{div } \mathbf{A} \, dV = \oint_S (\mathbf{A}, d\mathbf{S}), \quad (1.15)$$

де S — замкнута поверхня, яка обмежує об'єм V , елемент поверхні $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, причому \mathbf{n} — одиничний вектор зовнішньої нормалі до S .

Теорема Стокса:

$$\oint_L (\mathbf{A}, d\mathbf{l}) = \int_S (\text{rot } \mathbf{A}, d\mathbf{S}), \quad (1.16)$$

тут S — довільна поверхня, яка спирається на замкнутий контур L , елемент довжини $d\mathbf{l}$ дотичний до контура L .

Інтегрування та диференціювання за просторовими змінними можна виконувати як у декартових координатах x, y, z , так і в деяких інших, зокрема сферичних і циліндричних.

Сферичні координати r, θ, ϕ :

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Кут θ відраховується від осі Oz і змінюється в межах $[0; \pi]$. Кут ϕ відраховується від осі Ox у площині xOy і змінюється в межах $[0; 2\pi)$. Зв'язок між ортами сферичної та декартової систем координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{i} \sin \theta \cos \phi + \mathbf{j} \sin \theta \sin \phi + \mathbf{k} \cos \theta, \\ \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{i} \cos \theta \cos \phi + \mathbf{j} \cos \theta \sin \phi - \mathbf{k} \sin \theta, \\ \mathbf{e}_\phi &= -\mathbf{i} \sin \phi + \mathbf{j} \cos \phi. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Елемент об'єму у сферичних координатах:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (1.19)$$

Диференціальні операції:

$$\text{grad } f = \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}, \quad (1.20)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}, \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} = & \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) + \\ & + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right]. \quad (1.23)$$

Циліндричні координати r, ϕ, z :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, \\ y &= r \sin \phi, \\ z &= z. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Кут ϕ відраховується від осі Ox у площині xOy і змінюється в межах $[0; 2\pi)$. Зв'язок між ортами циліндричної та декартової систем координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta, \\ \mathbf{e}_\phi &= -\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Елемент об'єму у циліндричних координатах:

$$dV = r \, dr \, d\phi \, dz. \quad (1.26)$$

2. Обчисліть дивергенцію (вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} — сталі):

- | | |
|--|--|
| (a) $\operatorname{div} r\mathbf{r};$ | (b) $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{r}];$ |
| (c) $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^2};$ | (d) $\operatorname{div} \{(\mathbf{a}, \mathbf{r})\mathbf{r}\};$ |
| (e) $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{a}, \mathbf{r})};$ | (f) $\operatorname{div} \{[\mathbf{a}, \mathbf{r}]r\};$ |
| (g) $\operatorname{div} \frac{[\mathbf{r}, [\mathbf{r}, \mathbf{a}]]}{r^5}.$ | (h) $\operatorname{div} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{r})}{r^3}.$ |

3. Обчисліть ротор (вектор \mathbf{a} — сталий):

- | | |
|--|---|
| (a) $\operatorname{rot} r\mathbf{r};$ | (b) $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}];$ |
| (c) $\operatorname{rot} \frac{\mathbf{r}}{r^2};$ | (d) $\operatorname{rot} \frac{\mathbf{r}}{(\mathbf{a}, \mathbf{r})};$ |
| (e) $\operatorname{rot} \frac{[\mathbf{r}, [\mathbf{r}, \mathbf{a}]]}{r^5};$ | (f) $\operatorname{rot} \{(\mathbf{a}, \mathbf{r})\mathbf{r}\}.$ |

4. Обчисліть вирази (вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} — сталі):

- | | |
|--|---|
| (a) $\operatorname{div} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{r}(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{r^3};$ | (b) $\operatorname{rot} \frac{\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}]}{r^3};$ |
| (c) $\operatorname{rot} \left[(\mathbf{a}, \mathbf{r}) \frac{\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}]}{r^3} \right];$ | (d) $\operatorname{grad} ([\mathbf{a}, \mathbf{r}], \operatorname{rot}[\mathbf{r}, \mathbf{b}]);$ |
| (e) $\operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{rot}[\mathbf{a}, [\mathbf{r}, \mathbf{b}]];$ | (f) $\operatorname{grad} \operatorname{div}[\mathbf{a}, [\mathbf{r}, \mathbf{b}]].$ |

5. Доведіть тотожності (тут $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ і т. д.):

- | |
|--|
| (a) $\operatorname{div}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = (\mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{A}) - (\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{B});$ |
| (b) $\operatorname{rot}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B}, \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}, \nabla)\mathbf{B};$ |
| (c) $\operatorname{grad}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{B}] + [\mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{A}] + (\mathbf{B}, \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}, \nabla)\mathbf{B};$ |
| (d) $\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} - [\mathbf{A}, \operatorname{grad} \varphi];$ |
| (e) $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{A}, \operatorname{grad} \varphi);$ |
| (f) $(\mathbf{C}, \operatorname{grad}(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = (\mathbf{A}, (\mathbf{C}, \nabla)\mathbf{B}) + (\mathbf{B}, (\mathbf{C}, \nabla)\mathbf{A});$ |

- (g) $(\mathbf{C}, \nabla)[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\mathbf{A}, (\mathbf{C}, \nabla)\mathbf{B}] - [\mathbf{B}, (\mathbf{C}, \nabla)\mathbf{A}]$;
 (h) $(\nabla, \mathbf{A})\mathbf{B} = (\mathbf{A}, \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A}$;
 (i) $([\mathbf{A}, \mathbf{B}], \operatorname{rot} \mathbf{C}) = (\mathbf{B}, (\mathbf{A}, \nabla)\mathbf{C}) - (\mathbf{A}, (\mathbf{B}, \nabla)\mathbf{C})$;
 (j) $[[\nabla, \mathbf{A}], \mathbf{B}] = \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - (\mathbf{A}, \nabla)\mathbf{B} - [\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{B}] - [\mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{A}]$;
 (k) $([\mathbf{A}, \nabla], \operatorname{rot} \mathbf{B}) = (\mathbf{A}, \nabla) \operatorname{div} \mathbf{B} - (\mathbf{A}, \Delta \mathbf{B})$.

6. Доведіть такі співвідношення для згорток символів Леві-Чівіті:

- (a) $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$; (b) $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{klm} = 2\delta_{im}$;
 (c) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$.

7. Знайдіть середні за всіма просторовими напрямками від таких виразів, де n_j — компоненти одиничного вектора $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$:

- (a) $\overline{n_j}$; (b) $\overline{n_j n_k}$; (c) $\overline{n_j n_k n_l}$; (d) $\overline{n_j n_k n_l n_m}$.

