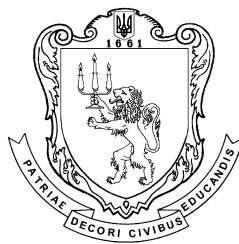


С. С. ПІХ, А. А. РОВЕНЧАК, Ю. С. КРИНИЦЬКИЙ

# 1001 задач

з математичної фізики

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів  
фізичних спеціальностей університетів*



Львівський національний університет імені Івана Франка  
Львів • 2006

УДК [517.5 + 517.4 + 517.9](075.8)

П 32

ББК В161я73-4 + В311я73-4

*Піх С. С., Ровенчак А. А., Криницький Ю. С.* **1001 задача з математичної фізики.**— Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2006.— 328 с.

Збірник складається з чотирьох розділів: “Теорія функцій комплексної змінної”, “Інтегральні перетворення. Узагальнені функції”, “Рівняння математичної фізики”, “Додаткові розділи” (сюди ввійшли окремі задачі варіаційного числення, задачі на спеціальні функції і на інтеграли й похідні дробового порядку). Теоретичний матеріал супроводжують приклади розв’язування типових задач. Збірник містить відповіді до всіх задач (за винятком задач на доведення), подекуди подано вказівки і розв’язки.

Для студентів та аспірантів фізико-математичних спеціальностей університетів і для самоосвіти.

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей університетів  
(Лист №14/18.2-103 від 23.01.2006)*

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. **С. Й. Вільчинський**  
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)  
д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. В. Токарчук**  
(Інститут фізики конденсованих систем НАН України)  
д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. В. Ваврух**  
(Львівський національний університет імені Івана Франка)

*S. S. Pikh, A. A. Rovenchak, Yu. S. Krynytskyi,* **1001 Problem on Mathematical Physics.**— Lviv: Lviv University Press, 2006.— 328 p.

The book consists of four chapters: *Theory of complex variable, Integral Transforms. Generalized functions, Equations of mathematical physics, Supplements* (in this chapter, some problems of the variational calculus as well as those on special functions, fractional integrals and derivatives are given). The theoretical material is followed by some examples of solutions for typical problems. The book contains answers to all the problems (except those that are proofs). Sometimes instructions and solutions are also adduced.

The book is meant for students and post-graduates of physics and mathematics as well as for self-education.

© С. С. Піх, А. А. Ровенчак,  
Ю. С. Криницький, 2006

ISBN 966-613-412-8

© Ф. П. Лукавий, обкладинка, 2006

## Зміст

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| Вступне слово . . . . .                                          | 5   |
| Перелік основних позначень . . . . .                             | 6   |
| I. Теорія функцій комплексної змінної . . . . .                  | 9   |
| I.1. Комплексні числа й дії над ними . . . . .                   | 9   |
| I.2. Тригонометрична форма комплексного числа . . . . .          | 15  |
| I.3. Функції комплексної змінної . . . . .                       | 20  |
| I.4. Диференціювання функцій комплексної змінної . . . . .       | 36  |
| I.5. Інтегрування функцій комплексної змінної . . . . .          | 44  |
| I.6. Інтегральна формула Коші . . . . .                          | 56  |
| I.7. Степеневі ряди . . . . .                                    | 63  |
| I.8. Застосування теорії лишків . . . . .                        | 80  |
| I.9. Конформні відображення . . . . .                            | 121 |
| II. Інтегральні перетворення. Узагальнені функції . . . . .      | 126 |
| II.1. Перетворення Лапласа . . . . .                             | 127 |
| II.2. Перетворення Фур'є . . . . .                               | 135 |
| II.3. Інші інтегральні перетворення . . . . .                    | 141 |
| II.4. Звичайні лінійні диференціальні рівняння . . . . .         | 143 |
| II.5. Узагальнені функції . . . . .                              | 147 |
| II.6. Підсумовування числових рядів . . . . .                    | 153 |
| III. Рівняння математичної фізики . . . . .                      | 159 |
| III.1. Класифікація рівнянь з частинними похідними . . . . .     | 159 |
| III.2. Загальний розв'язок рівнянь гіперболічного типу . . . . . | 164 |
| III.3. Метод характеристик . . . . .                             | 169 |
| III.4. Метод відокремлення змінних . . . . .                     | 175 |
| III.5. Метод інтегральних перетворень . . . . .                  | 205 |
| III.6. Метод функцій Гріна . . . . .                             | 209 |

|                                                        |     |
|--------------------------------------------------------|-----|
| IV. Додаткові розділи . . . . .                        | 237 |
| IV.1. Спеціальні функції . . . . .                     | 237 |
| IV.2. Варіаційне числення . . . . .                    | 255 |
| IV.3. Інтеграли й похідні дробового порядку . . . . .  | 265 |
| Додаток А. Таблиці інтегральних перетворень . . . . .  | 268 |
| А.1. Перетворення Лапласа . . . . .                    | 268 |
| А.2. Перетворення Фур'є . . . . .                      | 270 |
| А.3. Перетворення Мелліна . . . . .                    | 271 |
| А.4. Перетворення Ганкеля . . . . .                    | 272 |
| Додаток В. Ортогональні системи координат . . . . .    | 273 |
| Додаток С. Деякі дробові інтеграли й похідні . . . . . | 274 |
| Відповіді, вказівки, розв'язки . . . . .               | 275 |
| Література . . . . .                                   | 324 |

Пізнання, чашнику, — то є вино свяченне.  
Знань не давати — гріх великий, як на мене.  
Той, хто не знає, у житті не має цілі.  
Пізнати — ціль; хай буде кожен ним натхнений.

(*Омар Хайям*. Рубайят.  
Поетична інтерпретація *Григорія Латника*)

## Вступне слово

Пропонуємо Вашій увазі збірник, у якому зібрано 1001 задачу з різних розділів математичної фізики. Видання складається з трьох основних розділів (“Теорія функцій комплексної змінної”, “Інтегральні перетворення. Узагальнені функції”, “Рівняння математичної фізики”), та з одного додаткового, куди увійшли окремі задачі варіаційного числення, задачі, пов’язані з використанням спеціальних функцій, а також задачі на інтеграли й похідні дробового порядку, використання яких у сучасній фізиці стає по-раз ширшим. Залежно від рівня складності чи подібності задачі подекуди згруповано так, що всього разом налічується 723 завдання.

Для всіх задач (за винятком задач на доведення) наведено відповіді, а окремі з них супроводжуються вказівками і часом розлогими розв’язками. Теоретичний матеріал проілюстровано прикладами розв’язування типових задач. Сподіваємося, це сприятиме самостійній роботі над завданнями, що особливо актуально у зв’язку з реорганізацією навчального процесу після підписання Україною Болонської декларації.

До збірника увійшли, крім “стандартних”, також авторські задачі. Книжку укладено з використанням досвіду авторів у викладанні курсу “Методи математичної фізики” на фізичному факультеті та факультеті електроніки Львівського національного університету імені Івана Франка.

Автори висловлюють подяку людям, які знайомилися з рукописом книги і надавали допомогу під час роботи над збірником: студентам, які допомагали виявляти помилки, колегам з кафедри теоретичної фізики Львівського університету, зокрема Тарасові Фітю за цінні коментарі й зауваження, Олені Кіктевій за допомогу при комп’ютерному наборі, а також мовному редакторові Соломії Бук і рецензентам проф. М. В. Ваврухові, проф. М. В. Токарчукові і проф. С. Й. Вільчинському.

Просимо надсилати всі зауваження й побажання на адресу:  
Кафедра теоретичної фізики, вул. Драгоманова, 12, м. Львів, 79005, e-mail:  
z1001@ktf.franko.lviv.ua.

*С. С. Піх, А. А. Ровенчак, Ю. С. Криницький*  
*Львів, жовтень 2005*

## Перелік основних позначень

Числові множини:

$\mathbb{N}$  натуральні числа

$\mathbb{Z}$  цілі числа

$\mathbb{R}$  дійсні числа

$\mathbb{C}$  комплексні числа

$\bar{\mathbb{C}}$  розширена множина комплексних чисел  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Інтегральні перетворення:

$\mathcal{L}$  перетворення Лапласа (одностороннє)

$\mathcal{L}_B$  перетворення Лапласа (двостороннє)

$\mathcal{F}$  перетворення Фур'є

$\mathcal{F}_c$  косинус-перетворення Фур'є

$\mathcal{F}_s$  синус-перетворення Фур'є

$\mathcal{M}$  перетворення Мелліна

$\mathcal{H}$  перетворення Гільберта

$\mathcal{H}_\nu$  перетворення Ганкеля

$\mathcal{D}^\nu$  — дробова похідна порядку  $\nu$

$\mathcal{J}^\nu$  — дробовий інтеграл порядку  $\nu$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{S}, \dots$  — функціонали.

Оператор “набла”:  $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ .

Градiєнт, дивергенція, ротор:

$$\operatorname{grad} \varphi \equiv \nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv (\nabla \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv [\nabla \times \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Похідна за напрямком:  $\frac{\partial}{\partial n} = (\mathbf{n} \nabla) = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} + n_z \frac{\partial}{\partial z}.$

Оператор Лапласа:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \text{і т. д.}$$

v. p. — “в сенсі головного значення”.

Факторіал  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ,  $0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$ .

Подвійний факторіал

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n), \quad (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1).$$

$C^n(D)$  — множина неперервних функцій,  $n$  разів диференційовних в області  $D$ .

## Грецький алфавіт

|     |         |         |        |         |         |         |         |
|-----|---------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Α α | альфа   | Η η     | ета    | Ν ν     | ню      | Τ τ     | тау     |
| Β β | бета    | Θ θ (ϑ) | тета   | Ξ ξ     | ксі     | Υ υ     | іпсилон |
| Γ γ | гамма   | Ι ι     | йота   | Ο ο     | омікрон | Φ φ (ϕ) | фі      |
| Δ δ | дельта  | Κ κ (κ) | каппа  | Π π     | пі      | Χ χ     | хі      |
| Ε ε | епсилон | Λ λ     | лямбда | Ρ ρ (ρ) | ро      | Ψ ψ     | псі     |
| Ζ ζ | дзета   | Μ μ     | мю     | Σ σ, ς  | сігма   | Ω ω     | омега   |

## Латинський алфавіт

|     |    |     |     |     |    |     |          |
|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|----------|
| A a | a  | G g | же  | N n | ен | U u | у        |
| B b | бе | H h | аш  | O o | о  | V v | ве       |
| C c | це | I i | i   | P p | пе | W w | дубль-ве |
| D d | де | J j | йот | Q q | ку | X x | ікс      |
| E e | е  | K k | ка  | R r | ер | Y y | ігрек    |
| F f | еф | L l | ель | S s | ес | Z z | зет      |
|     |    | M m | ем  | T t | те |     |          |



## I. Теорія функцій комплексної змінної

### I.1. Комплексні числа й дії над ними

**Комплексним числом**  $z$  називають вираз вигляду  $z = x + iy$  (алгебраїчна форма комплексного числа), де  $x$  і  $y$  — довільні дійсні числа,  $i$  — уявна одиниця, що задовольняє умову  $i^2 = -1$ .

Числа  $x$  і  $y$  називають відповідно **дійсною** й **уявною** частиною комплексного числа  $z$  і позначають

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

( $\operatorname{Re}$  і  $\operatorname{Im}$  — початкові букви латинських слів *realis* та *imaginaris*). Якщо  $y = 0$ , то  $x + i0$  збігається з дійсним числом  $x$ ; якщо ж  $y \neq 0$ , то  $0 + iy$  позначають  $iy$  і називають **уявним числом**. Покладають також, що  $0 = 0 + i0$ .

Комплексне число  $\bar{z} = x - iy$  називають **спряженим** до комплексного числа  $z$ .

Комплексні числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  і  $z_2 = x_2 + iy_2$  дорівнюють одне одному **тоді і тільки тоді**, коли  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ . Для комплексних чисел не вводять поняття відношень “більше” і “менше”.

Комплексне число  $z = x + iy$  зображається в площині  $XOY$  точкою  $M$  з координатами  $(x, y)$  або вектором, початок якого міститься в точці  $O(0, 0)$ , а кінець у точці  $M(x, y)$  (див. рис. 1.1). Тому площину  $XOY$  називають  $\mathbb{C}$ , і, як легко переконатися геометрично, додавання (віднімання) комплексних чисел виконують за правилом додавання (віднімання) векторів (див. рис. 1.2).

Довжина  $\rho$  вектора  $\overrightarrow{OM}$  має назву **модуля** комплексного числа і позначається  $|z|$ , так, що  $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Кут  $\varphi$ , що утворює вектор  $\overrightarrow{OM}$  із додатним напрямком осі  $OX$ , називають **аргументом**

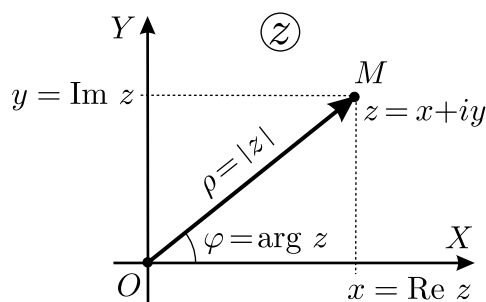


Рис. 1.1. Геометрична інтерпретація комплексного числа

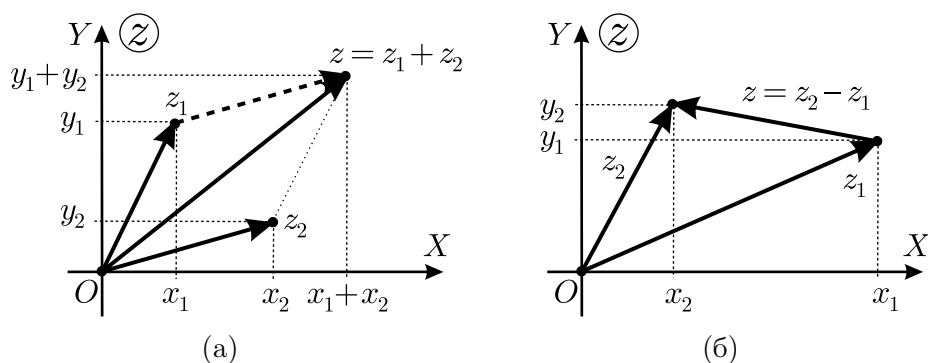


Рис. 1.2. Додавання (а) і віднімання (б) комплексних чисел

комплексного числа  $z$  і позначають  $\varphi = \text{Arg } z$ ; він визначається не однозначно, а з точністю до доданка, кратного  $2\pi$ :

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi, \quad -\pi < \arg z \leq \pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

де  $\varphi = \arg z$  — **головне значення**  $\text{Arg } z$ , що визначається умовами

$$\arg z = \begin{cases} \arctg(y/x) & \text{якщо } x > 0, \\ \pi + \arctg(y/x), & \text{якщо } x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \arctg(y/x), & \text{якщо } x < 0, y < 0, \\ \pi/2, & \text{якщо } x = 0, y > 0, \\ -\pi/2, & \text{якщо } x = 0, y < 0. \end{cases} \quad (\text{I.1-1})$$

Існують такі співвідношення:

$$\operatorname{tg}(\arg z) = \frac{y}{x}, \quad \sin(\arg z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos(\arg z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Для числа  $z = 0$  поняття аргумента не має сенсу.

Два комплексних числа  $z_1$  і  $z_2$  **дорівнюють** одне одному **тоді і тільки тоді**, коли їхні модулі рівні, а аргументи або рівні, або відрізняються на величину, кратну  $2\pi$ :

$$|z_1| = |z_2|, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Сумою**  $z_1 + z_2$  комплексних чисел  $z_1$  і  $z_2$  називають комплексне число  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ . Для модуля суми комплексних чисел виконується умова  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  (рівність досягається, коли  $\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2$ ).

**Різницею**  $z_1 - z_2$  комплексних чисел  $z_1$  і  $z_2$  називають комплексне число  $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ . Для модуля різниці комплексних чисел виконується умова  $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$  (рівність досягається, коли  $\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2$ ).

**Добутком**  $z_1 \cdot z_2$  комплексних чисел  $z_1$  і  $z_2$  називають комплексне число  $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ .

Із визначення добутку комплексних чисел, зокрема, випливає, що  $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$ .

**Часткою**  $z_1/z_2$ ,  $z_2 \neq 0$  комплексних чисел  $z_1$  і  $z_2$  називають таке комплексне число  $z$ , що задовольняє рівняння  $zz_2 = z_1$ . Отже, маємо формулу

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2},$$

або

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Дійсна частина  $\operatorname{Re} z$  й уявна частина  $\operatorname{Im} z$  комплексного числа  $z$  виражається через спряжені комплексні числа так:

$$\operatorname{Re} z = \frac{\bar{z} + z}{2}, \quad \operatorname{Im} z = i \frac{\bar{z} - z}{2} = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$


---

▼ **Приклад 1.** Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i.$$

*Розв'язування.* Виділимо в лівій частині рівняння дійсну й уявну частини:  $(4x + 5y) + i(2x - 3y) = 13 + i$ . Звідси за означенням рівності двох комплексних чисел випливає

$$\begin{cases} 4x + 5y = 13, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо  $x = 2$ ,  $y = 1$ .



▼ **Приклад 2.** Записати в алгебраїчній формі вираз

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{\bar{z}^2}$$

*Розв'язування.* З означення арифметичних дій над комплексними числами маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{\bar{z}^2} &= \frac{\bar{z}^2}{z^2 \bar{z}^2} + \frac{z^2}{\bar{z}^2 z^2} = \frac{(x - iy)^2 + (x + iy)^2}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{x^2 - y^2 - 2ixy + x^2 - y^2 + 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$



▼ **Приклад 3.** Записати в комплексній формі рівняння кола  $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ . *Розв'язування.* Маємо:

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}, \quad 2x = \bar{z} + z, \quad 2y = i(\bar{z} - z).$$

Підставимо в рівняння й одержимо:

$$z\bar{z} + \bar{z} + z + i(\bar{z} - z) = 0,$$

або

$$z\bar{z} + (1 - i)z + (1 + i)\bar{z} = 0.$$



**Завдання.**

Знайти дійсні розв'язки рівнянь:

I.1.  $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$ .

I.2.  $(x - iy)(a - ib) = i^5$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $|a| \neq |b|$ .

I.3.  $\cos x + i \sin x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i$ .

I.4. Записати комплексне число  $\frac{1}{(a + ib)^2} + \frac{1}{(a - ib)^2}$  в алгебраїчній формі.

I.5. Довести, що  $\frac{\sqrt{1+x^2} + ix}{x - i\sqrt{1+x^2}} = i$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

I.6. Знайти всі комплексні числа, що задовольняють умову  $\bar{z} = z^2$ .

I.7. Довести співвідношення:

а)  $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ ;

б)  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ;

в)  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ ;

г)  $\overline{\overline{z_1 + z_2}} = z_1 + z_2$ .

Знайти модуль і головне значення аргумента комплексних чисел:

I.8. а)  $z = 4 + 3i$ ; б)  $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ ; в)  $z = -7 - i$ .

I.9. а)  $z = 4 - 3i$ . б)  $z = -\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ .

I.10. Довести, що

а)  $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ,  $|z_2| \neq 0$ ;

б)  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ;

в)  $|\bar{z}| = |z|$ ;

г)  $|z^n| = |z|^n$ .

I.11. Виразити  $x$  і  $y$  через  $u$  і  $v$ , якщо  $\frac{1}{x + iy} + \frac{1}{u + iv} = 1$   
( $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ ).

I.12. Довести, що

$$z_1 \operatorname{Im}(\bar{z}_2 z_3) + z_2 \operatorname{Im}(\bar{z}_3 z_1) + z_3 \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2) = 0.$$

I.13. Нехай  $z \neq -1$ . Довести, що

$$\text{а) } \operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z| = 1;$$

$$\text{б) } \operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} z = 0.$$

Довести тотожності:

$$\text{I.14. а) } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2);$$

$$\text{б) } |1 - z_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1 z_2|)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2.$$

$$\text{I.15. а) } \left| z + \frac{1}{2} \right|^2 + i \left| z + \frac{i}{2} \right|^2 - (1+i)|z|^2 - \frac{1}{4}(1+i) = z;$$

$$\text{б) } \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3} \right| = r, \quad \text{якщо } |z_1| = |z_2| = |z_3| = r.$$

I.16. Нехай  $z_0$  — один з розв'язків рівняння  $z^2 + z + 1 = 0$ . Довести, що для довільних  $z_1, z_2, z_3$

$$\begin{aligned} & |z_1 + z_2 + z_3|^2 + |z_1 + z_0 z_2 + z_0^2 z_3|^2 + |z_1 + z_0^2 z_2 + z_0 z_3|^2 = \\ & = 3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2). \end{aligned}$$

Записати в комплексній формі рівняння ліній:

$$\text{I.17. а) прямої } y = x; \quad \text{б) рівнобічної гіперболи } x^2 - y^2 = a^2;$$

$$\text{I.18. а) кола } x^2 + y^2 + 2x = 0; \quad \text{б) } xy = 1; \quad \text{в) } \rho = \frac{1}{1 + \cos \varphi}.$$

I.19. Довести, що множина тих точок  $z \in \mathbb{C}$ , для яких  $\left| \frac{z - z_0}{z} \right| = 2$  ( $z_0 \in \mathbb{C}$ ), збігається з колом з центром у точці  $-\frac{z_0}{3}$  і радіусом  $\frac{2}{3}|z_0|$ .

- I.20. Показати, що корені квадратного рівняння  $az^2 + bz + c = 0$  з дійсними  $a, b, c$  і від'ємним дискримінантом утворюють пару взаємно спряжених комплексних чисел.
- I.21. Знайти вираз для  $\sqrt{x + iy}$  в алгебраїчній формі (тобто без використання тригонометричних функцій).

## I.2. Тригонометрична форма комплексного числа

Будь-яке комплексне число  $z = x + iy$  ( $z \neq 0$ ) можна записати в тригонометричній формі

$$z = |z| (\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z).$$

Нехай комплексні числа  $z_1$  і  $z_2$  задані в тригонометричній формі. Тоді добуток цих чисел визначається за формулою

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| [\cos (\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) + i \sin (\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2)],$$

тобто при множенні комплексних чисел їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

Частку двох комплексних чисел  $z_1$  і  $z_2 \neq 0$  знаходять за формулою

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos (\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2) + i \sin (\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2)],$$

тобто  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ,  $\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$ .

Піднесення комплексного числа до натурального степеня  $n$  здійснюється за формулою

$$z^n = |z|^n (\cos n \operatorname{Arg} z + i \sin n \operatorname{Arg} z),$$

отже,  $|z^n| = |z|^n$ ,  $\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z$ .

Звідси виводять формулу Муавра:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

**▼ Приклад 1.** Знайти модуль та аргумент комплексного числа  $z = -\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8}$ .

*Розв'язування.* Головним значенням аргумента, згідно з означенням, буде

$$\begin{aligned} \arg z &= -\pi + \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} \right) = -\pi + \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right] = \\ &= -\pi + \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{3}{8}\pi \right) = -\pi + \frac{3}{8}\pi = -\frac{5}{8}\pi. \end{aligned}$$

Отже:

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{5}{8}\pi + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad |z| = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8}} = 1.$$

**▼ Приклад 2.** Записати в тригонометричній формі комплексне число  $z = -1 - i\sqrt{3}$ .

*Розв'язування.* Маємо:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}, \quad \varphi = -\frac{2}{3}\pi.$$

$$\text{Отже, } -1 - i\sqrt{3} = 2 \left[ \cos \left( -\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{2\pi}{3} \right) \right].$$

**▼ Приклад 3.** Обчислити  $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$ .

*Розв'язування.* Запишемо  $z = -1 + i\sqrt{3}$  у тригонометричній формі

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$



Тоді

$$\begin{aligned} (-1 + i\sqrt{3})^{60} &= 2^{60} \left[ \cos \left( 60 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( 60 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) \right] = \\ &= 2^{60} (\cos 40\pi + i \sin 40\pi) = 2^{60}. \end{aligned}$$



▼ **Приклад 4.** Яка крива визначається рівнянням  $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ ?  
*Розв'язування.* Нехай  $z = x + iy$ .

$$\text{Маємо } \operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{\frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Отже, } \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4}, \text{ або } x^2 + y^2 - 4x = 0.$$

$$\text{Це рівняння кола } (x - 2)^2 + y^2 = 4.$$



▼ **Приклад 5.** Знайти кут, на який треба повернути вектор  $4 - 3i$ , щоб одержати вектор  $-\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}i$ .

*Розв'язування.* З умов задачі випливає:

$$(4 - 3i)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \frac{5}{\sqrt{2}}(-1 + i),$$

або

$$\begin{cases} 4 \cos \varphi + 3 \sin \varphi &= -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ -3 \cos \varphi + 4 \sin \varphi &= \frac{5}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{10}, \cos \varphi = -\frac{7\sqrt{2}}{10}, \text{ тобто } \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{7} \text{ і } \varphi = -\operatorname{arctg} \frac{1}{7}.$$





I.29.  $z^2 + \bar{z}^2 = 1$ .

I.30. а)  $2z\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$ ;      б)  $|z-2| = |1-2\bar{z}|$ .

I.31. а)  $\operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}) = 0$ ;      б)  $\operatorname{Re}(1+z) = |z|$ .

I.32. а)  $|z-i| + |z+i| = 4$ ;    б)  $|z| - 3 \operatorname{Im} z = 6$ ;    в)  $3|z| - \operatorname{Re} z = 12$ .

I.33. В який вектор перейде вектор  $-\sqrt{3} - i$  після повороту на кут  $120^\circ$ ?I.34. Знайти кут, на який треба повернути вектор  $3\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$ , щоб одержати вектор  $-5 + i$ .I.35. Знайти вектор, в який після повороту на кут  $45^\circ$  і подвоєння перейде вектор  $z = 3 + 4i$ .I.36. В який вектор перейде вектор  $-\sqrt{3} + 3i$  після повороту на кут  $90^\circ$ ?I.37. Використовуючи формулу Муавра, виразити через степені  $\sin \varphi$  та  $\cos \varphi$  такі функції кратних кутів:

а)  $\sin 3\varphi$ ;      б)  $\cos 3\varphi$ ;      в)  $\sin 4\varphi$ ;      г)  $\cos 4\varphi$ .

I.38. Довести, що 
$$\left( \frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha} \right)^n = \frac{1+i \operatorname{tg} n\alpha}{1-i \operatorname{tg} n\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

I.39. Знайти таке найменше ціле додатне число  $n$ , для якого

$$\left( \frac{1+i}{1-i} \right)^n = 1.$$

I.40. Довести, що многочлен

$$f(x) = x^n \sin \alpha - \lambda^{n-1} x \sin n\alpha + \lambda^n \sin(n-1)\alpha$$

ділиться на  $x^2 - 2\lambda x \cos \alpha + \lambda^2$ .

I.41. Довести: 
$$\left( \frac{1-ia}{1+ia} \right)^{ib} = \exp(2b \operatorname{arctg} a).$$

### I.3. Функції комплексної змінної

#### Однозначні функції комплексної змінної

Нехай  $D$  — деяка множина з  $\mathbb{C}$ . Якщо кожному  $z \in \mathbb{C}$  ставиться у відповідність одне значення  $f(z) \in \mathbb{C}$ , то на множині  $D$  задано **функцію**  $f$ . Якщо кожному  $z \in \mathbb{C}$  поставлено у відповідність деяку множину  $f(z) \subset \mathbb{C}$ , то на множині  $D$  задано **багатозначну функцію**  $f$ . Множину  $D$  називають **областю визначення функції**,  $w = f(z)$  — **множиною значень функції**.

Можна подати інше формулювання. Задати комплексну функцію комплексної змінної  $w = f(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$  означає задати пару дійсних функцій двох дійсних змінних  $u = u(x, y)$  і  $v = v(x, y)$  для всіх  $(x, y) \in D$  таких, що для довільного  $z = x + iy \in D$  маємо  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Функцію  $u = \operatorname{Re} f(z)$  називають **дійсною частиною** функції  $f$ , а  $v = \operatorname{Im} f(z)$  — її **уявною частиною**. Якщо  $f$  — однозначна функція, то функції  $u$  і  $v$  також однозначні.

Геометрично функція  $w = f(z)$ ,  $z \in D$  відображає область визначення  $D$  на множину її значень. Множину  $f(z)$  (значень функції  $f$  у точці  $z \in D$ ) називають **образом** точки при відображенні  $f$ , а точку  $z \in D$  — **прообразом** точки  $w$ , якщо  $f(z) = w$ .

Нехай у  $z$ -площині  $\mathbb{C}$  крива задана рівнянням  $F(x, y) = 0$ . Щоб знайти рівняння образу  $\Phi(u, v) = 0$  цієї кривої при відображенні  $w = f(z)$ , треба вилучити  $x$  і  $y$  з рівнянь

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \\ F(x, y) = 0. \end{cases}$$

Якщо криву задано параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{або} \quad z = z(t) = x(t) + iy(t),$$

то параметричні рівняння її образу будуть:

$$\begin{aligned} u &= u(x(t), y(t)) = U(t), \\ v &= v(x(t), y(t)) = V(t). \end{aligned}$$

▼ **Приклад 1.** Знайти образ кола

$$z = R \cos t + iR \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

при відображенні  $w = \frac{z}{\bar{z}}$ .

*Розв'язування.* Нехай  $z = x + iy$ , тоді рівняння кола можна записати так:

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Знайдемо дійсну й уявну частини функції  $w = u + iv$ . Маємо

$$u + iv = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{\bar{z}z} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Звідси

$$u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Підставляючи  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$  в  $u$  і  $v$ , одержимо параметричні рівняння образу кола:

$$u = \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \cos 2t,$$

$$v = \frac{2 \cos t \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sin 2t,$$

або  $u^2 + v^2 = 1$ .

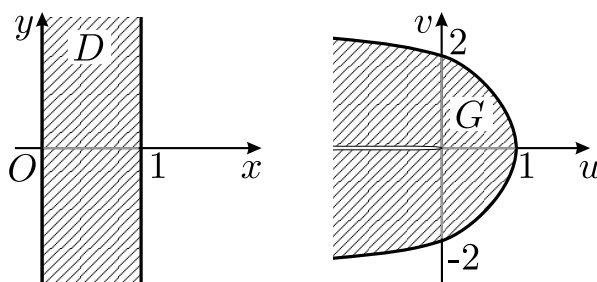
Отже, образом є одиничне коло, яке обходитьс<sup>я</sup> двічі.



▼ **Приклад 2.** Знайти образ смуги  $0 < \operatorname{Re} z < 1$  площини  $z$  при відображенні  $w = z^2$ . *Розв'язування.* Нехай  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ ,  $u = \operatorname{Re} w$ ,  $v = \operatorname{Im} w$ . Тоді знайдемо для функції  $w = z^2$

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Спочатку розглянемо однопараметричне сімейство прямих  $x = a$  ( $0 < a < 1$ ), що заповнюють смугу  $D : 0 < x < 1$ . Образом цієї смуги буде множина площини  $w$ , яку заповнюють образи таких прямих. Тому знайдемо образ прямої  $x = a$ ,  $-\infty < y < \infty$  при відображенні  $w = z^2$ . Це буде лінія  $u = a^2 - y^2$ ,  $v = 2ay$ , або, вилучаючи параметр  $y$ , лінія  $u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}$  ( $v \in \mathbb{R}$ ), тобто парабола. Тепер знайдемо образи прямих  $x = 1$  і  $x = 0$ . Образом прямої  $x = 1$  є парабола  $u = 1 - \frac{v^2}{4}$  ( $v \in \mathbb{R}$ ), а для другої прямої — лінія  $u = -y^2$ ,  $v = 0$  ( $y \in \mathbb{R}$ ), тобто від'ємна частина дійсної осі  $u$  (з початком координат). Тому, змінюючи параметр  $a$  від нуля до одиниці, одержимо, що образом області  $D$  є область  $G$  площини  $w$ , що лежить всередині параболи  $u = 1 - \frac{v^2}{4}$  ( $v \in \mathbb{R}$ ), за винятком від'ємної частини осі  $u$  (див. рисунок).



### Дробово-раціональна функція

$$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}, \quad m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Зокрема, раціональною функцією є многочлен

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n.$$

**Показникова функція**  $\exp z$  або  $e^z$  визначається як сума абсолютно збіжного в усій  $z$ -площині  $\mathbb{C}$  степеневому ряду

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Із цієї рівності одержуємо, що  $|e^z| = e^x$ ,  $\operatorname{Arg}(e^z) = y + 2\pi k$  ( $\forall k \in \mathbb{Z}$ ).

Оскільки  $|e^z| = e^x \neq 0$ , то функція  $w = e^z$  при жодному значенні  $z \in \mathbb{C}$  не має значення  $w = 0$ .

Існують інші способи введення показникової функції комплексної змінної, зокрема, покладають, що

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Іноді функцію  $f(z) = e^z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , означають як розв'язок диференціального рівняння

$$f'(z) = f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

що задовольняє умову  $f(0) = 1$ .

Показникова функція  $e^z$  має такі властивості:

а)  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ , б)  $e^{z \pm 2k\pi i} = e^z$  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ ), тобто  $e^z$  є періодичною функцією з періодом  $2\pi i$ .

**Тригонометричні функції**  $\sin z$  і  $\cos z$  визначаються степеневими рядами:

$$\begin{aligned} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots, \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \mp \dots, \end{aligned}$$

абсолютно збіжними для будь-якого комплексного значення  $z \in \mathbb{C}$ . Функції  $\sin z$  та  $\cos z$  — періодичні функції з дійсним періодом  $2\pi$  і мають тільки дійсні нулі:  $z = k\pi$  і  $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$  відповідно, де  $k \in \mathbb{Z}$ .

Для функцій  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , маємо формулу Ейлера

$$e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z, \quad (\text{I.3-2})$$

звідки

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (\text{I.3-3})$$

Безпосередньо з означення випливає, що функція  $w = \cos z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , — парна, а  $w = \sin z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , — непарна. Функції  $w = \cos z$ ,  $w = \sin z$  задовольняють для всіх  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  рівності:

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad (\text{I.3-4})$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \quad (\text{I.3-5})$$

(теореми додавання). Ці формули основні в теорії тригонометричних функцій. Зокрема, з них одержують формули зведення аргумента

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z, \quad \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \quad (\forall z \in \mathbb{C}), \quad (\text{I.3-6})$$

а також основну тригонометричну тотожність

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad (\forall z \in \mathbb{C}). \quad (\text{I.3-7})$$

Отже, усі відомі співвідношення між тригонометричними функціями дійсного аргумента справджуються і в комплексній області. Однак, на відміну від синуса й косинуса дійсного аргумента, модулі яких обмежені одиницею,  $|\cos z|$  і  $|\sin z|$  обмежені не для всіх  $z \in \mathbb{C}$ . Крім того, при  $|y| \rightarrow +\infty$

$$|\cos z| \sim \frac{1}{2}e^{|y|}, \quad |\sin z| \sim \frac{1}{2}e^{|y|},$$

і, отже,  $|\cos z|$  і  $|\sin z|$  можуть мати як завгодно великі значення при досить великих  $|y|$ .

Функції  $\operatorname{tg} z$  і  $\operatorname{ctg} z$  визначають рівностями

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z} & (\forall z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}), \\ \operatorname{ctg} z &= \frac{\cos z}{\sin z} & (\forall z \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (\text{I.3-8})$$



Функції  $\sec z$  (секанс) і  $\operatorname{cosec} z$  (косеканс) вводять так:

$$\begin{aligned}\sec z &= \frac{1}{\cos z} & (\forall z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}), \\ \operatorname{cosec} z &= \frac{1}{\sin z} & (\forall z \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}\tag{I.3-9}$$

**Гіперболічні функції**<sup>1</sup>  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ ,  $\operatorname{th} z$ ,  $\operatorname{cth} z$ ,  $\operatorname{sech} z$ ,  $\operatorname{cosech} z$  визначаються рівностями

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{I.3-10}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}, \tag{I.3-11}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cosech} z = \frac{1}{\operatorname{sh} z}. \tag{I.3-12}$$

Тригонометричні й гіперболічні функції пов'язані між собою співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\sin z &= -i \operatorname{sh} iz, & \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, \\ \cos z &= \operatorname{ch} iz, & \operatorname{ch} z &= \cos iz, \\ \operatorname{tg} z &= -i \operatorname{th} iz, & \operatorname{th} z &= -i \operatorname{tg} iz, \\ \operatorname{ctg} z &= i \operatorname{cth} iz, & \operatorname{cth} z &= i \operatorname{cth} iz, \\ \sec z &= \operatorname{sech} iz, & \operatorname{sech} z &= \sec iz, \\ \operatorname{cosec} z &= i \operatorname{cosech} iz, & \operatorname{cosech} z &= i \operatorname{cosec} iz.\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>В англomовній літературі для цих функцій прийнято дещо інші позначення:  $\sinh z$ ,  $\cosh z$ ,  $\tanh z$ ,  $\coth z$  і  $\operatorname{csch} z$  для косеканса гіперболічного. Для звичайних тангенса й котангенса також використовують позначення  $\tan z$  і  $\cot z$  відповідно, а для косеканса —  $\csc z$ .

▼ **Приклад 3.** Знайти модуль функції  $w = \sin z$  у точці  $z = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5})$ .

*Розв'язування.* Нехай  $z = x + iy$ . Тоді  $w = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x$ . Модуль функції  $\sin z$  дорівнює

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y \cos^2 x} = \\ &= \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y (1 - \sin^2 x)} = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}. \end{aligned}$$

Покладаючи  $z = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5})$ , знаходимо

$$\begin{aligned} \left| \sin \left[ \pi + i \ln(2 + \sqrt{5}) \right] \right| &= \operatorname{sh} \left[ \ln(2 + \sqrt{5}) \right] = \\ &= \frac{e^{\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-\ln(2+\sqrt{5})}}{2} = \frac{2 + \sqrt{5} - \frac{1}{2+\sqrt{5}}}{2} = 2. \end{aligned}$$

Цей приклад підтверджує зазначений вище факт, що модуль функцій  $\sin z$  може бути більшим за одиницю.



### Завдання.

I.42. Знайти образи даних точок при вказаних відображеннях:

- |                                          |                                                 |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| а) $z_0 = -i, \quad w = z^2;$            | б) $z_0 = 1 - i, \quad w = (z - i)^2;$          |
| в) $z_0 = 1, \quad w = \frac{1}{z - i};$ | г) $z_0 = 2 + 3i, \quad w = \frac{\bar{z}}{z}.$ |

Виділити дійсну й уявну частини функцій:

I.43. а)  $w = 2z - 1;$       б)  $w = z + z^2;$       в)  $w = z^{-1}.$

I.44. а)  $w = \bar{z} - iz^2;$       б)  $w = \frac{z^2 - iz - 1}{2iz}.$

I.45. а)  $w = e^{-z};$       б)  $w = e^{\bar{z}^2};$   
 в)  $w = \sin z;$       г)  $w = \operatorname{ch}(z - i).$

I.46. а)  $w = \operatorname{sh} z$ ; б)  $w = \operatorname{tg} z$ ; в)  $w = \cos z$ .

I.47. а)  $w = \frac{1+iz}{1+\bar{z}}$ ; б)  $w = \frac{\bar{z}}{z}$ .

Записати кожне з чисел у вигляді  $a + ib$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ):

I.48. а)  $e^{2+i\pi/4}$ ; б)  $e^{1+3\pi i} \cdot e^{1+i\pi/2}$ .

I.49. а)  $\sin 2i$ ; б)  $\cos(1-i)$ ; в)  $\operatorname{sh}(1+\pi i)$ .

I.50. Знайти образи:

а) кола  $|z-1|=2$  при відображенні  $w=z^2$ ;

б) круга  $|z|<\frac{1}{2}$  при відображенні  $w=\left(\frac{1-4z}{1-z}\right)^2$ ;

в) кола  $|z|=\frac{1}{2}$  при відображенні  $w=\frac{1}{z}$ .

Знайти модуль і головне значення аргумента зазначених функцій у вказаних точках:

I.51.  $w = \cos z$ , якщо: а)  $z_0 = \frac{\pi}{2} + i \ln 2$ ; б)  $z_0 = \pi + i \ln 2$ .

I.52.  $w = \operatorname{sh} z$ , якщо  $z_0 = 1 + i\frac{\pi}{2}$ .

I.53.  $w = ze^z$ , якщо  $z_0 = \pi i$ .

I.54.  $w = \operatorname{ch}^2 z$ , якщо  $z_0 = i \ln 3$ .

I.55. Знайти модуль і аргумент комплексного числа  $\operatorname{th} \pi i$ .

Довести

I.56. а)  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ ; б)  $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ .

I.57. а)  $|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$ ; б)  $|\sin z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}$ .

I.58. а)  $|\operatorname{tg} z| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}}$ ; б)  $|\operatorname{cth} z| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}{\operatorname{ch} 2x - \cos 2y}}$ .

I.59. а)  $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$ ;

б)  $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$ .

I.60. а)  $|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}$ ; б)  $|\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y}$ .

### Багатозначні функції комплексної змінної

Нехай функція  $w = f(z)$  відображає область  $D$  на область  $G$  і нехай вона є такою, що обернена функція  $z = \Phi(w)$  — багатозначна в області  $G$ . Якщо існують однозначні в області  $G$  функції  $z = \Phi_1(w), \Phi_2(w), \dots$ , для яких дана функція  $w = f(z)$  є оберненою, то функції  $z = \Phi_1(w), \Phi_2(w), \dots$  називають **однозначними відгалуженнями** функції  $\Phi(w)$  в області  $G$ .

Однозначних відгалужень може бути як скінченне, так і нескінченне число.

Точка, обхід навколо якої у досить малому околі спричиняє перехід від одного відгалуження багатозначної функції до іншого, називається **точкою розгалуження** багатозначної функції. Якщо після  $n$ -кратного обходу навколо точки розгалуження (у тому ж самому напрямку) повертаються до першого відгалуження багатозначної функції, то таку точку розгалуження називають **алгебраїчною**. Якщо ж довільна скінченна кількість обходів (у тому ж самому напрямку) навколо точки розгалуження не приведе до початкового відгалуження багатозначної функції, то таку точку розгалуження називають **логарифмічною** або **трансцендентною**.

**Функція  $w = \sqrt[n]{z}$ .** Нехай  $n \geq 1$  — деяке натуральне число. Багатозначна функція  $w = \sqrt[n]{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  є оберненою до степеневій функції  $z = w^n$ ,  $w \in \mathbb{C}$ . Точки  $z = 0$  і  $z = \infty$  — алгебраїчні точки розгалуження. Для кожного  $z \neq 0$  корінь  $n$ -го степеня з комплексного числа  $z$  має  $n$  різних значень, які знаходять за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}},$$

$$k = (0, n-1), \quad \varphi = \arg z. \quad (I.3-13)$$

Точки, що відповідають значенням  $\sqrt[n]{z}$ , є вершинами правильного  $n$ -кутника, вписаного в коло з радіусом  $R = \sqrt[n]{|z|}$  з центром в початку координат.

**Логарифмічна функція  $\operatorname{Ln} z$ ,** де  $z \neq 0$ , визначається як функція, що є оберненою до показникової, причому для всіх  $z$ , крім  $z = 0$

і  $z = \infty$

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{I.3-14})$$

Ця функція є нескінченнозначною. Головним значенням  $\operatorname{Ln} z$  називається те значення, що одержують при  $k = 0$ ; його позначають  $\ln z$ :  $\ln z = \ln |z| + i \arg z$  ( $z \neq 0, z \neq \infty$ ). Отже,  $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Існують такі співвідношення:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

На відміну від функції  $w = \sqrt[n]{z}$ , для  $\operatorname{Ln} z$  точки  $z = 0$  і  $z = \infty$  — це логарифмічні точки розгалуження.

**Обернені тригонометричні функції**<sup>2</sup>  $\operatorname{Arc} \sin z$ ,  $\operatorname{Arc} \cos z$ ,  $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} z$ ,  $\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} z$  визначають як функції, обернені відповідно до функцій  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{tg} z$ ,  $\operatorname{ctg} z$ . Усі ці функції є багатозначними і виражаються через логарифмічні функції:

$$\operatorname{Arc} \sin z = -i \operatorname{Ln} \left( iz \pm \sqrt{1 - z^2} \right), \quad (\text{I.3-15})$$

$$\operatorname{Arc} \cos z = -i \operatorname{Ln} \left( z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right), \quad (\text{I.3-16})$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad (\text{I.3-17})$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}. \quad (\text{I.3-18})$$

Головні значення обернених тригонометричних функцій одержують, якщо брати головні значення відповідних логарифмічних функцій. Їх позначають відповідними назвами з малої букви:  $\operatorname{arcsin} z$ ,  $\operatorname{arccos} z$  і т. д.

---

<sup>2</sup>Іноколи для цих функцій можна зустріти позначення:  $\sin^{-1} z$ ,  $\cos^{-1} z$  і т. д. Зрозуміло, що для арктангенса й арккотангенса також використовують  $\operatorname{Arc} \tan z$  і  $\operatorname{Arc} \cot z$  відповідно. Префікс  $\operatorname{Arc}$  походить від латинського *arcus* — дуга, оскільки значення оберненої тригонометричної функції відповідає кутові у радіанах, який дорівнює довжині дуги одиничного кола.

Функції  $w = \operatorname{Arc} \sin z$ ,  $w = \operatorname{Arc} \cos z$  мають логарифмічні точки розгалуження  $z = \pm 1, \infty$ : функції  $w = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} z$ ,  $w = \operatorname{Arc} \operatorname{ctg} z$  —  $z = \pm i, \infty$ .

**Обернені гіперболічні функції**<sup>3</sup>.  $\operatorname{Ar} \operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{Ar} \operatorname{ch} z$ ,  $\operatorname{Ar} \operatorname{th} z$ ,  $\operatorname{Ar} \operatorname{cth} z$  (читається: “ареа-синус”, “ареа-косинус” і т. д.), визначають як функції, обернені відповідно до функцій  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ ,  $\operatorname{th} z$ ,  $\operatorname{cth} z$ . Ці функції, як й аналогічні обернені тригонометричні, є багатозначними і виражаються через логарифмічні функції:

$$\operatorname{Ar} \operatorname{sh} z = \operatorname{Ln} \left( z \pm \sqrt{z^2 + 1} \right), \quad (\text{I.3-19})$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{ch} z = \operatorname{Ln} \left( z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right), \quad (\text{I.3-20})$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{th} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, \quad (\text{I.3-21})$$

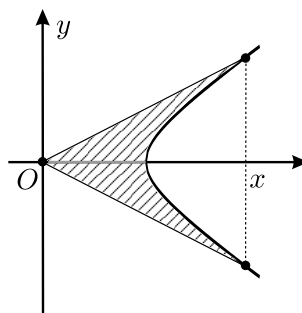
$$\operatorname{Ar} \operatorname{cth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}. \quad (\text{I.3-22})$$

Головні значення обернених гіперболічних функцій одержують, якщо брати головні значення відповідних логарифмічних функцій. Їх позначають відповідними назвами з малої букви:  $\operatorname{arsh} z$ ,  $\operatorname{arch} z$  і т. д.

Функція  $w = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} z$  має логарифмічну точку розгалуження  $z = \pm i, \infty$ , функція  $w = \operatorname{Ar} \operatorname{ch} z$  —  $z = \pm 1, \infty$ : функції  $w = \operatorname{Ar} \operatorname{th} z$ ,  $w = \operatorname{Ar} \operatorname{cth} z$  —  $z = \pm 1, \infty$ .

<sup>3</sup>Як і для гіперболічних функцій, в англійській літературі використовують відповідно позначення  $\sinh^{-1} z$  і  $\operatorname{Ar} \sinh z$ ,  $\cosh^{-1} z$  і  $\operatorname{Ar} \cosh z$  і т. д.

Префікс  $\operatorname{Ar}$  походить від латинського *area* — площа. Справді, значення оберненого гіперболічного косинуса  $\operatorname{ar} \operatorname{ch} x$ , наприклад, дорівнює площі, заштрихованій на рисунку (крива — це права гілка одиничної гіперболи  $x^2 - y^2 = 1$ ). Однак, на відміну від обернених тригонометричних функцій, тут немає чіткої домовленості — часто за аналогією пишуть  $\operatorname{Arc} \dots$ .



**Загальна степенева функція**  $w = z^a$ , де  $a = \alpha + i\beta$  — комплексне число, визначається так:

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} \quad (\text{I.3-23})$$

Ця функція є багатозначною, її головне значення дорівнює  $z^a = e^{a \ln z}$ , точки  $z = 0$ ,  $z = \infty$  — логарифмічні точки розгалуження.

**Загальна показникова функція**  $w = a^z$  ( $a \neq 0$  — довільне комплексне число) визначається так:

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} \quad (\text{I.3-24})$$

Головне значення цієї багатозначної функції —  $a^z = e^{z \ln a}$ , точок розгалуження функція  $w = a^z$  не має.

**▼ Приклад 1.** Визначити точки розгалуження багатозначної функції  $w = \left(\frac{z}{z+1}\right)^i$ .

*Розв'язування.* Задану функцію запишемо так:

$$w = e^{i \operatorname{Ln} \frac{z}{z+1}} = e^{i \ln \left| \frac{z}{z+1} \right| - [ \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg}(z+1) ]}.$$

Доведемо, що точки  $z_1 = 0$  і  $z_2 = -1$  — точки розгалуження цієї функції. Справді, один обхід навколо точки розгалуження додає до  $\operatorname{Arg} z$  приріст  $2\pi$ , тому вираз  $\left(\frac{z}{z+1}\right)^i$  перейде у  $\left(\frac{z}{z+1}\right)^i e^{-2\pi}$ , отже, точка  $z = 0$  є логарифмічною точкою розгалуження функції  $w = \left(\frac{z}{z+1}\right)^i$ . Точка  $z_2 = -1$  так само є логарифмічною точкою розгалуження цієї функції. А точка  $z = \infty$  не є точкою розгалуження функції  $w = \left(\frac{z}{z+1}\right)^i$ : один обхід навколо точки  $z = \infty$  дає приріст  $2\pi$  обидвом виразам  $\operatorname{Arg} z$  і  $\operatorname{Arg}(z+1)$  одночасно, тому значення функції  $\left(\frac{z}{z+1}\right)^i$  не зміниться.



▼ **Приклад 2.** Знайти всі значення  $\sqrt[4]{1-i}$ .

*Розв'язування.* Зведемо комплексне число  $1-i$  до тригонометричного вигляду

$$1-i = \sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Отже,  $\sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{-\pi/4 + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi/4 + 2k\pi}{4} \right)$ . Покладаючи  $k = 0, 1, 2, 3$ , знайдемо

$$\begin{aligned} (k=0): \quad \sqrt[4]{1-i} &= \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{\pi}{16} - i \sin \frac{\pi}{16} \right), \\ (k=1): \quad \sqrt[4]{1-i} &= \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{7}{16}\pi + i \sin \frac{7}{16}\pi \right), \\ (k=2): \quad \sqrt[4]{1-i} &= \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{15}{16}\pi + i \sin \frac{15}{16}\pi \right), \\ (k=3): \quad \sqrt[4]{1-i} &= \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{23}{16}\pi + i \sin \frac{23}{16}\pi \right). \end{aligned}$$

▲

▼ **Приклад 3.** Записати в алгебраїчній формі  $\text{Arc sin } \frac{\pi}{3}i$ .

*Розв'язування.* Покладаючи у формулі (I.3-15)  $z = \frac{\pi}{3}i$ , одержимо

$$\text{Arc sin } \frac{\pi}{3}i = -i \text{Ln} \left( -\frac{\pi}{3} \pm \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} \right).$$

Звідси

$$\begin{aligned} \text{Arc sin } \frac{\pi}{3}i &= -i \text{Ln} \left[ -\left( \frac{\pi}{3} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} \right) \right] = \\ &= -i \left[ \ln \left( \frac{\pi}{3} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} \right) + \pi i + 2k\pi i \right] = \\ &= (2k+1)\pi - i \ln \left( \frac{\pi}{3} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$



i

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arc} \sin \frac{\pi}{3} i &= -i \operatorname{Ln} \left( \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} - \frac{\pi}{3} \right) = \\
&= -i \left[ \ln \left( \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} - \frac{\pi}{3} \right) + 2k\pi i \right] = \\
&= 2k\pi - i \ln \left( \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} - \frac{\pi}{3} \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots
\end{aligned}$$

▲

▼ **Приклад 4.** Записати в алгебраїчній формі  $\operatorname{Arc} \operatorname{tg}(1 + i)$ .

*Розв'язування.* Покладаючи в формулі (I.3-17)  $z = 1 + i$ , одержимо

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg}(1 + i) = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + i(1 + i)}{1 - i(1 + i)} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i}{2 - i} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \left( -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \right).$$

Далі  $\operatorname{Ln} \left( -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \right) = -\ln \sqrt{5} + (2k + 1)\pi i - i \operatorname{arctg} 2$ . Остаточно

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg}(1 + i) = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + (2k + 1)\frac{\pi}{2} + \frac{i}{2} \ln \sqrt{5}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

▲

▼ **Приклад 5.** Розв'язати рівняння  $\sin z = 3$ .

*Розв'язування.* Задача зводиться до знаходження величини  $z = \operatorname{Arc} \sin 3$ . Скористаємося формулою (I.3-15):

$$z = \operatorname{Arc} \sin 3 = -i \operatorname{Ln} (3i + \sqrt{-8})$$

або, враховуючи те, що  $\sqrt{-8} = \pm \sqrt{8}i$ , одержимо

$$z = -i \operatorname{Ln} \left[ (3 + \sqrt{8})i \right], \quad z = -i \operatorname{Ln} \left[ (3 - \sqrt{8})i \right].$$

Оскільки

$$\arg \left[ (3 + \sqrt{8}) i \right] = \arg \left[ (3 - \sqrt{8}) i \right] = \frac{\pi}{2},$$

$$\left| (3 + \sqrt{8}) i \right| = 3 + \sqrt{8}, \quad \left| (3 - \sqrt{8}) i \right| = 3 - \sqrt{8},$$

$$\text{маємо } \operatorname{Ln} \left[ (3 \pm \sqrt{8}) i \right] = \ln (3 \pm \sqrt{8}) + \frac{\pi}{2} i + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Отже, } z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln (3 \pm \sqrt{8}), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

▲

### Завдання.

Знайти всі значення кореня:

I.61. а)  $\sqrt[4]{-1}$ ; б)  $\sqrt{i}$ ; в)  $\sqrt[3]{i}$ ; г)  $\sqrt[4]{-i}$ .

I.62. а)  $\sqrt[4]{1}$ ; б)  $\sqrt[3]{-1+i}$ ; в)  $\sqrt{2-2i\sqrt{3}}$ .

I.63. а)  $\sqrt[5]{\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)}$ ; б)  $\sqrt{\frac{1+i}{1-i}}$ ; в)  $\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{3}}$ .

I.64. а)  $\sqrt{-7-24i}$ ; б)  $(1+i)^{1/3}$ .

Записати в алгебраїчній формі такі комплексні числа:

I.65. а)  $\ln(1-i)$ ; б)  $2^{z^2}$ .

I.66. а)  $\operatorname{ctg} \pi i$ ; б)  $\operatorname{Arc} \sin i$ ; в)  $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{i}{3}$ ; г)  $\operatorname{Arc} \cos i$ .

Знайти логарифми таких чисел:

I.67. а)  $e$ ; б)  $i$ ; в)  $-i$ ; г)  $-1-i$ .

I.68. а)  $3-2i$ ; б)  $i^i$ ; в)  $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ .

Знайти:

I.69. а)  $i^i$ ; б)  $i^{\frac{1}{i}}$ ; в)  $1^i$ ; г)  $(-1)^{\sqrt{2}}$ .

I.70. а)  $\left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{2i}$ ; б)  $\left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^{1+i}$ ; в)  $(1-i)^{3-3i}$ .

I.71. Знайти модуль і аргумент чисел:

а)  $10^i$ ;                      б)  $3^{2-i}$ .

Розв'язати рівняння:

I.72. а)  $4 \cos z + 5 = 0$ ;                      б)  $\sin z = \pi i$ ;                      в)  $e^{\frac{z+1}{z}} = 1 + i$ .

I.73. а)  $\operatorname{Ln}(z + i) = 0$ ;                      б)  $\operatorname{Ln}(i - z) = 1$ .

I.74. а)  $\operatorname{sh} iz = -i$ ;                      б)  $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$ ;                      в)  $\operatorname{ch} z = i$ .

I.75. а)  $\cos^2 z = \frac{1}{2}(1 + i)$ ;                      б)  $\operatorname{tg} z = e^{ib}$ ,  $b$  — дійсне число.

I.76. Скільки однозначних і неперервних відгалужень в області  $D$  — крузі  $|z - 1| < r$  ( $0 < r < 1$ ) — мають багатозначні функції:

а)  $w = z^z$ ,  $w(1) = 1$ ;                      б)  $w = z^{iz}$ ,  $w(1) = 1$ .

Знайти точки розгалуження функцій і вказати їх характер:

I.77. а)  $w = \sqrt{z^2 - 1}$ ;                      б)  $w = \sqrt{z^2 + z + 1}$ .

I.78. а)  $w = \frac{z + \sqrt{z^2 + 1}}{z - \sqrt{z^2 - z - 2}}$ ;                      б)  $w = \operatorname{Ln}(1 + z^2)$ .

I.79. а)  $w = \operatorname{Ln}(z^3 - 1)$ ;                      б)  $w = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + z + 1}\right)$ .

I.80.  $w = \left(\frac{z}{z+1}\right)^i$ .

Довести:

I.81. а)  $\operatorname{Ar sh} z = \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 + 1}\right)$ ;

б)  $\operatorname{Ar ch} z = \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)$ .

I.82. а)  $\operatorname{Ar th} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$ ;                      б)  $\operatorname{Ar cth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}$ .

I.83. а)  $\operatorname{Arc sin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz \pm \sqrt{1 - z^2}\right)$ ;

б)  $\operatorname{Arc cos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)$ .

$$\text{I.84. а) } \operatorname{Arc} \operatorname{tg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}; \quad \text{б) } \operatorname{Arc} \operatorname{ctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+i}{z-i}.$$

I.85. Виразити через логарифмічну функцію обернені тригонометричні функції:

$$\text{а) } \operatorname{Arc} \sec z; \quad \text{б) } \operatorname{Arc} \operatorname{cosec} z.$$

I.86. Виразити через логарифмічну функцію обернені гіперболічні функції:

$$\text{а) } \operatorname{Ar} \operatorname{sech} z; \quad \text{б) } \operatorname{Ar} \operatorname{cosech} z.$$

I.87. Показати, що інтерпретація оберненого гіперболічного косинуса, наведена на стор. 30, — правильна.

I.88. Дати геометричну інтерпретацію оберненого гіперболічного синуса (за аналогією з наведеною на стор. 30).

#### I.4. Диференціювання функцій комплексної змінної

##### Умови Д'Аламбера–Ейлера–Коші–Рімана

Нехай функція  $w = f(z)$  визначена в деякій області  $D$  комплексної змінної  $z$ . Нехай точки  $z$  і  $z + \Delta z$  належать області  $D$ . Позначимо:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z), \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

**Означення 1.** Функція  $w = f(z)$  називається **диференційовною** в точці  $z \in D$ , якщо  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$  має скінченну границю при  $\Delta z$ , що прямує до нуля довільним чином. Цю границю називають **похідною** функції  $f(z)$  у даній точці  $z$  і позначають символом  $f'(z)$  (або  $w'$  чи  $\frac{dw}{dz}$ ). Отже,

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \quad (\text{I.4-25})$$

З означення похідної і властивостей границь отримують основні правила диференціювання, аналогічні до правил диференціального числення функцій дійсної змінної:

1) стала функція  $f(z) = C$  має похідну в кожній точці площини  $\mathbb{C}$ , причому  $f'(z) = 0$  ( $\forall z \in \mathbb{C}$ );

2) функція  $f(z) = z^n$  ( $\forall z \in \mathbb{C}$ ) диференційовна в кожній точці площини  $\mathbb{C}$ , причому  $f'(z) = nz^{n-1}$  ( $\forall z \in \mathbb{C}$ );

3) якщо функції  $f$  і  $g$  мають похідні в точці  $z_0$ , то функції  $\alpha f$  ( $\alpha \in \mathbb{C}$  — деяке число),  $f \pm g$ ,  $fg$ ,  $f/g$  ( $g(z_0) \neq 0$ ) також мають похідні в точці  $z_0$ , і:

$$\begin{aligned}(\alpha f)'(z_0) &= \alpha f'(z_0), & (f \pm g)'(z_0) &= f'(z_0) \pm g'(z_0), \\(fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)};\end{aligned}$$

4) диференціювання оберненої функції. Нехай  $E$  — множина значень функції  $w = f(z)$ ,  $z \in D$ , диференційовної в точці  $z_0 \in D$  і  $f'(z_0) \neq 0$ . Тоді обернена функція  $z = f^{-1}(w)$ ,  $w \in E$ , також диференційовна в точці  $w_0 = f(z_0)$ , і

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)};$$

5) диференціювання складеної функції. Припустимо, що функція  $w = f(z)$ ,  $z \in D$ , — диференційовна в точці  $z_0 \in D$ , і  $E$  — множина її значень, а функція  $\zeta = g(w)$ ,  $w \in F$  ( $F \supset E$ ) — диференційовна в точці  $w_0 = f(z_0)$ . Тоді складена функція  $\zeta = g(f(z))$ ,  $z \in D$ , — диференційовна в точці  $z_0$ , і справедлива формула

$$\left.\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=z_0} = \left.\frac{dg}{dw}\right|_{w=w_0} \cdot \left.\frac{df}{dz}\right|_{z=z_0}$$

Якщо  $z = x + iy$ ,  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , то в кожній точці диференційовності функції  $f(z)$  виконуються співвідношення:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (\text{I.4-26})$$

які називають **умовами Д'Аламбера–Ейлера–Коші–Рімана** (скорочено — ДЕКР).