8. Знайдіть середні за всіма просторовими напрямками таких виразів:

- (a) $\overline{(\mathbf{a}, \mathbf{n})^2}$; (b) $\overline{(\mathbf{a}, \mathbf{n})(\mathbf{b}, \mathbf{n})}$; (c) $\overline{(\mathbf{a}, \mathbf{n})\mathbf{n}}$; (d) $\overline{[\mathbf{a}, \mathbf{n}]^2}$.

Тут \mathbf{a}, \mathbf{b} — сталі вектори, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — одиничний вектор.

9. Перетворіть інтеграли по об'єму в інтеграли по поверхні (\mathbf{a} — сталий вектор, величини $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ та $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ є функціями від координат):

- (a) $\int_V (\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{a}) dV$; (b) $\int_V (\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{B}) dV$;
 (c) $\int_V \Delta(\varphi\psi) dV$; (d) $\int_V \Delta\varphi dV$;
 (e) $\int_V \operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{B}] dV$; (f) $\int_V (\mathbf{a}, \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B}) dV$.

10. Обчисліть інтеграли:

$$(a) \oint_S \mathbf{r}(\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS;$$

$$(b) \oint_S (\mathbf{a}, \mathbf{r})[\mathbf{b}, \mathbf{n}] dS;$$

$$(c) \oint_S \mathbf{n} \varphi dS;$$

$$(d) \oint_S [\mathbf{n}, \mathbf{a}] dS;$$

$$(e) \oint_S (\mathbf{n}, \mathbf{b}) \mathbf{a} dS.$$

Вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} — сталі, \mathbf{n} — орт нормалі до поверхні S .

$$(f) \oint_L f dl.$$

$$(g) \oint_L u df.$$

Інтегрування відбувається вздовж замкнутого контура L ;
 f, u — функції.

2. Заряди і струми у вакуумі: вступні зауваження

У збірнику використовуємо так звану симетричну систему одиниць Гаусса (CGS). У ній одиниця електричного заряду є похідною від механічних одиниць і визначається з закону Кулона у вигляді

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (2.1)$$

Другою характерною рисою цієї системи одиниць є однакова розмірність напруженості електричного поля \mathbf{E} та індукції магнітного поля \mathbf{B} . Як наслідок, у рівняннях електромагнітного поля маємо коефіцієнти 4π та $1/c$, де c — швидкість світла у вакуумі.

На практиці найбільше розповсюдження має Міжнародна система одиниць (SI, Le Système international d'unités). Одиниця заряду — кулон — є незалежною від механічних одиниць і їй приписують окрему розмірність. Як наслідок, закон Кулона набуває вигляду

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (2.2)$$

де ϵ_0^{-1} відіграє роль електричної силової константи. Також використовують допоміжну магнітну силову константу $\mu_0 = \epsilon_0^{-1}/c^2$. Електричні та магнітні поля в SI мають різні розмірності, а в рівняннях електромагнітного поля з'являються константи ϵ_0 і μ_0 . Основною перевагою Міжнародної системи одиниць є те, що вона включає в себе всі практичні електричні та магнітні одиниці (кулон, ампер, вольт, ом тощо), які сформувались історично і поширилися ще перед її створенням.

Вигляд рівнянь електромагнітного поля в SI можна знайти в будь-якій стандартній літературі.

Система *рівнянь Максвелла* в диференціальній формі:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t),\end{aligned}\tag{2.3}$$

де $\rho(\mathbf{r}, t)$ — об'ємна густина електричного заряду, а $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ — об'ємна густина електричного струму.

Внаслідок лінійності рівнянь електричне і магнітне поля задовольняють *принцип суперпозиції*:

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{B} = \sum_i \mathbf{B}_i,\tag{2.4}$$

де $\mathbf{E}_i, \mathbf{B}_i$ — поля, які створюються підсистемами зарядів і струмів.

Через скалярний $\varphi(\mathbf{r}, t)$ і векторний $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ потенціали вектори \mathbf{E} та \mathbf{B} виражаються так:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},\tag{2.5}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).\tag{2.6}$$

Рівняння для потенціалів

$$\Delta\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -4\pi\rho,\tag{2.7}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).\tag{2.8}$$

Векторний і скалярний потенціали визначені з точністю до скалярної функції f (так звана *калібрувальна* або *ґradientна інваріантність*):

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}.\tag{2.9}$$

Зважаючи на неоднозначність вибору потенціалів, на них можна накласти певні умови, які називають калібруваннями.

Калібрування Кулона:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (2.10)$$

Рівняння для потенціалів дещо спрощуються:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (2.11)$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\perp, \quad (2.12)$$

де

$$\mathbf{j}_\perp = \mathbf{j} - \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (2.13)$$

— *поперечний струм*. Рівняння типу (2.11) називають *рівнянням Пуассона*, а типу (2.12) — *рівнянням д'Аламбера*. Для оператора (*даламберіана*) у правій частині використовують позначення

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Калібрування Лоренца:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \quad (2.14)$$

Рівняння для потенціалів у цьому калібруванні:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (2.15)$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.16)$$

Об'ємна густина енергії електромагнітного поля w та об'ємна густина потоку енергії електромагнітного поля \mathbf{S} визначаються так:

$$w = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{B}]. \quad (2.17)$$

Закон збереження енергії:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{j}, \mathbf{E}) + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \quad (2.18)$$

Густина заряду системи точкових зарядів $\{e_i\}$ в точках $\{\mathbf{r}_i\}$:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_i e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \quad (2.19)$$

де $\delta(\mathbf{r})$ — *дельта-функція Дірака*, властивості якої описано нижче.

Густина струму системи точкових зарядів $\{e_i\}$ в точках $\{\mathbf{r}_i\}$, які рухаються зі швидкостями \mathbf{v}_i :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_i e_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)). \quad (2.20)$$

Дельта-функція Дірака

Узагальнена функція $\delta(x)$ має такі властивості:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

причому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (2.22)$$

або загальніше

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a). \quad (2.23)$$

Справедливі такі формули для складного аргумента:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad \delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i), \quad (2.24)$$

де x_i — нулі функції $g(x)$.

Ця функція просто узагальнюється на багатовимірні випадки, зокрема на тривимірний:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \delta(x - a_x)\delta(y - a_y)\delta(z - a_z). \quad (2.25)$$

Властивість (2.23) тут зручно переписати, ввівши позначення

$$d\mathbf{r} \equiv dx dy dz \equiv dV, \quad (2.26)$$

а саме:

$$\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = f(\mathbf{a}). \quad (2.27)$$

Інтегрування відбувається по всьому простору.

Перетворення Фур'є

Одновимірне перетворення Фур'є функції $f(x)$ визначається співвідношеннями:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_k e^{ikx}, \quad f_k = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{-ikx}. \quad (2.28)$$

Його тривимірним аналогом (щодо просторових змінних) є:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad f_{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (2.29)$$

де для зручності введено позначення для елементів об'єму

$$d\mathbf{r} = dx dy dz; \quad d\mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z.$$

Чотиривимірне перетворення Фур'є (щодо просторових змінних і часу):

$$F(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \int d\omega F_{\mathbf{k}\omega} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.30)$$

$$F_{\mathbf{k}\omega} = \int d\mathbf{r} \int dt F(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}.$$

Величини $f_k, f_{\mathbf{k}}, F_{\mathbf{k}\omega}$ називають *фур'є-зображеннями*. Зрозуміло, що замість скалярної величини $F(\mathbf{r}, t)$ може стояти й векторна $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, тоді вектором буде й зображення $\mathbf{F}_{\mathbf{k}\omega}$.

Якщо проміжків інтегрування не зазначено, то розуміємо інтеграли по всьому просторовому об'єму і по всьому часовому інтервалу.

11. Знайдіть рівняння Максвелла (2.3) для фур'є-зображень.

12. Отримайте вираз для розв'язку $\varphi(\mathbf{r})$ рівняння Пуассона

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}),$$

використовуючи пряме й обернене перетворення Фур'є.

13. Знайдіть фур'є-зображення таких потенціалів:

(a) $\varphi(r) = \frac{A}{r}$ (потенціал Кулона);

(b) $\varphi(r) = \frac{Ae^{-\lambda r}}{r}$ (потенціал Юкави);

(c) $\varphi(r) = Ae^{-\lambda r^2}$;

(d) $\varphi(r) = A \left[e^{-2\lambda(r-a)} - 2e^{-\lambda(r-a)} \right]$ (потенціал Морзе);

(e) $\varphi(r) = \begin{cases} A, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$

(f) $\varphi = A\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$

(цей потенціал ефективно відповідає взаємодії твердих сфер).

У наведених виразах $A, \lambda, a = \text{const}$, \mathbf{a} — сталий вектор.

14. Знайдіть фур'є-зображення поперечного струму $\mathbf{j}_{\mathbf{k}}^{\perp}(t)$, яке відповідає одиничному заряду e , що рухається за законом $\mathbf{r}_0(t)$.

3. Електростатика у вакуумі

Якщо в рівняннях (2.3) величини не залежать від часу, то система розпадається на рівняння електростатики і магнітостатики. Електростатичне поле у вакуумі визначається такими рівняннями Максвелла:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 4\pi\rho(\mathbf{r}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

де $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ — вектор напруженості електричного поля, $\rho(\mathbf{r})$ — густина заряду.

Теорема Гаусса для напруженості електричного поля має вигляд:

$$\oint_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = 4\pi \int_V \rho dV = 4\pi q,\tag{3.2}$$

де замкнена поверхня S обмежує об'єм V .

Зв'язок між напруженістю електричного поля та скалярним потенціалом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}).\tag{3.3}$$

розв'язок якого можна записати у вигляді:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \operatorname{const}.\tag{3.4}$$

Для систем зарядів, обмежених у просторі, константу покладають рівною нулеві, забезпечуючи $\varphi = 0$ на безмежності. Беручи градієнт, отримуємо напруженість електричного поля:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'.\tag{3.5}$$

Якщо розподіл заряду заданий поверхневою густиною $\sigma(\mathbf{r})$ або лінійною густиною $\varkappa(\mathbf{r})$, то напруженість електричного поля визначається формулами:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_S \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS', \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_L \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\varkappa(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\ell', \quad (3.6)$$

де інтегрування відбувається по двовимірній поверхні S або одновимірному контуру L відповідно.

Енергія електростатичного поля обчислюється за формулою:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV = \frac{1}{8\pi} \int_V E^2 dV. \quad (3.7)$$

Енергія взаємодії двох систем зарядів дорівнює:

$$W = \int \rho_1\varphi_2 dV = \int \rho_2\varphi_1 dV = \int \frac{\rho_1(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{r}_2) dV_1 dV_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad (3.8)$$

де $\varphi_i(\mathbf{r})$ — потенціал, що створюється розподілом зарядів $\rho_i(\mathbf{r})$.

15. Визначте, які з перелічених виразів можуть описувати електростатичне поле:

(a) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 (\mathbf{i}ay \cos ax + \mathbf{j} \sin ax + \mathbf{k}(az)^2)$;

(b) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \frac{r}{a} (2\mathbf{e}_r \phi \sin \theta + \mathbf{e}_\theta \phi \cos \theta + \mathbf{e}_\phi)$;

(c) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 a (\mathbf{i}\sqrt{axy^2} + \mathbf{j}\sqrt{ax^2y} + \mathbf{k}xye^{-a(x^2+z^2)})$;

(d) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \left(\mathbf{e}_r \frac{r}{a} + \mathbf{e}_z A \frac{\cos \phi}{r} \right)$.

16. На основі принципу суперпозиції розрахуйте напруженість електричного поля:

(a) заряду $q > 0$, рівномірно розподіленого по кільцю радіуса a , на осі кільця;

- (b) прямолінійної нитки довжиною $2l$, рівномірно зарядженої зарядом $q > 0$, в точці, віддаленій на відстані x від центра нитки і розміщеної симетрично відносно її кінців;
 - (c) нескінченно довгої нитки, рівномірно зарядженої з лінійною густиною \varkappa ;
 - (d) безмежної поверхні, рівномірно зарядженої з поверхневою густиною σ ;
 - (e) сфери радіуса a , рівномірно зарядженої з поверхневою густиною σ ;
 - (f) кулі радіуса a , рівномірно зарядженої з об'ємною густиною ρ .
17. Круглий диск радіуса a рівномірно заряджений з поверхневою густиною σ . Визначте, в якій точці на осі диска напруженість електричного поля дорівнює $\pi\sigma$.
18. Круглий диск радіуса a товщиною b рівномірно заряджений по об'єму з густиною $\rho = \text{const}$. Знайдіть напруженість електричного поля на осі диску.
19. Знайдіть напруженість електричного поля, використовуючи теорему Гаусса:
- (a) безмежної прямолінійної нитки, рівномірно зарядженої з лінійною густиною \varkappa ;
 - (b) безмежно довгого циліндра радіуса a , рівномірно зарядженого з поверхневою густиною зарядів σ ;
 - (c) безмежно довгого циліндра радіуса a , рівномірно зарядженого з об'ємною густиною зарядів ρ ;
 - (d) сфери радіуса a , рівномірно зарядженої з поверхневою густиною σ ;
 - (e) кулі радіуса a , рівномірно зарядженої з об'ємною густиною ρ .