Умови (I.4-26) в полярних координатах мають вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \quad (\text{I.4-27})$$

І навпаки, якщо в деякій точці  $(x, y)$  функції  $u(x, y)$  і  $v(x, y)$  диференційовні як функції дійсних змінних  $x$  і  $y$  та, крім того, задовольняють співвідношення (I.4-26), то функція  $f(z) = u + iv$  є диференційовною в точці  $z = x + iy$  як функція комплексної змінної  $z$ .

**Означення 2.** Функція  $w = f(z)$  називається **аналітичною** в даній точці  $z \in D$ , якщо вона є диференційовною не тільки в самій точці  $z$ , але й у деякому її околі. Функція  $f(z)$  називається **аналітичною в області  $D$**  (або **голоморфною, регулярною, моногенною, правильною**), якщо вона є диференційовною в кожній точці цієї області. Функція, аналітична у всій площині  $\mathbb{C}$ , називається **цілою**. Для будь-якої аналітичної функції  $f(z)$  маємо

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{I.4-28})$$

▼ **Приклад 1.** Показати, що функція  $w = e^z$  є аналітичною функцією на всій комплексній площині.

*Розв'язування.* Маємо  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ , тому

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Функції  $u(x, y)$  і  $v(x, y)$  як функції дійсних змінних  $x$  і  $y$  є диференційовними в будь-якій точці  $(x, y)$  (вони мають неперервні частинні

похідні будь-якого порядку) і задовольняють умови (I.4-26). Отже, функція  $w = e^z$  — всюди аналітична. Для  $f(z) = e^z$ , згідно з (I.4-28), одержуємо:

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y) + i \frac{\partial}{\partial x} (e^x \sin y) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z,$$

отже  $(e^z)' = e^z$ .



**▼ Приклад 2.** Чи є аналітичною функція  $w = z\bar{z}$  хоча б в одній точці?

*Розв'язування.* Маємо  $z\bar{z} = x^2 + y^2$ , так що

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) \equiv 0.$$

Умови ДЕКР у цьому випадку такі

$$\begin{aligned} 2x &= 0, \\ 2y &= 0, \end{aligned}$$

і вони задовольняються тільки в точці  $(0, 0)$ . Отже, функція  $w = z\bar{z}$  є диференційовною тільки в точці  $z = 0$ .



**▼ Приклад 3.** Чи є функція  $w = \bar{z} = x - iy$  аналітичною?

*Розв'язування.* Тут  $u(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = -y$  є диференційовними функціями змінних  $x$  і  $y$ . Далі:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Так що  $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ , тобто перша з умов ДЕКР не виконується в жодній точці комплексної площини. Відтак, функція  $w = \bar{z}$  — ніде не є диференційовною, а отже, не є аналітичною.



**Означення 3.** Функція  $\Psi(x, y)$ , що має в області  $D$  неперервні частинні похідні до другого порядку включно і задовольняє в цій області рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0,$$

називається **гармонічною** в області  $D$ .

Якщо функція  $f(z) = u + iv$  аналітична в деякій області  $D$ , то її дійсна частина  $u(x, y)$  й уявна частина  $v(x, y)$  — гармонічні функції в області  $D$ .

Дві гармонічні функції, зв'язані умовами ДЕКР, називаються **спряженими** функціями.

Кожна гармонічна функція  $u$  (або  $v$ ) в однозв'язній області  $D$  є дійсною (або уявною) частиною деякої аналітичної в цій області функції, тобто кожна гармонічна функція в однозв'язній області  $D$  має спряжену функцію (відповідно  $v$  або  $u$ ), яку знаходять (з точністю до сталої) за такою формулою:

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left[ -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy \right] + C, \quad (\text{I.4-29})$$

або

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left[ \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dx - \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dy \right] + C, \quad (\text{I.4-30})$$

де  $(x_0, y_0)$  — деяка фіксована точка області  $D$ , а  $(x, y)$  — довільна точка області  $D$ .

**▼ Приклад 4.** Знайти аналітичну функцію  $w = f(z)$  за відомою її дійсною частиною  $u(x, y) = 2e^x \cos y$  і при додатковій умові  $f(0) = 2$ .



*Розв'язування.*

Перший спосіб.

Маємо  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y$ . За першою з умов ДЕКР має бути  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ , так що  $\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^x \cos y$ . Звідси  $v(x, y) = \int 2e^x \cos y dy = 2e^x \sin y + \varphi(x)$ , де функція  $\varphi(x)$  поки що є невідомою. Диференціюючи  $v(x, y)$  за змінною  $x$  і використовуючи другу з умов ДЕКР, одержимо

$$2e^x \sin y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \sin y,$$

звідки  $\varphi'(x) = 0$ , тобто  $\varphi(x) = C$ , де  $C = \text{const}$ .

Отже,  $v(x, y) = 2e^x \sin y + C$ , і  $f(z) = 2e^x \cos y + i(2e^x \sin y + C) = 2e^z + iC$ . Сталу  $C$  знайдемо з умови  $f(0) = 2$ , тобто  $2e^0 + iC = 2$ , звідси  $C = 0$ .

*Відповідь:*  $f(z) = 2e^z$ .

Другий спосіб.

Оскільки  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y$  і  $\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^x \sin y$ , за формулою (I.4-29)

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} [2e^x \sin y dx + 2e^x \cos y dy] + C.$$

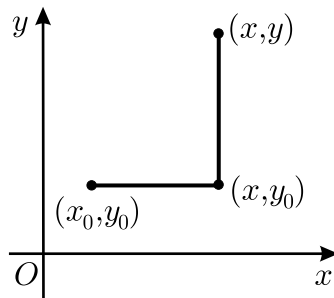


Рис. 1.3.

Інтегруємо за контуром, зображеним на рис. 1.3,

$$\begin{aligned}
v(x, y) &= \int_{x_0}^x 2e^x \sin y_0 dx + \int_{y_0}^y 2e^{x_0} \cos y dy + C = \\
&= 2(e^x - e^{x_0}) \sin y_0 + 2e^{x_0} (\sin y - \sin y_0) = \\
&= 2e^x \sin y + C_1, \quad C_1 = \text{const.}
\end{aligned}$$

Отже,  $f(z) = 2e^x(\cos y + i \sin y) + iC_1 = 2e^z + iC_1$ . З умови  $f(0) = 2$  маємо  $C_1 = 0$  і остаточно  $f(z) = 2e^z$ .

▲

### Завдання.

Перевірити на аналітичність функції:

I.89. а)  $w = z^2 \bar{z}$ ;      б)  $w = ze^z$ ;      в)  $w = |z| \bar{z}$ ;      г)  $w = e^{z^2}$ .

I.90. а)  $w = |z| \operatorname{Re} \bar{z}$ ;      б)  $w = \sin 3z - i$ ;

в)  $w = \operatorname{ch} z$ ;      г)  $w = |z|^2 + 2z$ .

I.91. а)  $w = \bar{z} \operatorname{Re} z$ ;      б)  $w = \bar{z} \operatorname{Im} z$ ;      в)  $w = |z| \operatorname{Im} z$ .

I.92. а)  $w = \frac{1}{2}(|z| + z)$ ;      б)  $w = z + \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .

Відновити аналітичну в околі точки  $z_0$  функцію  $f(z)$  за відомою дійсною частиною  $u(x, y)$  або уявною  $v(x, y)$  і значенням  $f(z_0)$ :

I.93.  $u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f(\pi) = \frac{1}{\pi}$ .

I.94.  $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \ (x > 0), \quad f(1) = 0$ .

I.95.  $u = x^2 - y^2 + 2x, \quad f(i) = 2i - 1$ .

I.96.  $v = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy), \quad f(0) = 0$ .

I.97.  $u = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x, \quad f(0) = 0$ .

I.98.  $v = 2(\operatorname{sh} x \sin y + xy), \quad f(0) = 3.$

I.99.  $v = -2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y + y, \quad f(0) = 2.$

I.100.  $v = 2(\cos x \operatorname{ch} y - 1) - x^2 + y^2, \quad f(0) = 2.$

I.101.  $u = e^x \cos y + x^2 - y^2 + 3x, \quad f(0) = 0.$

I.102.  $v = 3x + 2xy, \quad f(-i) = 2.$

I.103.  $v = e^x \sin y + 2xy + 5y, \quad f(0) = 10.$

I.104. Довести, що в області  $\operatorname{Re} z > 0$  функція  $w = \ln z$  — аналітична.I.105. Довести, що для аналітичної функції  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  в області  $D$  справджується рівність:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

I.106. Довести, що модуль і аргумент аналітичної функції  $f(z) = R(x, y) e^{i\Phi(x, y)}$  пов'язані співвідношеннями:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

I.107. Довести, що в області  $\operatorname{Re} z > 0$  функція

$$w = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\arg z}{n} + i \sin \frac{\arg z}{n} \right)$$

— аналітична.

Чи можуть бути дійсною або уявною частинами аналітичної функції  $w = f(z)$  такі функції:

I.108. а)  $u = x^2 - y^2 + 2xy$ ; б)  $u = x^2$ ; в)  $\ln(x^2 + y^2)$ .

I.109. а)  $\frac{x^2 + 1}{2} y^2$ ; б)  $u = x^2 - y$ .

I.110. За яких умов тричлен  $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$  є аналітичною функцією?

Серед даних пар  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  гармонічних функцій знайти спряжені пари:

I.111. а)  $u = 3(x^2 - y^2)$ ,  $v = 3x^2y - y^3$ ;

б)  $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ .

I.112. а)  $u = x$ ,  $v = -y$ ; б)  $u = e^x \cos y + 1$ ,  $v = 1 + e^x \sin y$ .

I.113. Нехай  $f(z)$  — аналітична функція. Покажіть, що

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f = 2f'.$$

I.114. Покажіть, що для аналітичної функції  $f(z)$  справедливе співвідношення

$$\nabla^2 |f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2, \quad \text{де} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

I.115. Будь-яку комплексну функцію  $f(x, y)$  можна розглядати як функцію  $z = x + iy$  і  $\bar{z} = x - iy$ . Покажіть, що для аналітичної функції:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dz} \equiv f'(z).$$

## I.5. Інтегрування функцій комплексної змінної

### Інтегрування однозначних функцій

Нехай однозначна функція  $f(z)$  є визначеною і неперервною в області  $D$ , і  $C$  — кусково-гладка замкнута або незамкнута орієнтована крива, що лежить у  $D$ . Нехай

$$z = x + iy, \quad f(z) = u + iv,$$

де  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  — дійсні функції змінних  $x$  і  $y$ .

Обчислення інтеграла від функції  $f(z)$  зводиться до обчислення звичайних криволінійних інтегралів, а саме:

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy. \quad (\text{I.5-31})$$

Із самого означення інтеграла одержуємо таку рівність:

$$\int_{C^-} f(z) dz = - \int_C f(z) dz,$$

( $C^-$  — крива, орієнтована у протилежному напрямку до  $C$ ).

З означення і властивостей криволінійних інтегралів типу  $\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  маємо:

$$\int_C \left( \sum_{k=1}^n a_k f_k(z) dz \right) = \sum_{k=1}^n a_k \int_C f_k(z) dz \quad (a_k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}), \quad (\text{I.5-32})$$

$$\int_{C_1+C_2+\dots+C_n} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f_k(z) dz, \quad (\text{I.5-33})$$

де  $C_1 + C_2 + \dots + C_n$  означає криву, складену з  $C_k$  так, що кінець  $C_k$  збігається з початком  $C_{k+1}$  ( $k = \overline{1, n-1}$ ).

Інтеграл  $\int_C f(z) dz$ , взагалі кажучи, залежить від шляху інтегрування  $C$ .

Якщо  $f(z)$  — аналітична функція в однозв'язній області  $D$ , то інтеграл не залежить від шляху інтегрування. У цьому випадку

$$\oint_C f(z) dz = 0, \quad (\text{I.5-34})$$

де  $C$  — довільний додатно-орієнтований замкнутий кусково-гладкий контур в області  $D$ .

Якщо крива  $C$  задана параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = \lambda(t) = x(t) + iy(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]),$$

і  $\lambda'(t) = x'(t) + iy'(t)$  не дорівнює нулеві на  $[\alpha, \beta]$ , тоді

$$\int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[\lambda(t)] \lambda'(t) dt. \quad (\text{I.5-35})$$

Заміну змінних в інтегралах від функцій комплексної змінної роблять так само, як й у випадку функції дійсної змінної.

Нехай аналітична функція  $z = \varphi(w)$  взаємнооднозначно відображає контур  $C$  в  $z$ -площині на контур  $C_1$  в  $w$ -площині. Тоді

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f[\varphi(w)] \varphi'(w) dw. \quad (\text{I.5-36})$$

Якщо функція  $f(z)$  — аналітична в однозв'язній області  $D$ , що містить точки  $z_0$  і  $z_1$ , то маємо формулу Ньютона–Лейбніца

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0), \quad (\text{I.5-37})$$

де  $F(z)$  — первісна для функції  $f(z)$ , тобто  $F'(z) = f(z)$  в області  $D$ .

Якщо функції  $f(z)$  і  $g(z)$  — аналітичні в однозв'язній області  $D$ , а  $z_0$  і  $z_1$  — довільні точки цієї області, то маємо формулу інтегрування частинами:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) g'(z) dz = f(z) g(z) \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} g(z) f'(z) dz. \quad (\text{I.5-38})$$

▼ Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z}) dz$$

за лініями, що з'єднують точки  $z_1 = 0$  і  $z_2 = 1 + i$ ,

- 1) за прямою;
- 2) за параболою  $y = x^2$ ;
- 3) за ламаною  $z_1 z_3 z_2$ , де  $z_3 = 1$ .

*Розв'язування.* Перепишемо підінтегральну функцію так:

$$1 + i - 2\bar{z} = (1 - 2x) + i(1 + 2y).$$

Тут  $u = 1 - 2x$ ,  $v = 1 + 2y$ . Застосовуючи формулу (I.5-31), одержимо

$$\begin{aligned} \int_C (1 + i - 2\bar{z}) dz &= \\ &= \int_C (1 - 2x) dx - (1 + 2y) dy + i \int_C (1 + 2y) dx + (1 - 2x) dy. \end{aligned}$$

1) Рівняння прямої, що проходить через точки  $z_1 = 0$  і  $z_2 = 1 + i$ , буде  $y = x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , і отже,  $dy = dx$ . Тому

$$\begin{aligned} \int_C (1 + i - 2\bar{z}) dz &= \int_0^1 [(1 - 2x) - (1 + 2x)] dx + \\ &+ i \int_0^1 [(1 + 2x) + (1 - 2x)] dx = 2(i - 1). \end{aligned}$$

2) Для параболи  $y = x^2$  маємо  $dy = 2x dx$  ( $0 \leq x \leq 1$ ). Отже,

$$\begin{aligned} \int_C (1 + i - 2\bar{z}) dz &= \int_0^1 [1 - 2x - (1 + 2x^2) 2x] dx + \\ &+ i \int_0^1 [1 + 2x^2 + (1 - 2x) 2x] dx = -2 + \frac{4}{3}i. \end{aligned}$$

3) На відрізку  $z_1 z_3$ :  $y = 0$ ,  $dy = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . На відрізку  $z_3 z_2$ :  $x = 1$ ,  $dx = 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . За властивістю лінійності (I.5-32)–(I.5-33) маємо

$$\begin{aligned} \int_C (1 + i - 2\bar{z}) dz &= \int_{z_1 z_3} (1 + i - 2\bar{z}) dz + \int_{z_3 z_2} (1 + i - 2\bar{z}) dz = \\ &= \int_0^1 (1 - 2x) dx + i \int_0^1 dx - \int_0^1 (1 + 2y) dy + i \int_0^1 (1 - 2) dy = -2. \end{aligned}$$

Цей приклад показує, що інтеграл від неперервної, але не аналітичної функції залежить, взагалі кажучи, від шляху інтегрування.

▲

▼ **Приклад 2.** Обчислити інтеграл

$$\int_C (z^2 + z\bar{z}) dz,$$

де  $C$  — дуга кола  $|z| = 1$ ,  $(0 \leq \arg z \leq \pi)$ .

*Розв'язування.* Нехай  $z = e^{i\varphi}$ , тоді  $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$  і

$$\begin{aligned} \int_C (z^2 + z\bar{z}) dz &= \int_0^\pi ie^{i\varphi} (e^{i2\varphi} + 1) d\varphi = i \int_0^\pi (e^{i3\varphi} + e^{i\varphi}) d\varphi = \\ &= \left( \frac{1}{3} e^{i3\varphi} + e^{i\varphi} \right) \Big|_0^\pi = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

▲

▼ **Приклад 3.** Обчислити інтеграл  $\int_C e^{\bar{z}} dz$ , де  $C$  — відрізок прямої

$y = -x$ , що з'єднує точки  $z_1 = 0$  і  $z_2 = \pi - i\pi$ .

*Розв'язування.* Параметричне рівняння лінії  $C$  таке:  $x = t$ ,  $y = -t$ , або в комплексній формі  $z = \lambda(t) = t - it$ ,  $t \in [0, \pi]$ . Застосовуючи формулу (I.5-35), одержимо:

$$\int_C e^{\bar{z}} dz = \int_0^\pi e^{t+it} (1 - i) dt =$$



$$= (1-i) \int_0^{\pi} e^{t+it} dt = \frac{1-i}{1+i} e^{(1+i)t} \Big|_0^{\pi} = (e^{\pi} + 1)i.$$



▼ **Приклад 4.** Обчислити інтеграл

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz.$$

*Розв'язування.* Оскільки підінтегральна функція  $f(z) = 3z^2 + 2z$  є аналітичною всюди, то застосовуючи формулу Ньютона–Ляйбніца, знайдемо

$$\begin{aligned} \int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz &= (z^3 + z^2) \Big|_{1-i}^{2+i} = \\ &= (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^2 = 7 + 19i. \end{aligned}$$



▼ **Приклад 5.** Обчислити інтеграл

$$\int_0^i z \cos z dz.$$

*Розв'язування.* Функції  $f(z) = z$  і  $g(z) = \cos z$  є аналітичними всюди. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, одержимо

$$\begin{aligned} \int_0^i z \cos z dz &= \int_0^i z (\sin z)' dz = (z \sin z) \Big|_0^i - \int_0^i \sin z dz = \\ &= i \sin i + \cos z \Big|_0^i = -\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1 - 1 = \frac{1-e}{e}. \end{aligned}$$



**Завдання.**

Обчислити інтеграли:

$$\text{I.116. } \int_C z \operatorname{Im} z^2 dz, \quad C: |z| = 1 \quad (-\pi \leq \arg z \leq 0).$$

$$\text{I.117. } \int_C e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz, \quad C — \text{пряма, що з'єднує точки } z_1 = 0, z_2 = 1 + i.$$

$$\text{I.118. } \int_C z \operatorname{Re} z dz, \quad C: |z| = 1. \text{ Обхід проти годинникової стрілки.}$$

$$\text{I.119. } \int_C z \bar{z} dz, \quad C: |z| = 1. \text{ Обхід проти годинникової стрілки.}$$

$$\text{I.120. } \int_1^i z e^z dz. \quad \text{I.121. } \int_0^{1+i} z^3 dz. \quad \text{I.122. } \int_1^i (3z^4 - 2z^3) dz.$$

$$\text{I.123. } \int_C e^z dz, \quad C: \text{ а) дуга параболи } y = x^2, \text{ що з'єднує точки } z_1 = 0 \text{ і } z_2 = 1 + i; \\ \text{б) відрізок прямої, що з'єднує ці самі точки.}$$

$$\text{I.124. } \int_C \operatorname{tg} z dz, \quad C — \text{дуга параболи } y = x^2, \text{ що з'єднує точки } z_1 = 0 \text{ і } z_2 = 1 + i.$$

$$\text{I.125. } \int_C \bar{z} dz, \quad C: \text{ а) пряма; б) парабола } y = x^2; \\ \text{в) парабола } y = \sqrt{x}, \\ \text{що з'єднують точки } z_1 = 0 \text{ і } z_2 = 1 + i.$$

$$\text{I.126. } \int_C \cos z \, dz, \quad C — \text{ відрізок прямої, що з'єднує точки } z_1 = \pi/2 \text{ і } z_2 = \pi + i.$$

$$\text{I.127. } \int_1^i \frac{1 + \operatorname{tg} z}{\cos^2 z} dz \quad \text{за прямою, що з'єднує точки } z_1 = 1 \text{ і } z_2 = i.$$

$$\text{I.128. } \int_C e^{\bar{z}} dz, \quad C: \text{ а) ламана, що з'єднує точки } z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 1 + i; \\ \text{б) ламана, що з'єднує точки } z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = 1 + i.$$

$$\text{I.129. а) } \int_C e^{|z|^2} dz; \quad \text{б) } \int_C e^{z^2} \operatorname{Re} z \, dz; \quad \text{в) } \int_C \frac{|z|}{|z| + 1} dz; \\ C — \text{ відрізок прямої, що з'єднує точки } z_1 = 0, z_2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

$$\text{I.130. } \int_C z \operatorname{Im} z^z \, dz, \quad C : |\operatorname{Im} z| \leq 1, \operatorname{Re} z = 1.$$

$$\text{I.131. } \int_C \operatorname{Re}(\sin z) \cos z \, dz, \quad C : |\operatorname{Im} z| \leq 1, \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{I.132. } \int_1^i (3z^4 - 2z^3) dz. \quad \text{I.133. } \int_{1+i}^{-1-i} (2z + 1) dz.$$

$$\text{I.134. } \oint_{|z-1|=1} \operatorname{Re} z \, dz. \quad \text{I.135. } \int_{1+i}^{2i} (z^3 - z) e^{z^2/2} dz.$$

$$\text{I.136. } \int_1^i z \sin z \, dz. \quad \text{I.137. } \int_0^i (z - i) e^{-z} dz.$$

$$\text{I.138. } \int_0^{1+i} \sin z \cos z \, dz.$$

$$\text{I.139. } \int_{-i}^i z e^{z^2} \, dz.$$

$$\text{I.140. } \int_C \frac{z+2}{z} \, dz, \quad C — \text{півколо } z = 2e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

### Інтегрування багатозначних функцій

Для інтегрування багатозначної функції необхідно виділити її конкретне відгалуження (гілку). Це досягається заданням значення багатозначної функції у деякій точці контура інтегрування.

Якщо контур інтегрування  $C$  є замкнутим, то початковою точкою  $z_0$  шляху інтегрування вважається та точка, в якій задано значення підінтегральної функції.

#### ▼ Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

де  $C$  — верхня дуга кола  $|z| = 1$ . Для  $\sqrt{z}$  вибирається те відгалуження, для якого  $\sqrt{1} = -1$ .

*Розв'язування.*

Перший спосіб.

Функція  $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{2}}$  має два значення ( $\varphi = \arg z$ ):

$$k = 0: \quad \sqrt{z} = \sqrt{|z|} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{|z|} e^{i\frac{\varphi}{2}},$$

$$k = 1: \quad \sqrt{z} = \sqrt{|z|} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right) = \sqrt{|z|} e^{i\frac{\varphi}{2}} e^{i\pi},$$

або, враховуючи, що  $|z| = 1$ ,

$$\sqrt{z} = \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} = e^{i\frac{\varphi}{2}},$$

$$\sqrt{z} = - \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) = -e^{i\frac{\varphi}{2}}. \quad (*)$$

Умову  $\sqrt{1} = -1$  задовольняє друге значення, тому що

$$\sqrt{1} = -\cos 0 - i \sin 0 = -e^{i\frac{0}{2}} = -1 \quad (\varphi = 0 \text{ для точки } z = 1).$$

Застосовуючи формулу Ньютона–Ляйбніца, одержимо

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_1^{-1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} \Big|_1^{-1} = 2(\sqrt{-1} - \sqrt{1}).$$

Покладемо в (\*)  $z = -1$ :

$$\sqrt{-1} = -\left(\cos \frac{\arg(-1)}{2} + i \sin \frac{\arg(-1)}{2}\right) = -\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = i.$$

Згідно з вибором гілки  $\sqrt{1} = -1$  маємо остаточно

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2(1 - i).$$

Другий спосіб.

Нехай  $z = |z| e^{i\varphi}$ , де  $|z| = 1$ , а  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . З умови  $\sqrt{1} = -1$  випливає, що  $\sqrt{e^{i\varphi}} = e^{i(\frac{\varphi}{2} + \pi)}$ . Тоді

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} &= \int_0^\pi \frac{ie^{i\varphi}}{\sqrt{e^{i\varphi}}} d\varphi = \int_0^\pi \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i(\frac{\varphi}{2} + \pi)}} = \int_0^\pi i e^{i(\frac{\varphi}{2} - \pi)} d\varphi = \\ &= 2e^{i(\frac{\varphi}{2} - \pi)} \Big|_0^\pi = 2\left(e^{-\frac{i\pi}{2}} - e^{-i\pi}\right) = 2(1 - i). \end{aligned}$$



▼ **Приклад 2.** Обчислити інтеграл  $\int_1^i \frac{\ln^3 z}{z} dz$  за дугою кола  $|z| = 1$  ( $\ln z$  — головне значення логарифма:  $\ln 1 = 0$ ).

*Розв'язування.*

ПЕРШИЙ СПОСІБ.

Застосовуючи формулу Ньютона–Ляйбніца, одержимо

$$\begin{aligned} \int_1^i \frac{\ln^3 z}{z} dz &= \int_1^i \ln^3 z d(\ln z) = \left. \frac{\ln^4 z}{4} \right|_1^i = \frac{\ln^4 i - \ln^4 1}{4} = \\ &= \frac{\ln^4 i}{4} = \frac{1}{4} \left( \frac{\pi i}{2} \right)^4 = \frac{\pi^4}{64}. \end{aligned}$$

ДРУГИЙ СПОСІБ.

Зробимо заміну змінної

$$w = \ln z, \quad dw = \frac{dz}{z}.$$

Дуга кола  $|z| = 1$  перейде у відрізок уявної осі між точками  $(0, 0)$  і  $(0, \pi/2)$ . Інтеграл набуде вигляду:

$$\int_0^{i\frac{\pi}{2}} w^3 dw = \left. \frac{w^4}{4} \right|_0^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \frac{\pi^4 i^4}{2^4} = \frac{\pi^4}{64}.$$

ТРЕТІЙ СПОСІБ.

Покладемо  $z = e^{i\varphi}$  ( $|z| = 1$ ). Тоді

$$\ln z = i\varphi, \quad dz = ie^{i\varphi} d\varphi.$$

У цьому випадку маємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{i^3 \varphi^3 e^{i\varphi} i d\varphi}{e^{i\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^3 d\varphi = \left. \frac{\varphi^4}{4} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^4}{64}.$$

---

▲

**Завдання.**

Обчислити інтеграли:

I.141.  $\int_C \ln z \, dz$  ( $\ln z$  — головне значення логарифма),  
де  $C: |z| = 1$ :

а) початкова точка шляху інтегрування  $z_0 = 1$ ;б)  $z_0 = -1$ .

Обхід проти годинникової стрілки.

I.142.  $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$ ,  $C$ : а) верхня половина кола  $|z| = 1$ ;  
обирається те відгалуження функції  $\sqrt{z}$ ,  
для якого  $\sqrt{1} = 1$ ;  
б)  $|z| = 1$ ,  $\operatorname{Re} z \geq 0$ ,  $\sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ .

I.143.  $\int_C \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$ ,  $C$ : верхня половина кола  $|z| = 1$ ; обрано те відгалу-  
ження функції  $w = \sqrt[4]{z^3}$ , для якого  $\sqrt[4]{1} = 1$ .

I.144.  $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$  за дугою кола  $|z| = 1$ ,  $\operatorname{Im} z \geq 0$ ,  $\operatorname{Re} z \geq 0$ .

I.145.  $\int_1^i \frac{\ln z}{z} dz$  за відрізком прямої, що з'єднує точки  
а)  $z_1 = 1$  і  $z_2 = i$ ; б)  $z_1 = i$  і  $z_2 = ei$ .

I.146.  $\int_{-1}^i \frac{\cos z \, dz}{\sqrt{\sin z}}$  за прямою, що з'єднує точки  $z_1 = -1$  і  $z_2 = i$ ;  
обрано те відгалуження функції  $\sqrt{\sin z}$ , для якого  
 $\sqrt{\sin(-1)} = i \sqrt{\sin 1}$ .

I.147.  $\int_C \sqrt[4]{z} dz$ , за дугою кола  $|z| = 2$ ,  $\operatorname{Im} z \leq 0$ , обрано те відгалуження функції  $w = \sqrt[4]{z}$ , для якого  $\sqrt[4]{1} = 1$ .

I.148.  $\int_C \arcsin z dz$ , за дугою кола  $|z| = 1$ , від точки  $z_0 = 1$  до точки  $z_1 = i$ ,  $\arcsin z$  — головне значення функції  $\operatorname{Arc} \sin z$ .

I.149.  $\int_0^1 z \operatorname{Ar} \operatorname{th} z dz$ , обрано те відгалуження функції  $w = \operatorname{Ar} \operatorname{th} z$ , для якого  $\operatorname{Ar} \operatorname{th} \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} (8\pi i - \ln 3)$ .

I.150.  $\int_0^{\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e})} \operatorname{Ar} \sinh^2 z dz$ , обрано те відгалуження функції  $w = \operatorname{Ar} \sinh z$ , для якого  $\operatorname{Ar} \sinh 0 = 2\pi i$ .

## I.6. Інтегральна формула Коші

Якщо функція  $f(z)$  є аналітичною функцією в області  $D$ , обмеженій кусково-гладким замкнутим контуром  $C$ , і на самому контурі, то маємо *інтегральну формулу Коші*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} \quad (z_0 \in D), \quad (\text{I.6-39})$$

де контур  $C$  обходиться так, що область  $D$  залишається завжди ліворуч.

За інтегральною формулою Коші можна обчислити деякі інтеграли.



## ▼ Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz \, dz}{z^2 + 4z + 3}.$$

*Розв'язування.* Усередині кола  $|z| = 2$  знаменник частки дорівнює нулю в точці  $z_0 = -1$ . Щоб застосувати формулу (I.6-39), перепишемо інтеграл так

$$\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2 + 4z + 3} dz = \oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{(z+1)(z+3)} dz = \oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z - (-1)} dz.$$

Тут  $z_0 = -1$  і функція  $f(z) = \frac{\operatorname{ch} iz}{z+3}$  є аналітичною в крузі  $|z| \leq 2$ . Тому

$$\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2 + 4z + 3} dz = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \frac{\operatorname{ch}(-i)}{2} = \pi i \operatorname{ch} i = \pi i \cos 1.$$

▼ Приклад 2. Обчислити інтеграл  $\oint_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz$ , якщо:

- 1)  $C : |z - 2| = 1$ ;      2)  $C : |z - 2| = 3$ ;      3)  $C : |z - 2| = 5$ .

*Розв'язування.*

1) У замкнутій області, обмеженій колом  $|z - 2| = 1$ , підінтегральна функція є аналітичною, тому, за теоремою Коші,

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz = 0.$$

2) Усередині області, обмеженій колом  $|z - 2| = 3$ , міститься одна точка  $z = 0$ , в якій знаменник дорівнює нулю. Перепишемо інтеграл

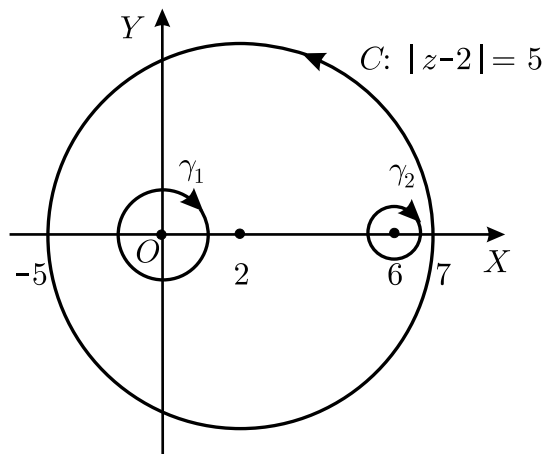
так:

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz = \oint_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z} dz.$$

Функція  $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-6}$  є аналітичною в даній області. Застосовуючи формулу Коші ( $z_0 = 0$ ), одержимо

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz = 2\pi i \left. \frac{e^{z^2}}{z-6} \right|_{z=0} = 2\pi i \left( -\frac{1}{6} \right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

3) В області, обмеженій колом  $|z-2|=5$ , маємо дві точки  $z=0$ ,  $z=6$ , в яких знаменник підінтегральної функції дорівнює нулю. Безпосередньо формулу (I.6-39) застосовувати не можна. У цьому випадку робимо так. Побудуємо кола  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$  з центрами в точках  $z=0$  і  $z=6$  досить малих радіусів, таких, щоб кола не перетинались і цілком містилися в крузі  $|z-2| \leq 5$ :



У тризв'язній області, обмеженій колами  $|z-2|=5$ ,  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$ , підінтегральна функція є аналітичною. За теоремою Коші для багато-

зв'язної області одержимо

$$\oint_{C+\gamma_1^-+\gamma_2^-} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz = 0$$

або

$$\oint_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz.$$

До кожного з інтегралів у правій частині можна застосувати формулу Коші. Отже, одержимо

$$\oint_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz = 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z-6} \Big|_{z=0} + 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z} \Big|_{z=6} = \frac{e^{36}-1}{3} \pi i.$$

Можна діяти й інакше: розкласти  $\frac{1}{z^2-6z}$  на прості дроби, а потім до кожного з одержаних інтегралів застосувати інтегральну формулу Коші. ▲

Якщо функція  $f(z)$  є аналітичною в області  $D$  і на її границі  $C$ , то для будь-якого натурального  $n$  маємо формулу

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad (\text{I.6-40})$$

де  $z_0 \in D$ ,  $z \in C$ . Застосуємо цю формулу для обчислення інтегралів.

▼ **Приклад 3.** Обчислити інтеграл  $\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz$ .

*Розв'язування.* Підінтегральна функція  $\frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}$  є аналітичною в області  $D: |z-1| \leq 1$  всюди, крім точки  $z_0 = 1$ . Тому перепишемо підінтегральну функцію так:

$$\frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} = \frac{\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}$$

і за  $f(z)$  візьмемо  $\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}$ . Покладаючи у формулі (I.6-40)  $n = 1$ , одержимо

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(z).$$

Знаходимо похідну  $f'(z) = \left( \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2} \right)' = \frac{(z+1)\pi \cos \pi z - 2 \sin \pi z}{(z+1)^3}$ .

Звідси  $f'(1) = \frac{2\pi \cos \pi}{2^3} = -\frac{\pi}{4}$ .

$$\text{Отже, } \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz = -\frac{\pi^2}{2} i.$$

▲

▼ **Приклад 4.** Обчислити інтеграл  $\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)} dz$ .

*Розв'язування.* Побудуємо кола  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$  з центрами в точках  $z_1 = -1$  і  $z_2 = 1$  досить малих радіусів, таких, щоб вони не перетинались і повністю містилися в крузі  $|z| \leq 2$ . У тризв'язній області, обмеженій колами  $|z| = 2$ ,  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$ , підінтегральна функція є аналітичною. За теоремою Коші для багатозв'язної області, маємо

$$\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)} = \oint_{\gamma_1} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)} + \oint_{\gamma_2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)}. \quad (\text{I.6-41})$$

До першого інтеграла правої частини (I.6-41) застосуємо формулу (I.6-40), попередньо записавши підінтегральну функцію так:

$$\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)} = \frac{\frac{1}{z-1} \operatorname{ch} z}{(z+1)^3}.$$

Функція  $\frac{\operatorname{ch} z}{z-1}$  є аналітичною всередині  $\gamma_1$ , тому за формулою (I.6-39)

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_1} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)} &= \oint_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{z-1} \operatorname{ch} z}{(z+1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left( \frac{\operatorname{ch} z}{z-1} \right)'' \Big|_{z=-1} = \\ &= -\frac{2e^{-1} + \operatorname{ch} 1}{4} \pi i. \end{aligned}$$

До другого інтеграла в правій частині (I.6-41) застосуємо інтегральну формулу Коші (I.6-39)

$$\oint_{\gamma_2} \frac{\operatorname{ch} z \, dz}{(z+1)^3(z-1)} = \oint_{\gamma_2} \frac{\frac{1}{(z+1)^3} \operatorname{ch} z}{z-1} dz = 2\pi i \left. \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3} \right|_{z=1} = \pi \frac{\operatorname{ch} 1}{4}.$$

Остаточно одержимо

$$\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z \, dz}{(z+1)^3(z-1)} = -\pi i \frac{2e^{-1} + \operatorname{ch} 1}{4} + \pi i \frac{\operatorname{ch} 1}{4} = -\frac{\pi i}{2e}.$$



### Завдання.

Обчислити інтеграли:

$$\text{I.151. } \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz.$$

$$\text{I.152. } \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3} dz.$$

$$\text{I.153. } \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)} dz.$$

$$\text{I.154. } \oint_{|z-3|=6} \frac{z \, dz}{(z-2)^3(z+4)}.$$

$$\text{I.155. } \oint_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2} dz.$$

$$\text{I.156. } \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z} dz.$$

$$\text{I.157. } \oint_{|z-i|=1} \frac{e^{iz} \, dz}{z^2+1}.$$

$$\text{I.158. } \oint_{|z-1|=2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{z^2+2z-3} dz.$$

$$\text{I.159. } \oint_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3} dz.$$

$$\text{I.160. } \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z e^{\frac{1}{z+2}}} dz.$$

$$\text{I.161. } \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^3} \cos \frac{\pi}{z+1} dz.$$

$$\text{I.162. } \oint_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3-4z^2} dz.$$

$$\text{I.163. } \oint_{|z-2|=1} \frac{e^{1/z}}{(z^2+4)^2} dz.$$

$$\text{I.164. } \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1-\sin z}{z^2} dz.$$

$$\text{I.165.} \quad \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2} dz.$$

$$\text{I.166.} \quad \oint_{|z|=3} \frac{\cos(z+i\pi)}{z(e^z+2)} dz.$$

$$\text{I.167.} \quad \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+16}.$$

$$\text{I.168.} \quad \oint_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}.$$

$$\text{I.169.} \quad \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}(z+i)\right)}{z^2-2z} dz.$$

$$\text{I.170.} \quad \oint_{|z|=2} \frac{\sin z \sin(z-1)}{z^2-z} dz.$$

$$\text{I.171.} \quad \oint_C \frac{\sin(\pi z/4)}{z^2-1} dz, \quad C: x^2+y^2-2x=0.$$

$$\text{I.172.} \quad \oint_C \frac{e^{\pi z} dz}{(z^2+1)^2}, \quad C: x^2+y^2-2y=0.$$

$$\text{I.173.} \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}, \quad (n \in \mathbb{N}, |a| < |b|)$$

$$\text{a) } |a| < |b| < 1;$$

$$\text{б) } |a| < 1 < |b|;$$

$$\text{в) } 1 < |a| < |b|.$$

$$\text{I.174.} \quad \oint_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i} dz.$$

$$\text{I.175.} \quad \oint_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3} dz.$$

$$\text{I.176.} \quad \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz.$$

$$\text{I.177.} \quad \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}.$$

$$\text{I.178.} \quad \oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz.$$

$$\text{I.179.} \quad \oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2} dz.$$

### I.7. Степеневі ряди

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ , де  $\{C_n\}$  — деяка послідовність комплексних чисел, називають **степеневим рядом**.

**Областю збіжності** цього ряду є круг із центром у точці  $z_0$ .

**Радіус збіжності** степеневого ряду визначають за формулами:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} \quad (C_n \neq 0), \quad (\text{I.7-42})$$

або

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}. \quad (\text{I.7-43})$$

Якщо  $R = 0$ , то степеневий ряд збігається тільки в точці  $z = z_0$ , якщо ж  $R = +\infty$ , то досліджуваний ряд збігається (причому абсолютно) у всій комплексній площині  $\mathbb{C}$ .

▼ **Приклад 1.** Визначити радіус збіжності  $R$  степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n.$$

*Розв'язування.* Маємо

$$C_n = \cos(in) = \frac{e^n + e^{-n}}{2} = \operatorname{ch} n.$$

За формулою (I.7-42) знаходимо  $R$ :

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\operatorname{ch} n|}{|\operatorname{ch}(n+1)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} n \operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} n \operatorname{sh} 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{ch} 1 + \operatorname{th} n \operatorname{sh} 1} = \frac{1}{\operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} 1} = e^{-1}, \end{aligned}$$

тому що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{th} n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} = 1.$$



▼ **Приклад 2.** Знайти радіус збіжності  $R$  степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n.$$

*Розв'язування.* Знайдемо модуль коефіцієнта  $C_n$ :

$$|C_n| = |(1+i)^n| = |1+i|^n = (\sqrt{2})^n = 2^{n/2}.$$

За формулою (I.7-43) радіус збіжності дорівнює:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^{n/2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



### Ряд Тейлора

Функція  $f(z)$ , однозначна й аналітична в точці  $z = z_0$ , розкладається в околі цієї точки в степеневий ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

де

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$\Gamma$  — це коло з центром у точці  $z = z_0$ , що цілком міститься в околі точки  $z_0$ , в якому функція  $f(z)$  аналітична.

Існують такі збіжні у всій площині  $\mathbb{C}$  розклади основних елементарних функцій в ряди Тейлора в околі точки  $z_0 = 0$  (такі ряди ще називають **рядами Маклорéна**):

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (\text{I.7-44})$$



$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (\text{I.7-45})$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (\text{I.7-46})$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (\text{I.7-47})$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad (\text{I.7-48})$$

Розклад у ряд Тейлора в околі  $z_0 = 0$  головного значення логарифма записується так:

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{(2n)!}, \quad (R=1). \quad (\text{I.7-49})$$

Щоб отримати ряд Тейлора для інших значень багатозначної функції  $\operatorname{Ln}(1+z)$ , слід додати до ряду числа  $2\pi ki$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ):

$$\operatorname{Ln}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{(2n)!} + 2\pi ki.$$

Нехай  $(1+z)^\alpha = \exp(\alpha \ln(1+z))$ , тобто розглянемо головне значення функції  $w = (1+z)^\alpha$ . Тоді маємо такий розклад

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n \quad (R=1). \quad (\text{I.7-50})$$

Зокрема для  $\alpha = -1$  одержимо

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (R=1). \quad (\text{I.7-51})$$

▼ **Приклад 3.** Розкласти в ряд Тейлора в околі точки  $z_0 = 0$  функції:

$$\text{а) } f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3}; \quad \text{б) } \frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)};$$

$$\text{в) } f(z) = \sin^4 z + \cos^4 z.$$

*Розв'язування.*

а) Розкладемо цю дробово-раціональну функцію на прості дроби

$$f(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{z+1} + \frac{3}{4} \frac{1}{z-3}.$$

Кожен із одержаних дробів запишемо як суму нескінченно спадної геометричної прогресії (I.7-51):

$$\frac{1}{4} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad \frac{3}{4} \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n$$

і отримаємо розклад у ряд Тейлора функції  $f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n - 3^{-n}] z^n.$$

Найближчою до точки  $z_0 = 0$  особливою точкою функції  $f(z)$  є точка  $z = -1$ , тому радіус збіжності одержаного ряду  $R = 1$ .

б) Для розкладу цієї дробово-раціональної функції в степеневий ряд зробимо перетворення:

$$\frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)} = \frac{1-z}{(1-z^2)(1+z^2)(1+z^4)} = \frac{1-z}{1-z^8}.$$

Використовуючи формулу (I.7-51) для суми безмежно спадної геометричної прогресії в крузі  $|z| < 1$ , одержимо шуканий ряд Тейлора:

$$\frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)} = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} z^{8n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{8n} - z^{8n+1}).$$

в) Оскільки дана функція  $f(z)$  ціла, то вона розкладається у степеновий ряд у всій площині  $\mathbb{C}$ . Щоб знайти коефіцієнти цього розкладу, перепишемо  $f(z)$  так:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin^4 z + \cos^4 z = \left( \frac{1 - \cos 2z}{2} \right)^2 + \left( \frac{1 + \cos 2z}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2z = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (1 + \cos 4z) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4z. \end{aligned}$$

Використовуючи розклад функції  $\cos z$ , одержимо, що

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{4n}}{(2n)!} z^{2n} \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$



▼ **Приклад 4.** Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями  $z$  функції  $f(z) = \operatorname{tg} z$ .

*Розв'язування.* Функція  $f(z) = \operatorname{tg} z$  — аналітична у всій комплексній площині  $\mathbb{C}$  за винятком точок  $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Тому в крузі  $|z| < \frac{\pi}{2}$  вона розкладається в ряд Тейлора, тобто в цьому крузі виконується рівність

$$\frac{\sin z}{\cos z} = C_0 + C_1 z + \dots + C_n z^n + \dots \quad \left( |z| < \frac{\pi}{2} \right)$$

з невідомими коефіцієнтами  $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$ . Звідки для  $|z| < \frac{\pi}{2}$  маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \right).$$

Перемножуючи ряди у правій частині рівності, одержимо:

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{1}{3}, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = \frac{2}{15}, \quad \dots$$

Отже,

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \dots \quad \left( |z| < \frac{\pi}{2} \right).$$

Коефіцієнти цього ряду виражаються через так звані **числа Бернулі**, див. завдання I.194:

$$\operatorname{tg} z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} (e^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}, \quad \left( |z| < \frac{\pi}{2} \right).$$

▲

▼ **Приклад 5.** Розкласти за степенями різниці  $(z - 3)$  функцію  $f(z) = \frac{1}{3 - 2z}$ .

*Розв'язування.* Перетворимо дану функцію так:

$$\frac{1}{3 - 2z} = \frac{1}{3 - 2(z - 3 + 3)} = \frac{1}{-3 - 2(z - 3)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{2}{3}(z - 3)}.$$

Замінюючи у формулі для суми нескінченно спадної геометричної прогресії  $z$  на  $\frac{2}{3}(z - 3)$ , одержуємо шуканий степеневий ряд:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3 - 2z} &= -\frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{2}{3}(z - 3) + \frac{2^2}{3^2}(z - 3)^2 \mp \dots \right] = \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}(z - 3) - \frac{2^2}{3^3}(z - 3)^2 \pm \dots \end{aligned}$$

Цей ряд збігається за умови  $\left| \frac{2}{3}(z - 3) \right| < 1$ , або  $|z - 3| < \frac{3}{2}$ , тобто радіус збіжності ряду  $R = \frac{3}{2}$ .

▲

### Завдання.

Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$\begin{array}{ll} \text{I.180. а) } \sum_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^n. \\ \text{I.181. а) } \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{1-i} \right)^n; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{in} \right)^n. \end{array}$$

$$\text{I.182. a) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{i}{n} z^n;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{\ln in} \right)^n.$$

$$\text{I.183. a) } \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{\pi i}{n} z^n;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} i^n z^n.$$

$$\text{I.184. a) } \sum_{n=1}^{\infty} \cos^n \frac{\pi i}{\sqrt{n}} z^n;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sin^n(1 + in)}.$$

$$\text{I.185. a) } \sum_{n=0}^{\infty} (n + i) z^n;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \cos in z^n.$$

Розкласти в ряд Тейлора дані функції, використовуючи готові розклади, і знайти радіуси збіжності рядів:

$$\text{I.186. a) } \sin(2z + 1) \quad \text{за степенями } (z + 1);$$

$$\text{б) } \cos z \quad \text{за степенями } \left( z + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$\text{в) } e^z \quad \text{за степенями } (2z - 1).$$

$$\text{I.187. a) } \frac{1}{3z + 1} \quad \text{за степенями } (z + 2);$$

$$\text{б) } \frac{z + 1}{z^2 + 4z - 5} \quad \text{за степенями } z;$$

$$\text{в) } \frac{z}{z^2 + i} \quad \text{за степенями } z.$$

$$\text{I.188. a) } \cos^2 \frac{iz}{2} \quad \text{за степенями } z;$$

$$\text{б) } \ln(2 - z) \quad \text{за степенями } z;$$

$$\text{в) } \operatorname{sh}^2 \frac{z}{2} \quad \text{за степенями } z.$$

I.189. Розкласти в ряд Тейлора інтеграли Френеля

$$\text{a) } S(z) = \int_0^z \sin \frac{\pi t^3}{2} dt;$$

$$\text{б) } C(z) = \int_0^z \cos \frac{\pi t^3}{2} dt.$$

Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями  $z$  функції:

$$\text{I.190. a) } \frac{1}{1 + e^z};$$

$$\text{б) } \frac{1}{2 + \sin z};$$

$$\text{в) } \frac{1}{e^{-z} + 5}.$$

I.191. а)  $\ln(1 + e^{-z})$ ;      б)  $\ln \cos z$ ;      в)  $\ln(1 + \cos z)$ .

I.192. а)  $\frac{z}{\ln(1+z)}$ ;      б)  $e^{\frac{1}{1-z}}$ ;      в)  $\ln(2 + z - z^2)$ .

I.193.  $\operatorname{arsh} z$ .

I.194. Використовуючи твірну функцію для чисел Бернуллі  $B_n$ :

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!},$$

розкласти в ряд  $\operatorname{cth} z$ .

Знайти суму й область збіжності ряду

I.195.  $\frac{1}{2} \left( \frac{z+1}{z-1} \right) + \frac{1}{2^2} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^2 + \frac{1}{2^3} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^3 + \dots$ .

I.196.  $\frac{1}{2} \left( \frac{z+i}{z-1} \right) + \frac{2}{2^2} \left( \frac{z+i}{z-1} \right)^2 + \frac{3}{2^3} \left( \frac{z+i}{z-1} \right)^3 + \dots$ .

I.197. Розкласти в ряд Тейлора за степенями  $z$  і дати інтерпретацію коефіцієнтів

$$\frac{1}{1 - z - z^2}.$$

### Ряд Лорана

Функція  $f(z)$ , що є однозначною й аналітичною в кільці  $r < |z - z_0| < R$  (можуть бути випадки, коли  $r = 0, R = \infty$ ), розкладається в цьому кільці в **ряд Лорана**

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \end{aligned} \quad (\text{I.7-52})$$

де коефіцієнти  $C_n$  шукають за формулами:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (\text{I.7-53})$$

$\Gamma$  — довільне коло з центром у точці  $z_0$ , що міститься всередині даного кільця.

У формулі (I.7-52) ряд  $\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$  називають *головною частиною ряду Лорана*, ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$  — *правильною частиною ряду Лорана*. На практиці, щоб знайти коефіцієнти  $C_n$ , намагаються уникнути застосування формул (I.7-53), тому що вони призводять до громіздких викладок. Отже, якщо можливо, використовують готові розклади в ряд Тейлора елементарних функцій<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>Багатозначну функцію в околі точки розгалуження також можна розкласти в ряд, обравши конкретне відгалуження.

Коли точка  $z_0$  є точкою розгалуження функції  $f(z)$  скінченного порядку  $n$ . Тоді  $f(z)$  можна розкласти в *узагальнений степеневий ряд*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z - z_0)^{k/n}.$$

Якщо існує границя (скінченна або нескінченна) функції  $f(z)$  при прямуванні до точки  $z_0$ , то така точка є *алгебраїчною*, і ряд містить скінченну кількість доданків з від'ємними  $k$  (приклад:  $f(z) = 1/\sqrt{z}$ ). Якщо границя не існує, то така точка розгалуження є *трансцендентною*, і ряд містить безмежну кількість доданків з від'ємними  $k$  (приклад:  $f(z) = e^{1/\sqrt{z}}$ ). Логарифмічну точку розгалуження відносять до трансцендентних, але в її околі *не можна* записати функцію навіть у вигляді узагальненого степеневих ряду. Зазначимо, що ряди, які містять дробові степені, степені логарифмів чи й навіть вкладених логарифмів (на зразок  $\ln \ln z, \ln \ln \ln z, \dots$ ), називаються *рядами Пуїзо* (франц. Puiseux). (Приклад: головне значення  $f(z) = z^z = e^{z \ln z} = 1 + z \ln z + \frac{1}{2!} (z \ln z)^2 + \dots$ ).

Для точок  $z = e^{it}$ , що лежать на колі  $|z| = 1$ , ряд Лорана перетворюється в ряд Фур'є функції  $F(t)$ :

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int},$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

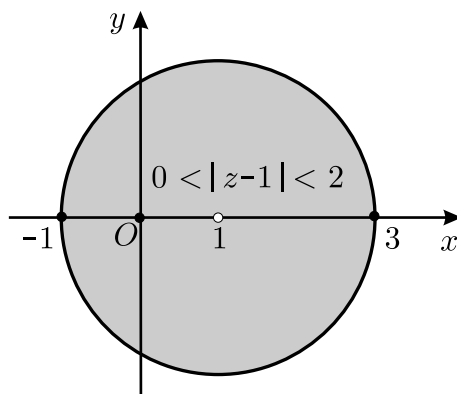
записаний у комплексній формі.

▼ **Приклад 1.** Розкласти в ряд Лорана в кільці  $0 < |z - 1| < 2$  функцію  $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^2}$ .

*Розв'язування.*

Перший спосіб.

Функція  $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^2}$  — аналітична в кільці  $0 < |z - 1| < 2$ . За формулою (I.7-53) знаходимо коефіцієнти ряду Лорана:



$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z - 1)^{n+3}(z + 1)^2} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

де  $\Gamma$  — будь-яке коло з центром у точці  $z_0 = 1$ , що належить даному кільцю.

Якщо  $n + 3 \leq 0$ , тобто  $n \leq -3$ , підінтегральна функція буде аналітичною у всіх точках всередині  $\Gamma$ , в тому числі і в точці  $z = 1$ . Тому за теоремою Коші  $C_n = 0$  ( $n = -3, -4, \dots$ ). Якщо ж  $n + 3 > 0$ , то застосуємо інтегральну формулу Коші для похідних аналітичної



функції:

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-1)^{n+3}} dz = \frac{1}{(n+2)!} \frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}} \left[ \frac{1}{(z+1)^2} \right] \Big|_{z=1} = \\
 &= \frac{1}{(n+2)!} \frac{(-1)^n (n+3)!}{(z+1)^{n+4}} \Big|_{z=1} = \frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}} \\
 &\quad (n = -2, -1, 0, 1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

Отже, в кільці  $0 < |z-1| < 2$  справджується розклад:

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}} (z-1)^n.$$

Другий спосіб.

Передусім треба записати  $f(z)$  у вигляді суми додатних і від'ємних степенів різниці  $(z-1)$ . Перетворимо дану функцію так:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{4} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{z+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(z+1)^2}.
 \end{aligned} \tag{I.7-54}$$

Перші два доданки мають шуканий вигляд, оскільки є степенями різниці  $(z-1)$ . Останні два доданки перепишемо у вигляді

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}, \quad \frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{4} \left[ 1 + \left( \frac{z-1}{2} \right) \right]^{-2}.$$

До них застосуємо формули розкладу в ряд Тейлора в околі точки  $z_0 = 0$  (I.7-50), (I.7-51) і одержимо

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{z-1}{2} + \left( \frac{z-1}{2} \right)^2 - \left( \frac{z-1}{2} \right)^3 + \dots \right] \\
 \frac{1}{(z+1)^2} &= \frac{1}{4} \left[ 1 - 2 \frac{z-1}{2} + \frac{-2(-2-1)}{2!} \left( \frac{z-1}{2} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!} \left( \frac{z-1}{2} \right)^3 + \dots \right].
 \end{aligned}$$

Підставляючи ці розклади в (I.7-54), знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2-1)^2} &= \frac{1}{4} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z-1} + \\ &+ \frac{1}{8} \left[ 1 - \frac{z-1}{2} + \left( \frac{z-1}{2} \right)^2 - \left( \frac{z-1}{2} \right)^3 + \dots \right] + \\ &+ \frac{1}{16} \left[ 1 - (z-1) + \frac{3}{2^2} (z-1)^2 - \frac{4}{2^3} (z-1)^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2-1)^2} &= \frac{1}{4} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z-1} + \frac{3}{16} - \frac{1}{8} (z-1) + \\ &+ \frac{5}{64} (z-1)^2 - \frac{3}{64} (z-1)^3 + \dots \end{aligned}$$

▲

**▼ Приклад 2.** Розкласти в ряд Лорана функцію  $f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z}$  в околі точки  $z_0 = 0$ .

*Розв'язування.* Для будь-якого комплексного  $\zeta$  маємо (I.7-46):

$$\cos \zeta = 1 - \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} - \frac{\zeta^6}{6!} \pm \dots$$

Покладаючи  $\zeta = \frac{1}{z}$ , одержимо

$$z^2 \cos \frac{1}{z} = z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4! z^2} - \frac{1}{6! z^4} \pm \dots$$

або

$$z^2 \cos \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} + z^2 + \frac{1}{4! z^2} - \frac{1}{6! z^4} \pm \dots$$

Цей розклад існує для будь-якої точки  $z \neq 0$ . У нашому випадку “кільцем” є вся комплексна площина з одною вилученою точкою  $z = 0$ . “Кільце” можна визначити за допомогою співвідношення  $0 < |z-0| < +\infty$ . Тут  $r = 0$ ,  $R = +\infty$ ,  $z_0 = 0$ . Ця функція є аналітичною у вказаному “кільці”.

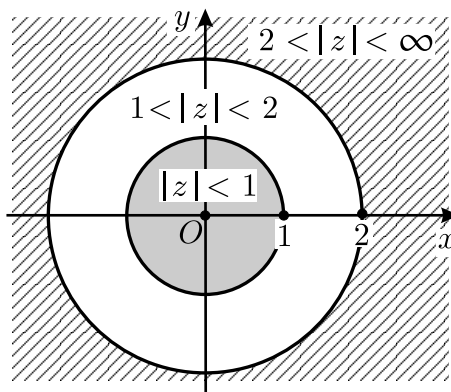
▲

▼ **Приклад 3.** Розглянути різні розклади в ряд Лорана функції

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2} \text{ в околі точки } z_0 = 0.$$

*Розв'язування.* Функція  $f(z)$  має дві особливі точки:  $z_1 = -2$  і  $z_2 = 1$ . Отже, є три “кілця” із центром у точці  $z_0 = 0$ , у кожному з яких  $f(z)$  є аналітичною функцією:

- а) круг  $|z| < 1$ ;
- б) кільце  $1 < |z| < 2$ ;
- в)  $2 < |z| < +\infty$  — поза кругом  $|z| \leq 2$ .



Знайдемо ряди Лорана для функції у кожному з цих “кілець”.

Запишемо  $f(z)$  як суму елементарних дробів  $f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}$ .

а) Розклад у крузі  $|z| < 1$ . Перетворимо  $f(z)$  так:

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+z/2} - \frac{1}{1-z}.$$

Використовуючи формулу (I.7-51), одержимо

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots \quad |z| < 1 \quad (\text{I.7-55})$$

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} \pm \dots \quad |z| < 2 \quad (\text{I.7-56})$$

і остаточно

$$\begin{aligned} \frac{2z+1}{z^2+z-2} &= \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} \pm \dots - (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{15}{16}z^3 \pm \dots \end{aligned}$$

б) Розклад у кільці  $1 < |z| < 2$ . Ряд (I.7-56) для функції  $\frac{1}{1+z/2}$  залишається збіжним у цьому кільці, тому що  $|z| < 2$ . Перетворимо

$f(z)$  так:

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}}.$$

Застосовуючи формулу (I.7-51), одержимо

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \quad (\text{I.7-57})$$

Цей ряд збігається для  $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$ , тобто для  $|z| > 1$ . Остаточно маємо

$$\begin{aligned} \frac{2z+1}{z^2+z-2} &= \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \\ &= \dots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots \end{aligned}$$

або

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

в) Розклад для  $|z| > 2$ . Ряд (I.7-56) для функції  $\frac{1}{1+z/2}$  при  $|z| > 2$  є розбіжним, але ряд (I.7-57) для функції  $\frac{1}{1-1/z}$  буде збіжним, тому що коли  $|z| > 2$ , то й  $|z| > 1$ . Функцію  $f(z)$  запишемо так:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+2/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1+2/z} + \frac{1}{1-1/z} \right).$$

Використовуючи формулу (I.7-51), одержимо

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \left( 1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \dots + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{z} \left( 2 - \frac{1}{z} + \frac{5}{z^2} - \frac{7}{z^3} \pm \dots \right) \end{aligned}$$

або

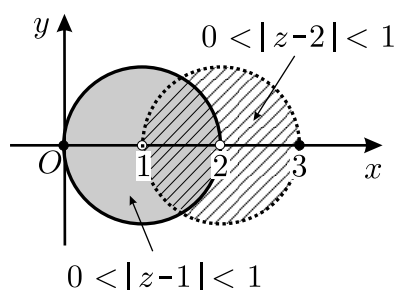
$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \dots$$

Цей приклад показує, що для тієї ж самої функції  $f(z)$  ряд Лорана, взагалі кажучи, має різний вигляд для різних кілець.



▼ **Приклад 4.** Розкласти в ряд Лорана функцію  $f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$  в околі її особливих точок.

*Розв'язування.* Особливі точки функції  $f(z)$ :  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 2$ .



1) Розклад  $f(z)$  в околі точки  $z_1 = 1$ , тобто в кільці  $0 < |z-1| < 1$ . Запишемо функцію  $f(z)$  як суму елементарних дробів

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)}.$$

Застосовуючи розклад (I.7-51), в якому  $z$  замінено на  $-(z-1)$ , одержимо

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} - [1 + (z-1) + (z-1)^2 + \dots]$$

або

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n.$$

2) Розклад  $f(z)$  в околі точки  $z_2 = 2$ , тобто в кільці  $0 < |z-2| < 1$ .

Маємо

$$\begin{aligned} \frac{2z-3}{z^2-3z+2} &= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1+(z-2)} = \\ &= \frac{1}{z-2} + 1 - (z-2) + (z-2)^2 - (z-2)^3 \pm \dots \end{aligned}$$

або

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n.$$

▲

### Завдання.

Розкласти в ряд Лорана в околі точки  $z = 0$ :

$$\begin{array}{llll} \text{I.198. } \frac{\sin z}{z^2}. & \text{I.199. } \frac{\sin^2 z}{z}. & \text{I.200. } \frac{e^z}{z}. & \text{I.201. } z^3 e^{1/z}. \\ \text{I.202. } z^4 \cos \frac{1}{z}. & \text{I.203. } \frac{1}{z} \sin^2 \frac{2}{z} & \text{I.204. } \frac{1 - \cos z}{z^2}. & \text{I.205. } \frac{1 - e^{-z}}{z^3}. \\ \text{I.206. } \frac{e^z - 1}{z}. & \text{I.207. } \frac{1 + \cos z}{z^4}. & & \end{array}$$

Розкласти в ряд Лорана в кільцях:

$$\begin{array}{ll} \text{I.208. } \frac{1}{(z-2)(z-3)} & \text{а) } 2 < |z| < 3, \quad \text{б) } 3 < |z| < \infty. \\ \text{I.209. } \frac{1}{z^2 + z} & \text{а) } 0 < |z| < 1, \quad \text{б) } 1 < |z| < \infty. \\ \text{I.210. } \frac{1}{(z+2)(1+z^2)} & \text{а) } 1 < |z| < 4, \quad \text{б) } 4 < |z| < \infty. \\ \text{I.211. } \frac{2z+3}{z^2+3z+2}, & 1 < |z| < 2. \\ \text{I.212. } \frac{2}{z^2-1}, & 1 < |z+2| < 3. \end{array}$$

$$\text{I.213. } \frac{1}{z^2 + 2z - 8}, \quad 1 < |z + 2| < 4.$$

$$\text{I.214. } \frac{z + 2}{z^2 - 4z + 3}, \quad 2 < |z - 1| < \infty.$$

$$\text{I.215. } \frac{z^5}{(z^2 - 4)^2}, \quad 2 < |z| < \infty.$$

$$\text{I.216. } \frac{z}{(z^2 - 4)(z^2 - 1)}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$\text{I.217. } \frac{1}{z^2 + 1}, \quad 0 < |z - i| < 2.$$

$$\text{I.218. } \frac{1}{(z + 1)(z - 2)}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$\text{I.219. } \frac{z^4 + 1}{(z - 1)(z + 2)}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$\text{I.220. } \frac{z}{(z^2 + 1)(z + 2)}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$\text{I.221. } \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 - 4)}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$\text{I.222. } \frac{1}{z(z - 3)^2}, \quad 1 < |z - 1| < 2.$$

$$\text{I.223. } \frac{1}{(z^2 - 9)z^2}, \quad 1 < |z - 1| < 2.$$

$$\text{I.224. } \frac{1}{(z^2 - 1)(z^2 + 4)}, \quad |z| > 2.$$

$$\text{I.225. } \frac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2} \quad \text{а) } |z| < 1, \quad \text{б) } 1 < |z| < 2, \quad \text{в) } 2 < |z| < \infty.$$

$$\text{I.226. } \frac{z}{(z^2 - 4)^2(z^2 - 1)} \quad \text{а) } 1 < |z| < 2, \quad \text{б) } |z| > 2.$$

$$\text{I.227. } \frac{z^3}{(z + 1)^2(z - 2)}, \quad 0 < |z + 1| < 3.$$

## I.8. Застосування теорії лишків

### Нулі функції

Нехай функція  $f(z)$  — аналітична в точці  $z_0$ . Точку  $z_0$  називають **нулем функції  $f(z)$  порядку (або кратності)  $n$**  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), якщо виконані умови:

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Якщо  $n = 1$ , то точку  $z_0$  називають **простим нулем**.

Точка  $z_0$  тоді і тільки тоді є нулем  $n$ -го порядку функції  $f(z)$ , аналітичної в точці  $z_0$ , коли в деякому околі цієї точки існує рівність

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z), \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

де функція  $\varphi(z)$  — аналітична в точці  $z_0$  і  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

▼ **Приклад 1.** Знайти порядок нуля  $z_0 = 0$  для функції

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z}.$$

*Розв'язування.* Використовуючи розклад функції  $\sin z$  у ряд Тейлора в околі  $z_0 = 0$ , одержимо

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^8}{z - \sin z} = \frac{z^8}{z - \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots \right)} = \frac{z^8}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} \pm \dots} = \\ &= z^5 \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} \pm \dots}. \end{aligned}$$

Покладемо

$$\varphi(z) = \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} \pm \dots}.$$

Тоді  $f(z) = z^5 \varphi(z)$ , де  $\varphi(z)$  — функція, аналітична в точці  $z_0 = 0$ , і  $\varphi(0) = \frac{1}{3!} \neq 0$ . Отже, точка  $z_0 = 0$  — це нуль 5-го порядку.





▼ **Приклад 2.** Знайти нулі функції  $f(z) = 1 + \cos z$  та визначити їх порядок.

*Розв'язування.* Прирівнюючи  $f(z)$  до нуля, отримаємо  $\cos z = -1$ , отже, нулі даної функції — це точки  $z_n = (2n + 1)\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Далі

$$\begin{aligned} f'[(2n + 1)\pi] &= -\sin[(2n + 1)\pi] = 0, \\ f''[(2n + 1)\pi] &= -\cos[(2n + 1)\pi] = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Отже, точки  $z_n = (2n + 1)\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , є для даної функції нулями другого порядку.



### Ізольовані особливі точки

Точку  $z_0 \in \mathbb{C}$  називають *ізольованою особливою точкою* функції  $f(z)$ , якщо існує окіл цієї точки, в якому  $f(z)$  аналітична всюди, крім самої точки  $z = z_0$ .

Точку  $z_0 \in \mathbb{C}$  називають *усувною особливою точкою* функції  $f(z)$ , якщо існує скінченна границя функції  $f(z)$  у точці  $z_0$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A = \text{const} \quad (A \in \mathbb{C}).$$

▼ **Приклад 3.**  $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ .

Особливою точкою функції  $f(z)$  є  $z_0 = 0$ . Маємо  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$ .

Отже, точка  $z_0 = 0$  — усувна особлива точка.



Точку  $z_0$  називають *полосом* функції  $f(z)$ , якщо  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .

Аби точка  $z_0 \in \mathbb{C}$  була полюсом функції  $f(z)$ , **необхідно й достатньо**, щоб ця точка була нулем функції  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ .

Точку  $z_0$  називають **полюсом порядку  $n$**  ( $n \geq 1$ ), якщо вона є нулем порядку  $n$  для оберненої функції  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ . У випадку  $n = 1$  полюс називають **простим**.

---

▼ **Приклад 4.**  $f(z) = \frac{1}{z^3}$ .

Особлива точка  $z_0 = 0$ . Покладемо  $z = \rho e^{i\theta}$ , тоді  $f(z) = \frac{e^{-i3\theta}}{\rho^3}$ ,  $|f(z)| = \frac{1}{\rho^3}$ , звідки випливає, що  $|f(z)|$  необмежено зростає, коли  $z \rightarrow 0$  за будь-яким законом. Отже,  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$ , тобто точка  $z_0 = 0$  — полюс. Для оберненої функції  $\varphi(z) = z^3$  точка  $z_0 = 0$  — нуль третього порядку, таким чином для функції  $f(z) = \frac{1}{z^3}$  — це полюс третього порядку.

---

▲

Аби точка  $z_0$  була полюсом порядку  $n$  функції  $f(z)$ , необхідно й достатньо, щоб функцію  $f(z)$  можна було записати як  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}$ , де функція  $\varphi(z)$  є аналітичною в точці  $z_0$  і  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

---

▼ **Приклад 5.**  $f(z) = \frac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}$ .

Функція  $f(z)$  має дві особливі точки:  $z = -1$  і  $z = 1$ . Дослідимо точку  $z = -1$ . Запишемо  $f(z)$  так:  $f(z) = \frac{\frac{1}{z-1} \sin z}{(z+1)^2}$ .

Тут  $\varphi(z) = \frac{\sin z}{z-1}$  — аналітична в околі точки  $z = -1$  і  $\varphi(-1) = \frac{\sin 1}{2} \neq 0$ . Отже, точка  $z = -1$  є полюсом другого порядку даної функції. Тепер, записавши функцію  $f(z)$  у вигляді

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \frac{\sin z}{z-1},$$

робимо висновок, що точка  $z = 1$  — простий полюс цієї функції. ▲

Точку  $z_0 \in \mathbb{C}$  називають **суттєво особливою точкою** функції  $f(z)$ , якщо в точці  $z_0$  функція  $f(z)$  не має границі ні скінченної, ні безмежної.

▼ **Приклад 6.** Визначити характер особливої точки  $z = 0$  функції  $f(z) = e^{1/z^2}$ .

*Розв'язування.* Розглянемо поведінку цієї функції на дійсній і уявній осях. На дійсній осі  $z = x$  і  $f(x) = e^{1/x^2} \rightarrow \infty$ , коли  $x \rightarrow 0$ . На уявній осі  $z = iy$  і  $f(iy) = e^{-1/y^2} \rightarrow 0$ , коли  $y \rightarrow 0$ . Отже, функція  $f(z)$  не має границі. Точка  $z = 0$  — суттєво особлива точка. ▲

▼ **Приклад 7.** Визначити характер особливої точки  $z = 0$  функції

$$f(z) = \frac{1}{2 + z^2 - 2 \operatorname{ch} z}.$$

*Розв'язування.* Точка  $z = 0$  є полюсом, тому що вона є нулем оберненої функції  $\varphi(z)$ . Знайдемо порядок нуля  $z = 0$  цієї функції. Маємо

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= 2z - 2 \operatorname{sh} z, & \varphi'(0) &= 0; \\ \varphi''(z) &= 2 - 2 \operatorname{ch} z, & \varphi''(0) &= 0; \\ \varphi'''(z) &= -2 \operatorname{sh} z, & \varphi'''(0) &= 0; \\ \varphi^{\text{IV}}(z) &= -2 \operatorname{ch} z, & \varphi^{\text{IV}}(0) &= -2 \neq 0. \end{aligned}$$

Отже,  $z = 0$  є нулем четвертого порядку для  $\varphi(z)$ , тобто полюсом четвертого порядку для функції  $f(z)$ . ▲

▼ **Приклад 8.** Визначити характер особливої точки  $z = 1$  функції

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{2e^{z-1} - z^2 - 1}.$$

*Розв'язування.* Розглянемо функцію

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{2e^{z-1} - z^2 - 1}{\sin \pi z}.$$

Точка  $z = 1$  — це нуль третього порядку для чисельника

$$\psi(z) = 2e^{z-1} - z^2 - 1,$$

тому що

$$\begin{aligned} \psi(1) &= 0; & \psi'(1) &= (2e^{z-1} - 2z) \Big|_{z=1} = 0; \\ \psi''(1) &= (2e^{z-1} - 2) \Big|_{z=1} = 0; & \psi'''(1) &= 2e^{z-1} \Big|_{z=1} = 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Точка  $z = 1$  — це нуль першого порядку для знаменника функції  $\varphi(z)$ .

Отже, точка  $z = 1$  буде нулем порядку  $3 - 1 = 2$  для функції  $\varphi(z)$ , а відтак — полюсом другого порядку для функції  $f(z)$ .



Досліджуючи структуру ряду Лорана аналітичної функції в околі ізольованої особливої точки, можна встановити характер цієї особливої точки, тому що між ними існує тісний зв'язок.

Є такі твердження.

1. Аби точка  $z_0 \in \mathbb{C}$  була **усувною особливою точкою** функції  $f(z)$ , **необхідно й достатньо**, щоб лоранів розклад функції  $f(z)$  в околі точки  $z_0$  не містив головної частини:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n = C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + \dots$$

2. Аби точка  $z_0 \in \mathbb{C}$  була **полюсом** функції  $f(z)$ , **необхідно й достатньо**, щоб головна частина лоранового розкладу  $f(z)$  в околі

точки  $z_0$  містила лише скінченну кількість членів:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-k}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \\ &= \frac{C_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{C_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \\ &\quad C_{-k} \neq 0 \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Найбільший з показників степенів у різниці  $(z - z_0)$ , що містяться у знаменниках членів головної частини ряду Лорана, збігається з порядком полюса.

3. Точка  $z_0 \in \mathbb{C}$  є **суттєво особливою точкою** для функції  $f(z)$  **тоді і тільки тоді**, коли головна частина її лоранового розкладу в околі точки  $z_0$  містить безмежну кількість членів.

▼ **Приклад 9.** Установити характер особливої точки  $z_0 = 0$  функції  $f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z}$ .

*Розв'язування.* Використовуючи розклад у ряд Тейлора для функції  $e^{-z}$  в околі точки  $z_0 = 0$ , одержимо лоранів розклад функції  $f(z)$  в околі нуля

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} (1 - e^{-z}) = \frac{1}{z} \left[ 1 - \left( 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} \dots \right) \right] = \\ &= \frac{1}{z} \left( z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} \mp \dots \right) = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} \mp \dots \end{aligned}$$

Цей розклад не містить головної частини. Тому точка  $z_0 = 0$  є усунюю особливою точкою.



▼ **Приклад 10.** Визначити характер особливої точки  $z_0 = 0$  функції  $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^7}$ .

*Розв'язування.* Розкладаючи функцію  $\cos z$  у ряд Тейлора за степенями  $z$ , одержимо лоранів розклад функції  $f(z)$  в околі нуля:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^7} \left( \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{10}}{10!} \mp \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2!z^5} - \frac{1}{4!z^3} + \frac{1}{6!z} - \frac{z}{8!} + \frac{z^3}{10!} \mp \dots \end{aligned}$$

Розклад у ряд Лорана містить скінченну кількість членів із від'ємними степенями  $z$ . Отже, точка  $z_0 = 0$  є полюсом п'ятого порядку, тому що найбільший показник степеня головної частини ряду дорівнює п'яти.

▲

▼ **Приклад 11.** Визначити характер особливої точки  $z = 1$  функції  $f(z) = (z - 1)e^{1/(z-1)}$ .

*Розв'язування.* Використовуючи розклад (I.7-44)

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

і покладаючи  $u = \frac{1}{z-1}$ , одержимо лоранів розклад функції  $f(z)$  в околі точки  $z_0 = 1$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - 1) \left[ 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \dots \right] = \\ &= 1 + (z - 1) + \frac{1}{2!(z-1)} + \dots \end{aligned}$$

Цей розклад містить безмежну кількість членів у головній частині. Отже, точки  $z_0 = 1$  — суттєво особлива точка функції  $f(z)$ .

▲

### Завдання.

Визначити нулі та їх порядок для функції:

I.228. а)  $z^4 + 4z^3$ ;      б)  $\frac{\sin z}{z}$ ;      в)  $z^2 \sin z$ .

$$\text{I.229. а) } \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z}; \quad \text{б) } 1 + \operatorname{ch} z; \quad \text{в) } \frac{(1 - \operatorname{sh} z)^2}{z}.$$

Визначити порядок нуля  $z_0 = 0$  для функції:

$$\text{I.230. а) } \frac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \sin^2 \frac{z}{2}}; \quad \text{б) } e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}; \quad \text{в) } \frac{z^3}{1 + z - ez}.$$

$$\text{I.231. а) } 2(\operatorname{ch} z - 1) - z^2; \quad \text{б) } \frac{(1 - \cos 2z)^2}{z - \operatorname{sh} z}; \quad \text{в) } (e^z - e^{z^2}) \ln(1 - z).$$

$$\text{I.232. а) } z^2 (e^{z^2} - 1); \quad \text{б) } 6 \sin^3 z + z^3 (z^6 - 6).$$

Визначити характер особливої точки  $z_0 = 0$  для функції:

$$\text{I.233. а) } \frac{1}{z - \sin z}; \quad \text{б) } \frac{1}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}.$$

$$\text{I.234. а) } \frac{1}{e^{-z} + z - 1}; \quad \text{б) } e^{\frac{\sin z}{z}}.$$

$$\text{I.235. а) } \frac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}; \quad \text{б) } \frac{\operatorname{sh} z}{z - \operatorname{sh} z}.$$

$$\text{I.236. а) } \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{\sin z}; \quad \text{б) } \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}.$$

Знайти особливі точки і визначити їхній характер у функції:

$$\text{I.237. а) } \frac{1}{1 - \sin z}; \quad \text{б) } \frac{1 - \cos z}{z^2}.$$

$$\text{I.238. а) } e^{\frac{1}{z+2}}; \quad \text{б) } \cos \frac{1}{z}.$$

$$\text{I.239. а) } \frac{z}{z^5 + 2z^4 + z^3}; \quad \text{б) } \frac{1}{e^{-z} - 1} + \frac{1}{z^2}.$$

$$\text{I.240. а) } e^{-1/z^2}; \quad \text{б) } \sin \frac{\pi}{z+1}; \quad \text{в) } \operatorname{ch} \frac{1}{z}.$$

$$\text{I.241. а) } \frac{z^2}{\cos z - 1}; \quad \text{б) } \frac{1 - \sin z}{\cos z}; \quad \text{в) } \frac{z - \pi}{\sin^2 z}.$$

Визначити характер особливої точки  $z_0$ :

$$\text{I.242. а) } \frac{1 + \cos z}{z - \pi}, \quad z_0 = \pi; \quad \text{б) } \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 2z + 1}, \quad z_0 = 1.$$

$$\text{I.243. а) } \frac{\sin z}{z^2}, \quad z_0 = 0; \quad \text{б) } \frac{\operatorname{sh} z}{z}, \quad z_0 = 0.$$

$$\text{I.244. а) } \cos \frac{1}{z + \pi}, \quad z_0 = -\pi; \quad \text{б) } \frac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}, \quad z_0 = 0, \quad z_0 = -1.$$

$$\text{I.245. а) } \frac{\ln(1 + z^3)}{z^2}, \quad z_0 = 0; \quad \text{б) } \frac{\sin^2 z}{z}, \quad z_0 = 0.$$

$$\text{I.246. а) } \frac{e^{z+e}}{z + e}, \quad z_0 = -e; \quad \text{б) } \cos \frac{1}{z} + \sin \frac{2 - \pi z}{2z}, \quad z_0 = 0.$$

$$\text{I.247. а) } z \operatorname{sh} \frac{1}{z}, \quad z_0 = 0; \quad \text{б) } \frac{\sin 2z}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}, \quad z_0 = 0.$$

$$\text{в) } \frac{z}{(e^z - 1)^2}, \quad z_0 = 0.$$

$$\text{I.248. а) } (e^z - 1 - z) \operatorname{ctg}^3 z, \quad z_0 = 0; \quad \text{б) } \exp \frac{1}{z^2 - z}, \quad z_0 = 0.$$

$$\text{I.249. а) } \cos \frac{z}{z + 1}, \quad z_0 = -1; \quad \text{б) } \sin \frac{\pi z}{z^2 + 1}, \quad z_0 = -i.$$

$$\text{в) } \frac{e^z}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}, \quad z_0 = 0.$$

$$\text{I.250. а) } z^2 \sin \frac{z}{z + 1}, \quad z_0 = -1; \quad \text{б) } \frac{1}{z^2 - 1} \cos \frac{\pi z}{z + 1}, \quad z_0 = -1.$$

$$\text{I.251. а) } \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z}, \quad z_0 = \pi; \quad \text{б) } \frac{1}{\cos^2 z} - \frac{1}{(z - \frac{\pi}{2})^2}, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}.$$

I.252. Показати, що границя  $\lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{(\operatorname{Re} z)^2 \operatorname{Im} z}{(\operatorname{Re} z)^4 + (\operatorname{Im} z)^2} \right)$  не існує, розглянувши прямування по різних прямих, що проходять через початок координат.



### Лишки функцій

Нехай точка  $z_0 \in \mathbb{C}$  є ізольованою особливою точкою функції  $f(z)$ .

**Лишком** функції  $f(z)$  у точці  $z_0$  називають число, що позначається символом  $\operatorname{res} f(z_0)$  і визначається рівністю

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz. \quad (\text{I.8-58})$$

( $\operatorname{res}$  — початкові букви французького слова *résidu* або латинського *residuum* — залишок, остача, лишок. Інші позначення:  $\operatorname{res}[f(z); z_0]$ ,  $\operatorname{res}_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .) За контур  $\gamma$  можна обрати коло з центром у точці  $z_0$  достатнього малого радіуса, такого, щоб коло не виходило за межі області аналітичності функції  $f(z)$  і не містило всередині інших особливих точок функції  $f(z)$ . Лишок функції дорівнює коефіцієнту біля першого степеня в лорановому розкладі  $f(z)$  в околі точки  $z = z_0$ :

$$\operatorname{res} f(z_0) = C_{-1}. \quad (\text{I.8-59})$$

Лишок в **усувній особливій точці** дорівнює нулю.

Якщо точка  $z_0$  — **полюс  $n$ -го порядку** функції  $f(z)$ , то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z) (z - z_0)^n]. \quad (\text{I.8-60})$$

У випадку простого полюса ( $n = 1$ )

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) (z - z_0)]. \quad (\text{I.8-61})$$

Якщо функцію  $f(z)$  в околі точки  $z_0$  можна записати як частку двох аналітичних функцій  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , крім того,  $\varphi(z_0) \neq 0$ ,  $\psi(z_0) = 0$ , але  $\psi'(z_0) \neq 0$ , тобто  $z_0$  — це простий полюс функції  $f(z)$ , то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (\text{I.8-62})$$

Якщо точка  $z_0$  є **суттєвою особливою точкою** функції  $f(z)$ , то для знаходження  $\operatorname{res} f(z_0)$  треба розкласти в ряд Лорана в околі точки  $z_0$  функцію  $f(z)$  і знайти коефіцієнт  $C_{-1}$ .

---

▼ **Приклад 1.** Знайти лишки функції  $f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \pi z^2/4}$  у її особливих точках.

*Розв'язування.* Особливими точками функції  $f(z)$  є точки  $z = 0$  і  $z = \frac{\pi}{4}$ . У точці  $z = 0$  маємо

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z^2}{z^2} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z - \pi/4} = -\frac{4}{\pi}.$$

Отже, точка  $z = 0$  — це усувна особлива точка функції. Тому

$$\operatorname{res} f(0) = 0.$$

У точці  $z = \frac{\pi}{4}$  маємо  $\lim_{z \rightarrow \pi/4} f(z) = \infty$ , тобто точка  $z = \frac{\pi}{4}$  є полюсом (першого порядку) функції  $f(z)$ .

Згідно з формулою (I.8-61),

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(z) \left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin z^2}{z^3 - \pi z^2/4} \left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin z^2}{z^2} = \frac{16}{\pi^2} \sin \frac{\pi^2}{16}. \end{aligned}$$

▲

▼ **Приклад 2.** Знайти лишки функції  $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$  у її особливих точках.

*Розв'язування.* Особливими точками функції  $f(z)$  є  $z = -1$  і  $z = 2$ . Точка  $z = -1$  — це полюс третього порядку. Згідно з формулою (I.8-60), маємо

$$\operatorname{res} f(-1) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{e^z}{z-2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z (z^2 - 6z + 10)}{(z-2)^3} = -\frac{17}{54e}.$$

Точка  $z = 2$  — полюс першого порядку, тому, за формулою (I.8-61),

$$\operatorname{res} f(2) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{e^z}{(z+1)^3} = \frac{e^2}{27}.$$

▲

▼ **Приклад 3.** Знайти лишки функції  $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$  у її особливих точках.

*Розв'язування.* Особливі точки  $f(z)$  — це нулі знаменника, тобто корені рівняння  $z^4 + 1 = 0$ . Маємо  $z_1 = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ,  $z_2 = e^{3i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$ ,  $z_3 = e^{-3i\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ,  $z_4 = e^{-i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ .

За формулою (I.8-62) одержимо

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(z_1) &= \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=e^{i\pi/4}} = \frac{1}{4}e^{-3i\pi/4}, \\ \operatorname{res} f(z_2) &= \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=e^{3i\pi/4}} = \frac{1}{4}e^{-9i\pi/4}, \\ \operatorname{res} f(z_3) &= \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=e^{-3i\pi/4}} = \frac{1}{4}e^{9i\pi/4}, \\ \operatorname{res} f(z_4) &= \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=e^{-i\pi/4}} = \frac{1}{4}e^{3i\pi/4}. \end{aligned}$$

▲

▼ **Приклад 4.** Знайти лишок функції  $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z^2}$  у її особливій точці.

*Розв'язування.* Особлива точка функції  $f(z)$  — це точка  $z = 0$ . Вона є суттєво особливою точкою. Справді, лоранів розклад функції в околі точки  $z = 0$  такий:

$$f(z) = z^3 \left( \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} \mp \dots \right) = z - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^7} \mp \dots,$$

тобто містить безмежне число членів у головній частині. Таким чином,  $\operatorname{res} f(0) = 0$ , оскільки коефіцієнт  $C_{-1}$  у лорановому розкладі  $f(z)$  дорівнює нулеві.

▲

Якщо функція  $f(z)$  має вигляд  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , де аналітичні функції  $\psi(z)$  та  $\varphi(z)$  у точці  $z_0$  мають нулі, вищі за перший порядок, то зручно функції  $\psi(z)$  та  $\varphi(z)$  замінити їх розкладами в ряд Тейлора в околі точки  $z_0$ .

▼ **Приклад 5.** Знайти лишок у точці  $z = 0$  функції

$$f(z) = \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{(\sin z - z) \sin z}.$$

*Розв'язування.* Точка  $z = 0$  є нулем і для чисельника  $\varphi(z)$ , і для знаменника  $\psi(z)$ . Визначимо порядок нуля для цих функцій, використовуючи розклад у ряд Тейлора  $\sin z$  в околі точки  $z = 0$ :

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots$$

Маємо

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sin 3z - 3 \sin z = \\ &= 3z - \frac{3^3 z^3}{3!} + \frac{3^5 z^5}{5!} \mp \dots - 3 \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots \right) = \\ &= -\frac{3^3 - 3}{3!} z^3 + \frac{3^5 - 3}{5!} z^5 \mp \dots = z^3 \tilde{\varphi}(z), \end{aligned}$$

де

$$\tilde{\varphi}(z) = -\frac{3^3 - 3}{3!} + \frac{3^5 - 3}{5!} z^2 \mp \dots, \quad \tilde{\varphi}(0) = -4 \neq 0;$$

$$\begin{aligned} \psi(z) &= (\sin z - z) \sin z = \left( -\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots \right) \left( z - \frac{z^3}{3!} \pm \dots \right) = \\ &= z^4 \left( -\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} \mp \dots \right) \left( 1 - \frac{z^2}{3!} \pm \dots \right) = z^4 \tilde{\psi}(z), \end{aligned}$$

і

$$\tilde{\psi}(z) = \left( -\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} \mp \dots \right) \left( 1 - \frac{z^2}{3!} \pm \dots \right), \quad \tilde{\psi}(0) = -\frac{1}{6} \neq 0.$$

Отже,

$$\frac{\sin z - 3 \sin z}{(\sin z - z) \sin z} = \frac{z^3 \tilde{\varphi}(z)}{z^4 \tilde{\psi}(z)}.$$

Оскільки  $\tilde{\varphi}(z) \neq 0$  і  $\tilde{\psi}(z) \neq 0$ , точка  $z = 0$  є простим полюсом функції, і її лишок знаходимо за формулою (I.8-61):

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin z - 3 \sin z}{(\sin z - z) \sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\tilde{\varphi}(z)}{z \tilde{\psi}(z)} z = \frac{\tilde{\varphi}(0)}{\tilde{\psi}(0)} = \frac{-4}{-1/6} = 24.$$



▼ **Приклад 6.** Знайти лишки функції  $f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}$  у її особливих точках.

*Розв'язування.* Особливими точками є  $z = 1$  і  $z = 0$ . Точка  $z = 1$  — простий полюс,

$$\operatorname{res} f(1) = \left. \frac{e^{1/z}}{-1} \right|_{z=1} = -e.$$

Для з'ясування характеру особливої точки  $z = 0$  розкладемо функцію в ряд Лорана в околі цієї точки. Маємо

$$\begin{aligned} e^{1/z} &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots, \\ \frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + \dots \end{aligned}$$

Перемножуючи ці ряди, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{e^{1/z}}{1-z} &= \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \right) (1 + z + z^2 + \dots) = \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right) \frac{1}{z} + C_{-2} \frac{1}{z^2} + \dots + \text{правильна частина}, \end{aligned}$$

де  $C_{-k} \neq 0$ ,  $k = 2, 3, \dots$

Головна частина ряду Лорана містить безмежну кількість членів, тому точка  $z = 0$  є суттєво особливою точкою функції  $f(z)$ . Її лишок у точці  $z = 0$  дорівнює

$$\operatorname{res} f(0) = C_{-1} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e - 1.$$



▼ **Приклад 7.** Знайти лишок функції  $f(z) = \cos z \sin \frac{1}{z}$  у її особливій точці  $z = 0$ .

*Розв'язування.* Маємо

$$\begin{aligned}\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \mp \dots, \\ \sin \frac{1}{z} &= \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} \mp \dots\end{aligned}$$

Перемножимо ці ряди:

$$\begin{aligned}f(z) &= \cos z \sin \frac{1}{z} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \mp \dots\right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} \mp \dots\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{4!5!} + \dots\right) \frac{1}{z} - \left(\frac{1}{0!3!} + \frac{1}{2!5!} + \frac{1}{4!7!} + \dots\right) \frac{1}{z^3} + \\ &\quad + \dots + \text{правильна частина.}\end{aligned}$$

Отже, ряд Лорана в околі точки  $z = 0$  такий:

$$\cos z \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z} + C_{-3} \frac{1}{z^3} + \dots + \text{правильна частина},$$

де  $C_{-(2k-1)} \neq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

Головна частина ряду Лорана містить безмежну кількість членів, тому  $z = 0$  — суттєво особлива точка функції  $f(z)$ . Шуканий лишок дорівнює

$$\operatorname{res}_{z=0} \left( \cos z \sin \frac{1}{z} \right) = C_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!(2n+1)!}.$$

▲

▼ **Приклад 8.** Знайти лишок функції  $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z+1}$  у її особливій точці.

*Розв'язування.* Особливою точкою функції є точка  $z = -1$ . Щоб з'ясувати характер цієї точки, розкладемо функцію в ряд Лорана в

околі точки  $z = -1$ . Для цього виразимо  $z^2$  через степені різниці  $z - (-1) = z + 1$ . Тоді  $z^2 = [(z + 1) - 1]^2 = (z + 1)^2 - 2(z + 1) + 1$ .

Ряд Лорана для функції  $\sin \frac{1}{1+z}$  в околі точки  $z = -1$  такий:

$$\sin \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{3!(z+1)^3} + \frac{1}{5!(z+1)^5} \mp \dots$$

Перемножимо одержані ряди:

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \sin \frac{1}{z+1} = [(z+1)^2 - 2(z+1) + 1] \times \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{z+1} - \frac{1}{3!(z+1)^3} + \frac{1}{5!(z+1)^5} \mp \dots \right] = \\ &= \left(1 - \frac{1}{3!}\right) \frac{1}{z+1} + \frac{2}{3!(z+1)^2} + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!}\right) \frac{1}{(z+1)^3} + \\ &\quad + \dots + [-2 + (z+1)]. \end{aligned}$$

Ряд Лорана містить безмежну кількість членів у головній частині. Отже, точка  $z = -1$  є суттєво особливою точкою функції, й лишок у цій точці дорівнює:  $\operatorname{res} f(-1) = 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6}$ .

▲

▼ **Приклад 9.** Знайти лишок функції  $f(z) = e^{1/z^2} \cos z$  у точці  $z = 0$ .

*Розв'язування.* Оскільки лишок у точці  $z = 0$  дорівнює коефіцієнту біля  $z^{-1}$ , відразу одержимо  $\operatorname{res} f(0) = 0$ . Дійсно, функція  $f(z)$  — парна, тому її розклад в околі  $z = 0$  не містить непарних степенів  $z$ .

▲

▼ **Приклад 10.** Знайти лишки усіх гілок багатозначної функції

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{z} + \sqrt{z+1}}$$

у всіх її скінченних особливих точках однозначного характеру.

*Розв'язування.* Перетворимо задану функцію так:

$$f(z) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{z} - \sqrt{z+1}}{z-1},$$

звідки випливає, що ця функція — чотиризначна, оскільки точки  $z_1 = 0$  та  $z_2 = -1$  — точки розгалуження (особливі точки неоднозначного характеру). Визначимо чотири однозначні гілки цієї функції:

$$f_1(z) = \frac{1}{z-1} \left[ \sqrt{2|z|} \exp\left(\frac{i \arg z}{2}\right) - \sqrt{|z+1|} \exp\left(\frac{i \arg(z+1)}{2}\right) \right],$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z-1} \left[ -\sqrt{2|z|} \exp\left(\frac{i \arg z}{2}\right) - \sqrt{|z+1|} \exp\left(\frac{i \arg(z+1)}{2}\right) \right],$$

$$f_3(z) = -f_2(z), \quad f_4(z) = -f_1(z).$$

Для кожної з цих гілок точка  $z = 1$  є скінченною особливістю однозначного характеру (полюсом першого порядку).

Отже,

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f_1(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)f_1(z)] = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0, \\ \operatorname{res} f_2(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)f_2(z)] = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}, \\ \operatorname{res} f_3(1) &= 2\sqrt{2}, \quad \operatorname{res} f_4(1) = 0. \end{aligned}$$



### Завдання.

Обчислити:

I.253. а)  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin 2z - 2z}{(1 - \cos z)^2};$

б)  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z - 1 - z}{(1 - \cos 2z) \sin z}.$

I.254. а)  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{(1 - \operatorname{ch} z) \operatorname{sh} z}{(1 - \cos z) \sin^2 z};$

б)  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{z^2}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{z^2}{2}}.$



Знайти лишки в особливих точках функції:

$$\text{I.255. а) } f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \pi z/4}; \quad \text{б) } f(z) = z^3 e^{1/z};$$

$$\text{в) } f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{(z^2 + 1)(z - 3)}.$$

$$\text{I.256. а) } f(z) = \frac{e^z}{\frac{1}{4} - \sin^2 z}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{e^z}{z^3(z - 1)};$$

$$\text{в) } f(z) = \frac{z}{(z + 1)^3(z - 2)^2}.$$

$$\text{I.257. а) } f(z) = \frac{e^{-1/z^2}}{1 + z^4}; \quad \text{б) } f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z};$$

$$\text{в) } f(z) = \cos \frac{1}{z} + z^3.$$

$$\text{I.258. а) } f(z) = \frac{\sin 2z}{(z + i)(z - \frac{i}{2})^2}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3(z - 3)};$$

$$\text{в) } f(z) = \exp\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right).$$

$$\text{I.259. а) } f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 - 1)(z + 3)}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{2}z^2};$$

$$\text{в) } f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z - i}.$$

$$\text{I.260. а) } f(z) = \operatorname{ctg}^2 z; \quad \text{б) } f(z) = \sin z \cos \frac{1}{z}.$$

$$\text{I.261. а) } f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{1 - z}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

$$\text{I.262. а) } f(z) = \frac{e^{1/z}}{1 + z}; \quad \text{б) } f(z) = e^z \sin \frac{1}{z}.$$

$$\text{I.263. а) } f(z) = \exp\left(z + \frac{1}{z}\right); \quad \text{б) } f(z) = \exp\left(\frac{z}{z - 1}\right).$$

$$\text{I.264. а) } f(z) = \frac{z+1}{e^z-1};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{(z-1)(z^2+16)};$$

$$\text{в) } f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}.$$

$$\text{I.265. а) } f(z) = \frac{1}{z^2-1};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2};$$

$$\text{в) } f(z) = z \exp\left(\frac{1}{z-1}\right).$$

$$\text{I.266. а) } f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z-1)^3};$$

$$\text{в) } f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}.$$

$$\text{I.267. а) } f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2};$$

$$\text{б) } f(z) = \operatorname{th} z;$$

$$\text{в) } f(z) = \operatorname{ctg} \pi z.$$

$$\text{I.268. а) } f(z) = \frac{e^z}{(z-\pi i)^6};$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{z+i}{z^2-2z}.$$

I.269. Знайти лишок функції  $f(z) = \frac{e^a}{1-\sqrt{z}}$ , обравши відгалуження, де  $\sqrt{1} = 1$ .

### Теорема Коші про лишки

**Теорема.** Якщо функція  $f(z)$  є аналітичною на границі  $C$  області  $D$  і всюди всередині області, за винятком скінченного числа особливих точок  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , то

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k).$$

▼ **Приклад 1.** Обчислити інтеграл  $\oint_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz$ .

*Розв'язування.* В області  $|z| < 4$  функція  $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + z}$  є аналітичною всюди, за винятком точок  $z = 0$  і  $z = -1$ .

За теоремою Коші про лишки

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i [\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f(-1)].$$

Точка  $z = 0$  — це усувна особлива точка функції  $f(z)$ , тому що

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} = 1.$$

Отже,  $\operatorname{res} f(0) = 0$ . Точка  $z = -1$  — це полюс першого порядку,

$$\operatorname{res} f(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} \left[ \frac{e^z - 1}{z(z + 1)} (z + 1) \right] = 1 - e^{-1}.$$

Остаточно  $\oint_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i (1 - e^{-1})$ .

▼ **Приклад 2.** Обчислити інтеграл  $\oint_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz$ .

*Розв'язування.* В області  $D: |z| < 2$  функція  $f(z) = \operatorname{tg} z$  є аналітичною всюди, крім точок  $z = \frac{\pi}{2}$  та  $z = -\frac{\pi}{2}$ . Це прості полюси. Усі інші особливі точки  $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$  функції  $\operatorname{tg} z$  містяться поза областю  $D$  і тому не враховуються.

Маємо

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left. \frac{\sin z}{(\cos z)'} \right|_{z=\pi/2} = -1, \quad \operatorname{res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left. \frac{\sin z}{(\cos z)'} \right|_{z=-\pi/2} = -1.$$

Тому  $\oint_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz = -4\pi i$ .

▼ **Приклад 3.** Обчислити інтеграл  $\oint_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1} dz$ .

*Розв'язування.* В області  $D: |z-i| < \frac{3}{2}$  функція  $f(z) = \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}$  має дві особливі точки:  $z = i$  — полюс першого порядку і  $z = 0$  — суттєво особливу точку.

За формулою обчислення лишка в простому полюсі маємо

$$\operatorname{res} f(i) = \left. \frac{e^{1/z^2}}{2z} \right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Для знаходження лишка в точці  $z = 0$  треба підінтегральну функцію розкласти в ряд Лорана. Однак результат можна отримати відразу, тому що функція  $f(z)$  є парною і буде містити лише парні степені  $z$  та  $\frac{1}{z}$ . Отже,  $C_{-1} = 0$ , тобто  $\operatorname{res} f(0) = 0$ .

За теоремою Коші про лишки отримаємо:

$$\oint_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1} dz = \frac{\pi}{e}.$$



▼ **Приклад 4.** Обчислити інтеграл  $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} dz$ .

*Розв'язування.* У крузі  $|z| \leq 2$  підінтегральна функція має дві особливі точки  $z = 1$  і  $z = 0$ . Легко визначити, що  $z = 1$  — це простий полюс, тому

$$\operatorname{res}_{z=1} \left( \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} \right) = \left. \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z-1)'} \right|_{z=1} = \sin 1.$$

Щоб визначити характер особливої точки  $z = 0$ , запишемо ряд Лорана для функції  $\frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z}$  в околі цієї точки. Маємо:

$$\frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} = -\frac{1}{1-z} \sin \frac{1}{z} =$$

$$\begin{aligned}
&= - (1 + z + z^2 + \dots) \times \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} \mp \dots \right) = \\
&= - \left( 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \mp \dots \right) \frac{1}{z} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \frac{C_{-3}}{z^3} + \\
&\quad + \dots + \text{правильна частина, } C_{-k} \neq 0 \ (k = 2, 3, \dots).
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що точка  $z = 0$  є суттєво особливою точкою. Лишок у цій точці дорівнює

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin \frac{1}{z}}{z-1} = C_{-1} = - \left( 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \mp \dots \right) = -\sin 1.$$

Отже,

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} dz = 2\pi i (\sin 1 - \sin 1) = 0.$$



### Завдання.

Обчислити інтеграли:

I.270. а)  $\oint_{|z|=1} z \operatorname{tg} \pi z dz;$

б)  $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)} dz.$

I.271. а)  $\oint_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2} dz;$

б)  $\oint_{|z|=1/2} z^2 \sin \frac{1}{z} dz.$

I.272. а)  $\oint_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2 - z} dz;$

б)  $\oint_{|z+1|=4} \frac{z dz}{e^z + 3}.$

I.273. а)  $\oint_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{\sin^3 z \cos z};$

б)  $\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4 + 2z^2 + 1}.$

$$\text{I.274. a) } \oint_{|z|=4} \frac{e^{iz} dz}{(z-\pi)^3};$$

$$\text{б) } \oint_C \frac{\cos \frac{z}{2}}{z^2-4} dz, \quad C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$\text{I.275. a) } \oint_C \frac{e^{2z} dz}{z^3-1}, \quad C: x^2 + y^2 - 2x = 0;$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=2/3} \left( \sin \frac{1}{z^2} + e^{z^2} \cos z \right) dz.$$

$$\text{I.276. a) } \oint_C \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz, \quad C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1;$$

$$\text{б) } \oint_C \frac{z+1}{z^2+2z-3} dz, \quad C: x^2 + y^2 = 16.$$

$$\text{I.277. a) } \oint_{|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{z} dz;$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=1/3} (z+1)e^{1/z} dz.$$

$$\text{I.278. a) } \oint_C \frac{z \sin z}{(z-1)^5} dz, \quad C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1;$$

$$\text{б) } \oint_C \frac{dz}{z^4+1}, \quad C: x^2 + y^2 = 2x.$$

$$\text{I.279. a) } \oint_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)};$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=4} \frac{z}{z+3} \exp \frac{1}{3z} dz.$$

$$\text{I.280. a) } \oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z+1} e^{1/z} dz;$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=3} \frac{z}{z+1} dz.$$

$$\text{I.281. a) } \oint_{|z|=2} z \sin \frac{z+1}{z-1} dz;$$

$$\text{б) } \oint_{|z-1|=1} \sin \frac{1}{z} dz.$$

$$\text{I.282. а) } \oint_{|z|=2} z \cos \frac{z}{z+1} dz; \quad \text{б) } \oint_{|z-1|=1/2} \frac{\sin z}{(z^3 - z)(z - i)} dz.$$

$$\text{I.283. а) } \oint_{|z-i|=1} \frac{e^{\pi z/2}}{(1+z^2)^2} dz; \quad \text{б) } \oint_{|z|=1} z^m e^{1/z} dz \quad (m \in \mathbb{N}).$$

$$\text{I.284. } \oint_{|z+1|=3} \frac{z-i}{z^3 - 2z^2 - 5z + 6} dz. \quad \text{I.285. } \oint_{|z|=1/2} \frac{dz}{(2 + \sqrt{z-1}) \sin z},$$

якщо  $\sqrt{z-1} \Big|_{z=0} = -i$ .

Обчислити інтеграли від усіх гілок багатозначної функції:

$$\text{I.286. } \oint_{|z-1|=1/2} \frac{dz}{\text{Ln}(z-2) + \pi i}. \quad \text{I.287. } \oint_{|z-2|=3/2} \frac{e^z dz}{\sin(1 + \sqrt{z})}.$$

I.288. Розкласти функцію  $f(z) = \text{cosec } z = \frac{1}{\sin z}$  в ряд Лорана в кільці  $\pi < |z| < 2\pi$ , якщо відомий її розклад в околі нуля у крузі  $|z| < \pi$ :

$$\text{cosec } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2 (2^{2n-1} - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1},$$

де  $B_n$  — числа Бернуллі, див. завдання I.194.

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad \dots$$

### Лишок функції відносно безмежно віддаленої точки

Кажуть, що функція  $f(z)$  є аналітичною у безмежно віддаленій точці  $z = \infty$ , якщо функція  $\varphi(\zeta) = f(1/\zeta)$  є аналітичною в точці  $\zeta = 0$ .

Наприклад, функція  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$  — аналітична в точці  $z = \infty$ , тому що  $\varphi(\zeta) = f(1/\zeta) = \sin \zeta$  є аналітичною в точці  $\zeta = 0$ .

Нехай  $f(z)$  — аналітична функція в деякому околі безмежно віддаленої точки (за винятком самої точки  $z = \infty$ ).

Точку  $z = \infty$  називають ізольованою особливою точкою функції  $f(z)$ , якщо в деякому околі цієї точки немає інших особливих точок функції  $f(z)$ .

Функція  $f(z) = \frac{1}{\sin z}$  має в безмежності **неізолювану особливість**: полюси  $z_k = k\pi$  цієї функції накопичуються у безмежності, якщо  $k \rightarrow \infty$ .

Кажуть, що  $z = \infty$  є усувною особливою точкою, полюсом або суттєво особливою точкою функції  $f(z)$  залежно від того, чи скінченна, безмежна або взагалі не існує  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ .

Критерії типу безмежно віддаленої особливої точки, пов'язані з розкладом у ряд Лорана, змінюються в порівнянні із критеріями для скінченних особливих точок.

**Теорема 1.** Якщо  $z = \infty$  є усувною особливою точкою функції  $f(z)$ , то лоранів розклад  $f(z)$  в околі цієї точки не містить додатних степенів  $z$ ; якщо  $z = \infty$  — полюс, то цей розклад містить скінченне число додатних степенів  $z$ , у випадку суттєвої особливості — безмежне число додатних степенів  $z$ .

Крім того, лорановим розкладом функції  $f(z)$  в околі безмежно віддаленої точки назовемо розклад  $f(z)$  у ряд Лорана, що збігається всюди поза кругом достатньо великого радіуса  $R$  з центром у точці  $z = 0$  (крім, можливо, самої цієї точки  $z = \infty$ ).

Нехай функція  $f(z)$  є аналітичною функцією у деякому околі точки  $z = \infty$  (крім, можливо, самої цієї точки).

**Лишком функції  $f(z)$  у безмежності** називають величину

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z) dz, \quad (\text{I.8-63})$$

де  $\gamma^-$  — досить велике коло  $|z| = \rho$ , що обходить за годинниковою стрілкою (так, що окіл точки  $z = \infty$  залишається ліворуч, як і для випадку скінченної точки  $z = a$ ).



Із цього визначення випливає, що лишок функції у безмежності дорівнює коефіцієнту біля  $z^{-1}$  у лорановому розкладі  $f(z)$  в околі точки  $z = \infty$ , який беруть із протилежним знаком:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -C_{-1}.$$

---

▼ **Приклад 1.** Для функції  $f(z) = \frac{z+1}{z}$  маємо  $f(z) = 1 + \frac{1}{z}$ . Цей вираз можна розглядати як її лоранів розклад в околі безмежно віддаленої точки. Знаходимо  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1$ , а це означає, що точка  $z = \infty$  є усувною особливою точкою,  $C_{-1} = 1$  і, отже,  $\operatorname{res} f(\infty) = -1$ .

---

Із цього прикладу бачимо, що лишок аналітичної функції відносно безмежно віддаленої усувної особливої точки, на відміну від скінченної усувної особливої точки, може бути відмінним від нуля.

Відомі розклади функцій  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$  можна розглядати також як лоранові розклади в околі точки  $z = \infty$ . Усі ці розклади містять безмежну множину додатних степенів  $z$ , тому перелічені вище функції мають у точці  $z = \infty$  суттєву особливість.

**Теорема 2.** Якщо функція  $f(z)$  має у розширеній комплексній площині  $\bar{\mathbb{C}} \equiv (\mathbb{C} \cup \{\infty\})$  скінченне число особливих точок, то сума всіх її лишків разом із лишком у безмежності дорівнює нулю.

Отже, якщо  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — скінченні особливі точки функції  $f(z)$ , то

$$\operatorname{res} f(\infty) + \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(a_k) = 0 \quad \text{або} \quad \operatorname{res} f(\infty) = - \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(a_k). \quad (\text{I.8-64})$$

Це співвідношення досить зручно використовувати для обчислення деяких інтегралів.

---

▼ **Приклад 2.** Обчислити інтеграл  $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4}$ .

*Розв'язування.* Полюсами (скінченними) підінтегральної функції є корені  $z_1, z_2, z_3, z_4$  рівняння  $z^4 = -1$ , які всі містяться всередині кола  $|z| = 2$ . Функція  $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$  в околі безмежно віддаленої точки має розклад

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{z^4} \frac{1}{1+1/z^4} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{12}} \mp \dots,$$

з якого випливає, що  $\operatorname{res} f(\infty) = -C_{-1} = 0$ . Згідно з рівністю (I.8-64),

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k) = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty) = 0.$$

▲

▼ **Приклад 3.** Обчислити інтеграл  $\oint_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4} dz$ .

*Розв'язування.* Підінтегральна функція всередині кола  $|z| = 3$  має п'ять особливих точок, які є кратними полюсами. Використання основної теореми про лишки призводить до великих обчислень. Тому зручніше використати рівність (I.8-64), згідно з якою будемо мати

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4} dz = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty). \quad (\text{I.8-65})$$

Підінтегральну функцію можна записати так:

$$f(z) = \frac{z^{17}}{z^6 \left(1 + \frac{2}{z^2}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{z^3}\right)^4 z^{12}} = \frac{1}{z} \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{z^2}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{z^3}\right)^4}.$$

Звідси випливає, що правильна частина лоранового розкладу цієї функції в околі безмежно віддаленої точки  $z = \infty$  починається із члена  $\frac{1}{z}$ . Отже,  $\operatorname{res} f(\infty) = -1$ . Підставляючи цю величину у рівність (I.8-65), одержимо, що інтеграл дорівнює  $2\pi i$ .

▲

**Завдання.**

Визначити характер безмежно віддаленої точки для функцій:

$$\text{I.289. а) } f(z) = \frac{z^3 - z^2 + z - 6}{z^2}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z+1}{z^4}; \quad \text{в) } f(z) = \frac{e^z}{z^2}.$$

$$\text{I.290. а) } f(z) = \cos \frac{1}{z}; \quad \text{б) } f(z) = z^3 e^{1/z}; \quad \text{в) } f(z) = e^{1/z^2}.$$

$$\text{I.291. а) } f(z) = \frac{z^2 + 2}{z^{10} + 2}; \quad \text{б) } f(z) = z^4 \cos \frac{1}{z}; \quad \text{в) } f(z) = z^2 e^{-2z}.$$

$$\text{I.292. а) } f(z) = \frac{z^6 + 1}{z^2 + z}; \quad \text{б) } f(z) = \cos z - \sin z; \quad \text{в) } f(z) = \frac{z^2 + 1}{e^z}.$$

$$\begin{aligned} \text{I.293. а) } f(z) &= z^2 \sin \frac{z}{z+1}; & \text{б) } f(z) &= \frac{1}{z^2 - 1} \cos \frac{\pi z}{z+1}; \\ \text{в) } f(z) &= z \left( e^{1/z} - 1 \right). \end{aligned}$$

Знайти лишок відносно безмежно віддаленої точки таких функцій:

$$\text{I.294. а) } f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} \quad (a \in \mathbb{R}); \quad \text{б) } f(z) = \frac{z^{2n}}{1 + z^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$\text{I.295. а) } f(z) = \frac{e^z}{1 + z}; \quad \text{б) } f(z) = e^z \ln \frac{z-a}{z-b}.$$

Використовуючи лишок відносно безмежно віддаленої точки, обчислити такі інтеграли:

$$\text{I.296. } \oint_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{z^3} dz.$$

$$\text{I.297. } \oint_{|z|=2} \frac{1000z + 2}{1 + z^{1224}} dz.$$

$$\text{I.298. } \oint_{|z|=1} z^2 \sin \frac{1}{z} dz.$$

$$\text{I.299. } \oint_{|z|=2} \frac{dz}{1 + z^{12}}.$$

$$\text{I.300. } \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z-1} dz.$$

$$\text{I.301. } \oint_{|z|=3} \frac{z^3}{z^9 - 1} dz.$$

### Застосування лишків до обчислення означених інтегралів

Нехай треба обчислити інтеграл від дійсної функції  $f(x)$  за деяким (скінченним або безмежним) проміжком  $(a, b)$ . Для цього скінченний проміжок  $(a, b)$  доповнюють деякою кривою  $\gamma$ , яка разом з  $(a, b)$  обмежує область  $D$ , а потім знаходять аналітичну в  $D$  функцію комплексної змінної  $f(z)$ , що збігається з  $f(x)$  на  $(a, b)$ . За теоремою Коші про лишки одержують:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sigma,$$

( $\sigma$  — сума лишків функції  $f(z)$  в особливих точках області  $D$ ). Якщо  $\int_{\gamma} f(z) dz$  вдається знайти, то задача обчислення  $\int_a^b f(x) dx$  розв'язана повністю.

У випадку безмежного проміжка  $(a, b)$  розглядають таке сімейство контурів інтегрування, які необмежено розширюються, щоб у границі одержати інтеграл за  $(a, b)$ . Інтеграл за  $\gamma$  в переважній більшості випадків можна не обчислювати, достатньо лише знайти його границю.

#### 1. Інтеграли від раціональних функцій.

Нехай  $f(x)$  — раціональна функція,  $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ , де  $P_m(x)$  і  $Q_n(x)$  — многочлени відповідно степеня  $m$  і  $n$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ). Якщо  $f(z)$  — неперервна функція на всій дійсній осі ( $Q_n(x) \neq 0$ ) і  $n \geq m + 2$ , тобто степінь знаменника принаймні на дві одиниці більший за степінь чисельника, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sigma, \quad (I.8-66)$$

де  $\sigma$  означає суму лишків функції  $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$  у всіх полюсах, розташованих у верхній півплощині.

## ▼ Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}, \quad (a > 0).$$

Розв'язування. Підінтегральна функція є парною, тому можна записати  $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}$ .

Уведемо функцію  $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2}$ , що збігається з функцією  $f(x)$  на дійсній осі, тобто для  $z = x$ . Функція  $f(z)$  має у верхній півплощині полюс другого порядку в точці  $z = ia$ . Лишок  $f(z)$  у цьому полюсі дорівнює

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(ia) &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} [f(z)(z - ia)^2] = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^2}{(z + ia)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{2iaz}{(z + ia)^3} = \frac{1}{4ia}. \end{aligned}$$

За формулою (I.8-66) одержимо

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} 2\pi i \frac{1}{4ia} = \frac{\pi}{4a}.$$



2. Інтеграли виду  $\int_0^{+\infty} R(x) \cos \lambda x \, dx, \quad \int_0^{+\infty} R(x) \sin \lambda x \, dx,$

де  $R(x)$  — правильний раціональний дріб,  $\lambda > 0$  — довільне дійсне число.

Для обчислення таких інтегралів зручно користуватись **лемою Жордана**:

**Лема Жордана.** Нехай  $g(x)$  — функція, що є аналітичною у верхній півплощині ( $0 < \arg z < \pi$ ) за винятком скінченного числа особливих точок, і прямує у цій півплощині до нуля при  $|z| \rightarrow \infty$ . Тоді для  $\lambda > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0, \quad (\text{I.8-67})$$

де  $C_R$  — півколо у верхній півплощині з центром у точці 0 і радіусом  $R$  (див. рисунок).

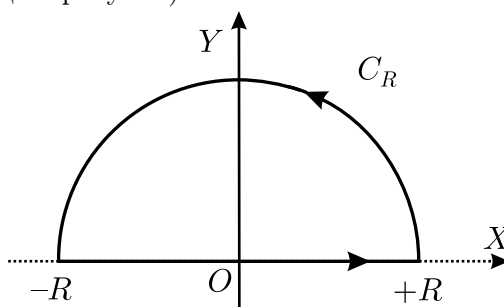


Рис. 1.4.

▼ **Приклад 2.** Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2} dx \quad (a > 0, k > 0).$$

*Розв'язування.* Уведемо допоміжну функцію

$$f(z) = \frac{z e^{iaz}}{z^2 + k^2}.$$

Якщо  $z = x$ , то  $\operatorname{Im} f(z)$  збігається з підінтегральною функцією

$$\varphi(x) = \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2}.$$

Розглянемо контур, зображений на рис. 1.4. Для досить великого  $R$  на півколі  $C_R$  функція  $g(z) = \frac{z}{z^2 + k^2}$  задовольняє нерівність

$$|g(z)| < \frac{R}{R^2 + k^2}$$

і, отже,  $g(z)$  прямує до нуля, коли  $R \rightarrow \infty$ . Це означає, що за лемою Жордана

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z e^{iaz}}{z^2 + k^2} dz = 0. \quad (\text{I.8-68})$$

Для довільного  $R > k$  за теоремою про лишки маємо

$$\int_{-R}^R \frac{x e^{iax}}{x^2 + k^2} dx + \int_{C_R} \frac{z e^{iaz}}{z^2 + k^2} dz = 2\pi i \sigma,$$

де

$$\sigma = \operatorname{res}_{z=ik} \left[ \frac{z e^{iaz}}{z^2 + k^2} \right] = \lim_{z \rightarrow ik} \left[ \frac{z e^{iaz}}{z^2 + k^2} (z - ik) \right] = \frac{1}{2} e^{-ak}.$$

Якщо  $R \rightarrow \infty$ , враховуючи (I.8-68), одержимо  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2 + k^2} dx = \pi i e^{-ak}$ .

Визначивши ліворуч і праворуч дійсні й уявні частини, маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2} dx = \pi e^{-ak}.$$

Оскільки підінтегральна функція є парною, остаточно одержимо

$$I = \frac{\pi}{2} e^{-ak}.$$

▲

**3. Обчислення інтегралів виду  $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$** , де  $R$  —

раціональна функція аргументів  $\cos x$  і  $\sin x$ , що обмежена всередині проміжку інтегрування.

Покладемо  $e^{ix} = z$ , тоді  $dx = \frac{dz}{iz}$  і  $\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}$ ,  $\sin x = \frac{z^2 - 1}{2iz}$ . Тут  $|z| = 1$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Тоді шуканий інтеграл набуває форми  $\oint_C F(z) dz$ , де  $C$  — коло одиничного радіуса з центром у початку координат. За теоремою Коші про лишки цей інтеграл дорівнює  $2\pi\sigma i$ , де  $\sigma$  — сума лишків у полюсах, що містяться всередині кола  $C$ .

---

▼ **Приклад 3.** Обчислити  $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2}$ , ( $a > b > 0$ ).

*Розв'язування.* Зробимо підстановку  $e^{ix} = z$ . Після простих перетворень одержимо

$$I = \frac{4}{i} \oint_C \frac{z dz}{(bz^2 + 2az + b)^2} = \frac{4}{i} 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} F(z_k).$$

Усередині одиничного кола за умови  $a > b > 0$  міститься тільки один полюс  $z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ . Лишок функції  $F(z) = \frac{z}{(bz^2 + 2az + b)^2}$  у цьому полюсі дорівнює

$$\operatorname{res} F(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z(z - z_1)^2}{b^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2} \right] = \frac{a}{4}(a^2 - b^2)^{-3/2}.$$

$$\text{Отже, } I = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

▲

4. У розглянутих прикладах припускалось, що функція  $f(z)$  — аналітичне продовження функції  $f(x)$  — не має особливих точок на дійсній осі. Однак незначна модифікація уможливило обчислення невластних інтегралів і в цьому випадку.



▼ **Приклад 4.** Обчислити інтеграл  $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx$ .

*Розв'язування.* Уведемо функцію  $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)}$  — таку, що при  $z = x$   $\text{Im } f(z)$  збігається з підінтегральною функцією. Функція  $f(z)$  має особливість на дійсній осі в точці  $z = 0$ , це полюс 1-го порядку. Тому контур інтегрування обираємо так, щоб особлива точка охоплювалась малим півколом  $C_r$  ( $r < b$ ); півколо  $C_R$  обираємо так, щоб  $b < R$  (див. рис. 1.5).

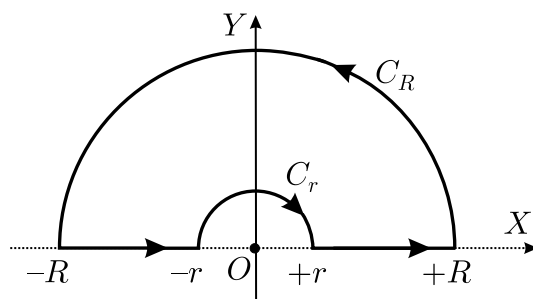


Рис. 1.5.