27. В основному стані атома водню заряд електрона ($-e$) розподілений з об'ємною густиною

$$\rho = -\frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a},$$

де a — борівський радіус, r — віддаль до ядра. Розрахуйте скалярний потенціал і напруженість електричного поля атома водню.

28. Знайдіть електричне поле безмежної плити товщиною a , яка рівномірно заряджена по об'єму з густиною ρ_0 .
29. Знайдіть електричне поле безмежної плити товщиною $2a$, яка заряджена по об'єму з густиною $\rho = \rho_0 (1 - (z/a)^2)$.
30. Заряд розподілений по безмежному просторі за законом $\rho = \rho_0 \cos(\alpha x) \cos(\beta y) \sin(\gamma z)$. Знайдіть потенціал електричного поля φ .
31. Простір між двома концентричними сферами з радіусами R_1 і R_2 , $R_1 < R_2$, заряджений з об'ємною густиною $\rho = \rho_0 (R_1/r)^2$. Визначте потенціал і напруженість електричного поля.
32. Простір між двома концентричними безмежно довгими циліндрами з радіусами R_1 і R_2 , $R_1 < R_2$, заряджено з об'ємною густиною $\rho = \rho_0 (R_1/r)$. Визначте потенціал і напруженість електричного поля.
33. На основі принципу суперпозиції розрахуйте потенціал електричного поля, що створює у вакуумі:
- (а) прямолінійний рівномірно заряджений із лінійною густиною \varkappa відрізок довжиною $2l$ у будь-якій точці простору;
 - (б) прямолінійна безмежна нитка, рівномірно заряджена з лінійною густиною \varkappa ;
 - (в) рівномірно заряджена з поверхневою густиною заряду σ сфера радіуса a ;
 - (г) рівномірно заряджена куля радіуса a . Заряд кулі q .

34. Знайдіть потенціал електричного поля, що створює рівномірно заряджена ($\sigma = \text{const}$) поверхня кругового циліндра радіусом a і висотою H в будь-якій точці на його осі.
35. З допомогою рівняння Пуассона визначте потенціал і напруженість електричного поля, що створює:
- (а) однорідна куля радіуса a , рівномірно заряджена з об'ємною густиною $\rho = \text{const}$.
 - (б) рівномірно заряджена з поверхневою густиною заряду σ сфера радіуса a ;
 - (в) безмежний плоский шар товщиною $2a$, рівномірно заряджений з об'ємною густиною $\rho = \text{const}$;
 - (г) однорідний безмежно довгий круглий циліндр радіуса a , рівномірно заряджений з об'ємною густиною $\rho = \text{const}$.

36. Знайдіть енергію взаємодії U електронної хмари з ядром в атомі водню. Заряд електрона розподілений в атомі з об'ємною густиною

$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a},$$

де e — елементарний заряд, a — борівський радіус.

37. Центри двох куль із зарядами q_1 та q_2 знаходяться на відстані a один від одного ($a > R_1 + R_2$, де R_1, R_2 — радіуси куль). Заряди розподілені сферично симетрично. Знайдіть енергію U взаємодії куль.

4. Магнітостатика у вакуумі

У магнітостатиці вихідними є такі рівняння Максвелла:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}), \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

де $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ — індукція магнітного поля, $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ — густина струму.

Якщо розподіл струмів володіє аксіальною симетрією, то корисною є інтегральна форма рівняння (4.1) (теорема Стокса):

$$\oint_L (\mathbf{B}, d\boldsymbol{\ell}) = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = \frac{4\pi}{c} I,\tag{4.2}$$

тут інтеграл йде по довільному замкнутому контуру L , I — повний струм, що протікає через довільну поверхню S , охоплену цим контуром.

Векторний потенціал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ так пов'язаний з індукцією магнітного поля:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}),\tag{4.3}$$

причому накладаємо також додаткову умову (*калібрування Кулона*):

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0.\tag{4.4}$$

Подібно до скалярного потенціалу, маємо для \mathbf{A} рівняння Пуассона:

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}),\tag{4.5}$$

звідки векторний потенціал системи струмів можна записати так:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.\tag{4.6}$$

Найчастіше буде потрібним вираз для лінійних струмів:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_L \frac{I d\boldsymbol{\ell}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (4.7)$$

звідки маємо *закон Біо–Савара–Лапласа*: елемент струму $I d\boldsymbol{\ell}$ створює у вакуумі магнітне поле

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \frac{[I d\boldsymbol{\ell}, \mathbf{r} - \mathbf{r}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (4.8)$$

За принципом суперпозиції сумарне поле в даній точці можна отримати, проінтегрувавши (4.8) за всіма елементами струму $d\boldsymbol{\ell}$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_L \frac{[I d\boldsymbol{\ell}, \mathbf{r} - \mathbf{r}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (4.9)$$

Потік індукції магнітного поля через поверхню S виражається формулою:

$$\Phi = \int_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}). \quad (4.10)$$

38. Знайдіть магнітне поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, що відповідає такому векторному потенціалові:

(a) $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}[\mathbf{B}_0, \mathbf{r}]$, де \mathbf{B}_0 — сталий вектор (симетричне калібрування);

(b) $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = B_0 x \mathbf{j}$, де $B_0 = \text{const}$, \mathbf{j} — орт уздовж осі Oy (калібрування Ландау).

39. Використовуючи закон Біо–Савара–Лапласа, визначте індукцію магнітного поля, яке створює у вакуумі тонкий прямолінійний провідник довжиною $2L$, по якому тече струм силою I . Розгляньте граничний випадок $L \rightarrow \infty$.

40. По коловому контуру радіуса a тече струм I . Використовуючи закон Біо–Савара–Лапласа, визначте індукцію магнітного поля, яке створюється ним на осі контура.
41. Струм I протікає по дузі кола радіуса a з центральним кутом α . Обчисліть індукцію магнітного поля в центрі кола.
42. По кільцю радіуса R протікає струм силою I . Знайдіть величину індукції магнітного поля в центрі кільця безпосереднім інтегруванням відповідного рівняння Максвелла.
43. В коло радіуса a вписано правильний n -кутник, по якому тече струм I . Знайдіть індукцію магнітного поля
- (а) в центрі n -кутника; розгляньте випадок $n \rightarrow \infty$;
(б) будь-де на осі, що проходить через центр n -кутника.
44. Використовуючи вираз для загального розв'язку рівняння Пуассона, розрахуйте векторний потенціал, що створює у вакуумі прямолінійний струм I довжиною $2L$. Розгляньте граничний випадок $L \rightarrow \infty$.
45. Лінійний провідник має форму прямокутника зі сторонами $2a$ і $2b$, по якому протікає струм I . Обчисліть індукцію магнітного поля на осі, що проходить через центр прямокутника перпендикулярно до його площини.
46. Лінійний контур зі струмом I складається із двох паралельних напівбезмежних прямих, з'єднаних між собою півколом радіуса a . Обчисліть індукцію магнітного поля в центрі цього півкола.
47. За допомогою рівняння Пуассона визначте векторний потенціал та індукцію магнітного поля, яке створює струм I , рівномірно розподілений по перетину безмежно довгого циліндричного провідника радіуса a .