Отже, всередині замкнутого контура міститься лише один полюс функції  $f(z)$  в точці  $z = ib$ . За теоремою Коші про лишки маємо:

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)} dx + \int_{C_r} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz + \\ & + \int_r^R \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz = 2\pi i \operatorname{res} f(ib), \end{aligned}$$

де

$$\operatorname{res} f(ib) = \lim_{z \rightarrow ib} \frac{e^{iaz}(z - bi)}{z(z^2 + b^2)} = -\frac{e^{-ab}}{2b^2}.$$

Замінімо у першому інтегралі  $x$  на  $-x$  і об'єднаємо його з третім інтегралом:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)} dx + \int_r^R \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)} dx &= \int_r^R \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{x(x^2 + b^2)} dx = \\ &= 2i \int_r^R \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx \end{aligned}$$

Підінтегральну функцію  $\frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)}$  запишемо так:

$$\frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{z} + \frac{\Psi(z)}{z}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \Psi(z) = 0,$$

тому що  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iaz}}{(z^2 + b^2)} = \frac{1}{b^2}$ .

Покладаючи  $z = r e^{i\varphi}$ , одержимо

$$\int_{C_r} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz = \frac{1}{b^2} \int_{C_r} \frac{dz}{z} + \int_{C_r} \frac{\Psi(z)}{z} dz = -\frac{i\pi}{b^2} + i \int_{\pi}^0 \Psi(r e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Інтеграл у правій частині в границі  $r \rightarrow 0$  дорівнює нулеві:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \Psi(r e^{i\varphi}) d\varphi = 0.$$

Четвертий інтеграл (за  $C_R$ ) при  $R \rightarrow \infty$  за лемою Жордана теж прямує до нуля. Отже, остаточно

$$\begin{aligned} \text{або} \quad 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx - \frac{\pi i}{b^2} &= -\pi i \frac{e^{-ab}}{b^2}, \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx &= \frac{\pi}{2b^2} (1 - e^{-ab}). \end{aligned}$$



**5.** У всіх наведених прикладах використовувалась теорема Коші для однозначної аналітичної функції. Отже, розглянуті методи можна застосовувати лише коли аналітичне продовження  $f(z)$  функції  $f(x)$  з дійсної осі в область, обмежену контуром інтегрування, є однозначною аналітичною функцією. Якщо ж повна аналітична функція  $F(z)$  — багатозначна, треба обирати контур інтегрування так, щоб він не містив точок розгалуження  $F(z)$  і розглядати одне однозначне відгалуження (гілку)  $f(z)$  повної аналітичної функції  $F(z)$  як аналітичне продовження функції  $f(x)$  у комплексну площину.

▼ **Приклад 5.** Обчислити інтеграл  $I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$ .

*Розв'язування.* За аналітичне продовження підінтегральної функції  $f(x)$  у верхню півплощину  $\operatorname{Im} z > 0$  оберемо функцію  $f(z) = \frac{\ln z}{(z^2 + 1)^2}$  та контур інтегрування як у прикладі 4. Всередині цього контура нехай  $\ln z$  означає гілку, для якої  $0 \leq \arg z < \pi$ . Функція  $f(z)$  має в точці  $z = i$  полюс другого порядку з лишком

$$\operatorname{res} f(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} [f(z)(z - i)^2] = \frac{\pi + 2i}{8}.$$

Застосуємо теорему Коші про лишки:

$$\int_{-R}^{-r} f(x) dx + \int_{C_r} f(z) dz + \int_r^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = \frac{\pi^2 i}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

Інтеграли за півколами  $C_R$  ( $z = R e^{i\varphi}$ ) та  $C_r$  ( $z = r e^{i\varphi}$ ),  $0 \leq \varphi < \pi$  прямують до нуля, коли  $R \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow 0$ . У першому інтегралі замінимо  $z = |z| e^{i\pi} = x e^{i\pi} = -x$ :

$$\int_{-R}^{-r} = \int_r^R \frac{\ln x + i\pi}{(x^2 + 1)^2} dx,$$

тоді у границі  $R \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow 0$  одержимо:

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx + \pi i \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi^2 i}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини, остаточно запишемо

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{\pi}{4}.$$



▼ **Приклад 6.** Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx \quad (0 < a < 1).$$

*Розв'язування.* Оберемо контур, зображений на рис. 1.6 і функцію  $f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z} = \frac{e^{(a-1)\ln z}}{1+z}$ . На нижньому березі розтину  $f(x e^{2\pi i}) = e^{2\pi a i} f(x)$ . Всередині контура  $f(z)$  має полюс першого порядку  $z = -1$  з лишком у ньому

$$\operatorname{res} f(-1) = e^{(a-1)\ln(-1)} = -e^{a\pi i}.$$

За теоремою Коші про лишки одержимо

$$\int_I + \int_{C_r} + \int_{II} + \int_{C_R} = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

Суму інтегралів на верхньому і нижньому берегах розтину запишемо так:

$$\int_I + \int_{II} = (1 - e^{2\pi a i}) \int_r^R f(x) dx$$

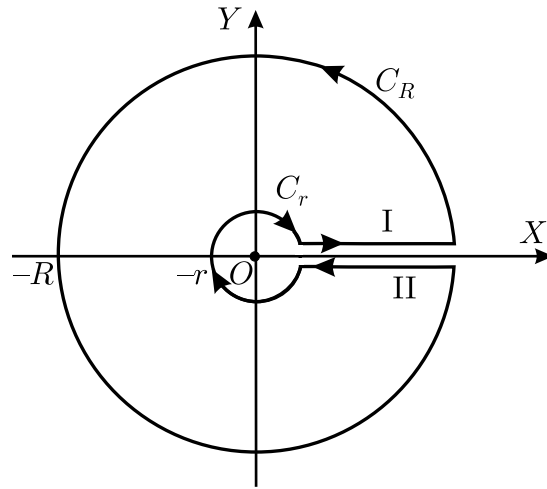


Рис. 1.6.

У границі  $r \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  інтеграли за  $C_r$  та  $C_R$  прямують до нуля, тому

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{2\pi i e^{a\pi i}}{e^{2\pi a i} - 1},$$

або

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

### Завдання.

Обчислити інтеграли:

I.302. а)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$ ; б)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ );

в)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$

- I.303. а)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, dx}{(x^2 + 4x + 13)^2};$  б)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2(x^2 + b^2)^2};$
- в)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^6 + 1} \, dx.$
- I.304. а)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^6};$  б)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2};$
- в)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{(a + bx^2)^4} \, dx \quad (a > 0, \, b > 0).$
- I.305. а)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} \, dx;$  б)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4x + 20} \, dx;$
- в)  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}.$
- I.306. а)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + 9};$  б)  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^4} \, dx \quad (a > 0);$
- в)  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + a^2} \quad (a > 0).$
- I.307. а)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2 + 1)^2} \, dx;$  б)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin ax}{(1 + x^2)^2} \, dx \quad (a > 0);$
- в)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} \, dx \quad (\lambda > 0).$
- I.308. а)  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2} \quad (0 < p < 1);$

$$\text{б)} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x \, dx}{1 - 2p \cos x + p^2} \quad (p > 1).$$

$$\text{I.309.} \int_0^{2\pi} \frac{\cos x \, dx}{1 - 2p \sin x + p^2} \quad (0 < p < 1);$$

$$\text{I.310.} \quad \text{а)} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x} \quad (a > 1); \quad \text{б)} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a + b \cos x} dx \quad (a > b > 0).$$

$$\text{I.311.} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a \cos x} \quad (0 < a < 1).$$

$$\text{I.312.} \quad \text{а)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx; \quad \text{б)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx;$$

$$\text{в)} \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

$$\text{I.313.} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+a)^2 + b^2} dx. \quad \text{Вказівка. Обрати контур, зображений на}$$

рис. 1.6 і функцію  $f(z) = \frac{\ln^2 z}{(z+a)^2 + b^2}$ .

$$\text{I.314.} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}. \quad \text{I.315.} \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^4 + b^4} dx \quad (a > 0).$$

$$\text{I.316.} \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + c^2} \sin \left( ax - \frac{b}{x} \right) dx \quad (a > 0, c > 0).$$

$$\text{I.317.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[a(b-x)]}{x^2 + c^2} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

$$\text{I.318. } \int_0^{\infty} \frac{\cos ax^2 - \sin ax^2}{x^4 + b^4} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

*Вказівка:* Обрати контур, зображений на рис. 1.7 а) і використати функцію  $f(z) = \frac{e^{iaz^2}}{z^4 + b^4}$ .

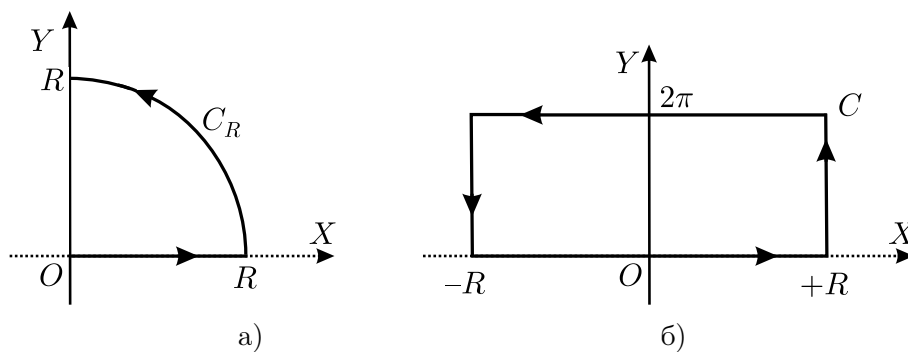


Рис. 1.7.

$$\text{I.319. а) } \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^2} dx.$$

I.320. Обчислити значення повних інтегралів Френеля

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \sin x^2 dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\infty} \cos x^2 dx;$$

$$\text{в) } \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

використовуючи  $\oint e^{-z^2} dz$ , де частиною контура є пряма з кутом нахилу  $\pi/4$ .

I.321. Обчислити  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$  ( $0 < a < 1$ ), використовуючи контур, зображений на рис.1.7 б).



## I.9. Конформні відображення

**Конформне відображення** області  $D$  на область  $G$  — це неперервне взаємно-однозначне відображення  $f(z) = w$ , де  $z \in D$ ,  $w \in G$ , при якому кут між будь-якими двома кривими в точці перетину  $z$  дорівнює куту між образами цих кривих в точці їх перетину  $w$ . Кут між кривими, що перетинаються в точці  $z = \infty$  означається як кут між їх образами при відображенні  $\zeta = \frac{1}{z}$  у точці  $\zeta = 0$ , взятий з протилежним знаком.

Конформне відображення здійснюється функціями, що є аналітичними й однолинійними в області  $D$  і приймають значення в області  $G$  (конформне відображення *першого роду*). У конформних відображеннях *другого роду* використовують функції, що є комплексно спряжені до аналітичних.

**1. Дробово-лінійне відображення**  $w = \frac{az + b}{cz + d}$  — єдине відображення, що конформно відображає *всю* розширену комплексну площину саму на себе. Задання трьох будь-яких точок  $z_1, z_2, z_3$  і їх образів відповідно  $w_1, w_2, w_3$  однозначно визначає дробово-лінійне перетворення  $w = f(z)$ :

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Якщо одна із заданих точок  $z_j$  чи  $w_j$  дорівнює  $\infty$ , то множники, що її містять, можна скоротити. Наприклад, якщо  $w_2 = \infty$ , то:

$$\frac{w - w_1}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

▼ **Приклад 1.** Визначити область, у яку переходить одиничний круг  $|z| < 1$  при відображенні  $w = \frac{1}{z}$ .

*Розв'язування.* Будь-яку точку круга  $|z| < 1$  можна записати у вигляді  $z = \rho e^{i\varphi}$ , де  $0 \leq \rho < 1$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ . При відображенні  $w = 1/z$  вона перейде в точку  $w = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}$ . Звідси  $1 < |w| \leq \infty$ ,

$-\pi < \arg w \leq \pi$ . Тобто маємо зовнішність круга  $|w| > 1$ . Зауважимо, що точка  $z = 0$  переходить у  $w = \infty$ .

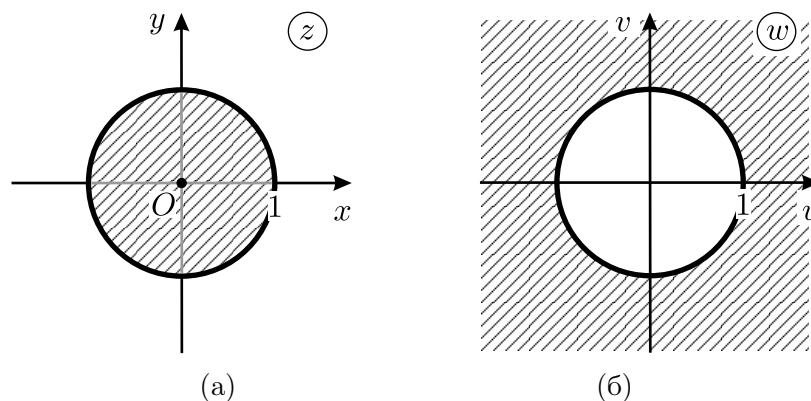


Рис. 1.8. Область  $|z| < 1$  (а) і її образ у площині  $w = u + iv$  (б).

**2. Відображення**  $w = f(z) = R_w R_z e^{i\theta} \frac{z - a}{R_z^2 - \bar{a}z}$ , ( $|a| < R_z$ ) переводить круг  $|z| < R_z$  у круг  $|w| < R_w$ , причому  $f(a) = 0$ . Якщо  $|a| > R_z$ , то вказана функція переводить зовнішність круга  $|z| > R_z$  у круг  $|w| < R_w$ .

**3. Відображення**  $w = f(z) = R_w e^{i\theta} \frac{z - a}{z - \bar{a}}$  ( $\operatorname{Im} a > 0$ ) переводить півплощину  $\operatorname{Im} z > 0$  у круг  $|w| < R_w$ , причому  $f(a) = 0$ .

У цих формулах  $\theta$  — будь-яке дійсне число.

**4. Відображення**  $w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc > 0$ ) переводить півплощину  $\operatorname{Im} z > 0$  у півплощину  $\operatorname{Im} w > 0$ .

**5. Відображення**  $w = f(z) = z^p$  ( $p > 0$ ) переводить сектор  $-\alpha < \arg z < \alpha$  ( $0 < \alpha < \pi/p$ ),  $0 < |z| < R$  у сектор  $-p\alpha < \arg w < p\alpha$ ,  $0 < |w| < R^p$ .

**6. Інтеграл Шварца–Крістоффеля.**

Функція

$$w = f(z) = A \int_0^z (\zeta - x_1)^{\alpha_1-1} (\zeta - x_2)^{\alpha_2-1} \dots (\zeta - x_n)^{\alpha_n-1} d\zeta + B,$$

(I.9-69)

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = n - 2,$$

де  $A, B$  — комплексні сталі, а  $x_1, \dots, x_n$  — дійсні числа, розташовані в порядку зростання, переводить півплощину  $\text{Im } z > 0$  в  $n$ -кутник з вершинами в точках  $w_1, \dots, w_n$ , які є образами точок  $x_1, \dots, x_n$ :  $w_j = f(x_j)$ . Кут при вершині  $w_j$  дорівнює  $\pi\alpha_j$ .

При фіксуванні многокутника, на який потрібно відобразити верхню півплощину (тобто при заданих  $\{w_j\}, \{\alpha_j\}$ ) із набору чисел  $x_1, \dots, x_n$  лише три можна вибрати довільно. Тому насправді така задача є відносно простою лише для відображення на трикутник (див. завдання IV.41). При відображенні на прямокутник виникають еліптичні інтеграли (розділ IV), у складніших випадках розв'язування вимагає спеціального підходу, пов'язаного із самоузгодженим розрахунком координат прообразів  $\{x_j\}$ . До елементарних функцій інтеграл Шварца–Крістоффеля зводиться тільки в особливих вироджених випадках (як-от відображення на сектор, на многокутник з вершиною в безмежно віддаленій точці та деяких інших).

**Завдання.**

Знайти аналітичну функцію  $w = f(z)$ , яка здійснює конформне відображення таких областей:

I.322. Півплощину  $\text{Re } z \geq 1$  на круг  $|w| \leq 1$  так, щоб  $f(1) = 1$ ,  $f(1+i) = -i$ ,  $f(1-i) = i$ .

I.323. Розширену комплексну площину  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  саму на себе так, щоб  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 1+i$ .

I.324. Круг  $|z - i| \leq 2$  на круг  $|w - 1| \leq 3$  так, щоб  $f(0) = 0$ ,  $f(-i) = -2$ .

I.325. Круг  $|z + 1| \leq 1$  на зовнішність круга  $|w| \geq 2$  так, щоб  $f(-1) = 3$ ,  $\arg f'(-1) = \pi$ .

I.326. Круг  $|z| \leq 1$  на круг  $|w| \leq 1$  так, щоб  $f(1) = 1$ ,  $f(i) = i$ ,  $\arg f'(0) = \pi/4$ .

I.327. Сектор  $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$  сам на себе так, щоб  $f(i) = 0$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(\infty) = \infty$ .

I.328. Верхню половину круга  $|z| \leq 1$  на півплощину  $\operatorname{Im} w \geq 0$  так, щоб  $f(-1) = -1$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ .

I.329. Круг  $|z| \leq 1$  з вирізом по відрізку  $[-1, 0]$  на круг  $|w| \leq 1$  так, щоб  $f(1) = 1$ ,  $f(0) = -1$ ,  $f(-1 - i\varepsilon) \Big|_{\varepsilon \rightarrow +0} = -i$ .

I.330. Нехай  $w = f(z)$  — конформне відображення,  $w = u + iv$ ,  $z = x + iy$ . Показати, що

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \bar{f}' \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

I.331. Нехай  $w = f(z)$  — конформне відображення,  $w = u + iv$ ,  $z = x + iy$ . Показати, що

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = |f'|^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right).$$

I.332. Показати, що відображення Жуковського

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

переводить кола з центром у початку координат ( $|z| = a$ ) і прямі, що проходять через початок координат ( $\arg z = b$ ) у певні кінчні перерізи (величини  $a, b$  — дійсні).

I.333. Показати, що дробово-лінійне перетворення

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{причому} \quad |c|^2 + |d|^2 \neq 0,$$

переводить будь-яке коло у площині  $z$  в коло у площині  $w$  (пряму слід розглядати як коло безмежного радіуса).

## II. Інтегральні перетворення. Узагальнені функції

За визначенням функція

$$F(p) = \int_a^b K(p, t) f(t) dt$$

називається *інтегральним перетворенням (зображенням)* функції  $f(t)$ , причому  $f(t)$  має назву *оригіналу* свого зображення  $F(p)$ , а функція  $K(p, t)$  — *ядра інтегрального перетворення*. Інтегральне перетворення над деяким класом функцій  $f(t)$  визначається вибором ядра  $K(p, t)$  і проміжку інтегрування  $(a, b)$ . Інтегральне перетворення функції  $f$  ставить їй у відповідність функцію  $F$ . Це записують  $(f \rightarrow F)$  і називають *прямим перетворенням*, а перетворення  $F \rightarrow f$  — *оберненим перетворенням*.

Загальна схема застосування інтегрального перетворення до задач математичної фізики така: за допомогою інтегрального перетворення шуканого розв'язку задачі вилучають диференціювання по одній змінній і для його зображення одержують простішу задачу. Знайшовши зображення задачі за допомогою оберненого перетворення, “відновлюють” уже шуканий розв'язок.

Перелічимо основні інтегральні перетворення, які застосовують у математичній фізиці.

## II.1. Перетворення Лапласа

Нехай задана дійсна або комплексна функція  $f(t)$  дійсної змінної  $t$ ,  $0 \leq t < \infty$ , яка задовольняє таку умову: для деякого дійсного  $s_0$

$$\int_0^{\infty} e^{-s_0 t} |f(t)| dt < \infty, \quad (\text{II.1-1})$$

тобто інтеграл існує і є скінченним.

За такої умови інтеграл

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (\text{II.1-2})$$

існує для всіх  $p$  з дійсною частиною  $\operatorname{Re} p > s_0$  і є аналітичною функцією комплексної змінної  $p = s + i\sigma$  у півплощині  $\operatorname{Re} p > s_0$ . Функція зображення  $F(p)$  називається **перетворенням Лапласа (одностороннім)** функції-оригіналу  $f(t)$ .

Нижню межу  $s_0$  всіх  $s$ , для яких виконується умова (II.1-1), називають **показником зростання функції**  $f(t)$ .

Те, що  $F(p)$  є зображенням  $f(t)$ , символічно записують так:

$$f(t) \doteq F(p).$$

або

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f(t), p].$$

За аналогією з наведеним **одновимірним перетворенням Лапласа** вводять також **двовимірне перетворення Лапласа**:

$$F(p, q) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-pu - qv} f(u, v) du dv \quad (\text{II.1-3})$$

За умови (II.1-1) оригінал  $f(t)$  визначається на відрізку  $0 \leq t < \infty$  через відоме зображення  $F(p)$  як **обернене перетворення Лапласа**

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[f(t)] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(c+i\sigma)t} F(c+i\sigma) d\sigma, \quad (\text{II.1-4})$$

або після заміни змінних

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad (\text{II.1-5})$$

де дійсна стала  $c > s_0$ .

Коли функція  $f(t)$  визначена для всіх дійсних значень  $t$ , інколи розглядають **двостороннє перетворення Лапласа**:

$$F(p) = \mathcal{L}_B[f(t)] = \mathcal{L}_B[f(t), p] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

▼ **Приклад 1.** Записати зображення функції  $f(t) = e^{2t}$ .

*Розв'язування.* Для функції  $f(t) = e^{2t}$  маємо  $s_0 = 2$ . Тому зображення  $F(p)$  буде аналітичною функцією у півплощині  $\text{Re } p > 2$ .

Маємо

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{2t} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-2)t} dt = \\ &= \frac{1}{-(p-2)} e^{-(p-2)t} \Big|_{t=0}^{+\infty} = \frac{1}{p-2} \quad (\text{Re } p = s > 2). \end{aligned}$$



### **Властивості перетворення Лапласа**

1. *Лінійність.* Для будь-яких комплексних сталих  $\alpha$  і  $\beta$ :

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \rightleftharpoons \alpha F(p) + \beta G(p)$$

(тут і далі  $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ ,  $g(t) \rightleftharpoons G(p)$ , якщо інше не обумовлено).

2. *Теорема подібності.* Для будь-якої сталої  $\alpha > 0$ :

$$f(\alpha t) \rightleftharpoons \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$



3. Диференціювання оригіналу. Якщо функції  $f(t)$ ,  $f'(t)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n)}(t)$  є функціями-оригіналами, то

$$\begin{aligned} f'(t) &\doteq p F(p) - f(0), \\ f''(t) &\doteq p^2 F(p) - p f(0) - f'(0), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f^{(n)}(t) &\doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

▼ **Приклад 2.** Знайти зображення функції  $f(t) = \sin^2 t$ .

*Розв'язування.*

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2 \sin t \cos t = \sin 2t \doteq \frac{2}{p^2 + 4}, \\ f'(t) &\doteq p F(p) - f(0), \quad f(0) = 0, \end{aligned}$$

звідси маємо

$$\frac{2}{p^2 + 4} = p F(p) \quad \text{і} \quad F(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)} \doteq \sin^2 t.$$



4. Диференціювання зображення. Диференціювання зображення зводиться до множення на  $(-t)$  оригіналу  $F'(p) \doteq -t f(t)$  або, в загальному випадку,  $F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t)$ .

▼ **Приклад 3.** Знайти зображення функції  $f(t) = t^2 e^t$ .

*Розв'язування.* Маємо  $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$ . За теоремою про диференціювання зображення  $\left(\frac{1}{p-1}\right)' \doteq -t e^t$ , звідси  $\frac{1}{(p-1)^2} \doteq t e^t$ . Далі  $\left[\frac{1}{(p-1)^2}\right]' \doteq -t(t e^t)$  або  $\frac{2}{(p-1)^3} \doteq t^2 e^t$ .



5. *Інтегрування оригіналу.* Інтегрування оригіналу зводиться до ділення зображення на  $p$ , тобто  $\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$ .

---

▼ **Приклад 4.** Знайти зображення функції  $\int_0^t e^\tau d\tau$ .

*Розв'язування.* Маємо  $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$ . За теоремою про інтегрування оригіналу  $\int_0^\tau e^\tau d\tau \doteq \frac{\frac{1}{p-1}}{p} = \frac{1}{p(p-1)}$ .

---

6. *Інтегрування зображення.* Якщо інтеграл  $\int_p^\infty F(p) dp$  збіжний, то він є зображенням функції  $\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(p) dp$ .

---

▼ **Приклад 5.** Знайти зображення функції  $\frac{\sin t}{t}$ .

*Розв'язування.* Відомо, що  $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$ . Тому  $\frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{dp}{p^2+1} = \arctg p \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctg p = \operatorname{arctg} p$ .

---

Для багатозначних функцій  $\operatorname{Ln} z$ ,  $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} z$  і т. п. беремо їх головні відгалуження, для яких  $\ln 1 = 0$ ,  $\arctg 1 = \pi/4$  і т. д.

7. *Теорема зсуву.* Якщо  $f(t) \doteq F(p)$ , то для будь-якого комплексного  $p_0$ :  $e^{p_0 t} f(t) \doteq F(p - p_0)$ .

▼ **Приклад 6.** Знайти зображення функції  $f(t) = e^{-t} \cos 2t$ .

*Розв'язування.* Маємо  $\cos 2t \doteq \frac{p}{p^2 + 4}$ . За теоремою зсуву

$$e^{-t} \cos 2t = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4}, \quad (p_0 = -1).$$

▲

8. *Теорема запізнення.* Якщо  $f(t) \doteq F(p)$ , то для довільного додатного  $\tau$ :

$$e^{-p\tau} F(p) \doteq \begin{cases} 0, & t < \tau \\ f(t - \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$$

Останній результат можна подати через  $\theta$ -функцію Гевісайда (II.5-11) як  $\theta(t - \tau)f(t - \tau)$ .

Теорему запізнення зручно використовувати для знаходження зображень функцій, які на різних ділянках задані різними аналітичними виразами.

9. *Теорема множення (теорема про згортку).* Добуток двох зображень  $F(p)$  і  $G(p)$  також є зображенням і

$$F(p)G(p) \doteq \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = f * g,$$

де  $f * g$  називають **згорткою** функцій  $f(t)$  і  $g(t)$ . Іноді згортку позначають ще так:  $f \circ g$ .

▼ **Приклад 7.** Знайти зображення функції  $\Psi(t) = \int_0^t (t - \tau)e^\tau d\tau$ .

*Розв'язування.* Функція  $\Psi(t)$  є згорткою функцій  $f(t) = t$  і  $g(t) = e^t$ . За теоремою множення  $\Psi(t) \doteq F(p)G(p) = \frac{1}{p^2} \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2(p-1)}$ .

▲

10. Знаходження оригіналу за даним зображенням. Нехай  $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$  — правильний раціональний дріб, тоді його розкладають на суму простих дробів і знаходять оригінали для кожного з них.

---

▼ **Приклад 8.** Знайти оригінал для функції  $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$ .

*Розв'язування.* Розкладемо  $F(p)$  на суму простих дробів

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Знаходячи коефіцієнти  $A, B, C, D$ , одержимо

$$F(p) = -\frac{1}{4p} + \frac{1}{5(p-1)} + \frac{p}{20(p^2+4)} - \frac{1}{5(p^2+4)}.$$

Оригінали для кожного із простих дробів знаходимо просто. За властивістю лінійності маємо  $f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t$ .

---

▼ **Приклад 9.**  $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$ . Знайти  $f(t)$ .

*Розв'язування.* У даному випадку  $F(p)$  — простий дріб. Для знаходження оригіналу використаємо теорему про згортку і  $\frac{1}{p^2+1} \stackrel{=}{=} \sin t$ .

Маємо:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1} \stackrel{=}{=} \int_0^t \sin(t-\tau) \sin \tau \, d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [\cos t - \cos(2\tau-t)] \, d\tau = \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{4} \sin(2\tau-t) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \\ &= \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{2} \sin t. \end{aligned}$$


---

**Завдання.**

Знайти зображення функції

за теоремою диференціювання оригіналу:

II.1. а)  $f(t) = \cos^2 t$ ;      б)  $f(t) = \sin^3 t$ ;      в)  $f(t) = t \sin \omega t$ .

II.2. а)  $f(t) = \cos^4 t$ ;      б)  $f(t) = t \cos \omega t$ ;      в)  $f(t) = t e^t$ .

за теоремою диференціювання зображення:

II.3. а)  $f(t) = t^2 \cos t$ ;      б)  $f(t) = t (e^t + \operatorname{ch} t)$ .

II.4. а)  $f(t) = (t + 1) \sin 2t$ ;      б)  $f(t) = t \operatorname{sh} 3t$ .

за властивістю інтегрування оригіналу:

II.5. а)  $f(t) = \int_0^t \sin \tau \, d\tau$ ;      б)  $f(t) = \int_0^t (\tau + 1) \cos \omega \tau \, d\tau$ .

II.6. а)  $f(t) = \int_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau \, d\tau$ ;      б)  $f(t) = \int_0^t \cos^2 \omega \tau \, d\tau$ .

II.7. а)  $f(t) = \int_0^t \operatorname{ch} \omega \tau \, d\tau$ ;      б)  $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} \, d\tau$ .

за властивістю інтегрування зображення:

II.8. а)  $\frac{e^t - 1}{t}$ ;      б)  $\frac{1 - e^{-t}}{t}$ ;      в)  $\frac{\sin^2 t}{t}$ .

II.9. а)  $\frac{1 - \cos t}{t}$ ;      б)  $\frac{\cos t - \cos 2t}{t}$ .

II.10. а)  $\frac{e^t - 1 - t}{t}$ ;      б)  $\frac{e^t - e^{-t}}{t}$ .

за теоремою про згортку:

II.11. а)  $\int_0^t e^{t-\tau} \sin \tau \, d\tau$ ;      б)  $\int_0^t \cos(t - \tau) e^{2\tau} \, d\tau$ .

$$\text{II.12. а) } \int_0^t (t - \tau)^2 \operatorname{ch} \tau \, d\tau;$$

$$\text{б) } \int_0^t e^{2(\tau-t)} \tau^2 \, d\tau.$$

Знайти оригінали функцій:

$$\text{II.13. а) } F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3}.$$

$$\text{II.14. а) } F(p) = \frac{p}{(p+1)^2};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{1}{p + 2p^2 + p^3}.$$

$$\text{II.15. а) } F(p) = \frac{1}{7 - p + p^2};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}.$$

$$\text{II.16. а) } F(p) = \frac{p^2 + 2p - 1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{p}{p^3 + 1}.$$

$$\text{II.17. а) } F(p) = \frac{2p + 3}{p^3 + 4p^2 + 5p};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+2)}.$$

$$\text{II.18. а) } F(p) = \frac{3p^2}{(p^3 - 1)^2};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{e^{-3p}}{(p+1)^2}.$$

$$\text{II.19. а) } F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2 - 1} + \frac{p e^{-2p}}{p^2 - 4};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{e^{-p/2}}{p(p+1)(p^2 + 4)}.$$

II.20. За допомогою перетворення Лапласа знайти розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^x K(x-y)\varphi(y) \, dy.$$

II.21. Показати, що для двостороннього перетворення Лапласа справедливі співвідношення:

$$\text{а) } \mathcal{L}_B[f(t); p] = \mathcal{L}[f(t); p] + \mathcal{L}[f(-t); -p];$$

$$\text{б) } \mathcal{L}_B[f(t); p] = \mathcal{L}[f(t); p] - \frac{c}{p}, \quad \text{де } f(t) = c \text{ для } t \leq 0, \\ c = \text{const.}$$

Знайти двостороннє перетворення Лапласа таких функцій:

$$\text{II.22. } f(t) = e^{-bt^2}, \quad b = \text{const} > 0.$$

II.23.  $f(t) = t e^{-bt^2}$ ,  $b = \text{const} > 0$ .

Знайти двовимірне перетворення Лапласа таких функцій:

II.24.  $f(u, v) = \sin(u + v)$ .

II.25.  $f(u, v) = \varphi_a\left(\frac{u}{v}\right)$ , де  $\varphi_a(t) = \begin{cases} 1, & t \leq a \\ 0, & t > a \end{cases}$ ,  $a = \text{const} > 0$ .

## II.2. Перетворення Фур'є

Нехай функція  $f(t)$  дійсної змінної  $t$ ,  $-\infty \leq t < \infty$ , задовольняє такі умови:

- 1)  $f(t)$  — абсолютно інтегровна на проміжку  $(-\infty, +\infty)$ , тобто  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$  — збіжний;
- 2)  $f(t)$  є функцією обмеженої варіації, тобто вона обмежена, має скінченне число відносних екстремумів і точок розриву першого роду.

Тоді можна ввести **перетворення Фур'є**:

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (\text{II.2-1})$$

**Зворотнє перетворення Фур'є** визначається так:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{II.2-2})$$

Це інтегральне перетворення можна отримати як узагальнення перетворення Лапласа (взагалі кажучи, двостороннього) на випадок уявної змінної  $p = i\omega$ .

З іншого боку, перетворення Фур'є відповідає граничному випадку комплексного ряду Фур'є

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k e^{ik\Omega t}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

з коефіцієнтами

$$f_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\Omega t} dt,$$

коли період  $T \rightarrow \infty$ .

У фізичних задачах часто виникає потреба розглядати багатовимірні перетворення Фур'є, найчастіше — 3-вимірне:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z F(k_x, k_y, k_z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)},$$

(II.2-3)

$$F(k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz f(x, y, z) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}.$$

Або у векторній формі:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int d\mathbf{k} F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

(II.2-4)

$$F(\mathbf{k}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

В загальному випадку узагальнення відповідних формул є очевидним:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dk_n F(k_1, \dots, k_n) e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)}.$$



Якщо  $f(t)$  — парна функція, то перетворення Фур'є (II.2-1)–(II.2-2) переходять у взаємно зворотні **косинус-перетворення Фур'є**

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c[f(t)] = F(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt, \\ f(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos \omega t \, d\omega.\end{aligned}$$

Якщо ж  $f(t)$  — непарна функція, то, відповідно, — в **синус-перетворення Фур'є**:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s[f(t)] = F(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt, \\ f(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\omega) \sin \omega t \, d\omega.\end{aligned}$$

Основні властивості перетворення Фур'є подібні до відповідних властивостей перетворення Лапласа:

1. *Лінійність*

$$\mathcal{F}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathcal{F}[f_1(t)] + \beta \mathcal{F}[f_2(t)].$$

2. *Теорема подібності*

$$\mathcal{F}[f(\alpha t); \omega] = \frac{1}{\alpha} \mathcal{F}\left[f(t); \frac{\omega}{\alpha}\right], \quad \text{тобто} \quad f(t) \mapsto \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

3. *Теорема зсуву*

$$\mathcal{F}[f(t + \tau)] = e^{i\omega\tau} \mathcal{F}[f(t)].$$

4. *Диференціювання оригіналу*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(t)] &= i\omega \mathcal{F}[f(t)]; \\ \mathcal{F}[f^{(n)}(t)] &= (i\omega)^n \mathcal{F}[f(t)]\end{aligned}$$

## 5. Теорема про згортку

**Згорткою**  $f * g$  функцій  $f(t)$  і  $g(t)$ , заданих в інтервалі  $-\infty < t < \infty$ , називається інтеграл

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(\tau - t) dt. \quad (\text{II.2-5})$$

Якщо існують пряме й обернене перетворення Фур'є, згортці надамо вигляду

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)e^{i\omega x} d\omega, \quad (\text{II.2-6})$$

де

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt,$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t) dt,$$

тобто Фур'є-перетворення згортки є добутком відповідних перетворень Фур'є вихідних функцій:

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f(t)] \cdot \mathcal{F}[g(t)].$$

або

$$f * g \mapsto F(\omega)G(\omega).$$

Громіздкі обчислення, які трапляються у випадку застосування перетворення Фур'є, значно спрощуються, якщо ввести  $\delta$ -функцію Дірака (див. розділ II.5.).

При розв'язуванні фізичних задач часто зручніше вводити коефіцієнт при інтегралах у прямому й оберненому перетвореннях Фур'є не симетрично, як у формулах (II.2-1)–(II.2-2), а залишаючи один з

інтегралів без додаткового множника. При цьому змінним у відповідних виразах надають такого змісту:  $t$  — час,  $\omega$  — кругова (циклічна) частота,  $x$  — координата,  $\mathbf{r}$  — радіус-вектор (3-вимірна координата),  $k$  або  $\mathbf{k}$  — хвильове число.

Наведемо приклади таких перетворень:

1) Напруженість електричного поля

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \int d\omega \, \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \\ \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} &= \int d\mathbf{r} \int dt \, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}.\end{aligned}\tag{II.2-7}$$

Позначення аргументів у вигляді індексів є одним зі способів відізнати зображення від оригіналу. Величини, аналогічні  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}$  (тобто зображення), називають ще **Фур'є-амплітудами**. Проміжків інтегрування не зазначено, розуміємо інтеграли по всьому просторовому об'єму і по всьому часовому інтервалу. Потрібно звернути увагу на різні знаки біля просторових і часових змінних.

2) Парна функція розподілу  $F_2(\mathbf{r})$  через структурний фактор  $S_{\mathbf{k}}$

$$\begin{aligned}F_2(\mathbf{r}) &= 1 + \frac{V}{(2\pi)^3 N} \int d\mathbf{k} (S_{\mathbf{k}} - 1) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \\ S_{\mathbf{k}} &= 1 + \frac{N}{V} \int d\mathbf{r} [F_2(\mathbf{r}) - 1] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.\end{aligned}\tag{II.2-8}$$

У цих формулах  $V$  означає об'єм системи, а  $N$  — кількість частинок.

### Завдання.

Знайти 1-вимірне перетворення Фур'є таких функцій:

$$\begin{aligned}\text{II.26. } & \frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0). & \text{II.27. } & \frac{\sin x}{x^2 + a^2} \quad (a > 0). \\ \text{II.28. } & \frac{x^2}{(1 + x^4)}. & \text{II.29. } & \frac{e^{-|x|}}{x}.\end{aligned}$$

$$\text{II.30. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

Знайти косинус-перетворення Фур'є функцій

$$\text{II.31. } f(t) = e^{-t}. \quad \text{II.32. } f(t) = e^{-t^2/2}.$$

II.33. Знайти синус-перетворення Фур'є функції

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Використовуючи прийнятий у фізиці несиметричний аналог формул (II.2-3), (II.2-4)

$$F(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

знайти 3-вимірне перетворення Фур'є

$$\text{II.34. Потенціалу Юкави } \varphi(r) = A \frac{e^{-\alpha r}}{r}.$$

$$\text{II.35. Потенціалу Кулона } \varphi(r) = \frac{q}{r}.$$

$$\text{II.36. Функції } \varphi(r) = \begin{cases} \Phi_0, & 0 \leq r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}.$$

II.37. Знайти  $n$ -вимірне перетворення Фур'є функції

$$f(x_1, \dots, x_n) = e^{-|\mathbf{x}|^2},$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  —  $n$ -компонентний вектор.

II.38. За допомогою перетворення Фур'є знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\varphi(y) dy.$$

II.39. Застосовуючи формули (II.2-8), отримати вираз для парної функції розподілу  $F_2(\mathbf{r})$  ізотропної системи, структурний фактор  $S_k$  якої залежить лише від модуля хвильового вектора.

II.40. Використовуючи для напруженостей полів, густин зарядів і струмів перетворення Фур'є у формі (II.2-7), записати через Фур'є-амплітуди рівняння Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{а) } \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 4\pi\rho(\mathbf{r}, t); & \text{б) } \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}; \\ \text{в) } \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0; & \text{г) } \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

### II.3. Інші інтегральні перетворення

У цьому розділі перелічимо деякі інтегральні перетворення, з якими доводиться мати справу в різних задачах математичної фізики. Оскільки вони переважно вимагають застосування так званих *спеціальних функцій*, то ми звернемося до відповідних задач пізніше, в розділі IV.1.

Крім перетворення Фур'є, існують також інші модифікації перетворення Лапласа. Однією з них є *перетворення Мелліна*:

$$\mathcal{M}[f(t)] = \Phi(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} f(t) dt, \quad (\text{II.3-1})$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-z} \Phi(z) dz. \quad (\text{II.3-2})$$

Ядро *перетворення Ганкеля* містить спеціальну *функцію Бесселя*  $J_\nu(x)$ :

$$\mathcal{H}_\nu[f(r)] = g(s) = \int_0^{\infty} f(r) J_\nu(sr) r dr, \quad (\text{II.3-3})$$

$$f(r) = \int_0^{\infty} g(s) J_{\nu}(sr) s ds. \quad (\text{II.3-4})$$

Перетворення Ганкеля обернене саме до себе.

### Перетворення Гільберта

$$\mathcal{H}[f(x)] = g(y) = \frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{x - y} \quad (\text{II.3-5})$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y) dy}{y - x}, \quad (\text{II.3-6})$$

де v. p. означає інтеграл у сенсі головного значення:

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{x - y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{y-\varepsilon} \frac{f(x) dx}{x - y} + \int_{y+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x) dx}{x - y}.$$

### Завдання.

II.41. Довести, що перетворення Гільберта пов'язане з перетворенням Лапласа таким чином:

$$\pi \mathcal{H}[f(x), y] = \mathcal{L} \left[ \mathcal{L}[f(-x); y']; y \right] - \mathcal{L} \left[ \mathcal{L}[f(x); y']; -y \right].$$

II.42. Нехай функція  $f(z)$  аналітична у верхній півплощині  $\text{Im } z \geq 0$  і рівномірно прямує до нуля при  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ . Довести, що перетворення Гільберта  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  задовольняє умови:

$$\begin{aligned} \text{Im } f(x_0) &= \mathcal{H}[\text{Re } f(x), x_0], \\ \text{Re } f(x_0) &= \mathcal{H}[\text{Im } f(x), x_0]. \end{aligned}$$

II.43. Нехай  $h_1(t) = \int_0^\infty f(x)g\left(\frac{t}{x}\right)\frac{1}{x}dx$ ,  $h_2(t) = \int_0^\infty f(x)g(tx)dx$ .

Довести рівності (теорема про згортку для перетворення Мелліна):

$$\text{а) } \mathcal{M}[h_1(t); z] = \mathcal{M}[f(t); z] \mathcal{M}[g(t); z],$$

$$\text{б) } \mathcal{M}[h_2(t); z] = \mathcal{M}[f(t); 1-z] \mathcal{M}[g(t); z].$$

## II.4. Звичайні лінійні диференціальні рівняння

### Рівняння зі сталими коефіцієнтами

Нехай маємо диференціальне рівняння, наприклад, другого порядку

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x(t) = f(t), \quad (\text{II.4-1})$$

де  $a_0, a_1, a_2$  — константи,  $a_2 \neq 0$ ,  $f(t)$  — функція-оригінал.

Шукаємо розв'язок рівняння (II.4-1), що задовольняє початкові умови:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1. \quad (\text{II.4-2})$$

Нехай  $x(t) \doteq X(p)$ ,  $f(t) \doteq F(p)$ . Застосовуючи до обох частин (II.4-1) перетворення Лапласа і використовуючи теорему про диференціювання оригіналу й властивість лінійності перетворення Лапласа, замість диференціального рівняння (II.4-1) із початковими умовами (II.4-2) одержимо операторне рівняння

$$(a_2 p^2 + a_1 p + a_0) X(p) - (a_2 p x_0 + a_2 x_1 + a_1 x_0) = F(p). \quad (\text{II.4-3})$$

Звідси знаходимо  $X(p) = \frac{F(p) + a_2 p x_0 + a_2 x_1 + a_1 x_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$ . Отже, визначаючи з  $X(p)$  оригінал  $x(t)$ , ми знаходимо розв'язок задачі Коші (II.4-1)–(II.4-2).

Загальний випадок розв'язування задачі Коші для звичайного диференціального рівняння  $n$ -го порядку принципово не відрізняється від випадку  $n = 2$ .

▼ **Приклад 1.** Розв'язати задачу Коші  $x'' + x = 2 \cos t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = -1$ .

*Розв'язування.*

$$x(t) \doteq X(p), \quad x'(t) \doteq p X(p) - x(0) = p X(p),$$

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - p x(0) - x'(0) = p^2 X(p) + 1, \quad \cos t \doteq \frac{p}{p^2 + 1},$$

отже, операторне рівняння є таким:  $p^2 X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2 + 1}$ .

Звідси  $X(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{p^2 + 1}$ . Знаходимо оригінал для  $X(p)$ .

Оригінал для функції  $\frac{1}{p^2 + 1}$ :  $\frac{1}{p^2 + 1} \doteq \sin t$ .

Щоб визначити оригінал для функції  $\frac{2p}{(p^2 + 1)^2}$ , скористаємось, наприклад, теоремою про диференціювання зображення:

$$\frac{2p}{(p^2 + 1)^2} = - \left( \frac{1}{p^2 + 1} \right)' \doteq t \sin t.$$

Потім знаходимо оригінал

$$X(p) \doteq t \sin t - \sin t = (t - 1) \sin t = x(t).$$





### Рівняння з поліноміальними коефіцієнтами

Якщо у диференціальному рівнянні  $n$ -го порядку коефіцієнти є многочленами степеня  $m \leq n$ , то, використовуючи формулу диференціювання зображення

$$t^m x^{(n)}(t) \doteq (-1)^m \frac{d^m}{dp^m} \left[ p^n X(p) - p^{n-1} x_0 - \dots - x_0^{(n-1)} \right],$$

де

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)},$$

можна перетворити вихідне рівняння у диференціальне рівняння  $m$ -го порядку відносно зображення  $X(p)$  функції  $x(t)$ .

▼ **Приклад 2.** Знайти загальний розв'язок рівняння  $tx'' - 2x' = 0$ .  
Розв'язування. Зробимо перетворення Лапласа

$$\begin{aligned} x'(t) &\doteq pX(p) - x(0), & x''(t) &\doteq p^2 X(p) - px(0) - x'(0), \\ tx'' &\doteq -\frac{d}{dp} [p^2 X(p) - px(0) - x'(0)] = -p^2 \frac{dX(p)}{dp} - 2pX(p) + x(0). \end{aligned}$$

Рівняння для зображення  $X(p)$  отримаємо таке

$$-p^2 \frac{dX(p)}{dp} - 2pX(p) + x(0) - 2pX(p) + 2x(0) = 0$$

або

$$\frac{dX(p)}{dp} + \frac{4}{p} X(p) = \frac{3x(0)}{p^2}.$$

Інтегруючи це рівняння як лінійне неоднорідне відносно  $X(p)$ , знайдемо

$$X(p) = \frac{x(0)}{p} + \frac{C_1}{p^4} \doteq x(t) = x(0) + C_1 \frac{t^3}{3!}.$$



---

**Завдання.**

Розв'язати такі диференціальні рівняння для заданих початкових умов:

II.44.  $x' + 2x = \sin t$ ,  $x(0) = 0$ .

II.45.  $x' - x = 1$ ,  $x(0) = -1$ .

II.46.  $x'' + x' = 1$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ .

II.47.  $x'' + 3x' = e^t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = -1$ .

II.48.  $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ .

II.49.  $x'' + 2x' = t \sin t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$ .

II.50.  $x'' + 2x' + x = \sin t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = -1$ .

II.51.  $x''' - x'' = \sin t$ ,  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ .

II.52.  $x''' + x'' = t$ ,  $x(0) = -3$ ,  $x'(0) = 1$ ,  $x''(0) = 0$ .

II.53.  $x^{IV} - x'' = \cos t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = -1$ ,  $x''(0) = x'''(0) = 0$ .

II.54.  $x^{IV} - x'' = 1$ ,  $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$ .

II.55.  $x'' - 2x' + x = t - \sin t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .

II.56.  $x'' + 2x' + x = 2 \cos^2 t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .

II.57.  $x'' + 4x = 2 \cos t \cos 3t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .

II.58.  $x'' + x' = 4 \sin^2 t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = -1$ .

II.59.  $x^{IV} + x''' = \cos t$ ,  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ ,  $x'''(0) = \gamma$ .

II.60.  $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$ ,  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ .

II.61.  $x''' + x = 1$ ,  $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ .

П.62.  $x'' - 4x = \sin \frac{3}{2}t \sin \frac{t}{2}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

П.63.  $x''' + 6x'' + 11x' + 6x = 1 + t + t^2, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

П.64.  $tx'' + (2t - 1)x' + (t - 1)x = 0.$

П.65.  $tx'' + 2x' = 0.$

Розв'язати рівняння із заданими початковими умовами:

П.66.  $x'' + (t + 1)x' + tx = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$

П.67.  $x'' + (t + b)x' = 0, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0, \quad b — \text{довільне дійсне число.}$

П.68.  $x'' + tx' - (t + 1)x = 0, \quad x(0) = x'(0) = 1.$

## II.5. Узагальнені функції

Розв'язування деяких задач математичної фізики вимагає введення об'єктів, властивості яких відрізняються від властивостей звичайних функцій. Наприклад, поняття густини точкового заряду пов'язане з введенням величини, яка володіє такими властивостями:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= 0, & \text{якщо } \mathbf{r} &\neq \mathbf{r}_0, \\ \rho(\mathbf{r}) &= \infty, & \text{якщо } \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0, \end{aligned}$$

$$\int_V \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = q,$$

де  $\mathbf{r}_0$  — координата заряду,  $V$  — об'єм, у якому він може перебувати,  $q$  — величина заряду.

Серед усіх “традиційних” функцій не існує такої, яка задовольняла би цим несумісним властивостям. Відповідна величина описується через так звану **узагальнену функцію**, в даному випадку це буде **дельта-функція Дірака**, яка в найпростішому одновимірному випадку визначається такими властивостями:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0, \end{cases} \quad (\text{II.5-1})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) \varphi(x) dx = \varphi(a), \quad (\text{II.5-2})$$

де  $\varphi(x)$  — звичайна функція.

Існує спосіб означення дельта-функції як унаочнення властивостей (II.5-1)–(II.5-2) шляхом певного граничного переходу у послідовності звичайних функцій (так звані  $\delta$ -функційні послідовності):

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x), \quad (\text{II.5-3})$$

де послідовність  $\{\delta_\varepsilon(x)\}$  має такі властивості:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Прикладами таких послідовностей є:

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon(x) &= \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} & (\varepsilon \rightarrow 0), \\ \delta_\alpha(x) &= \frac{\alpha}{2 \operatorname{ch}^2 \alpha x} & (\alpha \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

та багато інших.

Інший спосіб введення дельта-функції полягає в означенні її як **функціонала**, який будь-якій **основній** функції (фінітній, що має неперервні похідні всіх порядків) ставить у відповідність її значення в точці  $x_0$ , це записують так:

$$(\delta, \varphi) = \int \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0). \quad (\text{II.5-4})$$

Взагалі, будь-який неперервний лінійний функціонал  $f$ , визначений на множині основних функцій, формально записують так:

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx,$$

і  $f(x)$  називають **узагальненою функцією**.

Кожна узагальнена функція має похідні будь-якого порядку, і  $f^{(m)}$ ,  $m \geq 1$  — це функціонал, що діє за правилом

$$(f^{(m)}, \varphi) = (-1)^m (f, \varphi^{(m)}), \quad (\text{II.5-5})$$

зокрема

$$(\delta^{(m)}, \varphi) = (-1)^m (\delta, \varphi^{(m)}) = (-1)^m \varphi^{(m)}(0). \quad (\text{II.5-6})$$

Формула (II.5-5) одержується внаслідок інтегрування частинами за припущення, що всі позаінтегральні доданки дорівнюють нулеві.

Якщо аргументом  $\delta$ -функції є деяка функція  $\varphi(x)$  з *простими* нулями в точках  $x_j$ , то

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_j \frac{1}{|\varphi'(x_j)|} \delta(x - x_j). \quad (\text{II.5-7})$$

Багатовимірну  $\delta$ -функцію аргумента  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  можна означити так:

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1) \dots \delta(x_n). \quad (\text{II.5-8})$$

Густину точкового заряду величиною  $q$  запишемо так:

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Дельта-функція Дірака  $\delta(x)$  визначається також як перетворення Фур'є від сталої  $1/\sqrt{2\pi}$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} d\xi. \quad (\text{II.5-9})$$

Перетворення, обернене до (II.5-9), записують формулою

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \delta(x) dx.$$

За допомогою  $\delta$ -функції можна записати похідну від  $\theta$ -функції Гевісайда:

$$\theta'(x) = \delta(x), \quad (\text{II.5-10})$$

де

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (\text{II.5-11})$$

У фізичних задачах іноді виникає потреба в застосуванні **формули Сохоцького**:

$$\left. \frac{1}{x \pm i\varepsilon} \right|_{\varepsilon \rightarrow +0} = \text{v. p.} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x), \quad (\text{II.5-12})$$

де *v. p.* означає головне значення відповідного інтегрального виразу, оскільки дана формула має сенс тільки під інтегралом.

### Завдання.

Показати, що

$$\text{П.69. } \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x). \quad \text{П.70. } \delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)],$$

якщо  $a > 0$ .

П.71. Обчислити  $\delta(\sin kx)$ , якщо  $k > 0$ .

П.72. Припускаючи, що  $\delta(x)$  апроксимується функцією виду  $Ae^{-x^2/a^2}$  при  $a \rightarrow 0$ , знайти значення  $A$ .

П.73. Припускаючи, що  $\delta(x)$  апроксимується функцією виду  $A \frac{\sin ax}{ax}$  при  $a \rightarrow \infty$ , знайти значення  $A$ .

П.74. Довести, що для похідної від функції Гевісайда справедливий вираз

$$\frac{d\theta(x - a)}{dx} = \delta(x - a).$$

П.75. Виразити  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$  через Фур'є-амплітуди.

П.76. Виразити тривимірну дельта-функцію через добутки одновимірних дельта-функцій у декартових і сферичних координатах.

Обчислити

$$\text{П.77. } \int_{x_0}^{\infty} \delta(\sin \pi x) 2^x dx \quad \text{при } x_0 < 0, \quad x_0 = 0, \quad x_0 > 0.$$

$$\text{П.78. } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - 1) \operatorname{ch} x dx. \quad \text{П.79. } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - \pi^2) \cos x dx.$$

$$\text{II.80. } \int_{-\infty}^0 \delta(x^2 - 5x - 6) (3x^3 - 2x^2 + x - 1) dx.$$

$$\text{II.81. } \int_{-\infty}^{\infty} e^x \delta'(x - 1) dx.$$

$$\text{II.82. } \int_{-\infty}^{+\infty} dx \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon)}{e^{px} - 1}, \text{ де } f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}.$$

II.83. Знайти 1-вимірне перетворення Фур'є  $\theta$ -функції Гевісайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

II.84. Розв'язати рівняння Пуассона  $\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r})$ , застосовуючи пряме й обернене перетворення Фур'є.

II.85. Показати, що  $x^n \delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! \delta(x)$ .

II.86. Обчислити  $\frac{d|x|}{dx}$ ,  $\frac{d^2|x|}{dx^2}$ .

II.87. Довести, що  $\delta$ -функцію можна записати як таку суму ряду Фур'є:

$$\delta(x) = \frac{1}{2L} + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} \cos \frac{\pi nx}{L},$$

якщо основні функції є періодичними з періодом  $2L$ .

II.88. Знайти зображення Лапласа  $\delta$ -функції.

Показати, що

$$\text{II.89. } \rho(x)\delta'(x) = -\rho'(0)\delta(x) + \rho(0)\delta'(x), \quad \rho(x) \in C^1(\mathbb{R}).$$

$$\text{II.90. } (\theta(x)\rho(x))' = \delta(x)\rho(0) + \theta(x)\rho'(x).$$



$$\text{П.91. } (\delta^{(m)}(x - x_0), \varphi(x)) = (-1)^m \varphi^{(m)}(x_0), \quad m \geq 1.$$

$$\text{П.92. } x^k \delta^{(m)}(x) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, k - 1.$$

Знайти

$$\text{П.93. } (\theta(x) \sin x)'$$

$$\text{П.94. } (\theta(x) \cos x)'$$

## П.6. Підсумовування числових рядів

### Застосування теорії лишків

Нехай функція  $f(z)$  має скінченне число полюсів у точках  $z_1, \dots, z_n$ , жодна з яких не збігається з цілим дійсним числом. Можна зауважити, що функції  $\operatorname{ctg} \pi z$  та  $\operatorname{cosec} \pi z$  мають прості полюси при всіх дійсних цілих  $z$ . Будемо вимагати, щоб функції  $\pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z$  та  $\pi f(z) \operatorname{cosec} \pi z$  безмежно спадали на прямокутному контурі, який охоплює всі полюси. Тоді з теореми Коші про лишки матимемо такі правила підсумовування:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = - \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{z=z_j} [\pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z], \quad (\text{П.6-1})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k f(k) = - \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{z=z_j} [\pi f(z) \operatorname{cosec} \pi z]. \quad (\text{П.6-2})$$

Застосування у конкретних випадках певних симетрійних властивостей дає змогу отримати результати для суми в межах, наприклад, від 0 до  $\infty$ .

▼ **Приклад 1.** Знайти суму ряду  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ .

*Розв'язування.* Оскільки функція  $\frac{1}{z^2}$  має полюс у точці  $z = 0$ , розглянемо натомість  $f(z) = \frac{1}{k^2 + a^2}$ , а в кінцевому результаті спрямуємо  $a$  до нуля.

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} &= - \left\{ \operatorname{res}_{z=+ia} [\pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z] + \operatorname{res}_{z=-ia} [\pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z] \right\} = \\ &= -\frac{\pi}{2ia} \operatorname{ctg}(ia\pi) - \frac{\pi}{-2ia} \operatorname{ctg}(-ia\pi) = \frac{\pi}{a} \operatorname{cth} \pi a. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{k^2 + a^2} + \frac{1}{k^2 + a^2} \Big|_{k=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \\ &= \frac{1}{k^2 + a^2} \Big|_{k=0} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2}, \end{aligned}$$

то маємо

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{a} \operatorname{cth} \pi a - \frac{1}{a^2} \right] = \frac{\pi}{2a} \operatorname{cth} \pi a - \frac{1}{2a^2}.$$

Звідси

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{\pi}{2a} \operatorname{cth} \pi a - \frac{1}{2a^2} \right] = \frac{\pi^2}{6}.$$



Зазначимо також, що для суми за парними  $n = 2k$  розглядають функцію

$$\frac{\pi}{2} f(z) \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2},$$

для суми за непарними  $n = 2k - 1$  — функцію

$$\frac{\pi}{2} f(z) \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}.$$

### Застосування перетворення Лапласа

Нехай потрібно знайти суму  $S$  числового ряду  $\sum_{n=m}^{+\infty} (\pm 1)^n F(n)$ . Покла-

демо  $F(p) \doteq f(t)$ . Тобто  $F(n) = \int_0^{\infty} e^{-nt} f(t) dt$  і для суми матимемо

$$S = \sum_{n=m}^{+\infty} (\pm 1)^n \int_0^{\infty} e^{-nt} f(t) dt = \int_0^{\infty} dt f(t) \sum_{n=m}^{+\infty} (\pm 1)^n e^{-nt}.$$

Оскільки ряд під останньою сумою — це геометрична прогресія, то

$$S = \sum_{n=m}^{+\infty} (\pm 1)^n F(n) = (\pm 1)^m \int_0^{\infty} \frac{f(t) e^{-mt}}{1 - e^{-t}} dt. \quad (\text{II.6-3})$$

▼ **Приклад 2.** Знайти суму  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ .

*Розв'язування.* Функція

$$F(p) = \frac{p}{(2p-1)^2(2p+1)^2}.$$

Оригінал знайдемо за формулою диференціювання зображення:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p}{(2p-1)^2(2p+1)^2} = \frac{p}{(4p^2-1)^2} = \frac{1}{16} \frac{p}{(p^2 - \frac{1}{4})^2} = \\ &= -\frac{1}{32} \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{p^2 - \frac{1}{4}} \right) \doteq f(t) = \frac{1}{16} t \operatorname{sh} \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Маємо

$$S = \frac{1}{16} \int_0^{\infty} \frac{t e^{-t}}{1 - e^{-t}} \operatorname{sh} \frac{t}{2} dt = \frac{1}{32} \int_0^{\infty} e^{-t/2} t dt = \frac{1}{8}.$$



**Застосування  $\delta$ -функції**

Використовуючи ряд (не інтеграл!) Фур'є, можна показати, що

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi n). \quad (\text{II.6-4})$$

Домноживши рівність (II.6-4) на деяку “гарну” (фінітну й нескінченно диференційовну) функцію  $f(x)$ , після інтегрування за  $x$  матимемо

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n), \quad (\text{II.6-5})$$

де  $f_k = \mathcal{F}[f(x)]$  — Фур'є-зображення функції  $f(x)$ . Заміною  $x \rightarrow 2\pi x$  у формулі (II.6-4) можна отримати

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{2\pi k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n). \quad (\text{II.6-6})$$

▼ **Приклад 3.** Обчислити  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ .

Розв'язування.  $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ ,  $f_k = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{\pi}{a} e^{-a|k|}$ . За формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії матимемо:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-a|k|} = \frac{\pi}{a} \operatorname{cth} \pi a.$$

▲

▼ **Приклад 4.** Знайти суму  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nt}{n^2}$ .

*Розв'язування.* Нехай  $s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nt}{n^2}$ . Зауважимо, що функція  $s(t)$  є періодичною з періодом  $2\pi$ . Знайшовши похідні

$$s'(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n}, \quad s''(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \cos nt,$$

використаємо результати задач II.87–II.88 (з півперіодом  $L = \pi$ ):

$$s''(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \cos nt = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \delta(t).$$

Якщо  $s(t) \doteq S(p)$ , то  $s''(t) \doteq p^2 S(p) - ps(0) - s'(0)$ .

Маємо рівняння:

$$p^2 S(p) - ps(0) = \frac{1}{2p} - \frac{\pi}{2}.$$

Для оригіналу отримаємо:

$$s(t) = \frac{1}{4} t^2 - \frac{\pi}{2} t + s(0).$$

Значення  $s(0)$  можна обчислити, враховуючи, що  $\int_0^\pi s(t) dt = 0$ .

Матимемо  $s(0) = \pi^2/6$ . Остаточний результат:

$$s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nt}{n^2} = \frac{1}{12} (3t^2 - 6\pi t + 2\pi^2), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Обмеження на змінну  $t$  необхідне, оскільки квадратний тричлен не є періодичною функцією. Пропонуємо Читачеві самостійно встановити, в який момент початкова періодичність “втрачається”.



### Завдання.

Знайдіть суми числових рядів:

II.95.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$

II.96.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}.$

II.97.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}.$

$$\begin{aligned}
\text{II.98. } & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. & \text{II.99. } & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^4 + a^4}. & \text{II.100. } & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}. \\
\text{II.101. } & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)^2}. & \text{II.102. } & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2(n^2+b^2)}, & & a \notin \mathbb{Z}. \\
\text{II.103. } & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3(n+1)^3}. & \text{II.104. } & \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1}. \\
\text{II.105. } & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+a^2)(n^2+t^2)}. & \text{II.106. } & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nt}{n^4}. \\
\text{II.107. } & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n}. & \text{II.108. } & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n^3}. \\
\text{II.109. } & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2}. & \text{II.110. } & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+a^2)^2}.
\end{aligned}$$

II.111. Довести рівність:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2 n^2 / t^2}$$

(ця сума не виражається через елементарні функції, вона дорівнює  $\vartheta_3(0, e^{-t})$ , де  $\vartheta_3$  — одна з так званих еліптичних тета-функцій Якобі).

### III. Рівняння математичної фізики

#### III.1. Класифікація рівнянь з частинними похідними другого порядку

Загальне лінійне рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними записують так:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + gu + f = 0.$$

Рівняння, лінійне відносно старших похідних, має такий вигляд:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (\text{III.1-1})$$

де  $a, b, c, d, e, g, f$  — задані функції незалежних змінних  $x$  і  $y$ . Тип рівняння (III.1-1) визначається знаком дискримінанта  $\Delta(x, y) = b^2 - ac$ . Приймають, що в точці  $(x, y)$  рівняння (III.1-1) є:

- 1) *гіперболічного* типу, якщо  $\Delta(x, y) > 0$ ;
- 2) *параболічного* типу, якщо  $\Delta(x, y) = 0$ ;
- 3) *еліптичного* типу, якщо  $\Delta(x, y) < 0$ .

Коли дискримінант  $\Delta(x, y)$  має значення одного знака або дорівнює нулю в кожній точці  $(x, y) \in G$ , то рівняння (III.1-1) є відповідного типу у всій області  $G$ .

Якщо функції  $a, b, c, d, e, f, g$  є гладкі, то за допомогою перетворення змінних

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \quad \left( \varphi(x, y), \psi(x, y) \in C^2, \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0 \right)$$

одержуємо нове рівняння, еквівалентне рівнянню (III.1-1). Постає питання: як обрати  $\xi$  і  $\eta$ , щоб це рівняння набуло простої форми?

Для цього складаємо звичайне диференціальне рівняння

$$a(dy)^2 - 2b dy dx + c(dx)^2 = 0, \quad (\text{III.1-2})$$

яке називається **характеристичним**, а його інтегральні лінії  $\varphi(x, y) = C_1$ ,  $\psi(x, y) = C_2$  називаються **характеристиками** рівняння (III.1-1).

1. Якщо  $\Delta(x, y) > 0$ , то  $\varphi(x, y) = C_1$  і  $\psi(x, y) = C_2$  визначають дійсні сімейства характеристик. Покладаючи

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

приведемо рівняння (III.1-1) до виду

$$\bar{u}_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, \bar{u}, \bar{u}_\xi, \bar{u}_\eta), \quad \Phi = -\frac{\bar{F}}{2\bar{b}}, \quad (\text{III.1-3})$$

де

$$\bar{a} = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \quad (\text{III.1-4})$$

$$\bar{b} = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + c\xi_y\eta_y, \quad (\text{III.1-5})$$

$$\bar{c} = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2, \quad (\text{III.1-6})$$

$$\begin{aligned} \bar{F} = & F + a(\bar{u}_\xi\xi_{xx} + \bar{u}_\eta\eta_{xx}) + 2b(\bar{u}_\xi\xi_{xy} + \bar{u}_\eta\eta_{xy}) + \\ & + c(\bar{u}_\xi\xi_{yy} + \bar{u}_\eta\eta_{yy}) \end{aligned}$$

і

$$u_{xx} = \bar{u}_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2\bar{u}_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + \bar{u}_{\eta\eta}\eta_x^2 + \bar{u}_\xi\xi_{xx} + \bar{u}_\eta\eta_{xx},$$

$$u_{xy} = \bar{u}_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + \bar{u}_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + \bar{u}_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \bar{u}_\xi\xi_{xy} + \bar{u}_\eta\eta_{xy},$$

$$u_{yy} = \bar{u}_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2\bar{u}_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + \bar{u}_{\eta\eta}\eta_y^2 + \bar{u}_\xi\xi_{yy} + \bar{u}_\eta\eta_{yy}.$$

Рівняння (III.1-3) називається **канонічною формою рівняння гіперболічного типу**. Часто користуються іншою канонічною формою. Обираючи змінні  $\xi = \alpha + \beta$ ,  $\eta = \alpha - \beta$ , перепишемо рівняння (III.1-3) так:

$$\tilde{u}_{\alpha\alpha} - \tilde{u}_{\beta\beta} = \Phi_1, \quad \Phi_1 = 4\Phi. \quad (\text{III.1-7})$$



2. Для рівняння параболічного типу  $\Delta = 0$ , і одержуємо одну сім'ю характеристик  $\varphi(x, y) = C$ . У цьому випадку заміну змінних обираємо так:  $\xi = \varphi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$ , де  $\eta(x, y) \in C^2$  — довільна функція, для якої  $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$ . У результаті такої заміни змінних рівняння (III.1-1) набуває вигляду

$$\bar{u}_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, \bar{u}, \bar{u}_\xi, \bar{u}_\eta), \quad \Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{c}}. \quad (\text{III.1-8})$$

Рівняння (III.1-8) називається **канонічною формою рівняння параболічного типу**.

3. Якщо  $\Delta(x, y) < 0$ , то є два комплексно-спряжених інтеграли рівняння (III.1-2). Покладаючи  $\xi = \varphi(x, y)$ ,  $\eta = \varphi^*(x, y)$ , рівняння еліптичного типу зводимо до того ж самого виду, що й гіперболічне. Щоб не вдаватись до комплексних змінних, введемо змінні  $\xi$  і  $\eta$  за формулами

$$\xi = \frac{\varphi + \varphi^*}{2} = \text{Re } \varphi, \quad \eta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i} = \text{Im } \varphi.$$

Тоді рівняння (III.1-1) матиме вигляд

$$\bar{u}_{\xi\xi} + \bar{u}_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, \bar{u}, \bar{u}_\xi, \bar{u}_\eta), \quad \Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{c}}. \quad (\text{III.1-9})$$

Рівняння (III.1-9) називається **канонічною формою рівняння еліптичного типу**.

▼ **Приклад 1.** Звести до канонічної форми рівняння

$$xu_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}u_x = 0.$$

*Розв'язування.* Дискримінант рівняння  $\Delta(x, y) = x$ . У півплощині  $x > 0$  рівняння є гіперболічного типу, а для  $x < 0$  — еліптичного типу.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$x(dy)^2 - (dx)^2 = 0.$$

а) Нехай  $x > 0$ . Тоді з характеристичного рівняння знаходимо

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y + 2\sqrt{x} = C_1, \quad y - 2\sqrt{x} = C_2.$$

Нові змінні вводять рівностями:  $\xi = y + 2\sqrt{x}$ ,  $\eta = y - 2\sqrt{x}$ . Оскільки рівняння є гіперболічного типу ( $\Delta > 0$ ), його канонічний вигляд має бути таким:

$$\bar{u}_{\xi\eta} = -\frac{\bar{F}}{2\bar{b}}.$$

За формулами (III.1-5) і (III.1-7) знаходимо:

$$\begin{aligned} \bar{b} &= x\xi_x\eta_x - \xi_y\eta_y = -2, \\ \bar{F} &= \frac{1}{2}(\bar{u}_\xi\xi_x + \bar{u}_\eta\eta_x) + x(\bar{u}_\xi\xi_{xx} + \bar{u}_\eta\eta_{xx}) - (\bar{u}_\xi\xi_{yy} + \bar{u}_\eta\eta_{yy}) = 0 \end{aligned}$$

і, підставляючи в канонічну форму, отримаємо

$$\bar{u}_{\xi\eta} = 0.$$

б) Нехай  $x < 0$ . Тоді  $\Delta < 0$  і рівняння є еліптичного типу. Із рівняння характеристик одержуємо

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{i}{\sqrt{-x}} \Rightarrow y + 2i\sqrt{-x} = C_1, \quad y - 2i\sqrt{-x} = C_2,$$

тобто  $\xi = y + 2i\sqrt{-x}$  і  $\eta = y - 2i\sqrt{-x}$ .

Обчислюючи за формулами (III.1-6) і (III.1-7), знаходимо

$$\begin{aligned} \bar{c} &= x\eta_x^2 - \eta_y^2 = -1, \\ \bar{F} &= \frac{1}{2}(\bar{u}_\xi\xi_x + \bar{u}_\eta\eta_x) - x(\bar{u}_\xi\xi_{xx} + \bar{u}_\eta\eta_{xx}) - (\bar{u}_\xi\xi_{yy} + \bar{u}_\eta\eta_{yy}) = \\ &= -\frac{\bar{u}_\eta}{2} \left( 1 + \frac{4}{\eta^2} \right). \end{aligned}$$

Отже, за формулою (III.1-9) запишемо канонічний вигляд рівняння

$$\bar{u}_{\xi\xi} + \bar{u}_{\eta\eta} = -\frac{\bar{u}_\eta}{2} \left( 1 + \frac{4}{\eta^2} \right).$$



▼ **Приклад 2.** Звести до канонічної форми рівняння

$$xy^2 u_{xx} - 2x^2 y u_{xy} + x^3 u_{yy} - y^2 u_x = 0.$$

*Розв'язування.* Дане рівняння є параболічного типу на всій площині, оскільки

$$\Delta(x, y) = x^4 y^2 - x^4 y^2 \equiv 0.$$

Інтегруючи рівняння характеристик

$$\begin{aligned} y^2(dy)^2 + 2xy dx dy + x^2(dx)^2 &= 0, \\ (y dy + x dx)^2 &= 0, \end{aligned}$$

отримаємо одну сім'ю інтегральних ліній  $y^2 + x^2 = C$ . Заміну змінних подаємо у вигляді:  $\xi = y^2 + x^2$ ,  $\eta = x$ . Обчислимо за формулами (III.1-6) і (III.1-7)

$$\begin{aligned} \bar{c} &= xy^2 \eta_x^2 - 2x^2 y \eta_x \eta_y + x^3 \eta_y^2 = xy^2, \\ \bar{F} &= -y^2(\bar{u}_\xi \xi_x + \bar{u}_\eta \eta_x) + xy^2(\bar{u}_\xi \xi_{xx} + \bar{u}_\eta \eta_{xx}) - \\ &\quad - 2x^2 y(\bar{u}_\xi \xi_{xy} + \bar{u}_\eta \eta_{xy}) + x^3(\bar{u}_\xi \xi_{yy} + \bar{u}_\eta \eta_{yy}) = 2x^3 \bar{u}_\xi - y^2 \bar{u}_\eta. \end{aligned}$$

Отже, канонічний вигляд рівняння такий:

$$\bar{u}_{\eta\eta} = -\frac{2\eta^2}{\xi - \eta^2} \bar{u}_\xi + \frac{1}{\eta} \bar{u}_\eta.$$



### Завдання.

У кожній області, де зберігається тип рівняння, привести до канонічного виду рівняння:

III.1.  $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0.$

III.2.  $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0.$

- III.3.  $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0$ .
- III.4.  $u_{xx} - xu_{yy} = 0$ .      III.5.  $u_{xx} - yu_{yy} = 0$ .
- III.6.  $xu_{xx} - yu_{yy} = 0$ .      III.7.  $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$ .
- III.8.  $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0$ .      III.9.  $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$ .
- III.10.  $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$ .
- III.11.  $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + yu_y = 0$ .
- III.12.  $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} = 0$ .
- III.13.  $u_{xx} - 2\sin xu_{xy} + (2 - \cos^2 x)u_{yy} = 0$ .
- III.14.  $y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0$ .
- III.15.  $x^2u_{xx} - 2xu_{xy} + u_{yy} = 0$ .
- III.16.  $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - 2yu_x + ye^{y/x} = 0$ .
- III.17.  $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} - xu = 0$ .
- III.18.  $u_{xx} - 2\sin xu_{xy} - \cos^2 xu_{yy} - \cos xu_y = 0$ .
- III.19.  $u_{xx} + 2\sin xu_{xy} - (\cos^2 x - \sin^2 x)u_{yy} + \cos x u_y = 0$ .
- III.20.  $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ .

### III.2. Загальний розв'язок рівнянь гіперболічного типу

Унаслідок переходу до нових змінних диференціальне рівняння з частинними похідними часом можна настільки спростити, що вдається знайти його загальний розв'язок у замкненій формі. Наприклад, лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0 \quad (\text{III.2-1})$$

можна звести до вигляду

$$(u_y + au)_x + b(u_y + au) = 0, \quad \text{якщо} \quad c - ab - \frac{\partial a}{\partial x} \equiv 0, \quad (\text{III.2-2})$$

$$(u_x + bu)_y + a(u_x + bu) = 0, \quad \text{якщо} \quad c - ab - \frac{\partial b}{\partial y} \equiv 0. \quad (\text{III.2-2}')$$

Із точки зору методу інтегрування, рівняння (III.2-2) і (III.2-2') є однаковими. Очевидно, рівняння (III.2-2) зводяться до послідовного розв'язування двох рівнянь. Позначивши

$$u_y + au = v, \quad (\text{III.2-3})$$

для невідомої функції  $v$  отримаємо рівняння:

$$v_x + bv = 0. \quad (\text{III.2-4})$$

Рівняння (III.2-4) можна розглядати як звичайне відносно  $v$  і  $x$ , а  $y$  можна вважати параметром. Інтегруючи його, одержимо

$$v(x, y) = C(y)e^{-\int b(x, y)dx}.$$

Підставляючи значення  $v$  у рівняння (III.2-3) і, розглядаючи  $x$  як параметр, дістанемо лінійне диференціальне рівняння відносно  $u$  і  $y$ :

$$u_y + au = C(y)e^{-\int b(x, y)dx},$$

яке інтегрується у квадратурах.

▼ **Приклад 1.** Знайти загальний розв'язок рівняння

$$yu_{xx} + (x - y)u_{xy} - xu_{yy} = 0.$$

*Розв'язування.* Оскільки  $\Delta(x, y) = \frac{1}{4}(x + y)^2 > 0$ , дане рівняння є гіперболічного типу. Рівняння характеристик

$$y(dy)^2 - (x - y)dydx - x(dx)^2 = 0$$

має два інтеграли:  $y + x = C_1$ ,  $y^2 - x^2 = C_2$ . Обравши нові змінні  $\eta = y + x$ ,  $\xi = y^2 - x^2$ , обчислимо

$$\begin{aligned}\bar{b} &= y\xi_x\eta_x + \frac{(x-y)}{2}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) - x\xi_y\eta_y = -(x+y)^2 = -\eta^2, \\ \bar{F} &= y(\bar{u}_\xi\xi_{xx} + \bar{u}_\eta\eta_{xx}) + (x-y)(\bar{u}_\xi\xi_{xy} + \bar{u}_\eta\eta_{xy}) - \\ &\quad - x(\bar{u}_\xi\xi_{yy} + \bar{u}_\eta\eta_{yy}) = -2\bar{u}_\xi\eta.\end{aligned}$$

Отже, рівняння набуває такого канонічного вигляду:

$$\eta\bar{u}_{\xi\eta} + \bar{u}_\xi = 0.$$

Покладемо  $\bar{u}_\xi = v$ . Проінтегруємо  $\eta v_\eta + v = 0$ , у якому  $\xi$  вважаємо параметром

$$v(\xi, \eta) = C(\xi)\eta^{-1}.$$

Далі,  $\bar{u}_\xi = C(\xi)\eta^{-1}$  і  $\bar{u}(\xi, \eta) = \eta^{-1} \int C(\xi) d\xi + B(\eta)$ . Поклавши  $\int C(\xi) d\xi = A(\xi)$ , одержимо:

$$\bar{u}(\xi, \eta) = \eta^{-1}A(\xi) + B(\eta).$$

Повернувшись до змінних  $x, y$ , запишемо загальний розв'язок

$$u(x, y) = \frac{1}{x+y}A(y^2 - x^2) + B(y+x).$$

▲

▼ **Приклад 2.** Знайти загальний розв'язок рівняння

$$u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u = 2e^{x+y}.$$

*Розв'язування.* Дане рівняння має канонічну форму і його легко привести до вигляду

$$(u_y - 2u)_x - 3(u_y - 2u) = 2e^{x+y}.$$

Покладемо  $u_y - 2u = v$ . Відтак одержимо лінійне неоднорідне рівняння відносно  $v$  і  $x$  з параметром  $y$ :

$$v_x - 3v = 2e^{x+y}.$$

Загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння  $z_x - 3z = 0$  є функція  $z(x, y) = C(y)e^{3x}$ . Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо так:

$$v(x, y) = C(x, y)e^{3x}.$$

Далі,  $C_x(x, y)e^{3x} = 2e^{x+y}$ ,  $C_x(x, y) = 2e^{-2x}e^y$ ,  $C(x, y) = -e^{-2x}e^y + B(y)$  і  $v(x, y) = B(y)e^{3x} - e^x e^y$ . Для знаходження  $u$  одержуємо рівняння

$$u_y - 2u = B(y)e^{3x} - e^x e^y,$$

в якому  $x$  розглядаємо як параметр. Запишемо розв'язок цього рівняння так:

$$u(x, y) = A(x, y)e^{2y}$$

( $A(x)e^{2y}$  — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння).

Підставивши  $u$  в рівняння, одержимо:

$$A_y e^{2y} = B(y)e^{3x} - e^x e^y, \quad A_y = B(y)e^{-2y}e^{3x} - e^x e^{-y},$$

$$\begin{aligned} A(x, y) &= e^{3x} \int B(y)e^{-2y} dy + e^x e^{-y} + D(x) = \\ &= e^{3x} C_1(y) + e^x e^{-y} + D(x). \end{aligned}$$

Отже,  $u(x, y) = C_1(y)e^{3x+2y} + e^{2y}D(x) + e^{x+y}$ . Якщо покласти  $D(x) = C_2(x)e^{3x}$ , то загальний розв'язок вихідного рівняння одержимо у вигляді:

$$u(x, y) = [C_1(y) + C_2(x)]e^{3x+2y} + e^{x+y}.$$



**Завдання.**

Знайти загальний розв'язок рівнянь:

$$\text{III.21. } u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$$

$$\text{III.22. } x u_{xx} - y u_{yy} + \frac{1}{2}(u_x - u_y) = 0, \quad x > 0, y > 0.$$

$$\text{III.23. } x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2y u_y = 0.$$

$$\text{III.24. } x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + x u_x + y u_y = 0.$$

$$\text{III.25. } \frac{\partial}{\partial x}(x^2 u_x) = x^2 u_{yy}.$$

$$\text{III.26. } (x - y) u_{xy} - u_x + u_y = 0.$$

$$\text{III.27. } u_{xy} + y u_x + x u_y + xy u = 0.$$

$$\text{III.28. } u_{xy} - \frac{2}{x-y} u_x + \frac{3}{x-y} u_y - \frac{3}{(x-y)^2} u = 0.$$

$$\text{III.29. } 2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$$

$$\text{III.30. } 2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0.$$

$$\text{III.31. } 3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 4u_y + \frac{5}{16}u = 0.$$

$$\text{III.32. } 3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} + u_x + u_y + \frac{1}{16}u - 16xe^{-\frac{x+y}{16}} = 0.$$

$$\text{III.33. } u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y = 4e^x.$$

$$\text{III.34. } u_{xx} - 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_x - 2u_y + 4e^{5x+\frac{3}{2}y} = 0.$$

$$\text{III.35. } u_{xx} - 2 \cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x) u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2) u_y = 0.$$

$$\text{III.36. } e^{-2x} u_{xx} - e^{-2y} u_{yy} - e^{-2x} u_x + e^{-2y} u_y + 8e^y = 0.$$

$$\text{III.37. } \frac{\partial}{\partial y}(u_x + u) + 2x^2 y(u_x + u) = 0.$$



$$\text{III.38. } x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} = 0.$$

$$\text{III.39. } x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$$

$$\text{III.40. } u_{xy} - xu_x + u = 0.$$

### III.3. Метод характеристик

Суть цього методу полягає у використанні характеристик для зведення рівняння в частинних похідних на одній з характеристик до звичайного диференціального рівняння.

#### ▼ Приклад 1. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{aligned} u_{xx} + 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} + u_x + (\sin x + \cos x + 1)u_y &= 0, \\ u|_{y=-\cos x} &= 1 + 2 \sin x, \quad u_y|_{y=-\cos x} = \sin x. \end{aligned}$$

*Розв'язування.* Рівняння є гіперболічного типу на всій площині  $(x, y)$ ,  $\Delta(x, y) = 1 > 0$ . Інтегруючи рівняння характеристик

$$(dy)^2 - 2 \sin x dy dx - \cos^2 x (dx)^2 = 0,$$

одержуємо дві сім'ї характеристичних ліній  $y + \cos x - x = C_1$ ,  $y + \cos x + x = C_2$ . Оберемо нові змінні  $\xi = y + \cos x - x$ ,  $\eta = y + \cos x + x$  і знайдемо

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \bar{u}_\xi \xi_x + \bar{u}_\eta \eta_x + (\sin x + \cos x + 1)(\bar{u}_\xi \xi_y + \bar{u}_\eta \eta_y) + \\ &+ (\bar{u}_\xi \xi_{xx} + \bar{u}_\eta \eta_{xx}) = 2\bar{u}_\eta, \\ \bar{b} &= \xi_x \eta_x + \sin x (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) - \cos^2 x \xi_y \eta_y = -2. \end{aligned}$$

Отже, канонічну форму запишемо так:

$$2\bar{u}_{\xi\eta} - \bar{u}_\eta = 0.$$

Позначивши  $v = \bar{u}_\eta$ , одержимо звичайне диференціальне рівняння

$$2v_\xi - v = 0,$$

загальним розв'язком якого є

$$v(\xi, \eta) = C(\eta)e^{\xi/2} \quad i \quad \bar{u}(\xi, \eta) = A(\eta)e^{\xi/2} + B(\xi).$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння

$$u(x, y) = A(y + \cos x + x)e^{1/2(y + \cos x - x)} + B(y + \cos x - x).$$

З даної сім'ї розв'язків виділимо шуканий розв'язок задачі Коші, підставивши  $u(x, y)$  у початкові умови

$$\begin{cases} A(x)e^{-x/2} + B(-x) = 1 + 2\sin x \\ \frac{1}{2}A(x)e^{-x/2} + A'(x)e^{-x/2} + B'(-x) = \sin x. \end{cases}$$

Продиференціюємо перше рівняння по  $x$  і, додавши до другого рівняння, знайдемо

$$A'(x) = e^{x/2} \left( \frac{1}{2} \sin x + \cos x \right),$$

отже,

$$A(p) = e^{p/2} \sin p, \quad B(q) = 1 - \sin q.$$

Підставляючи  $A(p)$  і  $B(q)$  у загальний розв'язок, поклавши  $p = y + \cos x + x$ ,  $q = y + \cos x - x$ , остаточно матимемо:

$$u(x, y) = e^{y + \cos x} \sin(y + \cos x + x) - \sin(y + \cos x - x) + 1.$$

▲

▼ **Приклад 2.** Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{aligned} xu_{xx} + (x + y)u_{xy} + yu_{yy} &= 0, \\ u|_{y=\frac{1}{x}} &= x^3, \quad u_x|_{y=\frac{1}{x}} = 2x^2. \end{aligned}$$

Розв'язування. Рівняння характеристик  $x(dy)^2 - (x+y)dydx + y(dx)^2 = 0$  дає дві сім'ї інтегральних ліній:

$$y - x = C_1, \quad \frac{y}{x} = C_2.$$

Заміна змінних  $\xi = y - x$ ,  $\eta = \frac{y}{x}$  ( $x > 0$ ,  $y > 0$ ) приводить рівняння до гіперболічного типу  $\xi \bar{u}_{\xi\eta} - \bar{u}_\eta = 0$ :

$$\begin{aligned} \bar{b} &= x\xi_x\eta_x + \frac{(x+y)}{2}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + y\xi_y\eta_y = \frac{(x-y)^2}{2x^2} = -\frac{(1-\eta)^2}{2}, \\ \bar{F} &= x(\bar{u}_\xi\xi_{xx} + \bar{u}_\eta\eta_{xx}) + (x+y)(\bar{u}_\xi\xi_{xy} + \bar{u}_\eta\eta_{xy}) + \\ &+ y(\bar{u}_\xi\xi_{yy} + \bar{u}_\eta\eta_{yy}) = \frac{(\eta-1)^2}{\xi}\bar{u}_\eta. \end{aligned}$$

Покладемо  $\bar{u}_\eta = v$  і розв'яжемо звичайне диференціальне рівняння

$$\xi v_\xi - v = 0,$$

загальний розв'язок якого  $v(\xi, \eta) = C(\eta)\xi$  і

$$\bar{u}(\xi, \eta) = \xi \int C(\eta)d\eta + C_1(\xi) = C_1(\xi) + \xi C_2(\eta).$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння такий:

$$u(x, y) = C_1(y - x) + (y - x)C_2(y/x).$$

Щоб із даної сім'ї розв'язків виділити шуканий розв'язок задачі Коші, підставимо  $u(x, y)$  у початкові умови. Одержимо:

$$\begin{cases} C_1\left(\frac{1}{x} - x\right) + \left(\frac{1}{x} - x\right)C_2\left(\frac{1}{x^2}\right) = x^3 \\ -C_1'\left(\frac{1}{x} - x\right) - C_2\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{x} - x\right)C_2'\left(\frac{1}{x^2}\right) = 2x^2. \end{cases}$$

Перше рівняння продиференціюємо по  $x$ , а друге — домножимо на  $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ , тоді, віднявши з першого рівняння друге, знайдемо

$$C_2'\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{x^2}{\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)} - \frac{1}{\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^2},$$

або

$$\begin{aligned} C_2'(z) &= -\frac{1}{z^2(z-1)} - \frac{1}{z(z-1)^2}, \\ C_2(q) &= -\int_0^q \frac{dz}{z^2(z-1)} - \int_0^q \frac{dz}{z(z-1)^2} + C, \\ C_2(q) &= \frac{q-1}{q} + \frac{1}{q-1}. \end{aligned}$$

Далі

$$C_1\left(\frac{1}{x} - x\right) = x^3 + \left(x - \frac{1}{x}\right) C_2\left(\frac{1}{x^2}\right) = x - \frac{1}{x},$$

або

$$C_1(p) = -p.$$

Підставляючи значення  $C_1(p)$  і  $C_2(q)$  при  $q = \frac{1}{x^2}$  і  $p = \frac{1}{x} - x$  у загальний розв'язок рівняння, одержимо шуканий розв'язок задачі Коші  $u(x, y) = \frac{x^2}{y}$ .

▲

▼ **Приклад 3.** Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння

$$y^2 u_{xy} + u_{yy} - \frac{2}{y} u_y = 0$$

у півплощині  $y > 0$ , що задовольняє умови

$$u|_{y=1} = 1 - x, \quad u_y|_{y=1} = 3.$$

*Розв'язування.* У півплощині  $y > 0$  рівняння є гіперболічного типу, оскільки  $\Delta(x, y) = \frac{y^4}{4} > 0$ . Інтегруючи рівняння характеристик

$$(dx)^2 - y^2 dy dx = 0 \quad \text{або} \quad dx(dx - y^2 dy) = 0,$$

одержуємо дві сім'ї інтегральних ліній  $x = C_1$  і  $3x - y^3 = C_2$ . Нові змінні обираємо такі:  $\xi = x$ ,  $\eta = 3x - y^3$ . Знаходимо

$$\bar{b} = -\frac{1}{2}y^4, \quad \bar{F} = 0,$$

і канонічну форму рівняння запишемо так:

$$\bar{u}_{\xi\eta} = 0,$$

загальним розв'язком якого є

$$\bar{u}(\xi, \eta) = C_1(\xi) + C_2(\eta)$$

або у змінних  $x$  і  $y$

$$u(x, y) = C_1(x) + C_2(3x - y^3).$$

Тепер використаємо початкові умови

$$\begin{cases} C_1(x) + C_2(3x - 1) = 1 - x \\ -3C_2'(3x - 1) = 3. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, матимемо

$$C_1(x) = 2x + C, \quad C_2(x) = -x - C.$$

Отже, розв'язком задачі Коші є функція

$$u(x, y) = 2x + C + (-3x + y^3 - C) = y^3 - x.$$



### Завдання.

Розв'язати задачі Коші:

III.41.  $u_{xy} = 0$ ,  $u|_{y=x^2} = 0$ ,  $u_y|_{y=x^2} = \sqrt{|x|}$ .

III.42.  $u_{xy} + u_x = 0$ ,  $u|_{y=x} = \sin x$ ,  $u_x|_{y=x} = 1$ .

$$\text{III.43. } u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0, \quad u|_{y=0} = x, \quad u_y|_{y=0} = 0.$$

$$\text{III.44. } u_{xx} - u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 4, \quad u|_{x=0} = -y, \quad u_x|_{x=0} = y - 1.$$

$$\text{III.45. } u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 2, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = x + \cos x.$$

$$\text{III.46. } x u_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2} u_x = 0, \quad u|_{y=0} = x, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad x > 0.$$

$$\text{III.47. } x u_{xy} - y u_{yy} - u_y = 2x^3, \quad u|_{y=x} = \sin x, \quad u_x|_{y=x} = \cos x, \quad x > 0.$$

$$\text{III.48. } x u_{xx} + (x + y)u_{xy} + y u_{yy} = 0, \quad u|_{y=\frac{1}{x}} = x^3, \quad u_x|_{y=\frac{1}{x}} = 2x^2, \\ x > 0.$$

$$\text{III.49. } u_{xx} + 2(1 + 2x)u_{xy} + 4x(1 + x)u_{yy} + 2u_y = 0, \quad u|_{x=0} = y, \\ u_x|_{x=0} = 2.$$

$$\text{III.50. } x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2y u_y = 0, \quad u|_{x=1} = y, \quad u_x|_{x=1} = y, \quad y < 0.$$

$$\text{III.51. } u_{xx} - 4x^2 u_{yy} - \frac{1}{x} u_x = 0, \quad u|_{x=1} = y^2 + 1, \quad u_x|_{x=1} = 4.$$

$$\text{III.52. } x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} = 0, \quad u|_{y=1} = 0, \quad u_y|_{y=1} = \sqrt[4]{x^7}, \quad x > 0.$$

$$\text{III.53. } y u_{xx} + x(2y - 1)u_{xy} - 2x^2 u_{yy} - \frac{y}{x} u_x + \frac{2x}{1 + 2y}(u_x + 2xu_y) = 0, \\ u|_{y=0} = x^2, \quad u_y|_{y=0} = 1, \quad x > 0.$$

$$\text{III.54. } y u_{xx} - (x + y)u_{xy} + x u_{yy} - \frac{x + y}{x - y}(u_x - u_y) = 0, \\ u|_{y=0} = x^2, \quad u_y|_{y=0} = x, \quad x > 0.$$

$$\text{III.55. } u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0, \\ u|_{y=\sin x} = x + \cos x, \quad u_y|_{y=\sin x} = \sin x.$$

$$\text{III.56. } e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0, \quad u|_{y=0} = -x^2/2, \quad u_y|_{y=0} = -\sin x.$$

$$\text{III.57. } u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} - \cos x u_y = 0, \\ u|_{y=\cos x} = \sin x, \quad u_y|_{y=\cos x} = e^x/2.$$

$$\text{III.58. } u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} + u_x + (2 - \sin x - \cos x)u_y = 0, \\ u|_{y=\cos x} = 0, \quad u_y|_{y=\cos x} = e^{-x/2} \cos x.$$

$$\text{III.59. } 4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2) u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1 + y^2} (2u_x - u_y) = 0, \\ u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u_y|_{y=0} = \psi(x).$$

$$\text{III.60. } u_{xy} + y u_x + x u_y + x y u = 0, \quad u|_{y=3x} = 0, \quad u_y|_{y=3x} = e^{-5x^2}.$$

III.61. Розв'язати хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

з такими граничними умовами:

$$u(x, y, z, t = 0) = \varphi(r), \quad u_t(x, y, z, t = 0) = \psi(r), \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

де функції  $\varphi(r)$ ,  $\psi(r)$  визначені для  $r \geq 0$ .

### III.4. Метод відокремлення змінних

#### Змішана задача для рівнянь гіперболічного типу

Розглянемо рівняння

$$\rho(x) u_{tt} = [p(x) u_x]_x - q(x) u + f(x, t) \quad (\text{III.4-1})$$

і сформулюємо для нього змішану задачу: знайти розв'язок рівняння (III.4-1) в області  $\{a < x < b, t > 0\}$ , що задовольняє початкові умови

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \quad (\text{III.4-2})$$

і граничні умови

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=a} = \mu_0(t), \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=b} = \mu_1(t). \quad (\text{III.4-3})$$

Приймемо, що  $\rho(x) > 0$ ,  $p(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ ,  $\rho(x) \in C([a, b])$ ,  $p(x) \in C^1([a, b])$ ,  $q(x) \in C([a, b])$ ,  $|\alpha_i| + |\beta_i| > 0$  ( $i = 0, 1$ ).

**Однорідне рівняння з нульовими граничними умовами**

У цьому випадку змішана задача має вигляд:

$$\rho(x)u_{tt} = [p(x)u_x]_x - q(x)u, \quad (\text{III.4-4})$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad (\text{III.4-5})$$

$$(\alpha_0 u_x + \beta_0 u)|_{x=a} = 0, \quad (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=b} = 0. \quad (\text{III.4-6})$$

Цю задачу розв'язуємо за методом відокремлення змінних (методом Фур'є), схема якого така. Спочатку розв'язуємо допоміжну задачу: знайдемо всі нетривіальні ( $\neq 0$ ) розв'язки рівняння (III.4-4), які задовольняють умови (III.4-6) і мають вигляд:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (\text{III.4-7})$$

Підставляючи (III.4-7) у рівняння (III.4-4), маємо

$$\rho(x)T''(t)X(x) \equiv T(t)[p(x)X'(x)]' - q(x)T(t)X(x),$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} \equiv \frac{[p(x)X'(x)]' - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} \equiv -\lambda.$$

Оскільки ліва частина тотожності не залежить від  $x$ , а права — від  $t$ , то рівність можлива тільки в тому випадку, коли дробі дорівнюють одній і тій самій сталій —  $\lambda$ . Відтак функція (III.4-7) є розв'язком рівняння (III.4-4) тільки тоді, коли  $T = T(t)$  і  $X = X(x)$  є відповідно розв'язками звичайних диференціальних рівнянь

$$T'' + \lambda T = 0, \quad (\text{III.4-8})$$

$$[p(x)X']' - q(x)X(x) + \lambda \rho(x)X = 0. \quad (\text{III.4-9})$$

Розв'язок (III.4-7) повинен задовольняти умови (III.4-6) і, підставивши (III.4-7) у (III.4-6), одержимо умови для  $X(x)$

$$\alpha_0 X'(a) + \beta_0 X(a) = 0, \quad \alpha_1 X'(b) + \beta_1 X(b) = 0 \quad (\text{III.4-10})$$

( $T(t) \neq 0$ , тому що в протилежному випадку  $u(t, x) = 0$ ). Отже, (III.4-7) є розв'язком допоміжної задачі, якщо  $T = T(t)$  є нетривіальним розв'язком рівняння (III.4-8), а  $X = X(x)$  — нетривіальним



розв'язком рівняння (III.4-9), який задовольняє умови (III.4-10). Задача (III.4-9)–(III.4-10) не завжди має нетривіальний розв'язок.

Задача знаходження нетривіальних розв'язків рівняння (III.4-9), які задовольняють умови (III.4-10), називається **задачею Штурма–Ліувілля**. Значення  $\lambda$ , для яких задача (III.4-9)–(III.4-10) має нетривіальні розв'язки, називають **власними значеннями**, а відповідні їм нетривіальні розв'язки — **власними функціями** цієї задачі.

Справедливі такі твердження:

1. Задача (III.4-9)–(III.4-10) має зліченну множину дійсних власних значень  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ .
2. Кожному власному значенню  $\lambda_n$  відповідає єдина (з точністю до сталого множника) власна функція  $X_n(x)$ .
3. Власні функції утворюють на сегменті  $[a, b]$  ортогональну систему з вагою  $\rho(x)$

$$\int_a^b \rho(x) X_k(x) X_n(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \|X_k\|^2, & k = n \end{cases} = \delta_{kn} \|X_n\|^2.$$

4. Якщо  $f(x)$  квадратично інтегровна на  $[a, b]$ , то вона розкладається в ряд Фур'є за власними функціями задачі (III.4-9)–(III.4-10), тобто

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x), \quad C_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b \rho(x) f(x) X_n(x) dx,$$

який в середньому збігається до  $f(x)$ .

Власні значення задачі (III.4-9)–(III.4-10) знаходимо в такий спосіб. Нехай  $X^{(1)}(x, \lambda)$ ,  $X^{(2)}(x, \lambda)$  — фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння (III.4-9). Підставивши загальний розв'язок  $X = C_1 X^{(1)}(x, \lambda) + C_2 X^{(2)}(x, \lambda)$  в умови (III.4-10), одержимо лінійну однорідну систему рівнянь, яка має нетривіальний розв'язок  $C_1, C_2$  тільки тоді, коли визначник дорівнює нулю. Розв'язуючи одержане рівняння відносно  $\lambda$ , знайдемо власні значення задачі (III.4-9)–(III.4-10). Поклавши в рівнянні (III.4-8)  $\lambda = \lambda_n$ , одержимо

його розв'язок у вигляді

$$T = T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t.$$

У результаті маємо зліченну множину розв'язків допоміжної задачі

$$u_n(t) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x).$$

Далі будемо функцію  $u(x, t)$  у вигляді ряду

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x). \quad (\text{III.4-11}) \end{aligned}$$

Якщо ряд (III.4-11) збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати двічі по  $x$  і  $t$ , то функція  $u(x, t)$  також буде задовольняти рівняння (III.4-4) і граничні умови (III.4-6). Тепер вимагатимемо, щоб функція (III.4-11) задовольняла початкові умови (III.4-5):

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = \varphi(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x) = \psi(x).$$

Якщо  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  розкладаються в ряд Фур'є за власними функціями задачі (III.4-9)–(III.4-10), то, користуючись ортонормованістю функцій  $X_n(x)$ , знайдемо коефіцієнти  $A_n$  і  $B_n$  за формулами

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b \rho(x) \varphi(x) X_n(x) dx, \\ B_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2 \sqrt{\lambda_n}} \int_a^b \rho(x) \psi(x) X_n(x) dx. \end{aligned}$$

Підставивши знайдені значення  $A_n$  і  $B_n$  в (III.4-11), матимемо розв'язок задачі (III.4-4)–(III.4-6).

**Неоднорідне рівняння  
з однорідними граничними умовами**

Розглянемо змішану задачу для рівняння (III.4-1) з початковими умовами (III.4-5) і граничними умовами (III.4-6).

**Спосіб 1.** Нехай  $v(x, t)$  — частковий розв’язок рівняння (III.4-1), який задовольняє граничні умови (III.4-6), тобто

$$\rho(x)v_{tt}(x, t) = [p(x)v_x(x, t)]_x - q(x)v(x, t) + f(x, t), \quad (\text{III.4-12})$$

$$\alpha_0 v_x(a, t) + \beta_0 v(a, t) = 0, \quad \alpha_1 v_x(b, t) + \beta_1 v(b, t) = 0. \quad (\text{III.4-13})$$

Покладемо  $u = v + w$ , де  $u$  — розв’язок задачі (III.4-1), (III.4-5)–(III.4-6). Легко перевірити, що функція  $w$  є розв’язком задачі

$$\rho(x)w_{tt} = [p(x)w_x]_x - q(x)w, \quad (\text{III.4-14})$$

$$(\alpha_0 w_x + \beta_0 w)\Big|_{x=a} = 0, \quad (\alpha_1 w_x + \beta_1 w)\Big|_{x=b} = 0, \quad (\text{III.4-15})$$

який шукаємо методом відокремлення змінних.

Вибір часткового розв’язку  $v(x, t)$  значною мірою залежить від вигляду функції  $f(x, t)$ . Якщо, наприклад,  $f(x, t)$  не залежить від  $t$ , то  $v(x, t)$  можна шукати у вигляді  $v(x, t) = v(x)$ , якщо  $f(x, t) = f(x) \cos \omega t$ , то  $v(x, t)$  можна шукати у вигляді  $v(x, t) = v(x) \cos \omega t$ .

**Спосіб 2.** Шукаємо розв’язок задачі (III.4-1), (III.4-5)–(III.4-6) у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad (\text{III.4-16})$$

де  $X_n(x)$  — власні функції задачі Штурма–Ліувілля. Якщо ряд (III.4-6) рівномірно збігається і його можна почленно диференціювати двічі по  $x$  і  $t$ , то  $u(x, t)$  задовольняє умови (III.4-6), і ми можемо знайти  $T_n(t)$  такого вигляду, щоб функція  $u(x, t)$  задовольняла

рівняння (III.4-1) і початкові умови (III.4-5). Підставимо (III.4-16) в (III.4-1)

$$\begin{aligned}\rho(x) \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \{ [p(x) X_n'(x)]' - q(x) X_n(x) \} + f(x, t), \\ \rho(x) \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_n(t) X_n(x) + f(x, t), \\ \sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) + \lambda_n T_n(t)] X_n(x) &= \frac{f(x, t)}{\rho(x)}.\end{aligned}\quad (\text{III.4-17})$$

Припустимо, що  $\frac{f(x, t)}{\rho(x)}$  розкладається в ряд Фур'є за власними функціями задачі (III.4-9)–(III.4-10):

$$\frac{f(x, t)}{\rho(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x), \quad f_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b f(x, t) X_n(x) dx.$$

Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) + \lambda_n T_n(t)] X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x).$$

Ця рівність буде виконуватись, якщо

$$T_n''(t) + \lambda_n T_n(t) = f_n(t). \quad (\text{III.4-18})$$

Вимагаючи, щоб функція (III.4-16) задовольняла початкові умови (III.4-5), одержуємо

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x) &= \varphi(x) \Rightarrow T_n(0) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b \rho(x) \varphi(x) X_n(x) dx = \varphi_n, \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) X_n(x) &= \psi(x) \Rightarrow T_n'(0) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b \rho(x) \psi(x) X_n(x) dx = \psi_n.\end{aligned}$$

Отже, функція (III.4-16) є розв'язком задачі (III.4-1), (III.4-5)–(III.4-6), якщо  $T_n(t)$  є розв'язком рівняння (III.4-18), який задовольняє початкові умови

$$T_n(0) = \varphi_n = \text{const}, \quad T'_n(0) = \psi_n = \text{const}. \quad (\text{III.4-19})$$

Підставивши розв'язок  $T_n(t)$  задачі (III.4-18)–(III.4-19) у (III.4-16), одержимо розв'язок змішаної задачі (III.4-1), (III.4-5)–(III.4-6).

### **Неоднорідне рівняння**

#### **з неоднорідними граничними умовами**

У загальному випадку задачу (III.4-1)–(III.4-3) можна звести до змішаної задачі з нульовими граничними умовами. Справді, нехай  $v(x, t)$  — довільна функція, яка задовольняє граничні умови (III.4-3):

$$\alpha_0 v_x(a, t) + \beta_0 v(a, t) = \mu_0(t), \quad \alpha_1 v_x(b, t) + \beta_1 v(b, t) = \mu_1(t).$$

Покладемо  $u = v + w$ , де  $u$  — розв'язок задачі (III.4-1)–(III.4-3). Тоді функція  $w(x, t)$  повинна бути розв'язком змішаної задачі

$$\begin{aligned} \rho(x)w_{tt} &= [p(x)w_x]_x - q(x)w + f(x, t) + [p(x)v_x]_x - q(x)v - \rho(x)v_{tt}, \\ w \Big|_{t=0} &= \varphi(x) - v(x, 0), \quad w_t \Big|_{t=0} = \psi(x) - v_t(x, 0), \\ (\alpha_0 w_x + \beta_0 w) \Big|_{x=a} &= 0, \quad (\alpha_1 w_x + \beta_1 w) \Big|_{x=b} = 0. \end{aligned}$$

Враховуючи, що  $\bar{f}(x, t) = f(x, t) + [p(x)v_x]_x - q(x)v - \rho(x)v_{tt}$  є відома функція, одержуємо змішану задачу для неоднорідного рівняння з нульовими граничними умовами.

Шукати функцію  $v(x, t)$  можна різними способами. Зокрема, її можна знайти у вигляді

$$v(x, t) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t). \quad (\text{III.4-20})$$

Підставивши (III.4-20) у граничні умови (III.4-3), одержимо систему двох рівнянь з трьома невідомими  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ , одну з яких можна вибрати довільно з тим, щоб по можливості простіше знаходити всі інші.

Якщо вдається знайти функцію  $v(x, t)$  такою, що вона задовольняє не тільки граничні умови (III.4-3), але й рівняння (III.4-1), то  $\bar{f}(x, t) = 0$ , і для знаходження  $w$  одержуємо однорідне рівняння і нульові граничні умови, тобто найпростішу змішану задачу.

▼ **Приклад 1.** Знайти розв'язок рівняння

$$u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$$

в області  $\{0 < x < \pi, t < 0\}$ , який задовольняє граничні умови

$$u_x \Big|_{x=0} = 0, \quad u \Big|_{x=\pi} = 0$$

і початкові умови

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad u_t \Big|_{t=0} = x.$$

*Розв'язування.* Це змішана задача для однорідного рівняння з однорідними граничними умовами. Розв'язуємо її методом Фур'є, тобто шукаємо розв'язки рівняння у формі  $u(x, t) = X(x)T(t) \neq 0$ , які задовольняють граничні умови. Підставляючи  $u(x, t)$  у рівняння і граничні умови, одержуємо

$$\begin{aligned} XT'' + 2XT' &= X''T - XT, \\ \frac{T''}{T} + 2\frac{T'}{T} + 1 &\equiv \frac{X''}{X} \equiv -\lambda^2, \\ X'(0)T(t) = 0 &\Rightarrow X'(0) = 0, \quad (T(t) \neq 0), \\ X(\pi)T(t) = 0 &\Rightarrow X(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що  $T = T(t)$  має бути нетривіальним розв'язком рівняння

$$T'' + 2T' + (1 + \lambda^2)T = 0,$$

а  $X = X(x)$  — нетривіальним розв'язком задачі Штурма–Ліувілля

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(\pi) = 0.$$

Загальний розв'язок рівняння для  $X$

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

підставляємо в граничні умови. Одержуємо  $X'(0) = B\lambda = 0 \Rightarrow B = 0$  ( $\lambda \neq 0$ , тому що інакше  $X(x) = 0$ );  $X(\pi) = A \cos \lambda\pi = 0$ . Оскільки  $A \neq 0$  (тоді  $X(x) = 0$ ), то знаходимо зліченну множину власних значень  $\lambda_n = \frac{1}{2}(2n+1)$  задачі Штурма–Ліувілля. Відповідні власні функції запишемо у вигляді

$$X_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2}x.$$

Тепер підставимо  $\lambda_n$  у рівняння для  $T$

$$T_n'' + 2T_n' + (1 + \lambda_n^2)T_n = 0.$$

Характеристичне рівняння  $q^2 + 2q + (1 + \lambda_n^2) = 0$  має корені  $q_{1,2} = -1 \pm i\lambda_n$  комплексні, оскільки  $\lambda_n^2 > 0$ . Загальний розв'язок рівняння такий:

$$T_n(t) = e^{-t} \left( C_n \sin \frac{2n+1}{2}t + D_n \cos \frac{2n+1}{2}t \right).$$

Отже, одержуємо такі розв'язки рівняння для  $u(x, t)$ , що задовольняють граничні умови:

$$u_n(x, t) = e^{-t} \left[ C_n \sin \frac{2n+1}{2}t + D_n \cos \frac{2n+1}{2}t \right] \cos \frac{2n+1}{2}x$$

(тут покладено  $A = 1$ ).

Функція

$$u(x, t) = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_n \sin \frac{2n+1}{2}t + D_n \cos \frac{2n+1}{2}t \right] \cos \frac{2n+1}{2}x$$

задовольняє рівняння та граничні умови, якщо ряд збігається рівномірно і його можна диференціювати двічі по  $x$  і  $t$ . Тепер використаємо початкові умови:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos \frac{2n+1}{2}x = 0, \\ u_t(x, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{2n+1}{2} \cos \frac{2n+1}{2}x = x. \end{aligned}$$

Скориставшись ортонормованістю власних функцій  $\cos \frac{2n+1}{2}x$  з вагою  $\rho(x) = 1$ , одержуємо

$$\begin{aligned} D_n \int_0^\pi \cos^2 \frac{2n+1}{2}x \, dx &= 0 \quad \Rightarrow \quad D_n = 0, \\ \frac{2n+1}{2} C_n \int_0^\pi \cos^2 \frac{2n+1}{2}x \, dx &= \int_0^\pi x \cos \frac{2n+1}{2}x \, dx, \\ C_n &= \frac{8}{(2n+1)^2} \left( (-1)^n - \frac{2}{\pi(2n-1)} \right), \end{aligned}$$

де враховано, що

$$\int_0^\pi x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x, \quad \int_0^\pi \cos^2 \frac{2n+1}{2}x \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Підставивши значення  $C_n$  і  $D_n$  у ряд Фур'є для  $u(x, t)$ , одержимо розв'язок задачі

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \\ &= 8e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left[ (-1)^n - \frac{2}{\pi(2n+1)} \right] \sin \frac{2n+1}{2}t \cos \frac{2n+1}{2}x. \end{aligned}$$

▲

#### ▼ Приклад 2. Розв'язати змішану задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - 2u_t &= 4t(\sin x - x) \quad \left( 0 < x < \frac{\pi}{2} \right), \\ u \Big|_{x=0} &= 3, \quad u_x \Big|_{x=\pi/2} = t^2 + t, \\ u \Big|_{t=0} &= 3, \quad u_t \Big|_{t=0} = x + \sin x. \end{aligned}$$

Функцію  $v(x, t)$ , яка задовольняє умови  $v \Big|_{x=0} = 3$  і  $v_x \Big|_{x=\pi/2} = t^2 + t$ , шукаємо у вигляді  $v(x, t) = A(t)x + B(t)$ . Підставляючи  $v(x, t)$  у граничні умови, одержимо  $v \Big|_{x=0} = B(t) = 3$ ,  $v_x \Big|_{x=\pi/2} = A(t) = t^2 + t$ .



Отже,  $v(x, t) = (t^2 + t)x + 3$ . Покладемо  $u = v + w$ , тоді матимемо для функції  $w$  змішану задачу

$$\begin{aligned} w_{tt} - 2w_t &= w_{xx} + 4t \sin x, \\ w|_{x=0} &= 0, \quad w_x|_{x=\pi/2} = 0, \\ w|_{t=0} &= 0, \quad w_t|_{t=0} = \sin x, \end{aligned}$$

якій відповідає така задача Штурма–Ліувілля

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

де  $\lambda = 0$  не є власним значенням цієї задачі, оскільки в такому випадку  $X''(x) = 0$ ,  $X(x) = C_1 x + C_2$ , а з граничних умов випливає, що  $C_2 = 0$  і  $C_1 = 0$ , тобто  $X(x) \equiv 0$ . Далі,  $X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$ . Визначимо  $C_1$  і  $C_2$  з граничних умов:  $X(0) = C_1 = 0$ ;  $X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda C_2 \cos \lambda \frac{\pi}{2} = 0$ ,  $\lambda \frac{\pi}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $\lambda_n = (2n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Задача Штурма–Ліувілля має власні функції  $X_n(x) = \sin(2n+1)x$ . Тепер розв'язок змішаної задачі для  $w$  шукаємо у вигляді

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin(2n+1)x,$$

де  $w(x, t)$  задовольняє граничні умови, якщо ряд рівномірно збігається. Припустивши, що ряд для  $w(x, t)$  можна диференціювати двічі по  $x$  і  $t$ , одержимо:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [T_n''(t) - 2T_n'(t)] \sin(2n+1)x &= \\ = - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 T_n(t) \sin(2n+1)x + 4t \sin x, \\ \sum_{n=0}^{\infty} [T_n''(t) - 2T_n'(t) + (2n+1)^2 T_n(t)] \sin(2n+1)x &= 4t \sin x. \end{aligned}$$

Використаємо ортонормованість функцій  $\sin(2n+1)x$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2k+1)x \sin(2n+1)x dx = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \pi/4, & k = n, \end{cases}$$

в результаті отримаємо рівняння для  $T_n(t)$ :

$$T_n''(t) - 2T_n'(t) + (2n+1)^2 T_n(t) = \frac{16}{\pi} t \int_0^{\pi/2} \sin x \sin(2n+1)x \, dx.$$

Оскільки

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2n+1)x \sin x \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ \pi/4, & n = 0, \end{cases}$$

попереднє рівняння перепишемо так:

$$T_0'' - 2T_0' + T_0 = 4t, \quad T_n'' - 2T_n' + (2n+1)^2 T_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Із початкових умов для функції  $w(x, t)$  одержимо

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) \sin(2n+1)x &= 0 \Rightarrow T_n(0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0) \sin(2n+1)x &= \sin x \Rightarrow T_n'(0) = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Загальний розв'язок рівняння для  $T_0$  має вигляд:

$$T_0(t) = C_0 t e^t + D_0 e^t + 4t + 8.$$

Із початкових умов маємо  $T_0(0) = D_0 + 8 = 0 \Rightarrow D_0 = -8$ ,  $T_0'(0) = C_0 + D_0 + 4 = 1 \Rightarrow C_0 = 5$ . Тому  $T_0(t) = 5te^t - 8e^t + 4t + 8$ . Далі,  $T_n(t) \equiv 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) як розв'язок задачі Коші для лінійного однорідного рівняння з нульовими початковими умовами. Отже,

$$w(x, t) = (5te^t - 8e^t + 4t + 8) \sin x,$$

і розв'язок змішаної задачі

$$u(x, t) = (t^2 + t)x + 3 + (5te^t - 8e^t + 4t + 8) \sin x.$$



**Завдання.**

Розв'язати змішані задачі:

$$\text{III.62. } u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{2\pi}{\ell} x.$$

$$\text{III.63. } u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad u(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin \frac{5}{2\ell} \pi x, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi}{2\ell} x.$$

$$\text{III.64. } u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad u(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi}{2\ell} x + \sin \frac{3\pi}{2\ell} x.$$

$$\text{III.65. } u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad u_x(0, t) = u(\ell, t) = 0, \\ u(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2\ell} x, \quad u_t(x, 0) = \cos \frac{3\pi}{2\ell} x + \cos \frac{5\pi}{2\ell} x.$$

$$\text{III.66. } u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 1.$$

$$\text{III.67. } u_{tt} = a^2 u_{xx} + A e^{-t} \sin \frac{\pi}{\ell} x, \quad 0 < x < \ell, \quad u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

$$\text{III.68. } u_{tt} = a^2 u_{xx} + A x e^{-t}, \quad 0 < x < \ell, \quad u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

$$\text{III.69. } u_{tt} = a^2 u_{xx} + A \sin t, \quad 0 < x < \ell, \quad u(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0.$$

$$\text{III.70. } u_{tt} = a^2 u_{xx} + A e^{-t} \cos \frac{\pi}{2\ell} x, \quad 0 < x < \ell, \quad u_x(0, t) = u(\ell, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0.$$

$$\text{III.71. } u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad u(0, t) = t^2, \quad u(\pi, t) = t^3,$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

$$\text{III.72. } u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad u(0, t) = e^{-t}, \quad u(\pi, t) = t,$$

$$u(x, 0) = \sin x \cos x, \quad u_t(x, 0) = 1.$$

$$\text{III.73. } u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad u(0, t) = t, \quad u_x(\pi, t) = 1,$$

$$u(x, 0) = \sin \frac{1}{2}x, \quad u_t(x, 0) = 1.$$

$$\text{III.74. } u_{tt} = u_{xx} + 2t, \quad 0 < x < 1, \quad u(0, t) = u_x(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0.$$

$$\text{III.75. } u_{tt} = u_{xx} - 4u, \quad 0 < x < 1, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = x^2 - x, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

$$\text{III.76. } u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u, \quad 0 < x < \pi, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \pi x - x^2, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

$$\text{III.77. } u_{tt} + 2bu_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad u_x(0, t) = 0,$$

$$[u_x(\ell, t) + \beta u(\ell, t)] = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

$b$  — досить мале число.

$$\text{III.78. } u_{tt} + u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad u(0, t) = t, \quad u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 1 - x.$$

III.79.  $u_{tt} = u_{xx} + u, \quad 0 < x < 2, \quad u(0, t) = 2t, \quad u(2, t) = 0,$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0.$$

III.80.  $u_{tt} = u_{xx} + u, \quad 0 < x < \ell, \quad u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = t,$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \frac{x}{\ell}.$$

III.81.  $u_{tt} = u_{xx} + x, \quad 0 < x < \pi, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0,$

$$u(x, 0) = \sin 2x, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

III.82. Розв'язати рівняння малих поздовжніх коливань циліндричного стрижня, один кінець якого закріплений, а другий — вільний.

III.83. Розв'язати рівняння вільних коливань закріпленої струни в середовищі, опір якого пропорційний до швидкості.

### Змішана задача для рівнянь параболічного типу

Змішана задача для параболічного рівняння

$$\rho(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + f(x, t) \quad (\text{III.4-21})$$

полягає у знаходженні розв'язку  $u(x, t)$  цього рівняння в області  $\{0 < x < \ell, t > 0\}$ , який задовольняє початкову умову

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x) \quad (\text{III.4-22})$$

і граничні умови

$$(\alpha_1 u_x + \beta_1 u) \Big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad (\alpha_2 u_x + \beta_2 u) \Big|_{x=\ell} = \mu_2(t). \quad (\text{III.4-23})$$

На функції  $\rho(x)$ ,  $p(x)$ ,  $q(x)$  і числа  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  накладаються ті самі обмеження, що і для змішаної задачі для рівняння гіперболічного типу. Змішана задача (III.4-21)–(III.4-23) розв'язується за такою ж схемою, що і змішана задача для рівняння гіперболічного типу.

▼ **Приклад 1.** Розв'язати змішану задачу

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 6u + 2t(1 - 3t) - 6x + 2 \cos x \cos 2x, & 0 < x < \pi/2, \\ u_x(0, t) &= 1, & u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = t^2 + \frac{\pi}{2}, & u(x, 0) = x. \end{aligned}$$

*Розв'язування.* Оскільки граничні умови не є нульовими, спочатку треба звести задачу до змішаної задачі з однорідними граничними умовами. Нехай функція  $V(x, t)$  задовольняє граничні умови

$$V_x(0, t) = 1, \quad V\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = t^2 + \frac{\pi}{2}.$$

Шукаючи цю функцію у вигляді

$$V(x, t) = A(t)x + B(t)$$

і підставивши її в граничні умови, знайдемо  $A(t)$  і  $B(t)$ :

$$\begin{aligned} V_x(0, t) &= A(t) = 1 \Rightarrow A(t) = 1, \\ V(\pi/2, t) &= \pi/2 + B(t) = t^2 + \pi/2 \Rightarrow B(t) = t^2. \end{aligned}$$

Отже,  $V(x, t) = x + t^2$ . Нехай,  $u = v + V$ , де  $u$  — розв'язок змішаної задачі, тоді для функції  $v$  одержимо задачу

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + 6v + 2 \cos 2x \cos x, \\ v_x(0, t) &= 0, & v(\pi/2, t) &= 0, & v(x, 0) &= 0, \end{aligned}$$

тобто треба розв'язати неоднорідне рівняння з нульовими граничними умовами. Спочатку розв'яжемо однорідне рівняння методом відокремлення змінних. Шукаємо розв'язок  $\tilde{v}$  у формі

$$\tilde{v}(x, t) = X(x)T(t),$$

де функція  $X(x)$  має бути розв'язком задачі Штурма–Ліувілля

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(\pi/2) = 0.$$

Загальний розв'язок цієї задачі такий:

$$X(x) = K \cos \lambda x + M \sin \lambda x.$$

Із граничних умов маємо:

$$\begin{aligned} X'(0) = \lambda M = 0 &\Rightarrow M = 0, \\ \cos \frac{\lambda \pi}{2} = 0 &\Rightarrow \frac{\lambda \pi}{2} = (2n + 1)\pi/2, \quad \lambda_n = 2n + 1 \end{aligned}$$

( $n = 0, 1, \dots$ ) — власні значення і власні функції  $X_n(x) = \cos(2n+1)x$ .