48. За допомогою рівняння Пуассона визначте векторний потенціал та індукцію магнітного поля, яке створює струм I , рівномірно розподілений по провіднику, що має форму безмежно довгого порожнього циліндра, зовнішній і внутрішній радіуси якого рівні відповідно a та b .
49. За допомогою теореми Стокса знайдіть індукцію магнітного поля, створеного протіканням струму I по безмежно довгому тонкому провіднику.
50. Струм I рівномірно розподілений по поверхні плоского кільця з внутрішнім і зовнішнім радіусами a і b відповідно. Обчисліть індукцію магнітного поля на осі кільця.
51. Визначте індукцію магнітного поля, яка створена постійним струмом I , що протікає по безмежному циліндричному провіднику радіуса a . Густина струму стала.
52. Всередині тонкої провідної циліндричної оболонки радіуса b знаходиться коаксіальний з нею провід радіуса a . По цих провідниках протікають постійні струми однакової величини I у протилежних напрямках. Визначте індукцію магнітного поля такої системи в усіх точках простору.
53. На магнітний тор густо намотано N витків ізольованого дроту, по якому проходить струм силою I . Радіус перерізу тора рівний a , відстань від центра тора до центра перерізу b . Знайдіть індукцію магнітного поля всередині тора і магнітний потік у ньому.
54. У магнітному полі, яке створене нескінченно довгим прямолінійним струмом, знаходиться квадрат зі стороною a . Сторона квадрата паралельна до провідника зі струмом. На якій відстані від провідника знаходиться сторона квадрата, якщо магнітний потік через площину квадрата рівний $\Phi = \frac{2I}{c} a \ln 3$?

55. На достатньо довгий залізний сердечник круглого перерізу радіуса a намотано рівномірно тонкий ізольований дріт кількістю n витків на одиницю довжини, по якому тече струм силою I . Знайдіть індукцію магнітного поля всередині сердечника.
56. Уздовж нескінченно довгої смужки ширини a протікає рівномірно розподілений по її ширині струм силою I . Знайдіть індукцію магнітного поля смужки.
57. По двох однакових нескінченно довгих паралельних пластинах, розташованих одна над одною, протікають струми протилежних напрямків. Ширина пластин a , відстань між ними b . Знайдіть силу взаємодії пластин на одиницю довжини.
58. Знайдіть векторний потенціал \mathbf{A} та індукцію магнітного поля \mathbf{B} двох прямолінійних паралельних струмів I , які течуть у різних напрямках. Відстань між провідниками рівна $2a$.
59. Знайдіть магнітне поле \mathbf{B} , створене двома паралельними площинами, по яких протікають струми з поверхневою густиною j . Розгляньте два випадки взаємної орієнтації струмів: в одному напрямку, в різних напрямках.
60. Знайдіть векторний потенціал \mathbf{A} та магнітне поле \mathbf{B} , які створює в довільній точці тонке кільце радіуса a зі струмом I . Результат виразіть через еліптичні інтеграли.

5. Мультипольні розклади

Загальний розклад скалярного потенціалу за мультиполями:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_V r'^n P_n(\cos \theta) \rho(\mathbf{r}') dV', \quad \theta = (\widehat{\mathbf{r}'}, \mathbf{r}), \quad (5.1)$$

де $P_n(\cos \theta)$ — поліноми Лежандра. У явному вигляді розклад за мультиполями можна записати так:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{r} + \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{r})}{r^3} + \frac{3}{2r^5} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_j x_k Q_{jk} + \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{r^{2n+1}} \frac{(2n-1)!!}{n!} \sum_{k_1=1}^3 \cdots \sum_{k_n=1}^3 x_{k_1} \cdots x_{k_n} Q_{k_1 \dots k_n}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

У цьому виразі q — повний заряд

$$q = \sum_i e_i \quad \text{або} \quad q = \int_V \rho(\mathbf{r}') dV', \quad (5.3)$$

де перший вираз записано для системи точкових зарядів, другий — для неперервного розподілу з густиною $\rho(\mathbf{r})$.

Електричний дипольний момент :

$$\mathbf{d} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i \quad \text{або} \quad \mathbf{d} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (5.4)$$

Електричний квадрупольний момент системи точкових зарядів:

$$Q_{jk} = \sum_i e_i \left(x_j^{(i)} x_k^{(i)} - \frac{r_i^2}{3} \delta_{jk} \right), \quad (5.5)$$

де $x_j^{(i)}$ — j -та компонента радіус-вектора i -тої частинки \mathbf{r}_i , а $r_i = |\mathbf{r}_i|$.

Для неперервного розподілу зарядів цей вираз записують так:

$$Q_{jk} = \int_V \left(x'_j x'_k - \frac{r'^2}{3} \delta_{jk} \right) \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (5.6)$$

Вищі мультипольні моменти ($n \geq 3$) визначаються аналогічно з урахування відповідної симетризації. Зокрема, випадок $n = 3$ називають *октупольним моментом*:

$$Q_{jkl} = \sum_i e_i \left[x_j^{(i)} x_k^{(i)} x_l^{(i)} - \frac{r_i^2}{5} \left(x_j^{(i)} \delta_{kl} + x_k^{(i)} \delta_{jl} + x_l^{(i)} \delta_{jk} \right) \right], \quad (5.7)$$

який можна отримати з (5.1) після низки нескладних перетворень.

Подібним способом можна розкласти й векторний потенціал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Магнітний дипольний момент системи точкових зарядів:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_i e_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i] \quad (5.8)$$

а для неперервного розподілу, що визначається густиною струму $\mathbf{j}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r}, \mathbf{j}(\mathbf{r}')] dV' \quad (5.9)$$

У дипольному наближенні векторний потенціал дорівнює

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{[\mathbf{m}, \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (5.10)$$

оскільки доданка, що відповідає монополю, — аналога виразу з повним зарядом q у формулі (5.2) — для магнітного поля не існує.