Тепер розв'язок змішаної задачі для  $v$  запишемо як ряд за власними функціями

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos(2n + 1)x.$$

Припустивши, що ряд для  $v$  можна диференціювати двічі по  $x$  і один раз по  $t$ , одержимо

$$\sum_{n=0}^{\infty} [T'_n + ((2n + 1)^2 - 6)T_n] \cos(2n + 1)x = \cos x + \cos 3x,$$

де використано співвідношення

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)].$$

Внаслідок ортонормованості власних функцій  $X_n(x)$

$$\int_0^{\pi} X_n(x) X_m(x) dx = \|X_n\|^2 \delta_{nm},$$

отримаємо рівняння для  $T_n(t)$ :

$$\begin{aligned} T'_n + [(2n + 1)^2 - 6]T_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \times \\ &\times \left[ \int_0^{\pi/2} \cos x \cos(2n + 1)x + \int_0^{\pi/2} \cos 3x \cos(2n + 1)x dx \right]. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \cos(2n+1)x \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ \pi/4, & n = 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos 3x \cos(2n+1)x \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ \pi/4, & n = 1, \end{cases}$$

попереднє рівняння перепишемо так:

$$T'_0 - 5T_0 = 1, \quad T'_1 + 3T_1 = 1, \quad T'_m + [(2m+1)^2 - 6]T_m = 0, \\ m = 2, 3, \dots$$

Загальні розв'язки цих рівнянь такі:

$$T_0(t) = Ce^{5t} - 1/5, \quad T_1(t) = De^{-3t} + 1/3, \\ T_m(t) = F_m e^{(6-(2m+1)^2)t}.$$

Вимагаючи, щоб функція  $v(x, t)$  задовольняла початкову умову, маємо

$$v(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)X_n(x) = 0 \Rightarrow T_n(0) = 0,$$

тобто

$$T_0(0) = C - 1/5 = 0 \Rightarrow C = 1/5, \\ T_1(0) = D + 1/3 = 0 \Rightarrow D = -1/3, \\ T_m(0) = F_m = 0 \Rightarrow F_m = 0.$$

Отже,

$$v(x, t) = \frac{1}{5}(e^{5t} - 1) \cos x + \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) \cos 3x$$

і розв'язок змішаної задачі

$$u(x, t) = x + t^2 + \frac{1}{5}(e^{5t} - 1) \cos x + \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) \cos 3x.$$





**Завдання.**

Розв'язати змішані задачі:

$$\text{III.84. } u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad u(x, 0) = Ax.$$

$$\text{III.85. } u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad u_x(0, t) = u(\ell, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = A(\ell - x).$$

$$\text{III.86. } u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \quad u(x, 0) = A.$$

$$\text{III.87. } u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, \quad 0 < x < \ell, \quad u(0, t) = u_x(\ell, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2\ell}.$$

$$\text{III.88. } u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad u(0, t) = B, \quad u(\ell, t) = A, \quad u(x, 0) = 0.$$

$$\text{III.89. } u_t = a^2 u_{xx} - \beta u + \sin \frac{\pi x}{\ell}, \quad 0 < x < \ell,$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0.$$

$$\text{III.90. } u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad u(0, t) = 0, \quad u_x(\ell, t) = Ae^{-t},$$

$$u(x, 0) = B.$$

$$\text{III.91. } u_t = u_{xx} + t(1 - x), \quad 0 < x < 1, \quad u_x(0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0.$$

$$\text{III.92. } u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad u_x(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = x^2 - 1.$$

$$\text{III.93. } u_t = u_{xx} - u, \quad 0 < x < \ell, \quad u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad u(x, 0) = 1.$$

$$\text{III.94. } u_t = u_{xx} - 4u, \quad 0 < x < \pi, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = x^2 - \pi x.$$

$$\text{III.95. } u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad u_x(0, t) = 1, \quad u(\ell, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0.$$

$$\text{III.96. } u_t = u_{xx} + u + 2 \sin 2x \sin x, \quad 0 < x < \pi/2,$$

$$u_x(0, t) = u(\pi/2, t) = u(x, 0) = 0.$$

$$\text{III.97. } u_t = u_{xx} + u - x + 2 \sin 2x \cos x, \quad 0 < x < \pi/2,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(\pi/2, t) = 1, \quad u(x, 0) = x.$$

$$\text{III.98. } u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2t + 2 \cos^2 x, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 2\pi t, \quad u(x, 0) = 0.$$

$$\text{III.99. } u_t - u_{xx} - u = xt(2 - t) + 2 \cos t, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u_x(0, t) = t^2, \quad u_x(\pi, t) = t^2, \quad u(x, 0) = \cos 2x.$$

$$\text{III.100. } u_t = u_{xx} + 9u + 4 \sin^2 t \cos 3x - 9x^2 - 2, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 2\pi, \quad u(x, 0) = x^2 + 2.$$

$$\text{III.101. } u_t - u_{xx} + 2u_x - u = e^x \sin x - t, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u(0, t) = 1 + t, \quad u(\pi, t) = 1 + t, \quad u(x, 0) = 1 + e^x \sin 2x.$$

$$\text{III.102. } u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1 - 6t) - 2(t + 3x) + \sin 2x, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u_x(0, t) = 1, \quad u_x(\pi, t) = 2\pi t + 1, \quad u(x, 0) = x.$$

$$\text{III.103. } u_t = u_{xx} + 4u_x + x - 4t + 1 + e^{-2x} \cos^2 \pi x, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0, t) = t, \quad u(1, t) = 2t, \quad u(x, 0) = 0.$$

- III.104. Однорідна куля радіуса  $R$  початково перебувала при нульовій температурі. Вона нагрівається рівномірно по всій поверхні постійним тепловим потоком  $q$ . Знайти радіальний розподіл температури всередині кулі в довільний момент часу  $t > 0$ .

### Рівняння еліптичного типу

Схема методу відокремлення змінних для рівнянь еліптичного типу є такою ж, як і для гіперболічних і параболічних рівнянь. За допомогою цього методу можна розв'язати крайові задачі для рівняння Лапласа і Пуассона у випадку найпростіших областей (круг, кругове кільце, прямокутник, куля, паралелепіпед тощо). Проілюструємо метод відокремлення змінних для рівнянь еліптичного типу на конкретних задачах для рівнянь Лапласа і Пуассона.

▼ **Приклад 1.** У прямокутнику  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$  знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (\text{III.4-24})$$

який задовольняє граничні умови

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=a} = \varphi_2(y), \quad (\text{III.4-25})$$

$$u|_{y=0} = \psi_1(x), \quad u|_{y=b} = \psi_2(x). \quad (\text{III.4-26})$$

Легко переконатися, що розв'язком цієї задачі є

$$u = u_1 + u_2,$$

де  $u_1$  і  $u_2$  — це розв'язки крайових задач

$$\Delta u_1 \equiv u_{1xx} + u_{1yy} = 0, \quad (\text{III.4-27})$$

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_1|_{x=a} = 0, \quad (\text{III.4-28})$$

$$u_1|_{y=0} = \psi_1(x), \quad u_1|_{y=b} = \psi_2(x), \quad (\text{III.4-29})$$

$$\Delta u_2 \equiv u_{2xx} + u_{2yy} = 0, \quad (\text{III.4-30})$$

$$u_2|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u_2|_{x=a} = \varphi_2(y), \quad (\text{III.4-31})$$

$$u_2|_{y=0} = 0, \quad u_2|_{y=b} = 0. \quad (\text{III.4-32})$$

Розв'яжемо задачу (III.4-27)–(III.4-29). Спочатку знайдемо всі нетривіальні розв'язки рівняння (III.4-27), які задовольняють умови (III.4-28) і мають вигляд

$$u_1(x, y) = X_1(x)Y_1(y). \quad (\text{III.4-33})$$

З умов (III.4-28) знаходимо, що

$$X_1(0)Y_1(y) = 0 \Rightarrow X_1(0) = 0,$$

$$X_1(a)Y_1(y) = 0 \Rightarrow X_1(a) = 0.$$

Підставивши (III.4-33) у рівняння (III.4-27), маємо

$$\begin{aligned} X_1''(x)Y_1(y) + X_1(x)Y_1''(y) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{X_1''(x)}{X_1(x)} &= -\frac{Y_1''(y)}{Y_1(y)} = -\lambda. \end{aligned}$$

Отже, для функції  $X_1(x)$  одержуємо задачу Штурма–Ліувілля

$$X_1''(x) + \lambda X_1(x) = 0, \quad (\text{III.4-34})$$

$$X_1(0) = 0, \quad X_1(a) = 0, \quad (\text{III.4-35})$$

а для  $Y_1(y)$  — диференціальне рівняння

$$Y_1''(y) - \lambda Y_1(y) = 0. \quad (\text{III.4-36})$$

Задача (III.4-34)–(III.4-35) має нетривіальні розв'язки тільки при значеннях  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а самі розв'язки з точністю до сталого множника мають вигляд

$$X_{1n}(x) = \sin \frac{n\pi}{a}x.$$

Поклавши в рівнянні (III.4-36)  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ , знайдемо його загальний розв'язок

$$Y_{1n}(y) = \bar{A}_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + \bar{B}_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} = A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a}y + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a}y.$$

Маємо безмежну послідовність розв'язків задачі (III.4-27)–(III.4-28)

$$u_{1n} = \left( A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a}y + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a}y \right) \sin \frac{n\pi}{a}x,$$

і сума ряду

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a}y + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a}y \right) \sin \frac{n\pi}{a}x \quad (\text{III.4-37})$$

також є розв'язком цієї задачі, якщо ряд збігається рівномірно у сегменті  $[0, a]$  і його можна почленно диференціювати в інтервалі  $[0, a]$ . Далі, сума ряду (III.4-37) має задовольняти умови (III.4-29), тобто

$$\begin{aligned} u_1|_{y=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{a}x = \psi_1(x), \\ u_1|_{y=b} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a}b + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a}b \right) \sin \frac{n\pi}{a}x = \psi_2(x). \end{aligned}$$

Використавши ортонормованість функцій  $\left\{ \sin \frac{n\pi}{a}x \right\}$ , отримаємо

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{a} \int_0^a \psi_1(x) \sin \frac{n\pi}{a}x \, dx = \alpha_{1n}, \\ A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a}b + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a}b &= \frac{2}{a} \int_0^a \psi_2(x) \sin \frac{n\pi}{a}x \, dx = \alpha_{2n}. \end{aligned}$$

Звідси

$$B_n = \frac{\alpha_{2n} - \alpha_{1n} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a}b}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{a}b}.$$

Підставивши значення  $A_n$  і  $B_n$  в ряд (III.4-37), одержимо

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_{1n} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} y + \frac{\alpha_{2n} - \alpha_{1n} \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \right) \sin \frac{n\pi}{a} x.$$

Аналогічно знаходимо розв'язок задачі (III.4-30)–(III.4-32):

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \beta_{1n} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x + \frac{\beta_{2n} - \beta_{1n} \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x \right) \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

де

$$\beta_{1n} = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi_1(y) \sin \frac{n\pi}{b} y \, dy, \quad \beta_{2n} = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi_2(y) \sin \frac{n\pi}{b} y \, dy.$$

Отже, розв'язок задачі (III.4-24)–(III.4-26) такий:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_{1n} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + \frac{\alpha_{2n} - \alpha_{1n} \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \right) \sin \frac{n\pi}{a} x + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \beta_{1n} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x + \frac{\beta_{2n} - \beta_{1n} \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x \right) \sin \frac{n\pi}{b} y. \end{aligned}$$

▲

▼ **Приклад 2.** У прямокутнику  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$  знайти розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = F(x, y), \quad (\text{III.4-38})$$

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=a} = \varphi_2(y), \quad (\text{III.4-39})$$

$$u|_{y=0} = \psi_1(x), \quad u|_{y=b} = \psi_2(x). \quad (\text{III.4-40})$$

*Розв'язування.* Шукати розв'язок задачі можна двома способами.

ПЕРШИЙ СПОСІБ.

Нехай  $v(x, y)$  — будь-який частковий розв'язок рівняння (III.4-38).

Покладемо  $w = u - v$ , де  $w$  — нова невідома функція, яка повинна бути розв'язком задачі Діріхле

$$\begin{aligned}\Delta w &\equiv w_{xx} + w_{yy} = 0, \\ w|_{x=0} &= \bar{\varphi}_1(y), \quad w|_{x=a} = \bar{\varphi}_2(y), \\ w|_{y=0} &= \bar{\psi}_1(x), \quad w|_{y=b} = \bar{\psi}_2(x),\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_1(y) &= \varphi_1(y) - v|_{x=0}, \\ \bar{\varphi}_2(y) &= \varphi_2(y) - v|_{x=a}, \\ \bar{\psi}_1(x) &= \psi_1(x) - v|_{y=0}, \\ \bar{\psi}_2(x) &= \psi_2(x) - v|_{y=b}.\end{aligned}$$

Одержана крайова задача розв'язана в прикладі 1.

Другий спосіб.

Запишемо розв'язок задачі (III.4-38)–(III.4-40) у вигляді  $u = w + v$ , де  $v$  є розв'язком задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\begin{aligned}\Delta v &\equiv v_{xx} + v_{yy} = 0, \\ v|_{x=0} &= \varphi_1(y), \quad v|_{x=a} = \varphi_2(y), \\ v|_{y=0} &= \psi_1(x), \quad v|_{y=b} = \psi_2(x),\end{aligned}$$

а  $w$  — розв'язок рівняння Пуассона

$$\Delta w = w_{xx} + w_{yy} = F(x, y), \quad (\text{III.4-41})$$

який задовольняє нульові граничні умови

$$w|_{x=0} = w|_{x=a} = 0, \quad (\text{III.4-42})$$

$$w|_{y=0} = w|_{y=b} = 0. \quad (\text{III.4-43})$$

Задача для  $v$  розв'язана у прикладі 1. Розв'язок задачі (III.4-41)–(III.4-43) шукаємо так:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(y) \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad (\text{III.4-44})$$

де  $w_n(y)$  — поки що довільні функції;  $w(x, y)$  задовольняє умови (III.4-42) (ці умови задовольняють власні функції  $\sin \frac{n\pi}{a}x$ ).

Визначимо  $w_n(y)$  в такий спосіб, щоб  $w(x, y)$  задовольняла умови (III.4-43). Для цього підставимо (III.4-44) у рівняння (III.4-41) і розкладемо  $F(x, y)$  у ряд Фур'є за функціями  $\{\sin \frac{n\pi}{a}x\}$ . Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 w_n(y) + w_n''(y) \right] \sin \frac{n\pi}{a}x = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin \frac{n\pi}{a}x,$$

де

$$F_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a F(x, y) \sin \frac{n\pi}{a}x \, dx.$$

Із єдиності розкладу функції в ряд Фур'є отримаємо рівняння для  $w_n = w_n(y)$

$$w_n'' - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 w_n = F_n(y), \quad (\text{III.4-45})$$

а з умов (III.4-43) одержимо граничні умови

$$w_n(0) = w_n(b) = 0. \quad (\text{III.4-46})$$

За методом варіації сталих знаходимо загальний розв'язок рівняння (III.4-45)

$$w_n = A_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} + \frac{a}{n\pi} \int_0^y F_n(\xi) \sin \frac{n\pi}{a}(y - \xi) \, d\xi. \quad (\text{III.4-47})$$

Функція (III.4-47) повинна задовольняти умови (III.4-46), тому

$$A_n + B_n = 0, \quad (\text{III.4-48})$$

$$\left\{ A_n e^{\frac{n\pi}{a}b} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} + \frac{a}{n\pi} \int_0^b F_n(\xi) \sin \frac{n\pi}{a}(b - \xi) \, d\xi \right\} = 0.$$



Підставивши знайдені зі системи рівнянь (III.4-48)  $A_n$  і  $B_n$  в (III.4-47), одержимо розв'язок  $w_n(y)$ . Потім  $w_n(y)$  підставимо в ряд (III.4-44) і матимемо розв'язок  $w(x, y)$  задачі (III.4-41)–(III.4-43). Тепер залишається тільки записати розв'язок задачі (III.4-38)–(III.4-40) у вигляді  $u = v + w$ .

Розв'язок задачі (III.4-41)–(III.4-43) можна також шукати у вигляді

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n(x) \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

який вже задовольняє умову (III.4-43). Для знаходження  $\tilde{w}_n(x)$  одержимо крайову задачу

$$\begin{aligned} \tilde{w}_n'' - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tilde{w}_n &= \tilde{F}_n(x), \\ \tilde{w}_n(0) &= \tilde{w}_n(a) = 0, \end{aligned}$$

де  $\tilde{F}_n(x)$  — коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є функції  $F(x, y)$  за  $\{\sin \frac{n\pi}{b} y\}$ .



**▼ Приклад 3.** Знайти функцію  $u = u(r, \varphi)$ , що задовольняє в крузі рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{III.4-49}$$

і граничну умову

$$u|_{r=R} = f(\varphi). \tag{III.4-50}$$

*Розв'язування.* Перепишемо рівняння (III.4-49) в полярних координатах  $(r, \varphi)$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{III.4-51}$$

Шукаємо часткові розв'язки рівняння (III.4-51) такого вигляду

$$u = \chi(r)\Phi(\varphi). \quad (\text{III.4-52})$$

Підставляючи (III.4-52) в (III.4-51), отримаємо

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \quad (\text{III.4-53})$$

$$r(rR')' - \lambda R = 0. \quad (\text{III.4-54})$$

З умови періодичності  $u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi)$ , маємо  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$  і з (III.4-53) знаходимо

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi,$$

де  $\sqrt{\lambda} = n$  ( $n$  — ціле).

Покладемо  $\chi(r) = r^\alpha$  в (III.4-54), тоді одержимо  $\alpha = \pm n$  ( $n > 0$ ) і

$$\chi_n(r) = a r^n + b r^{-n},$$

а для  $n = 0$  ( $\lambda = 0$ )

$$\chi_0(r) = C_0 \ln r + C.$$

У розв'язку внутрішньої задачі Діріхле покладемо  $\chi_n(r) = ar^n$  і  $\chi_0(r) = C$ , тому що  $r^{-n} \rightarrow \infty$  і  $\ln r \rightarrow -\infty$ , коли  $r \rightarrow +0$ .

Отже, розв'язок внутрішньої задачі Діріхле запишемо так:

$$u(r, \varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad (\text{III.4-55})$$

де коефіцієнти  $A_n, B_n$  визначаються з граничної умови (III.4-50)

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi \, d\psi, & C &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \, d\psi, \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi \, d\psi. \end{aligned}$$

Якщо підсумувати ряд (III.4-55), отримаємо розв'язок внутрішньої задачі Діріхле у вигляді інтеграла Пуассона:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{R^2 - r^2}{r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \psi) + R^2} d\psi.$$

Розв'язок зовнішньої задачі Діріхле шукаємо в формі ряду

$$u(r, \varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Нарешті, розв'язок рівняння (III.4-49) в області  $R_1 < r < R_2$  при заданих граничних умовах на колах  $r = R_1$  і  $r = R_2$  шукаємо в формі ряду

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{C_n}{r^n} \right) \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left( B_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) \sin n\varphi + a \ln r + b.$$



### Завдання.

Знайти розв'язок рівняння Лапласа  $\Delta u = 0$

**у прямокутнику**  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ , якщо:

III.105.  $u(0, y) = A \sin \frac{\pi y}{b}$ ,  $u(a, y) = 0$ ,  $u(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a}$ ,  $u(x, b) = 0$ .

III.106.  $u(0, y) = V$ ,  $u(a, y) = 0$ ,  $u(x, 0) = u(x, b) = 0$ .

III.107.  $u(0, y) = u_x(a, y) = 0$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $u(x, b) = f(x)$ .

III.108.  $u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0$ ,  $u(x, 0) = A$ ,  $u(x, b) = Bx$ .

III.109.  $u(0, y) = A$ ,  $u_x(a, y) = 0$ ,  $u_y(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{2a}$ ,  $u(x, b) = 0$ .

**у прямокутнику**  $-a < x < a$ ,  $-b < y < b$ , якщо:

$$\text{III.110. } u(a, y) = A, \quad u(-a, y) = A, \quad u(x, b) = 0, \quad u(x, -b) = 0.$$

**у півсмугі**  $0 < x < \infty$ ,  $0 < y < b$ , якщо:

$$\text{III.111. } u(0, y) = f(y), \quad u(\infty, y) = 0, \quad u(x, 0) = u_y(x, b) = 0.$$

**у крузі** радіуса  $R$  з центром у початку координат, якщо:

$$\text{III.112. } u_r(R, \varphi) = A \cos \varphi. \quad \text{III.113. } u_r(R, \varphi) = \sin^3 \varphi.$$

**у крузі** одиничного радіуса, якщо:

$$\text{III.114. } u(1, \varphi) = \cos^2 \varphi. \quad \text{III.115. } u(1, \varphi) = \sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi.$$

**у кільці**  $1 < r < 2$ , якщо:

$$\text{III.116. } u(1, \varphi) = A, \quad u(2, \varphi) = B.$$

$$\text{III.117. } u(1, \varphi) = 1 + \cos^2 \varphi, \quad u(2, \varphi) = \sin^2 \varphi.$$

**у кільці**  $a < r < b$ , якщо:

$$\text{III.118. } u(a, \varphi) = 0, \quad u(b, \varphi) = \cos \varphi.$$

$$\text{III.119. } u(a, \varphi) = A, \quad u(b, \varphi) = B \sin 2\varphi.$$

$$\text{III.120. } u_r(a, \varphi) = q \cos \varphi, \quad u(b, \varphi) = A + B \sin 2\varphi.$$

**у круговому секторі**  $0 < r < R$ ,  $0 < \varphi < \alpha$ , якщо:

$$\text{III.121. } u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, \quad u(R, \varphi) = A\varphi.$$

$$\text{III.122. } u_\varphi(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, \quad u(R, \varphi) = f(\varphi).$$

III.123. Знайти розв'язок рівняння Пуассона  $\Delta u = A$  у кільці  $a < r < b$ , якщо  $u(a, \varphi) = B$ ,  $u(b, \varphi) = C$ .

III.124. Знайти розв'язок рівняння Пуассона  $\Delta u = -Axy$  у крузі радіуса  $R$  з центром у початку координат, якщо  $u(R, \varphi) = 0$ .

- III.125. Знайти гармонічну функцію всередині кулі одиничного радіуса з центром у початку координат, яка набуває на поверхні значень  $\varphi(\theta) = \cos^2 \theta$ .
- III.126. Із тонкої круглої металевої пластини радіуса  $R$  вирізали сектор кутовим розміром  $\alpha$ . Прямолінійні краї сектора підтримують при нульовій температурі, а розподіл температури на третьому краї — постійним і пропорційним до кута  $\varphi$ . Знайти стаціонарну температуру внутрішніх точок сектора.

### III.5. Метод інтегральних перетворень

Загальна схема застосування інтегрального перетворення до задач математичної фізики така: за допомогою інтегрального перетворення шуканого розв'язку задачі вилучають диференціювання по одній змінній і для його зображення одержують простішу задачу. Знайшовши зображення задачі, за допомогою оберненого перетворення “відновлюють” шуканий розв'язок.

▼ **Приклад 1.** Знайти розв'язок змішаної задачі

$$a(x)u_{xx} + b(x)u_{tt} + c(x)u_x + d(x)u_t + g(x)u = 0 \quad (\text{III.5-1})$$

у півсмугі  $0 < x < \ell$ ,  $t > 0$  з граничними умовами

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=\ell} = \mu_2(t)$$

і початковими умовами

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x).$$

*Розв'язування.* Нехай параметр  $p$  і клас функцій, в якому шукають розв'язок  $u(x, t)$  цієї задачі, такі, що існують інтеграли

$$U(x, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(x, t) dt,$$

$$M_1(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(0, t) dt, \quad M_2(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(\ell, t) dt$$

і законні операції

$$U_x(x, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u_x(x, t) dt, \quad U_{xx}(x, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u_{xx}(x, t) dt,$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} u_t(x, t) dt &= e^{-pt} u(x, t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} u(x, t) dt = \\ &= pU(x, p) - u(x, 0), \\ \int_0^{\infty} e^{-pt} u_{tt}(x, t) dt &= p^2 U(x, p) - pu(x, 0) - u_t(x, 0). \end{aligned}$$

Якщо помножити рівняння і граничні умови задачі на  $e^{-pt}$  і проінтегрувати по  $t$  на проміжку  $(0, \infty)$ , тобто зробити перетворення Лапласа, то одержимо таку задачу:

$$\begin{aligned} a(x)U_{xx} + c(x)U_x + [g(x) + pd(x) + p^2b(x)]U &= \\ = pb(x)\varphi(x) + b(x)\psi(x) + d(x)\varphi(x), \end{aligned} \quad (\text{III.5-2})$$

$$U(0, p) = M_1(p), \quad U(\ell, p) = M_2(p).$$

Отже, розв'язок вихідної змішаної задачі (III.5-1) зводиться до знаходження розв'язку  $U(x, p)$  (залежного від параметра  $p$ ) крайової задачі для звичайного диференціального рівняння (III.5-2). Побудувавши розв'язок  $U(x, p)$  задачі (III.5-2), шуканий розв'язок задачі (III.5-1) можна одержати за допомогою зворотного перетворення Лапласа

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} U(x, p) e^{pt} dp, \quad s > s_0.$$



▼ **Приклад 2.** Розв'язати задачу Коші

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & \quad t > 0, \\ u(0, x) &= \varphi(x). \end{aligned}$$

*Розв'язування.* Запишемо інтегральне перетворення Фур'є розв'язку  $u(x, t)$  і початкової функції  $\varphi(x)$ :

$$\begin{aligned} U(\xi, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx, \\ \Phi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\xi x} dx. \end{aligned}$$

Для знаходження зображення  $U(\xi, t)$  одержуємо задачу Коші

$$U_t(\xi, t) + a^2 \xi^2 U(\xi, t) = 0, \quad U(\xi, 0) = \Phi(\xi),$$

розв'язок якої  $U(\xi, t) = \Phi(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}$ . За допомогою оберненого перетворення Фур'є знаходимо, що

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi.$$

Нехай  $v(x, t)$  є функція, перетворення Фур'є якої дорівнює  $e^{-a^2 \xi^2 t}$ . Тоді, за формулою (II.2-5), запишемо

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi * v = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) v(t, x - \xi) d\xi.$$

Обчислимо тепер  $v(x, t)$ . За формулою оберненого перетворення Фур'є маємо

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 a^2 t} e^{i\xi x} d\xi.$$

Далі:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 a^2 t} \xi e^{i\xi x} d\xi = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2a^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} d(e^{-\xi^2 a^2 t}) = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2a^2 t} \left[ e^{i\xi x} e^{-\xi^2 a^2 t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - ix \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 a^2 t} e^{i\xi x} d\xi \right] = -\frac{x}{2a^2 t} v. \end{aligned}$$

Звідси одержуємо, що  $v(t, x) = C(t) e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$ . З умови  $v(0, t) = \frac{1}{a\sqrt{2t}}$  випливає, що  $C(t) = \frac{1}{a\sqrt{2t}}$ . Отже,  $v(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$  і, підставивши  $v(x, t)$  в формулу для  $u(x, t)$ , знаходимо розв'язок вихідної задачі

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

▲

### Завдання.

Використавши інтегральне перетворення Фур'є, розв'язати задачі:

III.127.  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ,  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ .

III.128.  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$ ,  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ ,  $-\infty < x < \infty$ .

III.129.  $u_t = a^2 u_{xx}$ ,  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ .

III.130.  $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $-\infty < x < \infty$ .

III.131.  $u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy})$ ,  $u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$ ,  $-\infty < x, y < \infty$ .

III.132.  $u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t)$ ,  $u(x, y, 0) = 0$ ,  $-\infty < x, y < \infty$ .

III.133.  $u_t = a^2 u_{xx}$ ,  $u(0, t) = \mu(t)$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $0 < x < \infty$ .

III.134.  $u_t = a^2 u_{xx}$ ,  $u_x(0, t) = \nu(t)$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $0 < x < \infty$ .



$$\text{III.135. } u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, \quad u(x, 0) = A e^{-x^2/(4\kappa^2)}, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ 0 < t < \infty, \quad -\infty < x < \infty.$$

Використавши інтегральні перетворення Лапласа, розв'язати задачу:

$$\text{III.136. } u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0, t) = u_0, \quad u(x, 0) = 0, \quad x > 0, \quad t > 0.$$

$$\text{III.137. } u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_1, \quad x > 0, \quad t > 0.$$

$$\text{III.138. } u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0, t) = \varphi(t), \quad u(x, 0) = 0, \quad x > 0, \quad t > 0.$$

$$\text{III.139. } u_y = u_{xx} + a^2 u + f(x), \quad u(0, y) = u_x(0, y) = 0, \\ 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty.$$

$$\text{III.140. } u_y = u_{xx} + u + B \cos x, \quad u(0, y) = A e^{-3y}, \quad u_x(0, y) = 0, \\ 0 < y < \infty, \quad 0 < x < \infty.$$

$$\text{III.141. } u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0, t) = \delta(t), \quad u(\ell, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \\ 0 < x < \ell, \quad t > 0.$$

$$\text{III.142. } u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0, t) = \delta(t), \quad u(\infty, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \\ 0 < x < \infty, \quad t > 0.$$

$$\text{III.143. } u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = \sin x, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

$$\text{III.144. } u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{\ell}, \\ u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0.$$

### III.6. Метод функцій Гріна

Функція Гріна (функція впливу точкового джерела) є досить потужним засобом розв'язування крайових задач. Метод функцій Гріна полягає в тому, що спочатку знаходять деякий спеціальний розв'язок задачі того ж типу, а потім розв'язок вихідної задачі виражають через нього.

**Рівняння параболічного типу**

Застосуємо метод функцій Гріна до крайових задач для рівнянь параболічного типу. Розглянемо в області  $\bar{B} \equiv (M \in D, t > 0)$  крайову задачу

$$L[u] = \rho u_t,$$

$$\left( \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_S = 0, \quad (\text{III.6-1})$$

$$u(M, 0) = \varphi(M),$$

де  $\rho(M)$ ,  $\varphi(M)$  — задані функції,  $M$  — точка  $n$ -вимірного простору,  $\alpha = \alpha(M)$ ,  $\beta = \beta(M)$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ,

$$L[u] = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - q u, \quad p = p(M), \quad q = q(M),$$

$S$  — границя області  $D$ .

Неперервний розв'язок цієї задачі виражається через **функцію Гріна**

$$u(M, t) = \int_D G(M, P, t) \varphi(P) d\Omega_P, \quad (\text{III.6-2})$$

де  $G = G(M, P, t)$  — неперервний всюди в області  $\bar{B}$ , за винятком точки  $(P, 0)$ , розв'язок крайової задачі

$$L[G] = \rho G_t,$$

$$\left( \alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n} \right) \Big|_S = 0, \quad (\text{III.6-3})$$

$$G(M, P, 0) = \delta(M - P).$$

Якщо ж у задачі (III.6-1) рівняння неоднорідне,  $L[u] + f(M, t) = \rho u_t$ , то розв'язок задачі шукають у вигляді суми двох функцій  $u = v + w$ , кожна з яких є неперервним розв'язком відповідних задач:

$$L[v] = \rho v_t,$$

$$\left( \alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial n} \right) \Big|_S = 0, \quad (\text{III.6-4})$$

$$v(M, 0) = \varphi(M),$$

$$L[w] + f(M, t) = \rho w_t,$$

$$\left( \alpha w + \beta \frac{\partial w}{\partial n} \right) \Big|_S = 0, \quad (\text{III.6-5})$$

$$w(M, 0) = 0.$$

Розв'язок  $v(M, t)$  визначають за формулою (III.6-2):

$$v(M, t) = \int_D G(M, P, t) \varphi(P) d\Omega_P, \quad (\text{III.6-6})$$

а розв'язок  $w(M, t)$  записують так:

$$w(M, t) = \int_0^t \int_D G(M, P, t - \tau) \frac{f(P, \tau)}{\rho(P)} d\Omega_P d\tau. \quad (\text{III.6-7})$$

У випадку неоднорідної граничної умови

$$\left( \alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n} \right) \Big|_S = \Psi(M, t)$$

розв'язок шукають у вигляді суми двох функцій  $u = u_1 + u_2$ , де  $u_1$  — будь-яка функція, що задовольняє неоднорідну умову, для якої

визначені  $L[u_1]$  і  $u_{1t}$ . Тоді для  $u_2$  задача зводиться до задачі з однорідною граничною умовою (див. задачу (III.6-1)).

У випадку однорідної задачі Коші

$$\begin{aligned} L[u] &= \rho v_t, \\ u(M, 0) &= \varphi(M), \end{aligned} \quad (\text{III.6-8})$$

функцію Гріна будують як розв'язок однорідної задачі Коші

$$\begin{aligned} L[G] &= \rho G_t, \\ G(M, P, 0) &= \delta(M - P), \end{aligned} \quad (\text{III.6-9})$$

неперервний всюди в області  $\bar{B} = (M - \text{будь-яка точка простору}, t \geq 0)$ , крім точки  $(P, 0) \in \bar{B}$ , і

$$u(M, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(M, P, t) \varphi(P) d\Omega_P. \quad (\text{III.6-10})$$

Розв'язок неоднорідного рівняння

$$L[u] + f(M, t) = \rho u_t$$

шукають за формулами (III.6-6), (III.6-7), де інтегрування за координатами точки здійснюється по всьому простору.

**▼ Приклад 1.** Знайти функцію Гріна задачі Коші для рівняння теплопровідності  $a^2 u_{xx} = u_t$  на безмежній прямій.

*Розв'язування.* За означенням (III.6-9) шукана функція є розв'язком задачі Коші

$$a^2 G_{xx} = G_t, \quad (\text{III.6-11})$$

$$G(x, 0) = \delta(x) \quad (\text{III.6-12})$$

в області  $(-\infty < x < \infty, t \geq 0)$ . Застосувавши метод інтегрального перетворення Фур'є (див. розділ II.2.) та покладаючи

$$g(\xi, t) = \mathcal{F}[G] = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, t) e^{-i\xi x} dx,$$

одержимо

$$g_t + (a\xi)^2 g = 0, \quad (\text{III.6-13})$$

$$g(\xi, 0) = 1, \quad (\text{III.6-14})$$

де враховано, що

$$\mathcal{F}[G_{xx}] = (-i\xi)^2 \mathcal{F}[G] = (-i\xi)^2 g(\xi, t),$$

$$\mathcal{F}[G_t] = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}[G] = g_t(\xi, t).$$

Розв'язком задачі (III.6-13)–(III.6-14) є функція

$$g(\xi, t) = e^{-(a\xi)^2 t}.$$

Зробивши обернене перетворення Фур'є, знаходимо  $G(x, t)$ :

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t \kappa^2} d\kappa = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}, \quad (\text{III.6-15}) \\ &\left( \kappa = \xi - \frac{ix}{2a^2 t}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t \kappa^2} d\kappa = \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} \right). \end{aligned}$$

Оскільки рівняння теплопровідності інваріантне відносно перетворення зсуву, функція Гріна з особливістю в точці  $x = \xi$  буде дорівнювати

$$G(x - \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (\text{III.6-16})$$



Для півпрямой ( $0 \leq x < \infty$ ) функцію Гріна крайових задач

$$u_t^{(1)} = a^2 u_{xx}^{(1)}, \quad u^{(1)}(x, 0) = \varphi^{(1)}(x), \quad u^{(1)}(0, t) = 0, \quad (\text{III.6-17})$$

$$u_t^{(2)} = a^2 u_{xx}^{(2)}, \quad u^{(2)}(x, 0) = \varphi^{(2)}(x), \quad u_x^{(2)}(0, t) = 0 \quad (\text{III.6-18})$$

шукають як розв'язки задач

$$\begin{aligned} G_t^{(1)} &= a^2 G_{xx}^{(1)}, & G^{(1)}(x, \xi, 0) &= \delta(x - \xi) - \delta(x + \xi), \\ & & G^{(1)}(0, \xi, t) &= 0, \quad \xi > 0 \\ G_t^{(2)} &= a^2 G_{xx}^{(2)}, & G^{(2)}(x, \xi, 0) &= \delta(x - \xi) + \delta(x + \xi), \\ & & G^{(2)}(0, \xi, t) &= 0. \end{aligned}$$

Отже,

$$G^{(1)}(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right], \quad (\text{III.6-19})$$

$$G^{(2)}(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right], \quad (\text{III.6-20})$$

i

$$u^{(1)}(x, t) = \int_0^\infty G^{(1)}(x, \xi, t) \varphi^{(1)}(\xi) d\xi, \quad (\text{III.6-21})$$

$$u^{(2)}(x, t) = \int_0^\infty G^{(2)}(x, \xi, t) \varphi^{(2)}(\xi) d\xi. \quad (\text{III.6-22})$$

Якщо рівняння неоднорідне,  $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$ , то розв'язки відповідних крайових задач (III.6-17), (III.6-18) визначають за формулою

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^\infty G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_0^\infty f(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi. \end{aligned} \quad (\text{III.6-23})$$

▼ **Приклад 2.** Побудувати функцію Гріна для стрижня довжиною  $\ell$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його кінці підтримуються при нульовій температурі.

*Розв'язання.* Продовжимо стрижень необмежено в обидва боки ( $-\infty < x < \infty$ ) і будемо вважати його поверхню теплоізолюваною. Функція Гріна для такого стрижня буде (див. попередній приклад):

$$G(x - \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}},$$

вона не задовольняє граничні умови, оскільки не дорівнює нулеві при  $x = 0$  і  $x = \ell$ . Уведемо точки  $-\xi, \pm\xi \pm 2n\ell, \quad n = 1, 2, 3, \dots$ , що отримуються з точки  $\xi$  послідовними симетричними відображеннями відносно  $x = 0$  і  $x = \ell$ . Якщо тепер функцію Гріна записати у вигляді

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ e^{-\frac{(x-\xi+2n\ell)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2n\ell)^2}{4a^2t}} \right],$$

то ця функція буде задовольняти граничні умови.



▼ **Приклад 3.** Розв'язати рівняння теплопровідності на півпрямій:

$$\begin{aligned} a^2 u_{xx} &= u_t, & 0 < x < \infty, & \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, & t > 0, & \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty. \end{aligned} \quad (\text{III.6-24})$$

*Розв'язування.* Продовжимо  $\varphi(x)$  непарно на від'ємну піввісь  $-\infty < x < 0$ , тобто введемо функцію

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases} \quad (\text{III.6-25})$$

і розглянемо задачу Коші

$$a^2 U_{xx} = U_t, \quad U(x, 0) = \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (\text{III.6-26})$$

Функція Гріна цієї задачі відома (формула (III.6-16)), тоді за формулою (III.6-10) одержимо

$$U(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \Phi(\xi) d\xi \quad (\text{III.6-27})$$

і

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < \infty.$$

Далі, підставимо в (III.6-27)  $\Phi(\xi)$  з (III.6-25):

$$U(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi) d\xi - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi) d\xi.$$

Звідси знаходимо, що  $U(0, t) = 0$ , тобто  $U(x, t) = u(x, t)$  при  $x \geq 0$  і

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right\}.$$

▲

### Завдання.

III.145. Розв'язати задачу Коші

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} C_1 = \text{const}, & x < 0 \\ C_2 = \text{const}, & x \geq 0. \end{cases}$$

III.146. Розв'язати задачу Коші

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = A e^{-x^2}.$$

III.147. Побудувати функцію впливу миттєвого сферичного джерела тепла радіуса  $r_0$  (функцію Гріна).



III.148. За допомогою функції Гріна із задачі III.147 розв'язати крайову задачу

$$\begin{aligned} a^2 \left( u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right) + f(r, t) &= u_t, \quad 0 < r, t < \infty, \\ u(r_0) &= \varphi(r), \quad |u| < \infty, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

III.149. Побудувати функцію Гріна на безмежній прямій для рівняння

$$u_t = a^2 u_{xx} - b u, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty.$$

III.150. Розв'язати крайову задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} - b u, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

III.151. Розв'язати крайову задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

III.152. Розв'язати крайову задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} - b u + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

III.153. Розв'язати задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 0, & -\infty < x < -\ell, \\ U_0 = \text{const} \neq 0, & -\ell \leq x \leq \ell, \\ 0, & \ell < x < \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

III.154. Розв'язати задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & \quad 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ A e^{-\alpha x}, & 0 \leq x < \infty. \end{cases} \\ A &= \text{const}, & \alpha &= \text{const} > 0. \end{aligned}$$

III.155. Розв'язати крайову задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} - b u, & -\infty < x < \infty, & \quad 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 0, & -\infty < x < -\ell, \\ U_0 = \text{const} \neq 0, & -\ell \leq x \leq \ell, \\ 0, & \ell < x < \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

III.156. Розв'язати крайову задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, & 0 < x, t < \infty, \\ u(0, t) &= 0, & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= U_0 = \text{const} \neq 0, & 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

III.157. Розв'язати крайову задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, & 0 < x, t < \infty, \\ u(0, t) &= U_0 = \text{const}, & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= 0, & 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

III.158. Розв'язати крайову задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, & 0 < x, t < \infty, \\ u(0, t) - b u(0, t) &= 0, & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= U_0 = \text{const}, & 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

III.159. Розв'язати крайову задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, & 0 < x, t < \infty, \\ u_x(0, t) &= 0, & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= \Psi(x) = \begin{cases} U_0 = \text{const}, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

III.160. Розв'язати крайову задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, & 0 < x, t < \infty, \\ -u_x(0, t) &= q = \text{const}, & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) &= 0, & 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

III.161. Розв'язати крайову задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < t < \infty, & \quad v_0 t < x < \infty, \\ u(x, 0) &= 0, & 0 < x < \infty, \\ u(v_0 t, t) &= 0, & 0 < t < \infty, & \quad v_0 = \text{const}. \end{aligned}$$

III.162. Розв'язати крайову задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, & 0 < t < \infty, & \quad v_0 t < x < \infty, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & 0 < x < \infty, \\ u(v_0 t, t) &= 0, & 0 < t < \infty, & \quad v_0 = \text{const}. \end{aligned}$$

III.163. Розв'язати крайову задачу:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < \infty, & \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, & t > 0, & \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

III.164. Розв'язати крайову задачу:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < \infty, & \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, & t > 0, & \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

III.165. Розв'язати крайову задачу:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} - b u + f(x, t), & 0 < x < \infty, & \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, & t > 0, & \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

III.166. Розв'язати крайову задачу:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} - b u + f(x, t), & 0 < x < \infty, & \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, & t > 0, & \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

III.167. Розв'язати крайову задачу:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} - b u + f(x, t), & 0 < x < \infty, & t > 0, \\ u(0, t) &= 0, & t > 0, & u(x, 0) = \varphi(x), & 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

III.168. Розв'язати крайову задачу:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} - b u + f(x, t), & 0 < x < \infty, & t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, & t > 0, & u(x, 0) = \varphi(x), & 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

III.169. Побудувати функцію Гріна для стрижня довжиною  $\ell$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його кінці також теплоізолювані.

III.170. Побудувати функцію Гріна для стрижня довжиною  $\ell$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо один його кінець ( $x = 0$ ) теплоізолюваний, а другий ( $x = \ell$ ) підтримується при нульовій температурі.

III.171. Довести, що функція Гріна із задачі III.170 збігається з виразом

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4\ell^2} t} \cos \frac{(2n+1)\pi \xi}{2\ell} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell},$$

яку дає метод відокремлення змінних.

III.172. Отримати формули (III.6-19), (III.6-20).

### Рівняння еліптичного типу

Нехай маємо крайову задачу для рівнянь еліптичного типу

$$L[u] = f(M), \quad (\text{III.6-28})$$

$$\left( \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_S = g(M), \quad (\text{III.6-29})$$

де, аналогічно до випадку рівнянь параболічного типу,  $f(M)$ ,  $g(M)$  — задані функції,  $M$  — точка  $n$ -вимірного простору,  $\alpha = \alpha(M)$ ,  $\beta = \beta(M)$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ,

$$L[u] = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - q u, \quad p = p(M), \quad q = q(M),$$

$S$  — границя області  $D$ .

Знайдемо розв'язок задачі зі спеціальними значеннями функцій  $f, g$ . А саме, знайдемо розв'язок  $G(M, P)$  (**функцію Гріна**) задачі

$$L[G] = -\delta(M - P), \quad (\text{III.6-30})$$

$$\left( \alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n} \right) \Big|_S = 0, \quad (\text{III.6-31})$$

(точка  $P = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $\delta(M - P) = \delta(x_1 - y_1) \dots \delta(x_n - y_n)$  —  $n$ -вимірна функція Дірака), неперервний разом з першими частинними похідними всюди у замкнутій області  $D$ ,  $G(M, P) \in C^1(\bar{D})$ , крім точки  $P$ , в якій  $G(M, P)$  має особливість.

Якщо функцію Гріна знайдено, то розв'язки задачі (III.6-28)–(III.6-29) з різними граничними умовами знаходять за формулами:

- першої крайової задачі ( $\alpha \equiv 1, \beta \equiv 0$ )

$$G \Big|_S = 0, \quad u \Big|_S = g(M),$$

$$u(M) = -\frac{1}{S_n} \int_S p g(P) \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma_P - \int_D G(M, P) f(P) d\Omega_P, \quad (\text{III.6-32})$$

$n$  — зовнішня нормаль до  $S$  в точці  $P$ ,  $S_n$  — площа поверхні одиничної сфери.

- другої крайової задачі ( $\alpha \equiv 0, \beta \equiv 1$ )

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = g(M),$$

$$u(M) = \frac{1}{S_n} \int_S p g(P) G(M, P) d\sigma_p - \int_D G(M, P) f(P) d\Omega_p, \quad (\text{III.6-33})$$

- третьої крайової задачі ( $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ )

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_S = -\frac{\alpha}{\beta} G \Big|_S, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = -\frac{\alpha}{\beta} u \Big|_S + \frac{1}{\beta} g \Big|_S,$$

$$u(M) = \frac{1}{S_n} \int_S p \frac{g(M)}{\beta} G(M, P) d\sigma_p - \int_D G(M, P) f(P) d\Omega_p. \quad (\text{III.6-34})$$

Найпростішими рівняннями еліптичного типу є рівняння Лапласа

$$L[u] = \Delta u = 0, \quad \Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2},$$

і рівняння Пуассона

$$\Delta u = f(M).$$

Для цих рівнянь першу крайову задачу називають **задачею Діріхле**, другу крайову задачу — **задачею Ноймана**, третю — **задачею Пуанкаре**.

У випадку задачі Діріхле ( $\alpha \equiv 1, \beta \equiv 0$ ) для рівняння Лапласа  $\Delta u = 0$  функцію Гріна можна записати так:

$$G(M, P) = \Psi_n(M, P) + v(M, P), \quad (\text{III.6-35})$$

де

$$\Psi_n(M, P) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MP}} & , \quad n = 2, \\ \frac{1}{S_n(n-2) r_{MP}^{n-2}} & , \quad n \geq 3, \end{cases}$$

$$r_{MP} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2},$$

$v(M, P) \in C^1(\bar{D})$  — гармонічна функція в замкнутій області  $D$ , тобто  $v(M, P)$  — це розв'язок задачі Діріхле

$$\Delta v = 0, \quad v|_S = -\Psi_n|_S. \quad (\text{III.6-36})$$

Дамо фізичну інтерпретацію функції Гріна для оператора Лапласа у тривимірному випадку (формула (III.6-35)). Нехай гранична поверхня  $S$  області  $D$  є заземленим провідником (потенціал на ній дорівнює нулеві). Помістимо в точці  $P \in D$  елементарний заряд. Цей заряд індукує деякий розподіл зарядів на поверхні  $S$ . Потенціал електростатичного поля в області  $D$  (функція Гріна) буде дорівнювати сумі  $\Psi_3(M, P)$  — потенціалу поля, створеного точковим зарядом, та  $v(M, P)$  — потенціалу поля, створеного індукованими зарядами. Для деяких простих областей (півплощина, куля, круг та їх частин) індуковане поле можна знайти за допомогою **методу відображень**. Суть цього методу полягає в тому, що поза областю  $D$  за певним законом уміщують заряди. Ці заряди називають **зображеннями** вихідного заряду відносно даної границі  $S$ . Зокрема, з (III.6-36) випливає, що потенціал індукованих зарядів на  $S$  збігається за абсолютним значенням з потенціалом  $\Psi_3(M, P)$  на  $S$ , але має протилежний знак. У випадку плоскої границі зображення є дзеркальним відображенням оригіналу в площині або площинах, якщо область обмежена декількома площинами. У випадку сферичних границь для побудови зображень застосовують перетворення обернених радіусів (інверсію).

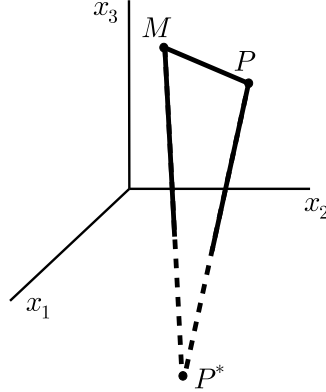
### Метод відображень

▼ **Приклад 1.** Побудувати функцію Гріна і записати розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в півпросторі  $x_3 \geq 0$ .

*Розв'язування.* Помістимо в точці  $P(y_1, y_2, y_3)$  елементарний заряд  $\frac{1}{4\pi}$ . Він створює електростатичне поле з потенціалом

$$\Psi_3(x, y) = \frac{1}{4\pi r_{MP}},$$

$$r_{MP} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$



Якщо в точці  $P^*(y_1, y_2, -y_3)$ , симетричній до точки  $P$  відносно площини  $x_3 = 0$ , вмістити заряд такої ж величини, але протилежний за знаком до заряду в точці  $P$ , то він створить поле з потенціалом

$$v(x, y) = -\frac{1}{4\pi r_{MP^*}},$$

$$r_{MP^*} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2}.$$

$v(x, y)$  як функція точки  $M(x_1, x_2, x_3)$  є гармонічною функцією. На границі області (площині  $x_3 = 0$ ) функція  $v(x, y)$  має значення, рівне за величиною і протилежне за знаком до  $\Psi_3(x, y)$ , див. (III.6-36). За формулою (III.6-35) функція Гріна дорівнює

$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{r_{MP^*}} \right).$$

Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (x_3 > 0), \quad u \Big|_{x_3=0} = g(x_1, x_2)$$

отримаємо, якщо у формулу (III.6-32) підставимо похідну по нормалі:

$$\frac{\partial G}{\partial y_3} \Big|_{y_3=0} = \frac{2x_3}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2]^{3/2}}.$$

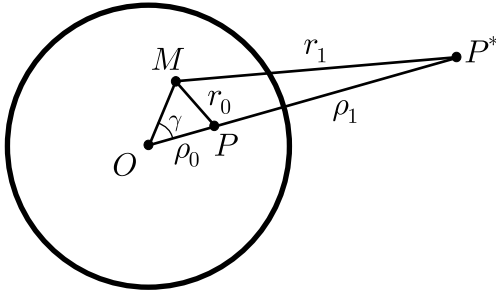
Отже,

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x_3}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2]^{3/2}} g(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

▲



▼ **Приклад 2.** Знайти потенціал електростатичного поля, створеного точковим зарядом  $e$  всередині заземленої кулі, та розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа.



*Розв'язування.* Нехай  $a$  — радіус кулі з центром у точці  $O$ ,  $M$  — точка спостереження,  $r_0 = r_{MP}$ ,  $\rho_0 = OP$ ,  $r_1 = MP^*$ ,  $P^*$  — точка, що лежить на продовженні  $OP$  й отримується з  $P$  за допомогою обернених радіус-векторів, у точці  $P$  міститься електричний заряд  $e$ .

За формулою (III.6-35) функція Гріна — шуканий потенціал електростатичного поля в кулі — має вигляд:

$$G(M, P) = \frac{e}{r_0} + v(M, P),$$

де  $v(M, P)$  — потенціал індукованого поля,

$$\Delta v = 0.$$

Щоб знайти  $v(M, P)$ , використаємо перетворення обернених радіусів:

$$OP \cdot OP^* = a^2.$$

Вмістимо в точці  $P^*$  зображення заряду в точці  $P$ , тоді

$$v = \frac{e_1}{r_1},$$

де  $e_1$  — величина заряду в точці  $P^*$ . Умова  $G|_S = 0$  дає

$$e_1 = -\frac{r_1}{r_0} e.$$

Справді, розглянемо трикутники  $OMP$  і  $OMP^*$ . Це подібні трикутники, тому що вони мають спільний кут  $\angle MOP$  і пропорційні сторони  $\frac{OP}{OM} = \frac{OM}{OP^*} = \frac{MP}{MP^*}$  або  $\frac{\rho_0}{a} = \frac{a}{\rho_1} = \frac{r_0}{r_1}$ .

Отже, на поверхні  $S$

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{a}{\rho_0},$$

тому функція Гріна  $G(M, P) = e \left( \frac{1}{r_0} - \frac{a}{\rho_0 r_1} \right)$  дорівнює нулю.

Тепер знайдемо розв'язки задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad u|_S = g(M).$$

Для цього обчислимо  $\frac{\partial G}{\partial n}$  на поверхні кулі:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial R} \right|_{R=a} = e \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{1}{r_0} - \frac{a}{\rho_0 r_1} \right]_{R=a},$$

де  $R$  — радіус-вектор будь-якої точки  $M$  кулі. Із трикутника  $OMP$  випливає, що  $r_0^2 = R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma$ , тому

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{r_0} \right) = \frac{\partial}{\partial R} (R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{-1/2} = -\frac{R - \rho_0 \cos \gamma}{r_0^3}.$$

Покладаючи  $R = a$ , отримаємо

$$\left. \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{r_0} \right) \right|_{R=a} = -\frac{a - \rho_0 \cos \gamma}{(a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}}.$$

Оскільки  $r_1^2 = R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1 \cos \gamma$  (з  $\triangle OMP^*$ ) і  $\rho_0\rho_1 = a^2$ , знайдемо

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{r_1} \right) \right|_{R=a} &= \left. \frac{\partial}{\partial R} (R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1 \cos \gamma)^{-1/2} \right|_{R=a} = \\ &= -\frac{a - \frac{a^2}{\rho_0} \cos \gamma}{\left( a^2 + \frac{a^4}{\rho_0^2} - 2R\frac{a^2}{\rho_0} \cos \gamma \right)^{3/2}} \end{aligned}$$

або після спрощень

$$\left. \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{r_1} \right) \right|_{R=a} = -\frac{\rho_0^2}{a^2} \frac{\rho_0 - a \cos \gamma}{(a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}}$$

i

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_S = -e \frac{a^2 - \rho_0^2}{a^2} (a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos \gamma)^{-3/2}.$$

Підставляючи цей вираз в (III.6-32), запишемо розв'язок задачі Діріхле

$$u(M) = \frac{e}{4\pi a} \int \frac{a^2 - \rho_0^2}{(a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} g(P) dS_P.$$

У цьому розв'язку зручніше перейти до сферичних координат  $dS = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ , тоді

$$u(M) = \frac{ae}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(a^2 - \rho_0^2) g(\theta, \varphi)}{(a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (\text{III.6-37})$$

де  $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$ ,  $P = (\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ . Це інтеграл Пуассона для кулі.

Для круга інтеграл Пуассона набуває вигляду

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho_0^2)}{(a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0))^{3/2}} g(\varphi) d\varphi. \quad (\text{III.6-38})$$



**Завдання.**

- III.173. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для прямого кута на площині, обмеженого променями  $L_1$  і  $L_2$ .
- III.174. Розв'язати задачу Діріхле  $\Delta u = 0$ ,  $u|_S = g(M)$  для круга.
- III.175. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для кругового сектора  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}$ .
- III.176. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для плоского шару  $0 \leq z \leq h$ .
- III.177. Знайти функцію Гріна задачі Діріхле для півкулі, що лежить на площині  $z = 0$  (в області  $z \geq 0$ ).

**Метод конформного відображення**

Поряд з методом відображень можна будувати функцію Гріна у плоских областях за допомогою конформного відображення цих областей на одиничний круг.

Нехай  $z_0 = x_0 + iy_0$  — фіксована точка,  $z = x + iy$  — довільна точка області  $D$ .

**Теорема.** Якщо функція  $w = f(z_0, z)$  здійснює конформне відображення даної області  $D$  площини  $z$  на одиничний круг  $|w| < 1$  так, що точка  $z_0 \in D$  переходить у центр  $w = 0$  цього круга, то функція

$$G(M_0, M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|f(z_0, z)|} \quad (\text{III.6-39})$$

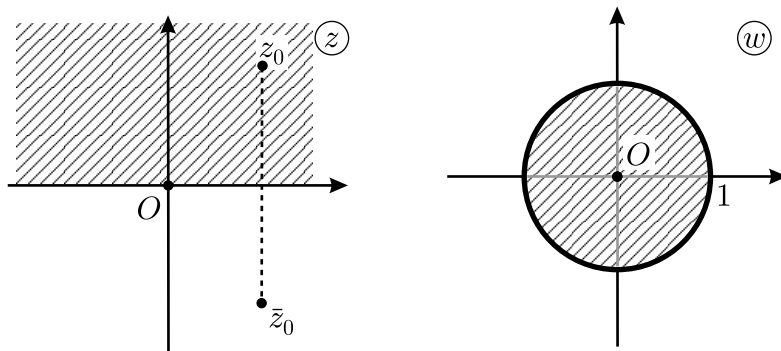
є функцією Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа в області  $D$ .

▼ **Приклад 3.** Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа у півплощині  $y > 0$ .

*Розв'язування.* Знайдемо дробово-лінійне перетворення

$$w = \lambda \frac{\alpha + z}{\beta + z},$$

що переводить верхню півплощину  $\text{Im } z > 0$  в круг  $|w| < 1$  так, що точка  $z_0 = x_0 + iy_0 \rightarrow w = 0$ .



Якщо точка  $z_0 \rightarrow 0$ , то за властивістю дробово-лінійного перетворення  $\bar{z}_0 \rightarrow \infty$ . Тому  $\alpha = -z_0$ ,  $\beta = -\bar{z}_0$  і

$$w = \lambda \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

З умови, що вісь  $z = x$  повинна перейти в коло  $w=1$ , знаходимо

$$|w| = |\lambda| \left| \frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0} \right| = |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = e^{i\varphi}.$$

Отже, шукане дробово-лінійне перетворення

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0},$$

тоді функцію Гріна для півплощини  $\text{Im } z > 0$  за формулою (III.6-39) запишемо так

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0} \right| = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z - z_0|} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z - \bar{z}_0|}.$$



▼ **Приклад 4.** Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа у смугі  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 < y < \pi$ .

*Розв'язування.* Функцію, що здійснює конформне відображення даної смуги площини  $z$  на круг  $|w| < 1$ , при якому точка  $z_0$  переходить в центр круга  $w = 0$ , запишемо так

$$w = \frac{e^z - e^{z_0}}{e^z - e^{\bar{z}_0}}.$$

Щоб одержати функцію Гріна, перетворимо

$$\begin{aligned} |e^z - e^{z_0}| &= \left[ (e^x \cos y - e^{x_0} \cos y_0)^2 - (e^x \sin y - e^{x_0} \sin y_0)^2 \right]^{1/2} = \\ &= e^{\frac{x+x_0}{2}} \sqrt{2} [\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y - y_0)]^{1/2}, \end{aligned}$$

$$|e^z - e^{\bar{z}_0}| = e^{\frac{x+x_0}{2}} \sqrt{2} [\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y + y_0)]^{1/2},$$

і підставимо у формулу (III.6-39):

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|w|} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y + y_0)}{\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y - y_0)}.$$

▲

### Завдання.

Методом конформного відображення побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для областей:

III.178. Чверть площини  $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ .

III.179. Півкруг  $|z| < R$ ,  $\operatorname{Im} z > 0$ .

III.180. Чверть круга  $|z| < R$ ,  $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ .

III.181. Півсмуга  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ ,  $\operatorname{Re} z > 0$ .

### Метод потенціалів

Ідея цього методу полягає в тому, що розв'язки крайових задач шукають у вигляді певних інтегралів — потенціалів з невідомими густинами розподілів мас, зарядів тощо. Внаслідок цього крайові задачі зводяться до інтегральних рівнянь.

Нехай в області  $D$  тривимірного простору розподілені заряди з густиною  $\rho(P)$ ,  $P \in D$ , тоді **об'ємний потенціал**

$$u(M) = \int_D \frac{\rho(P)}{r_{MP}} d\Omega_P \quad (\text{III.6-40})$$

визначає потенціал поля, створеного цими зарядами. Якщо густина  $\rho(M) \in C^1(D)$ , то об'ємний потенціал задовольняє рівняння Пуассона

$$\Delta u(M) = -4\pi\rho(M), \quad \text{коли } M \in D \quad (\text{III.6-41})$$

і рівняння Лапласа

$$\Delta u(M) = 0, \quad \text{коли } M \notin D. \quad (\text{III.6-42})$$

Отже,

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_D \frac{f(P)}{r_{MP}} d\Omega_P \quad (\text{III.6-43})$$

— це частковий розв'язок рівняння Пуассона

$$\Delta u(M) = f(M), \quad \text{коли } M \in D. \quad (\text{III.6-44})$$

У **двовимірному випадку** користуються поняттям **логарифмічного (або плоского) потенціалу**, який визначають за формулою

$$u(M) = \int_D \rho(P) \ln \frac{1}{r_{MP}} d\Omega_P, \quad (\text{III.6-45})$$

і аналогом формули (III.6-41) є

$$\Delta u(M) = -2\pi\rho(M). \quad (\text{III.6-46})$$

Якщо заряди неперервно розподілені на поверхні  $S$  з густиною  $\sigma(P)$ , то **потенціал простого шару**

$$v(M) = \int_S \frac{\sigma(P)}{r_{MP}} dS_P \quad (\text{III.6-47})$$

визначає потенціал, створений цими поверхневими зарядами.

У **двовимірному випадку**

$$v(M) = \int_S \sigma(P) \ln \frac{1}{r_{MP}} dS_P. \quad (\text{III.6-48})$$

Потенціал простого шару задовольняє рівняння Лапласа  $\Delta v(M) = 0$ , коли  $M \notin S$ .

Якщо на двобічній поверхні  $S$  розподілені диполі з густиною моментів  $\tau(P)$  так, що осі їх у кожній точці збігаються з додатним напрямком нормалі, то потенціал поля, створеного цими диполями, дорівнює

$$w(M) = \int_S \tau(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{MP}} \right) dS_P. \quad (\text{III.6-49})$$

Цей потенціал називають **потенціалом подвійного шару**. У точках  $M \notin S$   $w$  — гармонічна функція,  $\Delta w = 0$ . На поверхні  $S$  потенціал подвійного шару має розрив

$$w_{\text{in}}(M_0) - w_{\text{ex}}(M_0) = 4\pi\tau(M_0), \quad M_0 \in S, \quad (\text{III.6-50})$$

$$w_{\text{in}}(M_0) = w(M_0) + 2\pi\tau(M_0), \quad (\text{III.6-51})$$

$$w_{\text{ex}}(M_0) = w(M_0) - 2\pi\tau(M_0), \quad (\text{III.6-52})$$

де  $w_{\text{in}}(M_0)$ ,  $w_{\text{ex}}(M_0)$  — граничні значення функції  $w(M)$ , коли точка  $M$  прямує до  $M_0$  відповідно з внутрішньої й зовнішньої сторони замкненої поверхні  $S$ .

У **двовимірному випадку** потенціал подвійного шару визначають за формулою

$$w(M) = \int_C \tau(P) \frac{\partial}{\partial n} \left[ \ln \frac{1}{r_{MP}} \right] dL_P, \quad (\text{III.6-53})$$



$C$  — контур, де розташовані диполі. Аналогом формул (III.6-50)–(III.6-52) є такі:

$$w_{\text{in}}(M_0) - w_{\text{ex}}(M_0) = 2\pi\tau(M_0), \quad M_0 \in C, \quad (\text{III.6-54})$$

$$w_{\text{in}}(M_0) = w(M_0) + \pi\tau(M_0), \quad (\text{III.6-55})$$

$$w_{\text{ex}}(M_0) = w(M_0) - \pi\tau(M_0). \quad (\text{III.6-56})$$

▼ **Приклад 1.** Знайти частковий розв'язок рівняння Пуассона  $\Delta u = \rho_0$ ,  $\rho_0 = \text{const}$  всередині й зовні кулі радіуса  $R$ .

*Розв'язування.* Із формули (III.6-43) випливає, що частковим розв'язком є об'ємний потенціал  $u(M) = u(r)$ , що залежить тільки від віддалі  $r$  точки  $M$  до центра кулі. Зовні кулі  $\Delta u = 0$ , (див. (III.6-42)), тому  $u = \frac{A}{r} + B$ . З обмеженості  $u(r)$  ( $u(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ ) знаходимо, що  $B = 0$ . Всередині кулі  $\Delta u = \rho_0$ , або  $\frac{d}{dr}(r^2 u') = \rho_0 r^2$ . Отже,  $u(r) = \frac{1}{6} r^2 \rho_0 - \frac{D}{r} + C$  для  $r \leq R$ . Оскільки об'ємний потенціал всередині кулі скінченний, то  $D = 0$ . З умови неперервності потенціалу і його похідних першого порядку одержуємо

$$\frac{1}{6} R^2 \rho_0 + C = \frac{a}{R}, \quad \frac{1}{3} R \rho_0 = -\frac{A}{R^2},$$

звідси  $A = -\frac{1}{3} R^3 \rho_0$ ,  $C = -\frac{R^2}{2} \rho_0$  і тоді

$$u(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{2} \left( \frac{r^2}{3} - R^2 \right), & r \leq R, \\ -\frac{\rho_0}{3} \frac{R^3}{r}, & r \geq R. \end{cases}$$



▼ **Приклад 2.** Знайти гармонічну функцію в крузі радіуса  $R$ , обмеженого колом  $C$ :

$$\Delta u = 0, \quad u|_C = f(s), \quad s — довжина дуги кола.$$

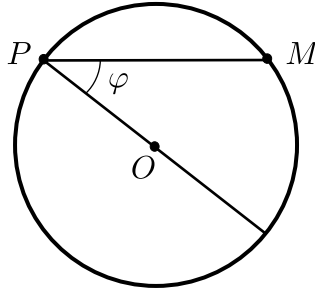
*Розв'язування.* Розв'язок задачі шукаємо у вигляді потенціалу подвійного шару

$$u(s) = w(M) = \int_C \tau(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} d\xi = \int_C \tau(\xi) \frac{\cos \varphi}{r} d\xi,$$

оскільки в крузі  $r < R$  і для довільної густини  $\tau(\xi)$   $\Delta w = 0$ . Тепер потрібно знайти таку густину  $\tau(\xi)$ , яка б задовольняла граничну умову  $u|_C = f(s)$ . Для цього треба, щоб на колі  $C$  виконувалось співвідношення  $w_{\text{in}} = f$ . Використовуючи формулу (III.6-55), одержимо інтегральне рівняння для знаходження  $\tau(s)$

$$\int_C \frac{1}{2R} \tau(\xi) d\xi + \pi \tau(s) = f(s), \quad (\text{III.6-57})$$

де враховано, що  $\frac{\cos \varphi}{r_{MP}} = \frac{1}{2R}$  у точках  $M$  кола (див. рис.)



Нехай  $\tau(s) = \frac{1}{\pi} f(s) + A$  — розв'язок цього рівняння, де  $A$  — невідома стала. Підставимо його в (III.6-57), щоб знайти  $A$ :

$$\int_C \frac{1}{2R} \left[ \frac{1}{\pi} f(\xi) + A \right] d\xi + f(s) + \pi A = f(s),$$

звідки

$$\frac{1}{2\pi R} \int_C f(\xi) d\xi + 2\pi A = 0 \quad \text{і} \quad A = -\frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(\xi) d\xi.$$

Отже, шукана густина подвійного шару

$$\tau(s) = \frac{1}{\pi} f(s) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(\xi) d\xi.$$

Підставимо знайдене значення  $\tau(s)$  у потенціал подвійного шару й отримаємо розв'язок задачі Діріхле для круга

$$\begin{aligned} u(M) &= \int_C \tau(\xi) \frac{\cos \varphi}{r} d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_C \frac{f(\xi) \cos \varphi}{r} d\xi - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(\xi') d\xi' \int_C \frac{\cos \varphi}{r} d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_C \frac{\cos \varphi}{r} f(\xi) d\xi - \frac{1}{2\pi R} \int_C f(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_C \left( \frac{\cos \varphi}{r} - \frac{1}{2R} \right) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

▲

### Завдання.

- III.182. Знайти потенціал простого шару, розподіленого на сфері зі сталою густиною  $\rho_0$ .
- III.183. Знайти логарифмічний потенціал круга радіуса  $R$  зі сталою густиною зарядів  $\rho_0$ .
- III.184. Знайти логарифмічний потенціал простого шару відрізка  $0 \leq x \leq \ell$  зі сталою густиною зарядів  $\rho_0$ .

III.185. Знайти логарифмічний потенціал подвійного шару відрізка  $0 \leq x \leq \ell$  зі сталою густиною моментів  $\tau_0$ .

III.186. Розв'язати задачу Діріхле у півплощині за допомогою потенціалу подвійного шару.

III.187. Знайти густину  $\rho$  мас, розподілених по області  $D$ , якщо відомо, що об'ємний потенціал цих мас в  $D$  дорівнює  $u = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 1$ .

III.188. За умов задачі III.187 знайти масу  $m$ , що наповнює об'єм кулі  $x^2 + y^2 + z^2 < r^2$  в  $D$ .

III.189. Потенціал  $u(x, y)$  мас, розподілених по колу  $r^2 = x^2 + y^2 < 1$ , всередині цього кола задається формулою

$$u(x, y) = \frac{\pi x}{4}(3 - r^2).$$

Знайти густину мас  $\rho$ .

III.190. Потенціал простого шару мас, розподілених по колу  $x^2 + y^2 = 1$ , зовні замкненого кола  $x^2 + y^2 \leq 1$  дається формулою

$$u(x, y) = \frac{x}{r^2} \left( 1 + \frac{2y}{r^2} \right), \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Знайти густину мас  $\mu$ .

III.191. Знайти потенціал подвійного шару мас, розподілених по колу  $x^2 + y^2 = 1$  з густиною  $\mu = 1$ .

## IV. Додаткові розділи

### IV.1. Спеціальні функції

Розв'язуючи математичні задачі, часто доводиться мати справу з обчисленнями, результати яких не вдається виразити через так звані *елементарні функції* (тригонометричні, гіперболічні, логарифм, експонента та інші — вони описані в розділі I.3.).

Такі результати, пов'язані з обчисленнями інтегралів чи розв'язуванням диференціальних рівнянь, подають через *спеціальні функції*. Деякі з них — ті, що найчастіше трапляються у фізичних задачах, — перелічені нижче. Детально властивості цих функцій можна знайти у спеціалізованих довідниках, тому спеціально на цьому зупинятися тут не будемо.

*Функція (інтеграл) помилок*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (\text{IV.1-1})$$

*Дзета-функція Рімана*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}. \quad (\text{IV.1-2})$$

**Інтегральні функції***Інтегральний синус*

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt. \quad (\text{IV.1-3})$$

*Інтегральний косинус*

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt. \quad (\text{IV.1-4})$$

*Інтегральні показникові функції*

$$\text{Ei}(x) = -\text{v. p.} \int_{-x}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad (\text{IV.1-5})$$

$$\text{E}_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n} dt. \quad (\text{IV.1-6})$$

*Інтегральний логарифм*

$$\text{li}(x) = \text{v. p.} \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt \quad (\text{IV.1-7})$$

**Гамма-функція і функції, пов'язані з нею***Гамма-функція*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (\text{IV.1-8})$$

Ця функція пов'язана з факторіалом:  $n! = \Gamma(n+1)$ .

Основні властивості  $\Gamma$ -функції такі:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{IV.1-9})$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (\text{IV.1-10})$$

Для гамма-функції кратного аргумента справедлива **формула множення Гаусса**:

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{(1-n)/2} n^{nz-1/2} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right). \quad (\text{IV.1-11})$$

Значення гамма-функції (а отже, і факторіала) при великих значеннях аргумента можна знайти за **формулою Стірлінґа**:

$$\Gamma(z) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z \left[1 + \frac{1}{12z} + \dots\right]. \quad (\text{IV.1-12})$$

$\Gamma(z)$  має особливості (полюси першого порядку) у точці  $z = 0$  і при від'ємних цілих  $z$ :

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{IV.1-13})$$

▼ **Приклад 1.** Знайти об'єм  $D$ -вимірної кулі радіуса  $R$ .

*Розв'язування.* Розраховуватимемо об'єм кулі за формулою

$$\mathcal{V}_D = \int_{|\mathbf{r}| < R} d\mathbf{r} = \int d\Omega_D \int_0^R r^{D-1} dr = \frac{R^D}{D} \Omega_D,$$

де введено узагальнені гіперсферичні координати (за аналогією з полярними і сферичними, пор. Додаток В.).

Для знаходження повного тілесного гіперкута  $\Omega_D$  обчислимо

$$\begin{aligned} \int e^{-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_D^2} dx_1 dx_2 \dots dx_D &= \int e^{-|\mathbf{r}|^2} d\mathbf{r} = \\ &= \int d\Omega_D \int_0^R r^{D-1} e^{-r^2} dr, \\ \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^D &= \Omega_D \int_0^{\infty} r^{D-1} e^{-r^2} dr. \end{aligned}$$

Останній інтеграл після заміни  $t = r^2$  зводиться до гамма-функції:

$$\begin{aligned} r = t^{1/2}, \quad dr &= \frac{1}{2} t^{-1/2} dt, \\ \int_0^{\infty} r^{D-1} e^{-r^2} dr &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{D/2-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right). \end{aligned}$$

Інтеграл у лівій частині зводиться до інтеграла Пуассона і дорівнює  $(\sqrt{\pi})^D$ . Таким чином, повний тілесний гіперкут дорівнює:

$$\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}.$$

Остаточно маємо об'єм  $D$ -вимірної кулі:

$$\mathcal{V}_D = \frac{R^D}{D} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}.$$

▲

### Бета-функція

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (\text{IV.1-14})$$

### Неповні гамма-функції

$$\gamma_a(x) \equiv \gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt, \quad (\text{IV.1-15})$$



$$\Gamma_a(x) \equiv \Gamma(a, x) = \Gamma(a) - \gamma(a, x) = \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, \quad (\text{IV.1-16})$$

$$\gamma^*(a, x) = \frac{x^{-a}}{\Gamma(a)} \gamma(a, x). \quad (\text{IV.1-17})$$

Цю функцію можна розкласти у такий ряд:

$$\gamma^*(a, x) = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(a+n+1)}. \quad (\text{IV.1-18})$$

За допомогою інтегрування частинами легко перевірити таке рекурентне співвідношення:

$$\gamma(a+1, x) = a\gamma(a, x) - x^a e^{-x}. \quad (\text{IV.1-19})$$

Зауважимо також зв'язок із інтегральними показниковими функціями

$$E_n(x) = x^{n-1} \Gamma(1-n, x), \quad (\text{IV.1-20})$$

а також, що

$$\gamma^*(-n, x) = x^n. \quad (\text{IV.1-21})$$

**Логарифмічна похідна гамма-функції (пси-функція або дигамма-функція):**

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z). \quad (\text{IV.1-22})$$

Часткове значення

$$\psi(1) = -C, \quad (\text{IV.1-23})$$

де

$$C = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \ln N \right) = 0.5772156649 \dots \quad (\text{IV.1-24})$$

— стала Ейлера (або Ейлера–Маскерони), її також часто позначають  $\gamma$ .

**Полігамма-функції** — похідні від дигамма-функції:

$$\begin{aligned}\psi^{(n)}(z) &= \frac{d^n}{dz^n} \psi(z) = \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \ln \Gamma(z) = \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^\infty \frac{t^n e^{-zt}}{1 - e^{-t}} dt.\end{aligned}\quad (\text{IV.1-25})$$

### Еліптичні інтеграли

Для розрахунку інтегралів, що містять квадратний корінь з многочлена 3-го або 4-го степеня, використовують так звані еліптичні інтеграли. Їх часткові випадки розглянемо нижче.

**Еліптичний інтеграл першого роду**

$$F(\varphi|k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (\text{IV.1-26})$$

**Повний еліптичний інтеграл першого роду**

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (\text{IV.1-27})$$

**Еліптичний інтеграл другого роду**

$$E(\varphi|k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta. \quad (\text{IV.1-28})$$

**Повний еліптичний інтеграл другого роду**

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} \, dz = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta. \quad (\text{IV.1-29})$$

**Еліптичний інтеграл третього роду**

$$\Pi(c; \varphi|k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{(1 - c \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (\text{IV.1-30})$$

**Повний еліптичний інтеграл третього роду**

$$\Pi(c|k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - c \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (\text{IV.1-31})$$

Взагалі кажучи, деякі довідники (напр., [25]) містять означення, де аргумент стоїть без квадрата:

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \theta} \, d\theta. \quad (\text{IV.1-32})$$

Така неоднозначність існує навіть у пакетах програм аналітичних обчислень: *Mathematica* використовує означення типу (IV.1-32), а *Maple* — (IV.1-29).

Обернені до еліптичних інтегралів **еліптичні функції Якобі** визначаються так:

$$z = F(\varphi|k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \text{am } z \quad (\text{IV.1-33})$$

— **амплітуда**  $z$ ,

$$\text{sn } z = \sin(\text{am } z) \quad (\text{IV.1-34})$$

— **синус амплітуди**  $z$ , а також  $\text{cn } z$  (**косинус амплітуди**) і  $\text{dn } z$  (**дельта амплітуди**):

$$\text{cn } z = \cos(\text{am } z) = \sqrt{1 - \text{sn}^2 z}, \quad (\text{IV.1-35})$$

$$\text{dn } z = \Delta(k, \text{am } z) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 z}. \quad (\text{IV.1-36})$$

Ці функції залежать від двох змінних ( $z$  і  $k$ ), однак параметр  $k$  явно, як правило, не пишуть. У граничних випадках ( $k = 0$  і  $k = 1$ ) отримуються тригонометричні й гіперболічні функції.

Розв'язуючи методом відокремлення змінних рівняння в частинних похідних, одержують задачу Штурма–Ліувілля — задачу знаходження розв'язку звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right] - q(x)y(x) + \lambda \rho(x)y(x) = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

де коефіцієнт  $p(x)$  принаймні на одному з кінців інтервалу  $(a, b)$  дорівнює нулеві. Розв'язки цього рівняння називаються **спеціальними функціями** (у вузькому сенсі).

Найпростіша крайова задача

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, & y(0) &= y(\ell) = 0, \\ a &= 0, & b &= \ell, & p &= \rho = \text{const} \end{aligned}$$

визначає **тригонометричні функції**.

### Функції Бесселя

Функції Бесселя є розв'язками **рівняння Бесселя**:

$$(xy')' + \left( \lambda x - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0,$$

$$a = 0, \quad b = r_0, \quad p(x) = x, \quad \rho(x) = x, \quad q(x) = \frac{\nu^2}{x}.$$

При цьому розв'язки, які не мають особливостей при  $x = 0$  називаються **функціями Бесселя першого роду** або **циліндричними функціями** і позначаються  $J_\nu(x)$ . Розв'язки, які мають особливість при  $x = 0$  називаються **функціями Бесселя другого роду** або **функціями Ноймана** (також **функціями Вебера**) і позначаються  $Y_\nu(x)$  або  $N_\nu(x)$ . Ці функції пов'язані між собою:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi + J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}.$$

Рівняння Бесселя задовольняють також **функції Бесселя третього роду** або **функції Ганкеля**  $H_\nu^{(1)}(x)$  і  $H_\nu^{(2)}(x)$ :

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iY_\nu(x), \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iY_\nu(x). \end{aligned}$$

Розв'язками **модифікованого рівняння Бесселя**:

$$(xy')' - \left( \lambda x + \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0$$

є **модифіковані функції Бесселя (функції Бесселя комплексного аргумента)**  $I_\nu(x)$  і **модифіковані функції Ганкеля (функції Макдональда)**  $K_\nu(x)$ :

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix), \quad (\text{IV.1-37})$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix). \quad (\text{IV.1-38})$$

### Ортогональні многочлени

Розв'язками рівняння

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} y' \right] + \lambda (1-x)^\alpha (1+x)^\beta y = 0$$

є **многочлени Якобі**  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ,  $\lambda = \lambda_n = n(\alpha + \beta + n + 1)$ .

Часткові випадки цих многочленів:

**1.**  $\alpha = \beta = 0$  — **многочлени Лежандра**  $P_n(x)$ . Вони задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} [(1-x^2)y']' + \lambda y &= 0, \\ a = -1, \quad b = 1, \quad p(x) &= 1-x^2, \quad \rho(x) = 1, \quad q = 0, \end{aligned}$$

де  $\lambda = n(n+1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

У загальному випадку ( $\lambda$  довільне) розв'язками є **функції Лежандра**. Якщо на кінцях проміжку  $[-1, 1]$  особливостей нема, то це — **функції Лежандра першого роду**, у протилежному випадку — **функції Лежандра другого роду**.

Розв'язки рівняння

$$\begin{aligned} [(1-x^2)y']' - \frac{m^2}{1-x^2}y + \lambda y &= 0, \\ a = -1, \quad b = 1, \quad p(x) &= 1-x^2, \quad \rho(x) = 1, \quad q(x) = \frac{m^2}{1-x^2} \end{aligned}$$

називаються **приєднаними функціями Лежандра**.

**2.**  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$  — **многочлени Чебишова<sup>5</sup> (першого роду)**  
 $T_n(x)$  є розв'язками рівняння

$$\left(\sqrt{1-x^2}y'\right)' + \lambda \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0,$$

або

$$\begin{aligned} (1-x^2)y'' - xy' + \lambda y &= 0, \\ a = -1, \quad b = 1, \quad p(x) &= \sqrt{1-x^2}, \quad \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad q = 0. \end{aligned}$$

при  $\lambda = n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**3.**  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  — **многочлени Чебишова (другого роду)**  
 $U_n(x)$  є розв'язками рівняння

$$\begin{aligned} \left((1-x^2)^{3/2}y'\right)' + \lambda \sqrt{1-x^2}y &= 0, \\ a = -1, \quad b = 1, \quad p(x) &= (1-x^2)^{3/2}, \quad \rho(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad q = 0. \end{aligned}$$

при  $\lambda = \lambda_n = n(n+2)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

---

<sup>5</sup>Поширене написання “Чебишев” пов'язане з традиційним у російському правописі опусканням діакритичного значка над буквою “ё” (тобто насправді Чебишѐв, а отже українською — Чебишóв).

4.  $\alpha = \beta = \nu - \frac{1}{2}$  — **многочлени Гегенбауера**  $C_n^{(\nu)}(x)$  є розв'язками рівняння

$$\begin{aligned} \left( (1-x^2)^{\nu+1/2} y' \right)' + \lambda (1-x^2)^{\nu-1/2} y &= 0, \\ a &= -1, \quad b = 1, \quad p(x) = (1-x^2)^{\nu+1/2}, \\ \rho(x) &= (1-x^2)^{\nu-1/2}, \quad q = 0. \end{aligned}$$

при  $\lambda = \lambda_n = n(n+2\nu)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Розглядають також інші ортогональні многочлени, найпоширенішими серед яких є такі:

5. Розв'язками рівняння

$$\left( e^{-x^2} y' \right)' + \lambda e^{-x^2} y = 0$$

або

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' + \lambda y &= 0, \\ a &= -\infty, \quad b = +\infty, \quad p(x) = e^{-x^2}, \quad \rho(x) = e^{-x^2}, \quad q = 0. \end{aligned}$$

при  $\lambda = 2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , є **многочлени Ерміта** (або **Чебишова-Ерміта**), які позначають  $H_n(x)$ .

6. Розв'язками рівняння

$$(x e^{-x} y')' + \lambda e^{-x} y = 0$$

або

$$\begin{aligned} y'' + (1-x)y' + \lambda y &= 0, \\ a &= 0, \quad b = +\infty, \quad p(x) = x e^{-x}, \quad \rho(x) = e^{-x}, \quad q = 0. \end{aligned}$$

при  $\lambda = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , є **многочлени Лагерра** (або **Чебишова-Лагерра**), які позначають  $L_n(x)$ .

Оскільки у всіх цих рівняннях коефіцієнт  $p(x)$  дорівнює нулеві принаймні на одному з кінців інтервалу  $(a, b)$ , рівняння, крім обмежених на цьому кінці розв'язків, мають і необмежені там розв'язки. З метою їх вилучення задають умову обмеженості: якщо  $p(a) = 0$  і  $p(b) = 0$ , то  $|y(a)| < \infty$  і  $|y(b)| < \infty$ .

**Гіпергеометрична функція.**

Найзагальніший вигляд цієї функції можна записати як *гіпергеометричний ряд*:

$${}_nF_m(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_n)_k}{(b_1)_k \dots (b_m)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (\text{IV.1-39})$$

де за означенням *символ Похгаммера*

$$(a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1) = \Gamma(a+k)/\Gamma(a). \quad (\text{IV.1-40})$$

Ця функція задовольняє таке диференціальне рівняння:

$$\left( \frac{d}{dz} \prod_{k=1}^m \left( z \frac{d}{dz} + b_k - 1 \right) - \prod_{k=1}^n \left( z \frac{d}{dz} + a_k \right) \right) w(z) = 0. \quad (\text{IV.1-41})$$

Часткові випадки гіпергеометричної функції:

$${}_0F_1(; a; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a)_k} \frac{z^k}{k!}. \quad (\text{IV.1-42})$$

*Вироджена гіпергеометрична функція (Куммера):*

$${}_1F_1(a; b; z) \equiv F(a; b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!}. \quad (\text{IV.1-43})$$

*Гіпергеометрична функція (Гаусса):*

$${}_2F_1(a, b; c; z) \equiv F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}. \quad (\text{IV.1-44})$$

Ця функція задовольняє таке диференціальне рівняння другого порядку:

$$z(1-z) \frac{d^2 F(z)}{dz^2} + (c - (a+b+1)z) \frac{dF(z)}{dz} + abF(z) = 0. \quad (\text{IV.1-45})$$



Для  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  справедливе таке інтегральне представлення:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt$$

$$(\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0). \quad (\text{IV.1-46})$$

Часткове значення:

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad (\text{IV.1-47})$$

$$c \neq 0, -1, -2, \dots, \quad \operatorname{Re}(c-a-b) > 0.$$

Елементарні функції, як і більшість спеціальних, також можна записати як часткові випадки гіпергеометричного ряду. Зокрема, справедливі такі представлення через вироджену гіпергеометричну функцію:

$$H_{2n}(z) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} F\left(-n; \frac{1}{2}; z^2\right),$$

$$H_{2n+1}(z) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} 2z F\left(-n; \frac{3}{2}; z^2\right),$$

$$L_n^\alpha(z) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} F(-n; \alpha+1; z),$$

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{e^{-iz}}{\Gamma(\nu+1)} F\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu+1; 2iz\right), \quad \nu > -\frac{1}{2}.$$

**Гіпергеометрична функція Аппеля** — функція двох змінних:

$$F_1(a; b_1, b_2; c; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b_1)_m (b_2)_n}{m! n! (c)_{m+n}} x^m y^n. \quad (\text{IV.1-48})$$

Через цю функцію, наприклад, виражається такий інтеграл:

$$\int x^m (x+a)^n (bx+c)^k dx =$$

$$= \frac{a^n c^k}{1+m} x^{1+m} F_1\left(1+m, -n, -k, 2+m, -\frac{x}{a}, -\frac{bx}{c}\right). \quad (\text{IV.1-49})$$

**Завдання.**

IV.1. Обчислити неозначений інтеграл  $\int \operatorname{erf}(x) dx$ .

IV.2. Використовуючи розподіл Максвелла  $f(v) = Av^2 e^{-\alpha v^2}$ , визначити відносну кількість частинок, абсолютні значення швидкостей яких лежать в діапазоні від  $v_1$  до  $v_2$ .

IV.3. Довести співвідношення:

$$\operatorname{Ei}(ix) = \operatorname{Ci}(x) + i \operatorname{Si}(x) - \frac{i\pi}{2}.$$

Обчислити інтеграли:

$$\text{IV.4. } \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{e^x - 1} dx, \quad p > 1.$$

$$\text{IV.5. } \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{e^x + 1} dx, \quad p > 0.$$

$$\text{IV.6. } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}.$$

$$\text{IV.7. } \int_0^1 \frac{1}{(1-x^3)^{1/3}} dx.$$

$$\text{IV.8. } \int_0^{\pi/2} \sin^m t \cos^n t dt, \quad m > -1.$$

$$\text{IV.9. } \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx.$$

$$\text{IV.10. } \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

IV.11. Показати еквівалентність таких означень бета-функції:

$$\operatorname{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad \text{і} \quad \operatorname{B}(x, y) = \int_0^{\infty} t^{x-1} (1+t)^{-x-y} dt.$$

IV.12. Обчислити площу поверхні  $D$ -вимірної сфери і дати інтерпретацію значенням повного тілесного гіперкута  $\Omega_D$  для  $D = 1, 2, 3$ .

IV.13. Виразити подвійний факторіал

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n), \quad (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$$

через гамма-функцію і запропонувати узагальнення (функцію  $\Xi(z)$ ), справедливе і для парних ( $\Xi_{\text{even}}(z)$ ), і для непарних ( $\Xi_{\text{odd}}(z)$ ) чисел.

IV.14. Обчислити похідну  $\frac{dE(k)}{dk}$ , де  $E(k)$  — повний еліптичний інтеграл другого роду.

IV.15. Знайти довжину еліпса з півосями  $a, b$ .

Знайти граничні значення еліптичних функцій Якобі:

IV.16. а)  $\text{sn}(z, 0)$ ; б)  $\text{cn}(z, 0)$ ; в)  $\text{dn}(z, 0)$ .

IV.17. а)  $\text{sn}(z, 1)$ ; б)  $\text{cn}(z, 1)$ ; в)  $\text{dn}(z, 1)$ .

IV.18. Використовуючи поняття твірної функції, розкласти в ряд

$$\frac{1}{|\mathbf{k} + \mathbf{R}|},$$

де  $|\mathbf{k}| \ll |\mathbf{R}|$ ,  $\mathbf{k}, \mathbf{R}$  — вектори.

IV.19. Вивести рекурентне співвідношення для поліномів Ерміта, використовуючи таке означення:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

IV.20. Вивести рекурентне співвідношення для поліномів Чебишова, використовуючи таке означення:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

IV.21. Довести, що функції Бесселя можна записати через таке інтегральне зображення:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

IV.22. Використовуючи рекурентне співвідношення для функцій Бесселя

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x), \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad x > 0,$$

і розв'язки рівняння  $y'' + y = 0$ , отримати вирази для  $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ ,  $J_{\frac{1}{2}}(x)$ ,  $J_{\frac{3}{2}}(x)$  через елементарні функції. Врахувати, що

$$J_\nu(x) \simeq \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}$$

при  $x \rightarrow 0$ . (Підказка: зробити заміну  $y(x) = \sqrt{x} f(x)$  і отримати пару лінійно незалежних розв'язків.)

IV.23. Знайти особливі точки функції  $\Gamma(z)$ , визначити їх характер і порахувати лишки.

IV.24. Показати, що функція

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \int_0^x \varphi(t) J_0 \left( 2i\sqrt{y(x-t)} \right) dt + \\ & + \int_0^y \psi(t) J_0 \left( 2i\sqrt{x(y-t)} \right) dt + \\ & + A J_0 \left( 2i\sqrt{xy} \right), \quad A = \text{const} \end{aligned}$$

задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

Дати інтерпретацію константи  $A$ .

IV.25. Використовуючи ряд для функції Бесселя

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum \frac{(-z^2/4)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)},$$

отримати вираз для похідної  $J'_\nu(z)$  через  $J_\nu(z)$  і  $J_{\nu+1}(z)$ .

Знайти

$$\text{IV.26. } \frac{d}{dz} {}_0F_1(; a; z). \quad \text{IV.27. } \frac{d}{dz} {}_1F_1(a; b; z). \quad \text{IV.28. } \int_0^x t J_0(t) dt.$$

$$\text{IV.29. } \int_0^z {}_0F_1(; a; z') dz'. \quad \text{IV.30. } \int_0^z {}_1F_1(a; b; z') dz'.$$

$$\text{IV.31. } \frac{d}{dz} {}_nF_m(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m; z).$$

Виразити функції через гіпергеометричну функцію  ${}_2F_1(a, b; c; z)$

$$\text{IV.32. } \ln(1+z). \quad \text{IV.33. } (1+z)^\alpha. \quad \text{IV.34. } \frac{1}{1-z}.$$

Довести рівності

$$\text{IV.35. } \frac{1}{x} \operatorname{sh} x = {}_0F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{x^2}{4}\right). \quad \text{IV.36. } \operatorname{ch} x = {}_0F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{x^2}{4}\right).$$

IV.37. Використовуючи загальний вигляд диференціального рівняння для гіпергеометричної функції  ${}_nF_m$  (формула (IV.1-41)), отримати рівняння для функції  ${}_1F_0(a; ; z)$  і знайти його розв'язки.

IV.38. Довести рівність

$$\mathcal{K}_0[r^2 f(r)] = - \left( \frac{d^2 f(k)}{dk^2} + \frac{1}{k} \frac{df(k)}{dk} \right).$$

(Праву сторону рівності можна записати через оператор Лапласа у змінних  $k$ :  $-\Delta_k f(k)$ , якщо розглядати  $f(k)$  як функцію від модуля тривимірного вектора.) Тут  $\mathcal{K}_0$  — перетворення Ганкеля (II.3-3).

IV.39. Знайти відображення Ганкеля (II.3-3)

$$f(s) = \mathcal{H}_\nu[f(r)], \quad \nu > -1, \quad f(r) = \begin{cases} r^\nu, & 0 < r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

IV.40. Знайти відображення Мелліна (II.3-1) функції

$$f(t) = \theta(t-a)e^{-bt^2}, \quad a > 0, \quad \operatorname{Re} b > 0.$$

IV.41. Використовуючи інтеграл Шварца–Крістоффеля (I.9-69), отримати функцію, яка відображає верхню півплощину на трикутник з вершинами  $w_1 = i$ ,  $w_2 = 0$ ,  $w_3 = 1$ . За точки-прообрази взяти  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = 0$ ,  $z_3 = 1$ .

IV.42. Довести рекурентне співвідношення (IV.1-19) і вивести подібну залежність для інтегральних показникових функцій  $E_n(x)$ .

IV.43. Вивести рекурентне співвідношення для дигамма-функції  $\psi(x)$ .

IV.44. Знайти значення дигамма-функції  $\psi(n)$  для натурального  $n$ .

IV.45. Розв'язати методом відокремлення змінних задачу

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 \Delta u, & t > 0, \quad 0 \leq r < R, \quad u(r, 0) &= \varphi(r), \\ u(R, t) &= 0, \quad |u(0, t)| < \infty. \end{aligned}$$

IV.46. Показати, що заміною  $x = \cos \theta$  рівняння

$$(1-x^2)v'' - xv' + n^2v = 0$$

зводиться до рівняння

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + n^2 u = 0, \quad u(\theta) = v(\cos \theta).$$

IV.47. Методом відокремлення змінних розв'язати задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u, & 0 \leq r < R, \quad t > 0, \\ u(R, t) &= 0, \quad |u(0, t)| < \infty, \quad t > 0, \\ u(r, 0) &= A(R^2 - r^2), \quad u_t(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq R. \end{aligned}$$

IV.48. Розв'язати крайову задачу

$$\Delta u = 0, \quad r < a, \quad u|_{r=a} = f(\theta, \varphi).$$

IV.49. Розв'язати крайову задачу

$$\Delta u = 0, \quad r > a, \quad u|_{r=a} = f(\theta, \varphi).$$

IV.50. Розкласти плоску хвилю  $v = e^{i\lambda z} = e^{ikr \cos \theta}$  в ряд за многочленами Лежандра та функціями Бесселя.

IV.51. Розкласти функцію  $f(x) = e^{-x}$  в ряд Фур'є за многочленами Чебишова–Лаґерра.

IV.52. Показати, що функції

$$u_n(r, \theta) = I_n(\mu r) \cos n\theta, \quad v_n(r, \theta) = I_n(\mu r) \sin n\theta, \quad n = 0, 1, \dots,$$

де  $I_n(x)$  — функції Бесселя уявного аргумента:  $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$ , задовольняють рівняння

$$\Delta u - \mu^2 u = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

## IV.2. Варіаційне числення

**Функціоналом** називають відображення деякої множини функцій  $\{f(x)\}$  на певну числову множину. Нагадаємо, що **функція** — це відображення між двома числовими множинами (які можуть збігатися). Натомість **оператор** відображає множину функцій у множину функцій (наприклад, оператор диференціювання).

Прикладами функціоналів є означений інтеграл (він переводить функцію у числове значення відповідного інтеграла), дельта-функція

(мається на увазі означення  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$ , тобто функція  $f(x)$  переходить в число  $f(a)$ ) тощо.

**Варіація функціонала** вводиться за аналогією з диференціалом функції. Нехай функціонал  $\mathcal{J}[y(x)]$  визначено на деякій множині функцій  $\{y(x)\}$ , і  $\delta y(x)$  — мала функція, так що  $y(x) + \delta y(x)$  мало відрізняється від  $y(x)$ . Тобто, якщо позначити  $\tilde{y}(x) = y(x) + \delta y(x)$ , то умова  $|\tilde{y}(x) - y(x)| < \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  — як завгодно мале додатне число, виконується всюди на проміжку  $[a, b]$  зміни аргумента  $x$ . Варіацією функціонала називають величину

$$\delta \mathcal{J}[y(x)] = \mathcal{J}[y(x) + \delta y(x)] - \mathcal{J}[y(x)].$$

За аналогією зі звичайною похідною вводять **варіаційну (функціональну) похідну**

$$\frac{\delta \mathcal{J}[y(x)]}{\delta y(x')} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}[y(x) + \varepsilon \delta(x - x')] - \mathcal{J}[y(x)]}{\varepsilon}, \quad (\text{IV.2-1})$$

тут  $\delta(x - x')$  — дельта-функція Дірака.

Для функціонала  $\mathcal{J}[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$

$$\delta \mathcal{J}[y(x)] = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \quad (\text{IV.2-2})$$

і варіаційна похідна зводиться до такого виразу:

$$\frac{\delta \mathcal{J}}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}$$

(так звана **похідна Ейлера–Лагранжа**).

У загальнішому випадку залежності від вищих похідних,  $\mathcal{J}[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$  варіацію визначають як

$$\delta \mathcal{J}[y(x)] = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right) dx. \quad (\text{IV.2-3})$$

Задачею варіаційного числення є відшукування **екстремалей** функціонала, тобто таких функцій, при яких заданий функціонал досягає мінімального або максимального значення (екстремуму).



**Екстремалі функціонала** шукають з умови  $\delta \mathcal{J} = 0$ . У випадку (IV.2-2) отримаємо **рівняння Ейлера**:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (\text{IV.2-4})$$

Узагальнення для вищих похідних (**рівняння Ейлера–Пуассона**):

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} \mp \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0. \quad (\text{IV.2-5})$$

▼ **Приклад 1.** Визначити форму твердого тіла довжиною  $L$ , яке рухається в потоці газу з найменшим опором. Для спрощення розглянути тіло обертання.

*Розв'язування.*

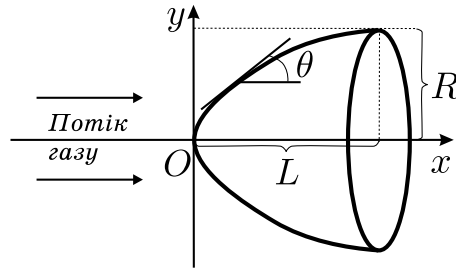


Рис. 4.1.

Нехай молекули газу відбиваються від поверхні дзеркально. Тоді нормальна складова тиску буде

$$p = 2\rho v^2 \sin^2 \theta,$$

де  $\rho$  — густина газу,  $v$  — швидкість газу відносно тіла,  $\theta$  — кут між вектором швидкості та її тангенціальною складовою. У проекції на вісь  $Ox$  сили, що діють на кільце шириною  $(1 + y'^2)^{1/2} dx$  і радіусом  $y(x)$  дорівнюють

$$dF = p dS = 2\rho v^2 \sin^2 \theta \cdot 2\pi y (1 + y'^2)^{1/2} \cdot \sin \theta dx.$$

Повна сила в додатному напрямку осі  $Ox$  становить

$$F = \int_0^L 4\pi\rho v^2 y(1+y'^2)^{1/2} \sin^3 \theta \, dx.$$

Для спрощення вважатимемо величину похідної  $y'$  малою, тому

$$\sin \theta = \frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}} \approx y'.$$

Тоді сила опору

$$F = 4\pi\rho v^2 \int_0^L y'^3 y \, dx. \quad (\text{IV.2-6})$$

Завдання полягає у знаходженні такої функції  $y(x)$ , при якій  $F$  досягає найменшого значення, причому, очевидно,

$$y(0) = 0, \quad y(L) = R, \quad (\text{IV.2-7})$$

де  $R$  — деякий максимальний радіус перерізу.

Рівняння Ейлера для функціонала (IV.2-6):

$$y'^3 - 3 \frac{d}{dx}(yy'^2) = 0 \quad (\text{IV.2-8})$$

або

$$y'^3 + 3yy'y'' = 0. \quad (\text{IV.2-9})$$

Після домноження обох частин на  $y'$  легко бачити, що зліва матимемо  $(y'^3 y)'$ . Таким чином,

$$y'^3 y = A^3, \quad A = \text{const.}$$

Звідси

$$y' = \frac{A}{\sqrt[3]{y}}, \quad y = (Bx + C)^{3/4},$$

де  $B, C$  — константи, які знайдемо з граничних умов (IV.2-7):

$$B = \frac{R^{4/3}}{L}, \quad C = 0.$$

Остаточно форма кривої описується рівнянням

$$y(x) = R \left( \frac{x}{L} \right)^{4/3}. \quad (\text{IV.2-10})$$



### Задачі на умовний екстремум функціонала.

Нехай екстремум функціонала  $\mathcal{J}[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$  потрібно

знайти за умови, коли інший функціонал  $\mathcal{K}[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx$

набуває певного значення:  $\mathcal{K}[y(x)] = L$ . Тоді розглядають задачу на екстремум функціонала

$$\mathcal{L}[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')] dx,$$

де  $\lambda = \text{const}$  — **множник Лагранжа**, його, як правило, визначають з умови на функціонал  $\mathcal{K}$ :  $\mathcal{K}[y(x)] = L$ .

Цей метод легко узагальнити на декілька умов, вводячи відповідно декілька множників  $\lambda_1, \lambda_2$  і т. д.

Задачі такого типу називаються **ізопериметричними** (див., напр., IV.73 — переформульовану **задача Дідони**).

Якщо на функції, від яких залежить функціонал, накладено деякі умови (зв'язки), то задачу на екстремум цього функціонала розв'язують так. Нехай заданий функціонал

$$\mathcal{J}[y_1(x), \dots, y_n(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx,$$

й умови на функції записано у вигляді рівнянь

$$\varphi_j(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (j = 1, \dots, m, \quad m < n).$$

Такі зв'язки, в яких відсутня залежність від похідних  $y'_k$ , називаються **голономними**. Цей метод, взагалі кажучи, можна застосовувати і до **неголономних** зв'язків типу  $\varphi_j(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0$ .

У результаті задача зводиться до знаходження екстремуму функціонала

$$\mathcal{L} = \int_{x_0}^{x_1} \left[ F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \varphi_j(x, y_1, \dots, y_n) \right] dx.$$

У цьому випадку **множники Лагранжа є функціями** змінної  $x$ .

Серед задач на умовний екстремум є також задачі на відшукування **геодезичних ліній**, тобто ліній, вздовж яких відстань між двома точками на деякій поверхні буде екстремальна (мінімальна).

▼ **Приклад 2.** Знайти геодезичні лінії сфери радіусом  $R$ .

*Розв'язування.* Потрібно знайти рівняння кривої, вздовж якої відстань між двома точками, яка визначається в декартових координатах функціоналом

$$\mathcal{L}[x, y(x), z(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)} dx,$$

буде мінімальною. При цьому дана лінія повинна лежати на сфері, тобто координати  $x, y, z$  пов'язані рівнянням:  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . Взагалі кажучи, потрібно знайти екстремалі функціонала

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}[x, y(x), z(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)} + \right. \\ \left. + \lambda(x) [x^2 + y^2(x) + z^2(x) - R^2] \right\} dx. \end{aligned}$$

Проте завдяки симетрії задачу можна значно спростити. Для знаходження розв'язку зручно використати сферичні координати, тоді

матимемо функціонал

$$\tilde{\mathcal{L}}[\theta, \varphi(\theta)] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} R \sqrt{1 + \varphi'^2(\theta) \sin^2 \theta} d\theta.$$

З рівняння Ейлера–Лагранжа отримаємо

$$\frac{\varphi' \sin^2 \theta}{\sqrt{1 + \varphi'^2 \sin^2 \theta}} = C_1 = \text{const},$$

звідки

$$C_1 \operatorname{ctg} \theta = \cos(\varphi + \varphi_0), \quad \varphi_0 = \text{const}.$$

Якщо стала  $C_1 = 0$ , то  $\varphi = \text{const}$ , тобто геодезичними є меридіани сфери (великі кола, що проходять через полюси).

Якщо  $C_1 \neq 0$ , то  $\operatorname{ctg} \theta = A \cos \varphi + B \sin \varphi$ . Можна переконатися, що це рівняння визначає площину (це ми залишаємо на самостійне опрацювання). Таким чином, геодезичними знову будуть великі кола, по яких знайдена площина перетинає сферу.



### Завдання.

Знайти варіаційні похідні

$$\text{IV.53. } \frac{\delta}{\delta y(x)} \int_{-1}^1 y'(x) e^{-y^2(x)} dx. \quad \text{IV.54. } \frac{\delta}{\delta y(x)} \int_0^1 [1 - y'^2(x)] e^{-y(x)} dx.$$

$$\text{IV.55. } \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta a(y)}, \quad \text{де } \mathcal{F}[a(x)] = \int_{x_1}^{x_2} e^{-a^2(x) x^2} dx.$$

$$\text{IV.56. } \frac{\delta}{\delta A^*(q)} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left\{ \frac{\alpha(k) |A(k)|^2}{2} + \frac{\beta(k) |B(k)|^2}{2} \right\},$$

де  $A(k), B(k)$  — Фур'є-зображення дійсних величин,  $A^*(k)$  — функція, комплексно спряжена до  $A(k)$ ,  $\alpha(k), \beta(k)$  — деякі функції.

IV.57. Знайти варіацію функціонала

$$\mathcal{F}[y(x)] = \int_0^1 (y' e^{-y^2} + xy^2) dx.$$

IV.58. Отримати рівняння Ейлера для функціонала, який явно не залежить від змінної  $x$ .

Знайти екстремалі функціонала

$$\text{IV.59. } \mathcal{F}[y(x)] = \int_a^b x^n y'^2 dx.$$

$$\text{IV.60. } \mathcal{F}[y(x)] = \int_0^1 (720x^2 y - y''^2) dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2.$$

$$\text{IV.61. } \mathcal{F}[y(x), z(x)] = \int_1^2 (y'^2 + z^2 + z'^2) dx,$$

$$y(1) = 1, \quad y(2) = 2, \quad z(1) = -1, \quad z'(2) = 0.$$

$$\text{IV.62. } \mathcal{F}[z(x, y)] = \int_0^1 \int_0^1 e^{dz/dy} \sin\left(\frac{dz}{dy}\right) dx dy,$$

$$z(x, 0) = 0, \quad z(x, 1) = 1.$$

$$\text{IV.63. } \mathcal{F}[y(x)] = \int_0^1 (1440 y - y'''^2) dx,$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y'(1) = 0,$$

$$y''(0) = 0, \quad y''(1) = -2.$$

IV.64. Знайти екстремалі функціонала

$$\mathcal{F}[y(x)] = \int_0^1 \left( \varepsilon^2 y'^2 + y^2 + \sin \frac{\pi x}{2} \right) dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

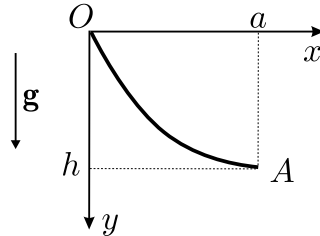
Звернути увагу на випадок  $\varepsilon = 0$ .

IV.65. Знайти екстремалі функціонала (він задає довжину кривої, яка сполучає точки  $(x_0, y_0)$  і  $(x_1, y_1)$ ).

$$\mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

IV.66. (**Задача про брахістохрону.**)

Знайти траєкторію найшвидшого спуску від точки  $O$  до точки  $A$  в полі земного тяжіння (див. рис.). Для цього розглянути функціонал



$$\mathcal{B}[y(x)] = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{2gy}} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = h.$$

IV.67. Визначити форму брахістохрони (кривої найшвидшого спуску) в полі  $U(y) = \frac{ky^2}{2}$ .

IV.68. Знайти мінімум функціонала

$$\mathcal{J}[u] = \int_G \left\{ |\text{grad } u|^2 + \frac{4u}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right\} dx_1 dx_2$$

серед функцій, що належать до класу  $C^1(D)$ ,  $D = \{1 < |\mathbf{x}| < 3\}$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $u|_{\mathbf{x}=1} = 0$ ,  $u|_{\mathbf{x}=3} = 0$ .

IV.69. Знайти мінімум функціонала

$$\mathcal{J}_n[y] = \int_0^1 \left\{ \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{n^2}{x^2} y^2 \right\} x dx, \quad n > 0,$$

серед функцій  $y(x) \in C^1([0, 1])$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = a$ .

IV.70. Знайти функцію  $y_0(x)$ , що реалізує мінімум функціонала

$$\mathcal{J}[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2y) \, dx,$$

серед функцій  $y(x) \in C^1([0, 1])$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ .

IV.71. Знайти мінімум функціонала

$$\mathcal{J}[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2) \, dx,$$

серед функцій  $y(x) \in C^1([0, 1])$   $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$ .

IV.72. Знайти екстремалі функціонала

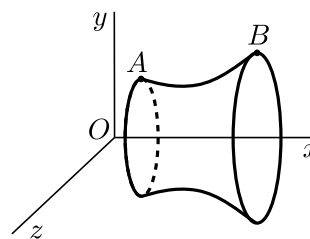
$$\mathcal{J}[y] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) \, dx$$

серед функцій  $y(x) \in C^1([0, \pi/2])$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi/2) = 1$ .

IV.73. Визначити, яка крива заданої довжини  $L$ , що проходить через точки  $(x_1, 0)$  і  $(x_2, 0)$ , обмежує найбільшу площу.

IV.74. Знайти найкоротшу відстань між точками  $A(1, 0, 1)$  і  $B(0, b, b)$ , що лежать на поверхні  $x + y - z = 0$ .

IV.75. Визначити, яка крива, що проходить через дві задані точки, утворює при обертанні навколо осі абсцис поверхню найменшої площі (див. рис.).



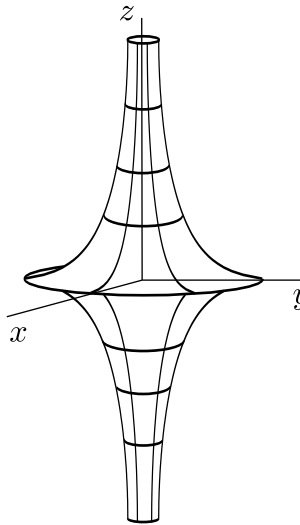
IV.76. Знайти геодезичні лінії кругового циліндра радіусом  $R$ . *Вказівка:* скористатися циліндричними координатами.



IV.77. Знайти рівняння геодезичних ліній псевдосфери — кривої, яку описує трактриса, обертаючись навколо своєї асимптоти (див. рисунок). Параметричне задання трактриси на площині таке:

$$x = R \sin t, \quad y = R \left( \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right).$$

Ця поверхня має сталу від'ємну Гауссову кривину  $K = -1/R^2$ . На псевдосфері справедлива геометрія Лобачевського.



IV.78. Записати функціонал довжини кривої на поверхні еліпсоїда з півосями  $a, b, c$ , застосовуючи узагальнені сферичні координати

$$\begin{aligned} x &= a\eta \cos \varphi \sin \theta, \\ y &= b\eta \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= c\eta \cos \theta, \end{aligned}$$

де масштабна змінна  $\eta$  може набувати значень від 0 до 1. Отримати в квадратурах рівняння геодезичної лінії на поверхні еліпсоїда обертання з півосями  $a = b \neq c$ .

### IV.3. Інтеграли й похідні дробового порядку

Узагальнення операцій диференціювання й інтегрування на випадок довільних (не обов'язково цілих) порядків зараз застосовується в різних ділянках математики й фізики. Практичне використання цього апарату вимагає доброї підготовки, вона, однак, неможлива без вступу, який ми тут дамо в найпростішому формулюванні. Для

подальшого ознайомлення з теорією дробових інтегралів і похідних можна запропонувати, наприклад, монографію [21].

Інтеграл дробового порядку  $\nu > 0$  (у формі Рімана–Ліувілля):

$$\mathcal{J}_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \quad (\text{IV.3-1})$$

(індекс змінної інтегрування  $x$  можна явно не вказувати:  $\mathcal{J}^\nu f(x)$ ).

Похідна дробового порядку  $\nu > 0$  визначається через інтеграл дробового порядку:

$$\mathcal{D}^\nu f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[ \mathcal{J}^{(m-\nu)} f(x) \right], \quad m \in \mathbb{Z}, \quad m > \nu. \quad (\text{IV.3-2})$$

Для оператора  $\mathcal{D}^\nu$ , зрозуміло, можна використати традиційне позначення:

$$\mathcal{D}^\nu \equiv \frac{d^\nu}{dx^\nu}$$

і навпаки (для цілих  $m$ ):

$$\frac{d^m}{dx^m} \equiv \mathcal{D}^m.$$

### Завдання.

IV.79. Знайти похідну порядку  $\nu$  від функції  $f(x) = x^n$

а) використовуючи означення (IV.3-2);

б) узагальнивши на довільні числа дію звичайної похідної  $m$ -го порядку:  $\frac{d^m}{dx^m} x^n$ .

IV.80. Довести рівність

$$\mathcal{L}[\mathcal{J}^\nu f(t), p] = p^{-\nu} \mathcal{L}[f(t), p].$$

*Вказівка:* Використати властивість перетворення Лапласа згортки функцій.

- IV.81. Показати, що для оператора  $\mathcal{D}^{1/2}$  можна використати таке символічне позначення:  $\mathcal{D}^{1/2} = \sqrt{\frac{d}{dx}}$ , тобто

$$\sqrt{\frac{d}{dx}} \sqrt{\frac{d}{dx}} = \frac{d}{dx}.$$

Для простоти можна розглянути диференціювання функції  $x^\alpha$ .

- IV.82. Запропонувати формулу диференціювання добутку для дробової похідної  $\mathcal{D}^\alpha(fg)$  на підставі аналогії з похідною  $n$ -го порядку (для натуральних  $n$ ).

- IV.83. Знайти похідну  $\mathcal{D}^\alpha e^{\lambda x}$ , використовуючи розклад експоненти в ряд. *Вказівка:* Звернути увагу на ряд (IV.1-18).

- IV.84. Довести, що результат задачі IV.83 для  $\mathcal{D}^\alpha e^x$  збігається з результатом, отриманим внаслідок застосування формули (IV.3-2), тобто  $\mathcal{D}^\alpha e^x = \frac{d}{dx} (\mathcal{J}^{1-\alpha} e^x)$ . *Вказівка:* Для отриманих неповних гамма-функцій використати рекурентні співвідношення.

- IV.85. Проінтерпретувати похідну  $\mathcal{D}^{-1}$ , розглянувши її дію на функції  $x^\nu$  та  $e^{\lambda x}$ .

- IV.86. Довести, що

$$\mathcal{J}^\alpha \sin \lambda \sqrt{x} = \sqrt{\pi} \left( \frac{\lambda}{2} \right)^{1/2-\alpha} x^{(2\alpha+1)/4} J_{\alpha+1/2}(\lambda \sqrt{x}).$$

- IV.87. Довести, що

$$\mathcal{J}^\alpha \cos \lambda x = \frac{x^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)} [{}_1F_1(1; \alpha+1; i\lambda x) + {}_1F_1(1; \alpha+1; -i\lambda x)].$$

- IV.88. Якою має бути нижня межа  $X$  в означенні дробового інтеграла

$$\mathcal{J}^{*\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_X^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt,$$

щоб виконувалась рівність  $\mathcal{J}^{*\nu} e^{\lambda x} = \lambda^{-\nu} e^{\lambda x}$ ?