61. Знайдіть вирази для електричного і магнітного полів, що відповідають дипольному наближенню

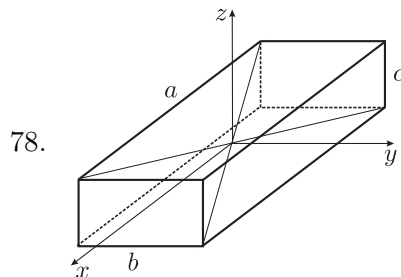
$$\varphi_d(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{d}, \mathbf{r})}{r^3} \quad \text{та} \quad \mathbf{A}_d(\mathbf{r}) = \frac{[\mathbf{m}, \mathbf{r}]}{r^3}.$$

62. Покажіть, що дипольний момент електрично нейтральної системи не залежить від вибору початку системи координат.
63. Покажіть, що тензор квадрупольного моменту аксіально симетричного розподілу зарядів має лише одну незалежну компоненту.
64. Знайдіть потенціал електричного поля, яке створює у вакуумі аксіально симетричний квадруполь з моментом

$$Q_{zz} = Q; \quad Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{Q}{2}.$$

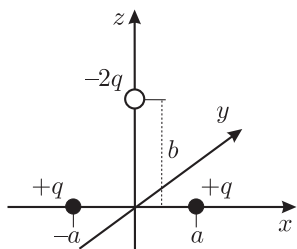
65. Знайдіть електричне поле диполя на великій відстані від нього. Заряди дорівнюють $\pm q$, відстань між ними a .
66. Знайдіть електричне поле на великій відстані від системи зарядів, які розміщені у вершинах квадрата зі стороною a . Однорідні заряди величиною $\pm q$ знаходяться на протилежних вершинах.
67. Покажіть, що розподіл зарядів $\rho(\mathbf{r}) = -(\mathbf{d}, \nabla)\delta(\mathbf{r})$ описує елементарний диполь з моментом \mathbf{d} , розташований у початку координат.
68. Знайдіть електричний дипольний момент \mathbf{d} і квадрупольний момент Q_{jk} тривісного еліпсоїда з півсями a, b, c . Густина заряду $\rho = \text{const}$.
69. Визначте потенціал електричного поля (з точністю до квадрупольного члена), яке створює еліпсоїд обертання з півсями a та b ($b < a$) на великих відстанях. Заряд q рівномірно розподілений по еліпсоїду.
70. Знайдіть електричний дипольний момент \mathbf{d} і компоненту Q_{zz} квадрупольного моменту кулі радіусом R , якщо густина заряду $\rho(z) = \rho_0(1 + z/R)$, $\rho_0 = \text{const}$. Центр кулі збігається з початком координат.

71. Знайдіть електричний дипольний момент \mathbf{d} і компоненту квадрупольного моменту Q'_{zz} , де $Q'_{ij} = \int x'_i x'_j \rho(\mathbf{r}') dV'$, тривісного еліпсоїда з півосями a, b, c . Густина заряду $\rho(z) = \rho_0 z/c$, $\rho_0 = \text{const}$. Центр еліпсоїда збігається з початком координат.
72. Знайдіть дипольний і компоненту Q_{zz} квадрупольного моменту рівномірно зарядженого (з поверхневою густиною σ) тонкого диска радіуса R , який лежить у площині xOy .
73. Знайдіть квадрупольний момент тонкої плоскої пластини, однорідно зарядженої з поверхневою густиною σ , якщо:
- форма пластини — прямокутник зі сторонами a, b ;
 - форма пластини — еліпс із півосями a, b .
74. Знайдіть дипольний і квадрупольний моменти відрізка довжиною a , зарядженого з лінійною густиною κ , який лежить на осі Ox так, що його центр збігається з початком координат.
75. Два коаксіальні рівномірно заряджені тонкі круглі кільця, з радіусами a і b та зарядами q і $-q$ відповідно, знаходяться в одній площині. Знайдіть потенціал електричного поля цієї системи на великих відстанях від неї.
76. Знайдіть дипольний момент системи однакових зарядів, які на площині розміщені у вершинах правильного $2n$ -кутника.
77. У вершинах правильного шестикутника з стороною $2a$ розміщено по чергово різнойменні заряди величиною q . Знайдіть перший неznикаючий член розкладу потенціалу на великих відстанях.



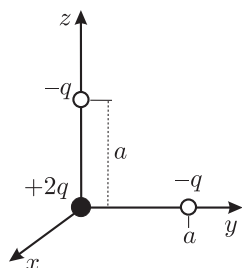
Знайдіть квадрупольний момент прямокутного паралелепіпеда зі сторонами a, b, c , рівномірно зарядженого з густиною $\rho = \text{const}$. Центр паралелепіпеда збігається з початком координат (див. рис.).

79.



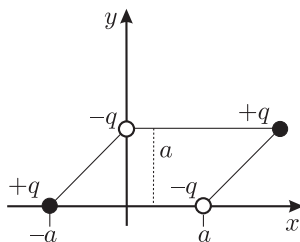
Знайдіть дипольний і квадрупольний моменти системи зарядів величинами $+q$, $+q$, $-2q$, розміщених у вершинах рівнобедреного трикутника (див. рис.).

80.



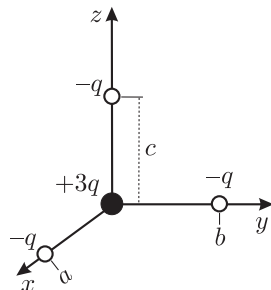
Знайдіть дипольний і квадрупольний моменти системи зарядів величинами $+q$, $+q$, $-2q$, розміщених у вершинах рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом a (див. рис.).

81.



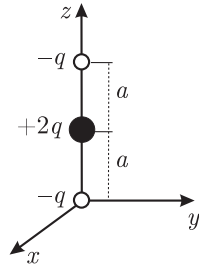
Знайдіть дипольний і квадрупольний моменти системи чотирьох зарядів величинами $\pm q$, які розміщені у вершинах паралелограма (див. рис.).

82.

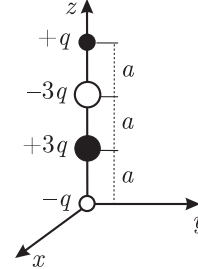


Знайдіть дипольний і квадрупольний моменти системи чотирьох зарядів величинами $-q$, $-q$, $-q$, $+3q$, які розміщені у вершинах трикутної піраміди (див. рис.).

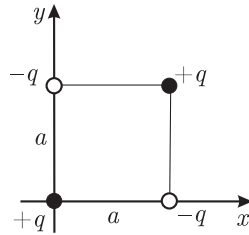
83. Знайдіть перший незникаючий на великих відстанях доданок скалярного потенціалу систем зарядів, зображених на рисунках:



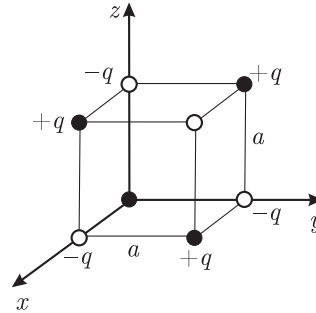
(a)



(b)



(c)



(d)

заряди розміщені у вершинах квадрата зі стороною a ;

заряди розміщені у вершинах куба зі стороною a .

84. Знайдіть магнітний дипольний момент рівномірно зарядженої сферичної поверхні радіуса R , яка обертається навколо своєї осі зі сталою кутовою швидкістю ω . Повний заряд сфери Q .

85. Певний розподіл струму створює магнітне поле з потенціалом

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \mathbf{e}_\phi \frac{A_0 \sin \theta}{r} e^{-\lambda r}, \text{ де } A_0, \lambda = \text{const.}$$

Знайдіть густину струму $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ і магнітний дипольний момент такої системи.

6. Теорія випромінювання

Скалярний і векторний потенціали електромагнітного поля з урахуванням ефектів запізнення, які пов'язані зі скінченною швидкістю поширення електромагнітних взаємодій, можна записати через так звані *запізнювальні потенціали*:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) dV', \quad (6.1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) dV', \quad (6.2)$$

де V — об'єм, у якому зосереджені заряди.

Для точкового заряду отримаємо *потенціали Лієнара-Віхерта*:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R(\tau) - \frac{1}{c} \mathbf{R}(\tau) \mathbf{v}(\tau)} \Bigg|_{\tau=t-\frac{R(\tau)}{c}}, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}(\tau)}{c} \frac{e}{R(\tau) - \frac{1}{c} \mathbf{R}(\tau) \mathbf{v}(\tau)} \Bigg|_{\tau=t-\frac{R(\tau)}{c}}, \quad (6.4)$$

де $\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)$, $\mathbf{r}_0(\tau)$ — радіус-вектор, який задає положення частинки в момент часу τ .

Нехай лінійні розміри системи зарядів обмежені величиною l . На великих віддалях r від системи, $r \gg l \geq r'$ достатньо обмежитись розкладом $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r - (\mathbf{n}, \mathbf{r}')$, де $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Векторний потенціал набуде вигляду:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{cr} \int_V \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{r}')}{c}\right) dV'. \quad (6.5)$$

Розглянемо електромагнітне поле на великих віддалях від нашої системи зарядів — у хвильовій зоні: $r \gg \lambda \gg l$. Оскільки довжина

випромінюваної хвилі велика порівняно з лінійними розмірами системи $\lambda \gg l$, то густину струму \mathbf{j} під інтегралом можна розкласти в ряд за $\frac{(\mathbf{n}, \mathbf{r}')}{c}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}_m(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}_Q(\mathbf{r}, t) + \dots, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr}, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{r}, t) = \frac{[\dot{\mathbf{m}}\left(t - \frac{r}{c}\right), \mathbf{n}]}{cr}, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{A}_Q(\mathbf{r}, t) = \frac{\ddot{\mathbf{Q}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{2c^2r}, \quad (6.9)$$

де $\mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t)$ — дипольне, $\mathbf{A}_m(\mathbf{r}, t)$ — магнітно-дипольне, $\mathbf{A}_Q(\mathbf{r}, t)$ — квадрупольне наближення для векторного потенціалу; $\dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ — похідна за часом від електричного дипольного моменту

$$\mathbf{d}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \int_V \mathbf{r}' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV';$$

$\dot{\mathbf{m}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ — похідна за часом від магнітного дипольного моменту

$$\mathbf{m}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r}', \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right)] dV';$$

$\ddot{\mathbf{Q}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ — друга похідна за часом від вектора, компоненти якого

$$\begin{aligned} Q_j\left(t - \frac{r}{c}\right) &= n_k Q_{jk}\left(t - \frac{r}{c}\right), \\ Q_{jk}\left(t - \frac{r}{c}\right) &= \int_V \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \left(x'_j x'_k - \frac{r'^2}{3} \delta_{jk}\right) dV', \end{aligned}$$

де Q_{jk} — тензор квадрупольного моменту системи, n_k — компоненти одиничного вектора $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

Магнітне поле $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ та електричне поле \mathbf{E} , які відповідають випромінюванню, можна обчислити за простішими формулами:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{n}], \quad \mathbf{E} = [\mathbf{B}, \mathbf{n}]. \quad (6.10)$$

Інтенсивність випромінювання (втрата енергії за одиницю часу):

$$I = I_d + I_m + I_Q + I_A, \quad (6.11)$$

$$I_d = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3}, \quad (6.12)$$

$$I_m = \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3}, \quad (6.13)$$

$$I_Q = \frac{1}{20c^5} \ddot{Q}_{jk} \ddot{Q}_{jk}, \quad (6.14)$$

$$I_A = -\frac{4}{3c^3} (\ddot{\mathbf{T}}, \ddot{\mathbf{d}}), \quad (6.15)$$

де I_d , I_m , I_Q — інтенсивності дипольного, магнітно-дипольного, квадрупольного випромінювання відповідно. Усі величини взято в момент часу $t - \frac{r}{c}$. Доданок I_A — інтенсивність так званого анапольного випромінювання, в означенні якої фігурує вектор — *анапольний момент* або *тороїдність*:

$$\mathbf{T}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{10c} \int_V dV' \left\{ \left(\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right), \mathbf{r}' \right) \mathbf{r}' - 2r'^2 \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \right\}. \quad (6.16)$$

Заряджена частинка, що рухається з прискоренням, тобто під впливом деякої зовнішньої сили \mathbf{F} , зазнає впливу *сили радіаційного гальмування*

$$\mathbf{F}_{\text{rad.}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}}. \quad (6.17)$$

Якщо \mathbf{F} — пружна сила, $\mathbf{F} = -m\omega_0\mathbf{r}$, то $\mathbf{F}_{\text{rad.}}$ називають *силою променистого тертя*:

$$\mathbf{F}_{\text{rad.fr.}} = -\frac{2e^2\omega_0^2}{3c^3} \dot{\mathbf{r}}. \quad (6.18)$$

86. Переконайтесь, що запізнювальні потенціали задовольняють рівняння д'Аламбера

$$\square \varphi(\mathbf{r}, t) = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \quad \square \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

87. Покажіть, що для ізольованої системи, яка складається з N частинок з однаковим питомим зарядом ($e_i/m_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, N$), інтенсивність дипольного випромінювання I_d дорівнює нулеві.
88. Через конденсатор пролетіла частинка масою m і зарядом q . Відстань між обкладками конденсатора рівна l , а напруженість електричного поля \mathbf{E} в конденсаторі однорідна і постійна. Кут між вектором \mathbf{E} і напрямком швидкості частинки \mathbf{v}_0 під час вльоту дорівнює α . Знаки заряду q і $\cos \alpha$ однакові. Оцініть енергію, яку під час прольоту через конденсатор частинка втрачає на дипольне випромінювання.
89. Система N частинок з однаковими масами m та електричними зарядами $e_k = ke_0$, де e_0 — елементарний заряд, $k = 1, \dots, N$, перебуває в постійному електричному полі напруженістю \mathbf{E} . Нехтуючи взаємодією між частинками, знайдіть інтенсивність дипольного випромінювання такої системи.
90. Електрон масою m і зарядом e пролітає на великій віддалі a від нерухомого ядра з зарядом $Z|e|$. У безмежно віддалений момент часу $t = -\infty$ електрон мав швидкість за абсолютною величиною рівну v_0 . Нехтуючи викривленням траєкторії, знайдіть енергію \mathcal{E} , яку електрон втрачає на дипольне випромінювання за час прольоту.
91. У класичній моделі атома, яку запропонував Резерфорд, електрон масою m і зарядом e обертається по коловій орбіті навколо нерухомого ядра з зарядом $Z|e|$. Знайдіть закон зменшення повної енергії електрона \mathcal{E} за рахунок дипольного випромінювання. Обчисліть час $t_{\text{п}}$, через який електрон впаде на ядро внаслідок втрати енергії на дипольне випромінювання. У початковий момент часу $t_0 = 0$ електрон знаходився на віддалі R від ядра.

92. Частинка масою m і зарядом e пролітає по діаметру кулі радіуса R , всередині якої рівномірно розподілений заряд Q . Заряди частинки і кулі протилежного знака. Перед вльотом у кулю частинка мала кінетичну енергію \mathcal{E}_0 . Знайдіть енергію \mathcal{E} , яку частинка втрачає на дипольне випромінювання під час прольоту через кулю.
93. Частинка масою m і зарядом e здійснює гармонічні коливання з частотою ω (гармонічний осцилятор). Знайдіть напруженість електричного та індукцію магнітного полів у хвильовій зоні та середню за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність дипольного випромінювання.
94. Найпростіша лінійна антена — це тонкий прямолінійний провідник завдовжки l , по якому тече струм $J = J_0 \cos \omega t$, причому антена настільки коротка, що струм вважають незмінним по всій її довжині. Знайдіть середню за період зміни струму $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність випромінювання антени.
95. Покажіть, що для ізольованої системи, яка складається з N частинок з однаковим питомим зарядом ($e_i/m_i = e/m = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, N$), інтенсивність магнітно-дипольного випромінювання I_m дорівнює нулеві.
96. Покажіть, що магнітно-дипольне випромінювання відсутнє у системі, яка складається з двох заряджених частинок, які рухаються з нерелятивістськими швидкостями.
97. Найпростіша рамкова антена — це прямокутна рамка зі сторонами a і b , по якій тече лінійний струм силою $J = J_0 \cos \omega t$. Визначте середню за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність магнітно-дипольного випромінювання.
98. Знайдіть напруженість електричного та індукцію магнітного полів у хвильовій зоні та середню за період коливань $T = 2\pi/\omega$

інтенсивність випромінювання магнітного диполя, момент якого $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \cos(\omega t + \alpha)$.

99. Частинка масою m і зарядом e під дією пружної сили може здійснювати гармонічні коливання з частотою ω_0 (гармонічний осцилятор). Враховуючи силу радіаційного тертя, знайдіть середню за період коливань $T = 2\pi/\omega$ інтенсивність дипольного випромінювання осцилятора, який здійснює вимушені коливання в зовнішньому електричному полі напруженістю $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$.

100. Покажіть, що замість запізнювальних потенціалів $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ і $\varphi(\mathbf{r}, t)$, зв'язаних умовою Лоренца, можна ввести одну векторну функцію $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t)$, через яку виражаються електромагнітні потенціали: $\varphi = -\operatorname{div} \mathbf{Z}$, $\mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}$. Величину \mathbf{Z} називають вектором Герца або поляризаційним оператором. Своєю чергою, розподіл зарядів і струмів електронейтральної системи в цьому випадку доцільно описувати векторном поляризації $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$, заданим за допомогою співвідношень $\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}$, $\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$.

101. Електромагнітне поле рухомого точкового заряду описують скалярним φ і векторним \mathbf{A} потенціалами Лієнара–Віхерта

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{s(\tau)}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}(\tau)}{c} \frac{e}{s(\tau)},$$

де $s(\tau) = R(\tau) - \frac{1}{c}(\mathbf{R}(\tau), \mathbf{v}(\tau))$, $\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)$, $R(\tau) = |\mathbf{R}(\tau)|$, а $\mathbf{r}_0(\tau)$ та $\mathbf{v}(\tau)$ — відповідно координата і швидкість заряду в момент часу τ . Моменти часу спостереження t і часу запізнення τ пов'язані співвідношенням $\tau = t - R(\tau)/c$.

- Запишіть $\varphi(\mathbf{r}, t)$ і $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ у вигляді рядів за степенями $1/c$.
- Отримайте аналогічні формули у вакуумі для випадку кулонівського калібрування потенціалів.
- Обчисліть напруженість електричного та індукцію магнітного полів.

102. Заряд рухається зі сталою швидкістю \mathbf{v} . Виразіть потенціали Лієнара–Віхерта через координату заряду в момент часу спостереження t .
103. Виразіть напруженість електричного та індукцію магнітного полів заряду, що рівномірно рухається зі сталою швидкістю \mathbf{v} , через його координату в момент часу спостереження t .
104. Знайдіть фур'є-зображення потенціалів Лієнара–Віхерта, напруженості електричного та індукції магнітного полів, якщо заряд рухається зі сталою швидкістю.
105. Запишіть потенціали електромагнітного поля рівномірно рухомого точкового заряду при кулонівському калібруванні.
106. Система заряджених частинок локалізована в об'ємі V . Нехтуючи випромінюванням, знайдіть загальну формулу для енергії взаємодії частинок.
107. Обчисліть енергію взаємодії системи точкових зарядів з точністю до $1/c^2$ включно.
108. Обчисліть енергію взаємодії системи зарядів, які рухаються зі сталою швидкістю v . Розгляньте випадок $v \rightarrow c$.