## Додаток А. Таблиці інтегральних перетворень

### А.1. Перетворення Лапласа

| $f(t)$                 | $F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ | умови                                         |
|------------------------|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 1                      | $\frac{1}{p}$                                                | $\operatorname{Re} p > 0$                     |
| $t$                    | $\frac{1}{p^2}$                                              | $\operatorname{Re} p > 0$                     |
| $t^n$                  | $\frac{n!}{p^{n+1}}$                                         | $n \in \mathbb{N}$                            |
| $t^\alpha$             | $\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}}$                    | $\alpha > -1, \operatorname{Re} p > 0$        |
| $e^{at}$               | $\frac{1}{p - a}$                                            | $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$   |
| $\cos at$              | $\frac{p}{p^2 + a^2}$                                        | $\operatorname{Re} p >  \operatorname{Im} a $ |
| $\sin at$              | $\frac{a}{p^2 + a^2}$                                        | $\operatorname{Re} p >  \operatorname{Im} a $ |
| $\operatorname{ch} at$ | $\frac{p}{p^2 - a^2}$                                        | $\operatorname{Re} p >  \operatorname{Re} a $ |
| $\operatorname{sh} at$ | $\frac{a}{p^2 - a^2}$                                        | $\operatorname{Re} p >  \operatorname{Re} a $ |
| $t^n e^{at}$           | $\frac{n!}{(p - a)^{n+1}}$                                   | $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$   |
| $t \cos at$            | $\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$                            | $\operatorname{Re} p >  \operatorname{Im} a $ |
| $t \sin at$            | $\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$                                  | $\operatorname{Re} p >  \operatorname{Im} a $ |

| $f(t)$                          | $F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$                                                    | умови                                                                 |
|---------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $e^{bt} \cos at$                | $\frac{p-b}{(p-b)^2 + a^2}$                                                                                     | $\operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} b +  \operatorname{Im} a )$ |
| $e^{bt} \sin at$                | $\frac{a}{(p-b)^2 + a^2}$                                                                                       | $\operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} b +  \operatorname{Im} a )$ |
| $\frac{\sin at}{t}$             | $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{a}$                                                              | $\operatorname{Re} p >  \operatorname{Im} a $                         |
| $ \sin at $                     | $\frac{a}{p^2 + a^2} \operatorname{cth} \frac{\pi p}{2a}$                                                       | $\operatorname{Re} p >  \operatorname{Im} a $                         |
| $e^{-a^2 t^2}$                  | $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{\pi^2}{4a^2}} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{p}{2a} \right) \right]$ | $\operatorname{Re} p > 0$                                             |
| $\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$  | $\frac{1}{\sqrt{p+a}}$                                                                                          | $\operatorname{Re} p > 0$                                             |
| $J_0(at)$                       | $\frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}}$                                                                                    | $\operatorname{Re} p > 0$                                             |
| $J_{\nu}(at)$                   | $\frac{\left( \sqrt{p^2 + a^2} - p \right)^{\nu}}{a^{\nu} \sqrt{p^2 + a^2}}$                                    | $\operatorname{Re} p > 0, \nu > -1$                                   |
| $J_0(2\sqrt{t})$                | $\frac{1}{p} e^{-1/p}$                                                                                          | $\operatorname{Re} p > 0$                                             |
| $\operatorname{Si} t$           | $\frac{1}{p} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p \right)$                                             | $\operatorname{Re} p > 0$                                             |
| $\operatorname{erf}(\sqrt{at})$ | $\frac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}$                                                                                  | $\operatorname{Re} p > 0$                                             |
| $\delta(t-a)$                   | $e^{-ap}$                                                                                                       | $a > 0$                                                               |
| $\theta(t-a)$                   | $\frac{e^{-ap}}{p}$                                                                                             | $\operatorname{Re} p > 0$                                             |

## А.2. Перетворення Фур'є

|                                  |                                                                                                        |
|----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f(t)$                           | $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ |
| $e^{- t }$                       | $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \omega^2}$                                                          |
| $e^{- t } \operatorname{sign} t$ | $-i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 + \omega^2}$                                                  |
| $e^{-t} \theta(t)$               | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - i\omega}{1 + \omega^2}$                                               |
| $\frac{1}{1 + t^2}$              | $\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{- \omega }$                                                                   |
| $\frac{\sin t}{t}$               | $\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\theta(\omega + 1) - \theta(\omega - 1)]$                                       |
| $e^{-t^2}$                       | $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4}$                                                                   |
| $e^{- t } \sin at$               | $2i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{4 + \omega^4}$                                                  |
| $e^{- t } \cos at$               | $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2 + \omega^2}{4 + \omega^4}$                                               |
| $\frac{e^{- t }}{t}$             | $i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{arctg} \omega$                                                   |
| $\sin t$                         | $i \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)]$                                     |
| $\cos t$                         | $\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$                                       |
| $\delta(t)$                      | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$                                                                                |
| $\text{v. p. } \frac{1}{t}$      | $i \sqrt{\frac{\pi}{2}} [2\theta(-\omega) - 1]$                                                        |

### А.3. Перетворення Мелліна

| $f(t)$                                   | $\Phi(z) = \mathcal{M}[f(t)] = \int_0^{\infty} t^{z-1} f(t) dt$ | УМОВИ                                             |
|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\delta(t-a)$                            | $a^{z-1}$                                                       |                                                   |
| $t^n \theta(t-a)$                        | $-\frac{a^{z+n}}{z+n}$                                          | $a > 0, \operatorname{Re}(z+n) < 0$               |
| $e^{-at}$                                | $a^{-z} \Gamma(z)$                                              | $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} z > 0$    |
| $e^{-t^2}$                               | $\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)$                    | $\operatorname{Re} z > 0$                         |
| $\sin t$                                 | $\Gamma(z) \sin \frac{\pi z}{2}$                                | $-1 < \operatorname{Re} z < 1$                    |
| $\cos t$                                 | $\Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2}$                                | $0 < \operatorname{Re} z < 1$                     |
| $\frac{1}{1+t}$                          | $\pi \operatorname{cosec} \pi z$                                | $0 < \operatorname{Re} z < 1$                     |
| $\frac{1}{1+t^2}$                        | $\frac{\pi}{2} \operatorname{cosec} \frac{\pi z}{2}$            | $0 < \operatorname{Re} z < 2$                     |
| $\frac{1}{(1+t)^\alpha}$                 | $\frac{\Gamma(\alpha-z)\Gamma(z)}{\Gamma(\alpha)}$              | $\operatorname{Re}(a-z), \operatorname{Re} z > 0$ |
| $(1-t)^{\alpha-1} \theta(1-t)$           | $\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(z)}{\Gamma(\alpha+z)}$              | $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} z > 0$    |
| $\ln(1+t)$                               | $\frac{\pi}{z} \operatorname{cosec} \pi z$                      | $-1 < \operatorname{Re} z < 0$                    |
| $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t$ | $\frac{\pi}{2z} \operatorname{cosec} \frac{\pi z}{2}$           | $0 < \operatorname{Re} z < 1$                     |
| $\operatorname{Si} t$                    | $-\frac{1}{z} \Gamma(z) \sin \frac{\pi z}{2}$                   | $\operatorname{Re} z > -1$                        |

## А.4. Перетворення Ганкеля

| $f(r)$                                           | $\nu$  | $g(s) = \mathcal{H}_\nu[f(r)] = \int_0^\infty f(r) J_\nu(sr) r dr$                |
|--------------------------------------------------|--------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $a^2 - r^2, \quad 0 < r < a$<br>$0, \quad r > a$ | 0      | $\frac{4a}{s^3} J_1(sa) - \frac{2a^2}{s^2} J_0(sa)$                               |
| $\frac{e^{-pr}}{r}$                              | 0      | $(s^2 + p^2)^{-1/2}$                                                              |
| $e^{-pr}$                                        | 0      | $p(s^2 + p^2)^{-3/2}$                                                             |
| $\frac{a}{(a^2 + p^2)^{3/2}}$                    | 0      | $e^{-as}$                                                                         |
| $\frac{\sin ar}{r}$                              | 0      | $(a^2 - s^2)^{-1/2}, \quad 0 < s < a$<br>$0, \quad s > a$                         |
| $\frac{\sin r}{r^2}$                             | 0      | $\pi/2, \quad s < 1$<br>$\arcsin \frac{1}{s}, \quad s > 1$                        |
| $\frac{e^{-pr}}{r^2}$                            | 1      | $\frac{(s^2 + p^2)^{1/2} - p}{s}$                                                 |
| $\frac{e^{-pr}}{r}$                              | 1      | $\frac{1}{s} - \frac{p}{s(s^2 + p^2)^{1/2}}$                                      |
| $e^{-pr}$                                        | 1      | $s(s^2 + p^2)^{-3/2}$                                                             |
| $\frac{\sin ar}{r}$                              | 1      | $0, \quad s < a$<br>$\frac{a}{s(s^2 - a^2)^{1/2}}, \quad s > a$                   |
| $r^\nu, \quad 0 < r < a$<br>$0, \quad r > a$     | $> -1$ | $\frac{a^{\nu+1}}{s} J_{\nu+1}(as)$                                               |
| $r^{\mu-1}$                                      | $> -1$ | $\frac{2^\mu \Gamma(1/2 + \mu/2 + \nu/2)}{s^{\mu+1} \Gamma(1/2 - \mu/2 + \nu/2)}$ |
| $r^\nu e^{-pr^2}$                                | $> -1$ | $\frac{s}{(2p)^{\nu+1}} e^{-s^2/4p}$                                              |



## Додаток В. Ортогональні системи координат

У цьому додатку наведено зв'язок декартових координат  $x, y, z$  з основними ортогональними координатами  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .

### *Циліндричні координати*

$$\xi_1 = r, \quad \xi_2 = \varphi, \quad \xi_3 = z.$$

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

$$z = z.$$

Координатні поверхні:  $r = \text{const}$  — циліндри,  $\varphi = \text{const}$  — площини,  $z = \text{const}$  — площини.

Оператор Лапласа:

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

### *Сферичні координати*

$$\xi_1 = r, \quad \xi_2 = \theta, \quad \xi_3 = \varphi.$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \theta.$$

Координатні поверхні:  $r = \text{const}$  — концентричні сфери,  $\varphi = \text{const}$  — площини,  $\theta = \text{const}$  — конуси.

Оператор Лапласа:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

## Додаток С. Деякі дробові інтеграли й похідні

$$\mathcal{J}^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}$$

$$\mathcal{J}^\alpha (x+c)^\beta = \frac{c^\beta}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha {}_2F_1\left(1, -\beta; \alpha+1; -\frac{x}{c}\right)$$

$$\mathcal{J}^\alpha e^{\lambda x} = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^\alpha} \frac{\gamma(\alpha, \lambda x)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^\alpha} \left[1 - \frac{\Gamma(\alpha, \lambda x)}{\Gamma(\alpha)}\right]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^\alpha \sin \lambda x &= \frac{x^\alpha}{2i \Gamma(\alpha+1)} [{}_1F_1(1; \alpha+1; i\lambda x) - {}_1F_1(1; \alpha+1; -i\lambda x)] = \\ &= \frac{\lambda x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} {}_1F_2\left(1; \frac{\alpha}{2}+1, \frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}; -\frac{\lambda^2 x^2}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^\alpha \cos \lambda x &= \frac{x^\alpha}{2 \Gamma(\alpha+1)} [{}_1F_1(1; \alpha+1; i\lambda x) + {}_1F_1(1; \alpha+1; -i\lambda x)] = \\ &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_1F_2\left(1; \frac{\alpha}{2}+1, \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}; -\frac{\lambda^2 x^2}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}^\alpha \ln x = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} [\ln x + \psi(1) - \psi(\alpha+1)]$$

$$\mathcal{J}^\alpha \sin \lambda \sqrt{x} = \sqrt{\pi} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1/2-\alpha} x^{(2\alpha+1)/4} J_{\alpha+1/2}(\lambda \sqrt{x})$$

$$\mathcal{D}^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}$$

$$\mathcal{D}^\alpha e^{\lambda x} = \lambda^\alpha e^{\lambda x} \frac{\gamma(-\alpha, \lambda x)}{\Gamma(-\alpha)} = \lambda^\alpha e^{\lambda x} \left[1 - \frac{\Gamma(-\alpha, \lambda x)}{\Gamma(-\alpha)}\right]$$

## Відповіді, вказівки, розв'язки

**I.1.**  $x = \frac{20}{17}, \quad y = -\frac{36}{17}.$

**I.2.**  $x = \frac{-b}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-a}{a^2 + b^2}.$

**I.3.** Дійсного розв'язку немає.

**I.4.**  $\frac{2(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2}.$

**I.6.**  $z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

**I.8.** а)  $|z| = 5, \quad \varphi = \arctg \frac{3}{4}; \quad$  б)  $|z| = 4, \quad \varphi = \frac{2}{3}\pi;$

в)  $|z| = 5\sqrt{2}, \quad \varphi = \arctg \frac{1}{7} - \pi.$

**I.9.** а)  $|z| = 5, \quad \varphi = -\arctg \frac{3}{4}; \quad$  б)  $|z| = 1, \quad \varphi = \frac{5}{4}\pi.$

**I.11.**  $x = \frac{u^2 - v^2 - u}{(1 - u)^2 + v^2}, \quad y = \frac{v}{(1 - u)^2 + v^2}.$

**I.17.** а)  $z + \bar{z} + i(z - \bar{z}) = 0; \quad$  б)  $z^2 + \bar{z}^2 = 2a^2.$

**I.18.** а)  $z\bar{z} + z + \bar{z} = 0; \quad$  б)  $\operatorname{Im} z^2 = 2; \quad$  в)  $|z| + \operatorname{Re} z = 1.$

**I.21.**  $\sqrt{x + iy} = \pm(u + iv),$

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}, \quad v = \operatorname{sign}(y) \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}}.$$

**I.22.** а)  $2(\cos \pi + i \sin \pi); \quad$  б)  $2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right); \quad$  в)  $2\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right).$

**I.23.** а)  $\sqrt{2(1 - \sin \alpha)} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \right]; \quad$  б)  $1 \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha).$

**I.24.** а)  $-2^{19}(1 + i\sqrt{3}); \quad$  б)  $2^{10}(1 + i); \quad$  в) 1728,  $\quad$  г) 1.

**I.25.** а) гіпербола  $xy = 1; \quad$  б) гіпербола  $x^2 - y^2 = 1.$

**I.26.** а) коло  $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ ;      б) коло  $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$ .

**I.27.** а) коло  $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ ;      б) гіпербола  $xy = -1$ .

**I.28.** а) коло  $x^2 + (y - 1)^2 = 3$ ;      б) дійсна вісь.

**I.29.** гіпербола  $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ .

**I.30.** а) коло  $(x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ ;      б) коло  $x^2 + y^2 = 1$ .

**I.31.** а) гіпербола  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}$ ;      б) парабола  $y^2 = 2x + 1$ .

**I.32.** а) еліпс  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ ;      б) гіпербола  $\frac{\left(y + \frac{9}{4}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$ ;

в) еліпс  $\frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$ .

**I.33.**  $\sqrt{3} - i$ .

**I.34.**  $\varphi = \frac{3}{4\pi}$ .

**I.35.**  $-\sqrt{2} + i7\sqrt{2}$ .

**I.36.**  $-3 - i\sqrt{3}$ .

**I.37.** а)  $\sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi$ ;      б)  $\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$ ;

в)  $\sin 4\varphi = 4 \cos^3 \varphi \sin \varphi - 4 \cos \varphi \sin^3 \varphi$ ;

г)  $\cos 4\varphi = \cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi$ .

**I.39.**  $n = 4$

**I.42.** а)  $w_0 = -1$ ;      б)  $w_0 = -3 - 4i$ ;      в)  $w_0 = \frac{1}{2}(1 + i)$ ;

г)  $w_0 = -\frac{5 + 12i}{13}$ .

**I.43.** а)  $u = 2x - 1$ ,     $v = 2y$ ;      б)  $u = x^2 - y^2 + x$ ,     $v = (2x + 1)y$ ;

в)  $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,     $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ .

**I.44.** а)  $u = x + 2xy, \quad v = y^2 - x^2 - y;$

б)  $u = \frac{y - (x^2 + y^2)(1 - y)}{2(x^2 + y^2)}, \quad v = \frac{x - (x^2 + y^2)x}{2(x^2 + y^2)}.$

**I.45.** а)  $u = e^{-x} \cos y, \quad v = e^{-x} \sin y;$

б)  $u = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy, \quad v = -e^{x^2 - y^2} \sin 2xy;$

в)  $u = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \operatorname{sh} y;$

г)  $u = \operatorname{ch} x \cos(y - 1), \quad v = \operatorname{sh} x \sin(y - 1).$

**I.46.** а)  $u = \operatorname{sh} x \cos y, \quad v = \operatorname{ch} x \sin y;$

б)  $u = \frac{\sin x \cos x}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}, \quad v = \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x};$

в)  $u = \cos x \operatorname{ch} y, \quad v = -\sin x \operatorname{sh} y.$

**I.47.** а)  $u = \frac{(1 - y)(1 + x) - xy}{(1 + x)^2} + y^2, \quad v = \frac{x(1 + x) + y(1 - y)}{(1 + x)^2 + y^2};$

б)  $u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}.$

**I.48.** а)  $e^2 \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i); \quad б) -ie^2.$

**I.49.** а)  $i \operatorname{sh} 2; \quad б) \cos 1 \operatorname{ch} 1 + i \sin 1 \operatorname{ch} 1; \quad в) -\operatorname{sh} 1.$

**I.50.** а) лінія  $u = 4 \cos \varphi (2 \cos \varphi + 1) - 3, \quad v = 4 \sin \varphi (2 \sin \varphi + 1);$

б) круг  $|w| < 4; \quad в) \text{коло } |w| = 4.$

**I.51.** а)  $|z| = \frac{3}{4}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}; \quad б) |z| = \frac{5}{4}, \quad \varphi = \pi.$

**I.52.**  $|z| = \operatorname{ch} 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$

**I.53.**  $|z| = \pi, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}.$

**I.54.**  $|z| = \cos^2(\ln 3), \quad \varphi = 0.$

**I.55.**  $|z| = 0, \quad \varphi - \text{невизначений}.$

**I.61.** а)  $\pm \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}; \quad б) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i); \quad в) \frac{1}{2}(\pm \sqrt{3} + i) - i;$

г)  $\pm \left( \cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8} \right), \quad \pm \left( \cos \frac{3}{8}\pi + i \sin \frac{3}{8}\pi \right).$

**I.62.** а)  $\pm 1, \quad \pm i;$

б)  $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1 + i),$

$\sqrt[6]{2} \left( -\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right), \sqrt[6]{2} \left( \sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12} \right); \quad в) \pm (\sqrt{3} - i).$

**I.63.** а)  $\sqrt[10]{2}(\cos 6^\circ + i \sin 6^\circ), \quad \sqrt[10]{2}(\cos 78^\circ + i \sin 78^\circ),$

$\sqrt[10]{2}(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ), \quad \sqrt[10]{2}(\cos 222^\circ + i \sin 222^\circ),$

$\sqrt[10]{2}(\cos 294^\circ + i \sin 294^\circ);$

б)  $\pm \frac{(1+i)}{\sqrt{2}};$

в)  $\cos \frac{5}{18}\pi + i \sin \frac{5}{18}\pi, \quad \cos \frac{17}{18}\pi + i \sin \frac{17}{18}\pi,$

$\cos \frac{29}{18}\pi + i \sin \frac{29}{18}\pi.$

**I.64.** а)  $3 - 4i, \quad -3 + 4i;$

б)  $2^{1/6} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = 2^{-4/3} \left[ (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1) \right],$

$2^{1/6} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2^{-1/3} (-1 + i),$

$2^{1/6} \left( \cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right) = 2^{-4/3} \left[ (1 - \sqrt{3}) - i(1 + \sqrt{3}) \right].$

**I.65.** а)  $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3}{4} \pi i;$

б)  $e^{(x^2 - y^2) \ln 2 - 4\pi xy} [\cos(2xy \ln 2 + (x^2 - y^2)2\pi k) +$   
 $+ i \sin(2xy \ln 2 + (x^2 - y^2)2\pi k)].$

**I.66.** а)  $-i \operatorname{cth} \pi;$  б)  $2k\pi - i \ln(\sqrt{2} - 1), \quad (2k + 1)\pi - i \ln(\sqrt{2} + 1);$

в)  $k\pi + i \frac{\ln 2}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$

г)  $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi - i \ln(\sqrt{2} + 1), \quad \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi - i \ln(\sqrt{2} - 1).$

**I.67.** а)  $1 + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$  б)  $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i;$  в)  $\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i;$

г)  $\ln \sqrt{2} + \left(2k - \frac{3}{4}\right)\pi i.$

**I.68.** а)  $\ln \sqrt{13} + \left(2k\pi - \operatorname{arctg} \frac{2}{3}\right)i;$

б)  $-\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi + 2m\pi i \quad (k, m = 0, \pm 1, \dots);$  в)  $\left(\frac{4}{3} + 2k\right)\pi i.$

- I.69.** а)  $e^{-(2k+\frac{1}{2})\pi}$ ; б)  $e^{(2k+\frac{1}{2})\pi}$ ; в)  $e^{-2k\pi}$ ; г)  $e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i}$ .
- I.70.** а)  $e^{-(4k+\frac{1}{2})\pi}$ ; б)  $e^{(i-1)(2k+\frac{1}{6})\pi}$ ; в)  $2^{3/2} e^{3(2k\pi-\frac{\pi}{4})-3(\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}-2k\pi)i}$ .
- I.71.** а)  $|z| = e^{-2k\pi}$ ,  $\varphi = \ln 10 + 2m\pi$  ( $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );  
б)  $|z| = 9^{2k\pi}$ ,  $\varphi = -\ln 3 + 2m\pi$  ( $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).
- I.72.** а)  $z_k = (2k+1)\pi \pm i \ln 2$  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ );  
б)  $z_{2k} = 2k\pi - i \ln(\sqrt{\pi^2+1} - \pi)$ ,  
 $z_{2k+1} = (2k+1)\pi - i \ln(\sqrt{\pi^2+1} + \pi)$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );  
в)  $z = \frac{1}{\operatorname{Ln}(1-i) - 1}$ .
- I.73.** а)  $z = 1 - i$ ; б)  $z = i - e$ .
- I.74.** а)  $z_k = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );  
б)  $z_{2k} = 2k\pi i$ ,  $z_{2k+1} = (2k+1)\pi i + \ln 3$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );  
в)  $z_k = -\ln(1 + \sqrt{2}) - \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$ ,  $z_k = -\ln(\sqrt{2} - 1) - \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).
- I.75.** а)  $z_k = -\frac{i}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) + \left(\frac{1}{4} + k\right)\pi$ ,  $z_k = -\frac{i}{2} \ln(\sqrt{2} - 1) + \left(k - \frac{1}{4}\right)\pi$ ;  
б)  $z_k = -\frac{i}{2} \ln \frac{\cos b}{1 + \sin b} + \frac{\pi}{2} \left(2k + \frac{1}{2}\right)$ ,  $\sin b \neq -1$ .
- I.76.** а) безліч; б) тільки одна гілка  $k = 0$ .
- I.77.** а)  $z = \pm 1$ ; б)  $z = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$  — усі точки розгалуження алгебраїчні.
- I.78.** а)  $z = \pm i$ ,  $\infty$ ; б)  $z = 1$ ,  $-\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$  — логарифмічні точки розгалуження.
- I.79.** а)  $z = -1$ ,  $\infty$  — логарифмічні точки розгалуження;  
б)  $z = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$  — алгебраїчні точки розгалуження.
- I.80.**  $z = 0$ ,  $-1$  — логарифмічні точки розгалуження.

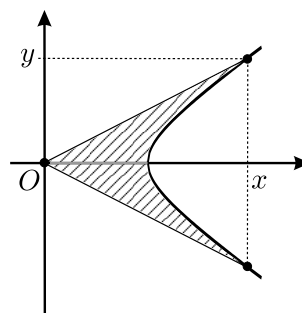
**I.85.** а)  $\operatorname{Arc} \sec z = -i \operatorname{Ln} \left( \frac{1}{z} \pm i \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}} \right);$

б)  $\operatorname{Arc} \operatorname{cosec} z = -i \operatorname{Ln} \left( \frac{i}{z} \pm \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}} \right).$

**I.86.** а)  $\operatorname{Ar} \operatorname{sech} z = \operatorname{Ln} \left( \frac{1}{z} \pm \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1} \right);$

б)  $\operatorname{Ar} \operatorname{cosech} z = \operatorname{Ln} \left( \frac{1}{z} \pm \sqrt{\frac{1}{z^2} + 1} \right).$

**I.88.** Значення оберненого гіперболического синуса  $\operatorname{ar} \operatorname{sh} y$  дорівнює площі, заштрихованій на рисунку (крива — це права гілка одиничної гіперболи  $x^2 - y^2 = 1$ ).



**I.89.** а) неаналітична; б) аналітична; в) неаналітична; г) аналітична.

**I.90.** а) неаналітична; б) аналітична; в) аналітична; г) неаналітична.

**I.91.** а) неаналітична; б) неаналітична; в) неаналітична.

**I.92.** а) неаналітична; б) аналітична.

**I.93.**  $f(z) = \frac{1}{z}.$

**I.94.**  $f(z) = \ln z.$

**I.95.**  $f(z) = z^2 + 2z.$

**I.96.**  $f(z) = 2 \operatorname{sh} z - z^2.$

**I.97.**  $f(z) = 2 \sin z - z.$

**I.98.**  $f(z) = 4 \operatorname{ch} z + z^2 - 1.$

**I.99.**  $f(z) = 2 \cos 2z + z.$

**I.100.**  $f(z) = 2i(\cos z - 1) - iz^2 + 2.$

**I.101.**  $f(z) = e^z + z^2 + 3z - 1.$

**I.102.**  $f(z) = 3iz + z^2.$

**I.103.**  $f(z) = e^z + z^2 + 5z + 9.$

**I.108.** а) може бути; б) ні; в) може бути.

**I.109.** а) ні; б) ні.

**I.110.**  $a + c = 0.$

**I.111.** а) неспряжені; б) спряжені.

**I.112.** а) неспряжені; б) спряжені.

**I.116.**  $-\frac{\pi}{2}.$

**I.117.**  $\frac{1}{4}(e^2 - 1)(1 + i).$

**I.118.** 0.



I.119. 0.

**I.120.**  $(i - 1)e^i$ .

**I.121.** -1.

**I.122.**  $\frac{3}{5}(i-1).$

**I.123.** a), б)  $e \cos 1 - 1 + ie \sin 1$ .

**I.124.**  $\ln \sqrt{\operatorname{sh}^2 1 + \cos^2 1} + i \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \operatorname{th} 1).$

**I.125.** а) 1;      б)  $1 + \frac{i}{3}$ ;      в)  $1 - \frac{i}{3}$ .

**I.126.**  $-(1 + i \operatorname{sh} 1)$ .

**I.127.**  $-\left(\operatorname{tg} 1+\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 1+\frac{1}{2} \operatorname{th}^2 1\right)+i \operatorname{th} 1 .$

**I.128.** а)  $e(2e^{-i}) - 1$ ; б)  $e^{-i}(e - 2) + 1$ .

**I.129.** а)  $\frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (e - 1);$  б)  $\frac{1}{4} \left( e^{-1/2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$   
в)  $\left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (1 - \ln 2).$

**I.130.**  $-\frac{4}{3}$ .

**I.131.**  $\frac{i}{2} \left( 1 + \frac{\text{sh } 2}{2} \right).$

**I.132.**  $\frac{3}{5}(i-1).$

**I.133.**  $-2(1 + i)$ .

**I.134.**  $i\pi$ .

**I.135.**  $-7e^{-2} + (3 - 2i)e^i$ .

**I.136.**  $\cos 1 - \sin 1 + \frac{i}{e}$ .

**I.137.**  $1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1)$ .

**I.138.**  $\frac{1}{4}[1 - \cos(2 + 2i)]$ . **I.139.** 0.

**I.139.** 0.

**I.140.**  $-4 + 2\pi i$ .

**I.141.** а)  $2\pi i$ ; б)  $-2\pi i$ .

**I.142.** а)  $2(i-1)$ ; б)  $2\sqrt{2}i$ .

**I.143.**  $2\sqrt{2} - 4 + 2i\sqrt{2}$ .

**I.144.**  $-\frac{1}{8} \left( \frac{\pi^2}{4} + 3 \ln^2 2 \right) + i \frac{\pi}{8} \ln 2.$

**I.145.** а)  $-\frac{\pi^2}{8}$ ; б)  $\frac{1}{2}(1 + \pi i)$ .

**I.146.**  $\sqrt{2 \operatorname{sh} 1} + i \left( \sqrt{2 \operatorname{sh} 1} - 2\sqrt{\sin 1} \right).$

**I.147.**  $\frac{4}{5} \sqrt[4]{2} \left[ (2 + \sqrt{2}) i + \sqrt{2} \right].$

**I.148.**  $\ln(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}.$

**I.149.**  $\frac{1}{2} + 2\pi i$ .

**I.150.**  $\frac{1}{2e} [e^2 - 5 - 4\pi^2(e^2 - 1) + 8\pi i(e - 1)].$

**I.151.**  $-\pi i$ .

**I.152.**  $2\pi i$ .

**I.153.**  $-\frac{\pi(\pi+2)\sqrt{2}}{8}i.$

**I.154.**  $-\frac{\pi i}{27}.$

I.155. 0.

**I.156.**  $\pi i$ .

- I.157.**  $\pi e^{-1}$ . **I.158.**  $\frac{\pi}{2}i$ . **I.159.**  $\pi \operatorname{sh} 1$ .  
**I.160.** 0. **I.161.**  $\pi^3 i$ . **I.162.**  $-\frac{\pi^2}{2} \operatorname{sh} 1$ .  
**I.163.** 0. **I.164.**  $-2\pi i$ . **I.165.**  $\frac{-(1+i)}{2} e^i \pi$ .  
**I.166.**  $\frac{2}{3} \pi i \operatorname{ch} \pi$ . **I.167.** 0. **I.168.**  $-\frac{\pi}{45} i$ .  
**I.169.**  $\pi$ . **I.170.** 0. **I.171.**  $\frac{\pi}{\sqrt{2}} i$ .  
**I.172.**  $\frac{\pi}{2}(\pi i - 1)$ .  
**I.173.** а) 0, б)  $(-1)^{n-1} \frac{2\pi i(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(a-b)^{2n-1}}$ , в) 0.  
**I.174.**  $2\pi \operatorname{sh} 1$ . **I.175.**  $-\frac{\pi i}{4}$ . **I.176.**  $-\pi i e$ .  
**I.177.** 0. **I.178.**  $-\pi i \operatorname{ch} 1$ . **I.179.** 0.  
**I.180.** а)  $R = 1$ ; б)  $R = 1$ . **I.181.** а)  $R = \sqrt{2}$ ; б)  $R = \infty$ .  
**I.182.** а)  $R = 1$ ; б)  $R = \infty$ . **I.183.** а)  $R = 1$ ; б)  $R = 1$ .  
**I.184.** а)  $R = 1$ ; б)  $R = \infty$ . **I.185.** а)  $R = 1$ ; б)  $R = e^{-1}$ .  
**I.186.** а)  $-\sin 1 + 2(z+1)\cos 1 + \frac{2^2}{2!}(z+1)^2 \sin 1 - \frac{2^3}{3!}(z+1)^3 \cos 1 - \dots$ ,  
 $R = \infty$ ;  
б)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \left(z + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!} \left(z + \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(z + \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots \right]$ ,  $R = \infty$ ;  
в)  $\sqrt{e} \left[ 1 + \frac{1}{2}(2z-1) + \frac{1}{2!2^2}(2z-1)^2 + \frac{1}{3!2^3}(2z-1)^3 + \dots \right]$ ,  $R = \infty$ .  
**I.187.** а)  $-\frac{1}{5} \left[ 1 + \frac{1}{5}(z+2) + \frac{3^2}{5^2}(z+2)^2 + \frac{3^3}{5^3}(z+2)^3 + \dots \right]$ ,  $R = \frac{5}{3}$ ;  
б)  $-\frac{1}{5} - \frac{9}{25}z - \frac{41}{125}z^2 - \dots$ ,  $R = 1$ ;  
в)  $-iz + z^3 + iz^5 - z^7 - \dots$ ,  $R = 1$ .  
**I.188.** а)  $1 + \frac{1}{2} \left( \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right)$ ,  $R = \infty$ ;  
б)  $\ln 2 - \frac{1}{2} \left( \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2 \cdot 4} + \frac{z^3}{3 \cdot 8} + \dots \right)$ ,  $R = 2$ ;

$$\text{в)} \frac{1}{2} \left( \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \right), \quad R = \infty.$$

$$\text{I.189. а)} S(z) = \frac{\pi z^3}{6} - \frac{\pi^3 z^7}{336} + \frac{\pi^5 z^{11}}{42240} \mp \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)! (4n+3)} z^{4n+3};$$

$$\text{б)} C(z) = z - \frac{\pi^2 z^5}{40} + \frac{\pi^4 z^9}{3456} - \frac{\pi^6 z^{13}}{599040} \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi/2)^{2n}}{(2n)! (4n+1)} z^{4n+1}.$$

$$\text{I.190. а)} \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} z + \frac{1}{3! 2^3} z^3 + \frac{3}{5! 2^5} z^5 + \dots, \quad R = \pi;$$

$$\text{б)} \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} z + \frac{1}{2! 2^2} z^2 - \frac{1}{3! 2^3} z^3 \pm \dots, \quad R = \sqrt{\ln^2(2 - \sqrt{3}) + \pi^2};$$

$$\text{в)} \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} z - \frac{1}{2! 6^3} z^2 + \frac{1}{3! 6^3} z^3 + \dots, \quad R = \sqrt{\ln^2 5 + \pi^2}.$$

$$\text{I.191. а)} \ln 2 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{2! 2^2} z^2 - \frac{1}{4! 2^3} z^4 + \dots, \quad R = \pi;$$

$$\text{б)} -\frac{1}{2!} z^2 - \frac{2}{4!} z^4 - \frac{16}{6!} z^6 + \dots, \quad R = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{в)} \ln 2 - \frac{z^2}{4} - \frac{z^4}{4! 4} - \frac{z^6}{6! 2} + \dots, \quad R = \pi.$$

$$\text{I.192. а)} 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} + \dots, \quad R = 1;$$

$$\text{б)} e \left( 1 + z + \frac{3}{2!} z^2 + \frac{13}{3!} z^3 + \dots \right), \quad R = 1;$$

$$\text{в)} \ln 2 + \frac{z}{2} - \frac{5z^2}{2 \cdot 4} + \frac{7z^3}{3 \cdot 8} - \dots, \quad R = 1.$$

$$\text{I.193. arsh } z = z - \frac{1 \cdot z^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot z^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot z^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 z^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} \mp \dots$$

**I.194.** Отримати тотожність  $\frac{t}{e^t - 1} = t \operatorname{cth} \frac{t}{2} - \frac{-t}{e^{-t} - 1}$  і скористатися означенням чисел Бернуллі. Остаточо

$$\operatorname{cth} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}.$$

$$\text{I.195. } \frac{z+1}{z-3}, \quad \left| \frac{z+1}{z-1} \right| < 2. \quad \text{I.196. } \frac{2(z-1)(z+i)}{[z-(2+i)]^2}, \quad \left| \frac{z+i}{z-1} \right| < 2.$$

$$\text{I.197. } 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + 13z^6 + 21z^7 + 34z^8 + 55z^9 + \dots,$$

коефіцієнти ряду є так званими числами Фібоначчі:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = F_1 = 1.$$

$$\text{I.198. } \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n+1)!}.$$

$$\text{I.199. } \frac{2}{2!}z - \frac{8}{4!}z^3 + \frac{32}{6!}z^5 \mp \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+2)!}.$$

$$\text{I.200. } \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}.$$

$$\text{I.201. } z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3-n}}{n!}.$$

$$\text{I.202. } z^4 - \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!z^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4-2n}}{(2n)!}.$$

$$\text{I.203. } \frac{4^2}{2!2z^3} - \frac{4^4}{4!2z^5} + \frac{4^6}{6!2z^7} \pm \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4^{2n}}{(2n)! 2 z^{2n+1}}.$$

$$\text{I.204. } \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+2)!}.$$

$$\text{I.205. } \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} - \frac{z}{4!} \pm \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{n-3}}{n!}.$$

$$\text{I.206. } 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}.$$

$$\text{I.207. } \frac{2}{z^4} - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!} - \frac{z^2}{6!} \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-4}}{(2n)!}.$$

$$\text{I.208. a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 2^{n-1}}{z^n}.$$

$$\text{I.209. a) } \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+2}}.$$

**I.210.** а) не розкладається; б)  $\frac{1}{5} \left( \frac{2^2+1}{z^3} - \frac{2^3+2}{z^4} + \frac{2^4-1}{z^5} \mp \dots \right).$

**I.211.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n.$  **I.212.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+2)^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^2}{3^{n+1}}.$

**I.213.** не розкладається. **I.214.**  $\frac{1}{z-1} + 5 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{(z-1)^n}.$

**I.215.**  $z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)4^{n+1}}{z^{2n+1}}.$  **I.216.**  $-\frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n-1}}.$

**I.217.**  $-\frac{i}{2(z-i)} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^n} (z-i)^n.$

**I.218.**  $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n+1}}{3} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{3 \cdot 2^{n+1}} z^n.$

**I.219.**  $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2}{3} z^n + \frac{1}{6} + \frac{5}{12} z + \frac{7}{24} z^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 17}{3 \cdot 2^{n+1}} z^n.$

**I.220.**  $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n-1}}{5} z^{2n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2(-1)^{n-1}}{5} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5 \cdot 2^n} z^n.$

**I.221.**  $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{5} z^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{5 \cdot 4^{n+1}} z^{2n}.$

**I.222.**  $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n-1}}{9} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n+5}{9 \cdot 2^{n+2}} (z-1)^n.$

**I.223.**  $\sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{(n+1)(-1)^n}{9} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 2^{n+1}}{27 \cdot 2^{2n+3}} (z-1)^n.$

**I.224.**  $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1 + (-1)^n 4^{-n-1}}{5} z^{2n}.$

**I.225.** а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ n - \frac{(-1)^n}{2^n} \right] z^{n-1};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n;$

в)  $\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-2)^n}{z^{n+1}}.$

- I.226.** а)  $\frac{1}{9} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+7}{4^{n+2}} z^{2n+1} \right]$ ; б)  $\frac{1}{9} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (3n-7)4^{n-2}}{z^{2n-1}}$ .
- I.227.**  $\frac{1}{3}(z+1)^{-1} - \frac{8}{9} + \frac{19}{17}(z+1) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{8}{3^{n+2}}(z+1)^n$ .
- I.228.** а)  $z = 0$  — нуль другого порядку,  $z_{1,2} = \pm 2i$  — прості нулі;  
 б)  $z_n = n\pi$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — прості нулі;  
 в)  $z = 0$  — нуль третього порядку,  $z_n = n\pi$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — прості нулі.
- I.229.** а)  $z = 0$  — простий нуль,  $z_n = n\pi i$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — нулі другого порядку;  
 б)  $z_n = (2n+1)\pi i$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — нулі другого порядку;  
 в)  $z_n = (4n+1)\frac{\pi}{2}i$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — нулі другого порядку.
- I.230.** а) нуль другого порядку; б) нуль третього порядку;  
 в) простий нуль.
- I.231.** а) нуль четвертого порядку; б) простий нуль;  
 в) нуль другого порядку.
- I.232.** а) нуль четвертого порядку; б) нуль п'ятнадцятого порядку.
- I.233.** а) полюс третього порядку; б) полюс четвертого порядку.
- I.234.** а) полюс другого порядку; б) усувна особлива точка.
- I.235.** а) простий полюс; б) полюс другого порядку.
- I.236.** а) усувна особлива точка; б) усувна особлива точка.
- I.237.** а)  $z_n = (4n+1)\frac{\pi}{2}$ , ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — полюси другого порядку;  
 б)  $z = 0$  — усувна особлива точка.
- I.238.** а)  $z = -2$  — суттєво особлива точка;  
 б)  $z = 0$  — суттєво особлива точка.
- I.239.** а)  $z = 0$  — полюс другого порядку,  
 $z = -1$  — полюс другого порядку;  
 б)  $z = 0$  — полюс другого порядку,  
 $z = 2n\pi i$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — прості полюси.
- I.240.** а)  $z = 0$  — суттєво особлива точка;  
 б)  $z = -1$  — суттєво особлива точка;  
 в)  $z = 0$  — суттєво особлива точка.

- I.241.** а)  $z = 0$  — усувна особлива точка,  
 $z = 2\pi k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — полюси другого порядку;  
 б)  $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — усувні особливі точки,  
 $z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — прості полюси;  
 в)  $z = k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) — полюси другого порядку.
- I.242.** а) усувна особлива точка; б) простий полюс.
- I.243.** а) простий полюс; б) усувна особлива точка.
- I.244.** а) суттєво особлива точка;  
 б)  $z = 0$  — полюс четвертого порядку,  $z = -1$  — простий полюс.
- I.245.** а) усувна особлива точка; б) усувна особлива точка.
- I.246.** а) простий полюс; б) усувна особлива точка.
- I.247.** а) суттєво особлива точка; б) полюс третього порядку;  
 в) простий полюс.
- I.248.** а) простий полюс; б) суттєво особлива точка.
- I.249.** а) суттєво особлива точка; б) суттєво особлива точка;  
 в) полюс п'ятого порядку.
- I.250.** а) суттєво особлива точка; б) суттєво особлива точка.
- I.251.** а) полюс другого порядку; б) усувна особлива точка.
- I.253.** а)  $-\frac{16}{3}$ ; б)  $\frac{1}{4}$ . **I.254.** а)  $-1$ ; б)  $0$ .
- I.255.** а)  $\operatorname{res} f(0) = 0$ ,  $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi}$ ,  $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \frac{-8}{\pi^2(2n+1)(4n+1)}$   
 ( $\forall n \in \mathbb{Z}$ );  
 б)  $\operatorname{res} f(0) = \frac{1}{24}$ ;  
 в)  $\operatorname{res} f(-i) = -\frac{1+3i}{20} \cos 1$ ;  $\operatorname{res} f(i) = -\frac{1-3i}{20} \cos 1$ ;  
 $\operatorname{res} f(3) = \frac{\operatorname{ch} 3}{10}$ .
- I.256.** а)  $\operatorname{res} f\left(\pm \frac{\pi}{6} + \pi n\right) = \mp \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\pm \frac{\pi}{6} + \pi n}$  ( $\forall n \in \mathbb{Z}$ );  
 б)  $\operatorname{res} f(0) = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{res} f(1) = e$ ; в)  $\operatorname{res} f(-1) = \frac{1}{27}$ ,  $\operatorname{res} f(2) = -\frac{1}{27}$ .

$$\text{I.257. a) } \operatorname{res} f(0) = 0, \quad \operatorname{res} f(z_1) = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}} e^i, \quad \operatorname{res} f(z_2) = \frac{(1-i)e^{-1}}{4\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{res} f(z_3) = \frac{(1+i)}{4\sqrt{2}}, \quad \operatorname{res} f(z_4) = -\frac{(1-i)e^{-i}}{4\sqrt{2}},$$

де  $z_k (k = 1, 2, 3, 4)$  — корені рівняння  $z^4 + 1 = 0$ ;

$$\text{б) } \operatorname{res} f(0) = -\frac{1}{6}; \quad \text{в) } \operatorname{res} f(0) = 0.$$

$$\text{I.258. a) } \operatorname{res} f(-i) = i \frac{4}{9} \operatorname{sh} 2, \quad \operatorname{res} f\left(\frac{i}{2}\right) = -\frac{4}{9} (e + 2e^{-1}) i;$$

$$\text{б) } \operatorname{res} f(0) = -\frac{1}{6}, \quad \operatorname{res} f(3) = \frac{2}{27} \sin^2\left(\frac{3}{2}\right);$$

$$\text{в) } \operatorname{res} f(0) = 0.$$

$$\text{I.259. a) } \operatorname{res} f(-3) = \frac{1}{8} e^{-3i}, \quad \operatorname{res} f(-1) = -\frac{e^{-i}}{4}, \quad \operatorname{res} f(1) = \frac{e^i}{8};$$

$$\text{б) } \operatorname{res} f(0) = -\frac{4}{\pi^2}, \quad \operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$\text{в) } \operatorname{res} f(i) = -1.$$

$$\text{I.260. a) } \operatorname{res} f(\pi n) = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{Z});$$

$$\text{б) } \operatorname{res} f(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!(2n)!}.$$

$$\text{I.261. a) } \operatorname{res} f(0) = \sin 1, \quad \operatorname{res} f(1) = -\sin 1;$$

$$\text{б) } \operatorname{res} f(ia) = \frac{e^{-a}}{2ia}, \quad \operatorname{res} f(-ia) = -\frac{e^a}{2ia}.$$

$$\text{I.262. a) } \operatorname{res} f(0) = 1 - e^{-1}, \quad \operatorname{res} f(-1) = e^{-1};$$

$$\text{б) } \operatorname{res} f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+1)!}$$

$$\text{I.263. a) } \operatorname{res} f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!n!}; \quad \text{б) } \operatorname{res} f(1) = e.$$

$$\text{I.264. a) } \operatorname{res} f(2n\pi i) = 1 + 2n\pi i \quad (\forall n \in \mathbb{Z});$$

$$\text{б) } \operatorname{res} f(4i) = \frac{\operatorname{sh} 2\pi}{8(4i-1)}, \quad \operatorname{res} f(-4i) = -\frac{\operatorname{sh} 2\pi}{8(4i+1)};$$

$$\text{в) } \operatorname{res} f(0) = \frac{1}{n!}.$$



$$\text{I.265. a) } \operatorname{res} f(\pm 1) = \pm \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \operatorname{res} f(1) = e; \quad \text{в) } \operatorname{res} f(1) = \frac{3}{2}.$$

$$\text{I.266. a) } \operatorname{res} f(\pm i) = \mp \frac{3i}{16}; \quad \text{б) } \operatorname{res} f(1) = 0;$$

$$\text{в) } \operatorname{res} f(n) = \frac{(-1)^n}{\pi} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{I.267. a) } \operatorname{res} f(1) = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{res} f(\pm i) = \frac{1}{4};$$

$$\text{б) } \operatorname{res} f\left(\left[n + \frac{1}{2}\right] \pi i\right) = 1 \quad (\forall n \in \mathbb{Z}); \quad \text{в) } \operatorname{res} f(n) = \frac{1}{\pi} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{I.268. a) } \operatorname{res} f(\pi i) = -\frac{1}{5!} = -\frac{1}{120}; \quad \text{б) } \operatorname{res} f(0) = -\frac{i}{2}, \quad \operatorname{res} f(2) = 1 + \frac{i}{2}.$$

$$\text{I.269. } \operatorname{res} f(1) = -2e^{2\pi i k a}.$$

$$\text{I.270. a) } 0; \quad \text{б) } (1 - 2e^{-1}) \pi i;$$

$$\text{I.271. a) } 2(1 - e^{-1}) \pi i; \quad \text{б) } -\frac{1}{3} \pi i.$$

$$\text{I.272. a) } 0; \quad \text{б) } -\frac{4}{3} \ln 3 \pi i;$$

$$\text{I.273. a) } 2\pi i; \quad \text{б) } [\cos 1 + \sin 1 + i(\sin 1 - \cos 1)] \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{I.274. a) } \pi i; \quad \text{б) } 0; \quad \text{I.275. a) } 2\pi i \frac{e^2}{3}; \quad \text{б) } 0.$$

$$\text{I.276. a) } -\pi^2 i; \quad \text{б) } 2\pi i. \quad \text{I.277. a) } 0; \quad \text{б) } 3\pi i;$$

$$\text{I.278. a) } \frac{\sin 1 - 4 \sin 1}{12} \pi i; \quad \text{б) } -\frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{I.279. a) } -\frac{\pi i}{2}; \quad \text{б) } -\frac{16}{3} \pi i. \quad \text{I.280. a) } -\frac{2\pi i}{2}; \quad \text{б) } -2\pi i \cos 1.$$

$$\text{I.281. a) } 4\pi i(\cos 1 - \sin 1); \quad \text{б) } -2\pi i.$$

$$\text{I.282. a) } -\pi i(\cos 1 + 2 \sin 1); \quad \text{б) } \frac{\pi}{2}(i - 1) \sin 1.$$

$$\text{I.283. a) } \frac{\pi(\pi + 2i)}{4}; \quad \text{б) } \frac{2\pi i}{(m+1)!}. \quad \text{I.284. } \frac{i-3}{10}.$$

$$\text{I.285. } \frac{2}{5} \pi(1 - 2i).$$

$$\text{I.286. } -2\pi i \text{ для гілки } \operatorname{Ln}(z-2) \Big|_{z=1} = -\pi i; \quad 0 \text{ — для всіх інших гілок.}$$

**I.287.** 0 для гілки  $\sqrt{z}\Big|_{z=1} = 1$ ;  $-4\pi ie$  для гілки  $\sqrt{z}\Big|_{z=1} = -1$ .

**I.288.** Вказівка: застосувати безпосередню формулу для обчислення коефіцієнтів ряду Лорана.

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ C_{2n-1}^{(0)} - \frac{2}{\pi^{2n}} \right] z^{2n-1},$$

де  $C_{2n-1}^{(0)}$  — коефіцієнти розкладу в кільці  $0 < |z| < \pi$ :

$$C_{2n-1}^{(0)} = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{(-1)^{n-1} 2(2^{2n-1} - 1)B_{2n}}{(2n)!}, & n \geq 0 \end{cases}.$$

**I.289.** а)  $z = \infty$  — простий полюс;  
 б)  $z = \infty$  — усувна особлива точка;  
 в)  $z = \infty$  — суттєво особлива точка.

**I.290.** а)  $z = \infty$  — усувна особлива точка;  
 б)  $z = \infty$  — полюс третього порядку;  
 в)  $z = \infty$  — усувна особлива точка.

**I.291.** а)  $z = \infty$  — усувна особлива точка;  
 б)  $z = \infty$  — полюс четвертого порядку;  
 в)  $z = \infty$  — суттєво особлива точка.

**I.292.** а)  $z = \infty$  — полюс четвертого порядку;  
 б)  $z = \infty$  — суттєво особлива точка;  
 в)  $z = \infty$  — суттєво особлива точка.

**I.293.** а)  $z = \infty$  — полюс другого порядку;  
 б)  $z = \infty$  — усувна особлива точка;  
 в)  $z = \infty$  — усувна особлива точка.

**I.294.** а)  $\operatorname{res} f(\infty) = -\frac{\sin ia}{a}$ ;    б)  $\operatorname{res} f(\infty) = \begin{cases} -1, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$ .

**I.295.** а)  $\operatorname{res} f(\infty) = -e^{-1}$ ;    б)  $\operatorname{res} f(\infty) = e^b - e^a$ .

**I.296.**  $2\pi i$ .

**I.297.** 0.

**I.298.**  $-\frac{\pi}{3}i$ .

**I.299.** 0.

**I.300.**  $2\pi ie$ .

**I.301.**  $2\pi i$ .

**I.302.** а)  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ; б)  $\frac{\pi}{ab(a+b)}$ ; в)  $\frac{3}{8}\pi$ .

**I.303.** а)  $-\frac{\pi}{27}$ ; б)  $\frac{\pi}{2(b^2-a^2)^3} \left( \frac{5b^2-a^2}{b^3} + \frac{b^2-5a^2}{a^3} \right)$ ; в)  $\frac{2}{3}\pi$ .

**I.304.** а)  $\frac{2}{3}\pi$ ; б)  $\frac{\pi}{2}$ ; в)  $\frac{\pi}{16a^{3/2}b^{5/2}}$ .

**I.305.** а)  $\frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1)$ ; б)  $\frac{\pi}{2}e^{-4}(2\cos 2 + \sin 2)$ ; в)  $\frac{\pi}{12}e^{-2}(2e - 1)$ .

**I.306.** а)  $\frac{\pi}{3}e^{-3}$ ; б)  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-a/\sqrt{2}} \left( \cos \frac{a}{\sqrt{2}} + \sin \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$ ; в)  $\frac{\pi}{2a}e^{-a}$ .

**I.307.** а) 0; б)  $\frac{\pi}{4}(2-a)e^{-a}$ ; в)  $\frac{\pi}{16} \left( e^{-\lambda} - \frac{1}{3}e^{-3\lambda} \right)$ .

**I.308.** а)  $\frac{2\pi}{1-p^2}$ ; б)  $\frac{2\pi}{p^2(p^2-1)}$ .

**I.309.** 0.

**I.310.** а)  $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ ; б)  $\frac{2\pi}{b^2} \left( a - \sqrt{a^2-b^2} \right)$ .

**I.311.**  $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ .

**I.312.** а)  $\frac{\pi}{2}$ ; б)  $\frac{\pi}{2}(1-e^{-1})$ ; в)  $\frac{b-a}{2}\pi$ .

**I.313.**  $\frac{1}{b} \ln \sqrt{a^2+b^2} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ .

**I.314.**  $\frac{\pi}{8}$ .

**I.315.**  $\frac{\pi}{2b^2} e^{-ab/\sqrt{2}} \sin \frac{ab}{\sqrt{2}}$ .

**I.316.**  $\frac{\pi}{2} e^{-(ac+b/c)}$ .

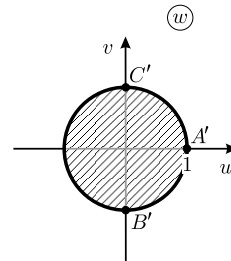
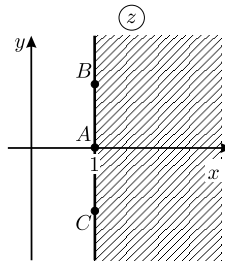
**I.317.**  $\frac{\pi}{c} e^{ac} \sin ab$ . **I.318.**  $\frac{\pi}{b^3} \frac{e^{-ab^2}}{2\sqrt{2}}$ .

**I.319.** а) 0; б)  $\frac{\pi^3}{8}$ .

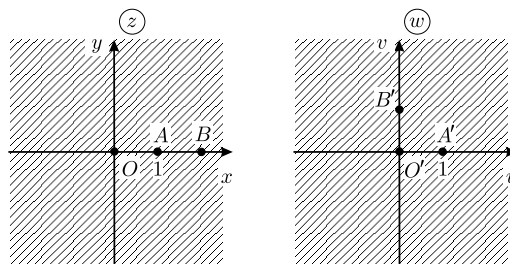
**I.320.** а)  $\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ; б)  $\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ; в)  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

**I.321.**  $\frac{\pi}{\sin \pi a}$ .

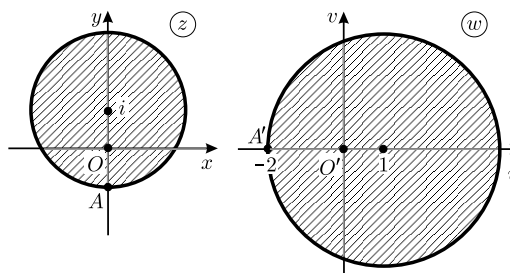
**I.322.**  $w = \frac{2}{z} - 1$ .



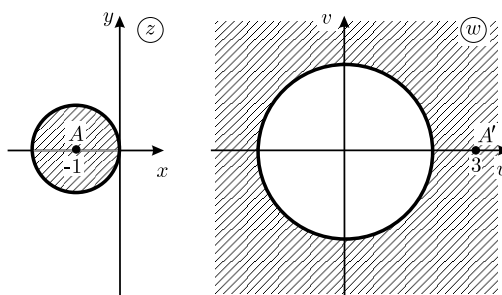
I.323.  $w = \frac{z(i-1)}{z(i+1)-2}.$



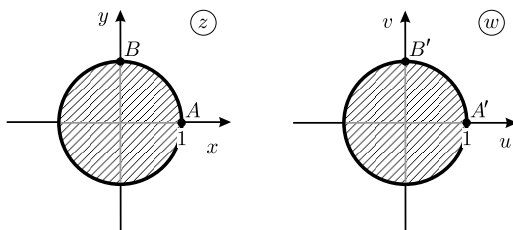
I.324.  $w = \frac{16z}{z+9i}.$



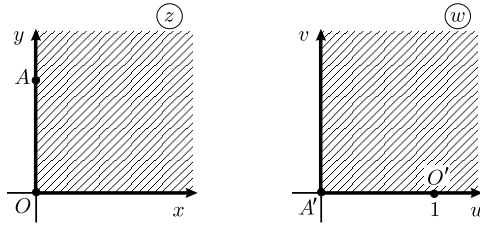
I.325.  $w = \frac{4z+10}{3z+5}.$



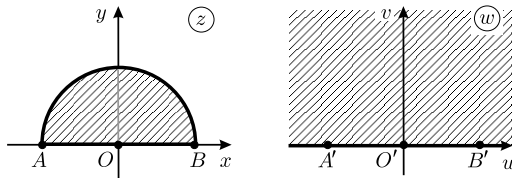
I.326.  $w = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \frac{2z - (1 - \sqrt{2} + i)}{2 - z(1 - \sqrt{2} - i)}.$



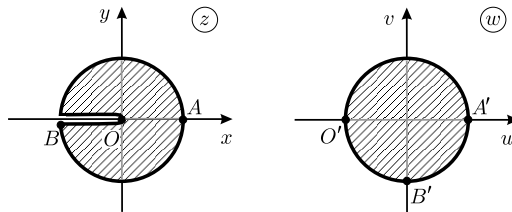
**I.327.**  $w = \sqrt{1+z^2}$ , тут мається на увазі, що  $\arg \sqrt{1+z^2} = \frac{1}{2} \arg(1+z^2)$ .



**I.328.**  $w = \frac{(1+z)^2 - (1-z)^2}{(1+z)^2 + (1-z)^2}$ .



**I.329.**  $w = -\frac{(1-i\sqrt{z})^2 + i(1+\sqrt{z})^2}{(1+i\sqrt{z})^2 + i(1-i\sqrt{z})^2}$ , тут мається на увазі, що  $\arg \sqrt{z} = \frac{1}{2} \arg z$ .



**II.1.** а)  $\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$ ; б)  $\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$ ; в)  $\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$ .

**II.2.** а)  $\frac{p^4+16p^2+24}{p(p^2+4)(p^2+16)}$ ; б)  $\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$ ; в)  $\frac{1}{(p-1)^2}$ .

**II.3.** а)  $\frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$ ; б)  $\frac{2(p^2+p+1)}{(p^2-1)^2}$ .

$$\text{II.4. а) } \frac{2p^2 + 4p + 8}{(p^2 + 4)^2}; \quad \text{б) } \frac{6p}{(p^2 - 1)^2}.$$

$$\text{II.5. а) } \frac{1}{p(p^2 + 1)}; \quad \text{б) } \frac{p^3 + p^2 + p\omega^2 - \omega^2}{p(p^2 + \omega^2)^2}.$$

$$\text{II.6. а) } \frac{4}{(p^2 - 4)^2}; \quad \text{б) } \frac{p^2 + 2\omega^2}{p^2(p^2 + 4\omega^2)}.$$

$$\text{II.7. а) } \frac{1}{p^2 - \omega^2}; \quad \text{б) } \frac{2}{p(p + 1)^3}.$$

$$\text{II.8. а) } \ln \frac{p}{p - 1}; \quad \text{б) } \ln \frac{p + 1}{p}; \quad \text{в) } \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{p^2 + 4}}{p}.$$

$$\text{II.9. а) } \ln \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{p}; \quad \text{б) } \frac{1}{2} \ln \frac{p^2 + 4}{p^2 + 1}.$$

$$\text{II.10. а) } \ln \frac{p}{p - 1} - \frac{1}{p}; \quad \text{б) } \ln \frac{p + 1}{p - 1}.$$

$$\text{II.11. а) } \frac{1}{(p - 1)(p^2 + 1)}; \quad \text{б) } \frac{p}{(p - 2)(p^2 + 1)}.$$

$$\text{II.12. а) } \frac{2}{p^2(p^2 - 1)}; \quad \text{б) } \frac{p}{p^3(p + 2)}.$$

$$\text{II.13. а) } e^{-2t} \sin t; \quad \text{б) } \frac{1}{2} (e^{-t} - e^{-3t}).$$

$$\text{II.14. а) } (1 - t)e^{-t}; \quad \text{б) } 1 - e^{-t} - te^{-t}.$$

$$\text{II.15. а) } \frac{2\sqrt{3}}{9} e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{3\sqrt{3}}{2} t; \quad \text{б) } t - \sin t.$$

$$\text{II.16. а) } e^{-t} (1 - t^2); \quad \text{б) } \frac{1}{3} e^{t/2} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) - \frac{1}{3} e^{-t}.$$

$$\text{II.17. а) } \frac{3}{5} + \frac{e^{-2t}}{5} (4 \sin t - 3 \cos t); \quad \text{б) } \frac{1}{9} (e^{-2t} - e^t + 3te^t).$$

$$\text{II.18. а) } \frac{1}{3} te^t - \frac{1}{3} te^{-t/2} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right);$$

$$\text{б) } (t - 3) e^{-(t-3)} \theta(t - 3), \text{ тут } \theta(t) \text{ — функція Гевісайда (II.5-11).}$$

$$\text{II.19. а) } \theta(t - 1) \operatorname{sh}(t - 1) + \theta(t - 2) \operatorname{ch} 2(t - 2);$$

$$\text{б) } \theta \left( t - \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{5} e^{-(t-\frac{1}{2})} - \frac{1}{20} \cos 2 \left( t - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{10} \sin 2 \left( t - \frac{1}{2} \right) \right].$$

- II.20.**  $\varphi(x) \doteq \Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \tilde{K}(p)}$ , де  $f(x) \doteq F(p)$ ,  $K(x) \doteq \tilde{K}(p)$ .
- II.22.**  $\mathcal{L}_B[f(t); p] = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{p^2/4b}$  **II.23.**  $\mathcal{L}_B[f(t); p] = -\frac{\sqrt{\pi}}{b^{3/2}} p e^{p^2/4b}$ .
- II.24.**  $F(p, q) = \frac{p+q}{(1+p^2)(1+q^2)}$  **II.25.**  $F(p, q) = \frac{a}{apq + q^2}$
- II.26.**  $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a|k|}}{a}$ .
- II.27.**  $i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2a} [\operatorname{ch}(a|k-1|) - \operatorname{ch}(a|k+1|) + \operatorname{sh}(a|k+1|) - \operatorname{sh}(a|k-1|)]$ .
- II.28.**  $-\sqrt{2\pi} e^{-|k|/\sqrt{2}} \left[ \sin \frac{|k|}{\sqrt{2}} - \cos \frac{|k|}{\sqrt{2}} \right]$ , якщо  $k \neq 0$ , і  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$  для  $k = 0$ .
- II.29.**  $i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \arctg k$ . **II.30.**  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k^2} [e^{-ik}(1+ik) - 1]$ .
- II.31.**  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}$ . **II.32.**  $e^{-\omega^2/2}$ .
- II.33.**  $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin k\pi}{1-k^2}$ , значення в точці  $k = 1$  можна доозначити як границю виразу при  $k \rightarrow 1$ .
- II.34.**  $\frac{4\pi A}{k^2 + \alpha^2}$ .
- II.35.**  $\frac{4\pi q}{k^2}$ . *Вказівка:* розглянути функцію  $\frac{e^{-\varepsilon r}}{r}$ ,  $\varepsilon > 0$  (див. задачу II.34) і в результаті перейти до границі  $\varepsilon \rightarrow +0$ .
- II.36.**  $\frac{4\pi\Phi_0}{k^3} (\sin ka - ka \cos ka)$ . **II.37.**  $\frac{1}{2^{n/2}} e^{-|\mathbf{k}|^2/4}$ .
- II.38.**  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(q) e^{iqx} dq}{1 - K(q)}$ , де  $f(q), K(q)$  — фур'є-образи функцій  $f(x), K(x)$  відповідно.
- II.39.**  $F_2(r) = 1 + \frac{V}{N} \frac{4\pi}{r} \int_0^{\infty} (S_k - 1) k \sin kr dk$ ,  
функція  $F_2(r)$  залежить лише від модуля радіус вектора.

**II.40.** а)  $i\mathbf{k}\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = 4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega}$ ; б)  $\mathbf{k}\mathbf{B}_{\mathbf{k}\omega} = 0$ ; в)  $i[\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}] = i\frac{\omega}{c}\mathbf{B}_{\mathbf{k}\omega}$ ;  
 г)  $i[\mathbf{k} \times \mathbf{B}_{\mathbf{k}\omega}] = -i\frac{\omega}{c}\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\mathbf{k}\omega}$ .

Тут  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$  означає векторний добуток векторів  $\mathbf{a}$  і  $\mathbf{b}$ .

**II.42.** Вказівка: Розглянути інтеграл  $\oint_C \frac{f(z) dz}{z - x_0}$  і врахувати, що єдина особливість підінтегральної функції знаходиться на дійсній осі.

**II.44.**  $x(t) = \frac{e^{-2t} - \cos t + 2 \sin t}{5}$ .

**II.45.**  $x(t) = -1$ .

**II.46.**  $x(t) = t$ .

**II.47.**  $x(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{5}{12}e^{-3t} - \frac{2}{3}$ .

**II.48.**  $x(t) = \frac{1}{8}(3e^t - e^{-3t} - 2e^{-t})$ .

**II.49.**  $x(t) = \frac{2}{25}e^{-2t} - \frac{2}{25}\cos t + \frac{14}{25}\sin t - \frac{1}{5}t \sin t - \frac{2}{5}t \cos t$ .

**II.50.**  $x(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - te^{-t} - \cos t)$ .

**II.51.**  $x(t) = \frac{1}{2}e^t - t - 1 + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$ .

**II.52.**  $x(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t - 4 + e^{-t}$ .

**II.53.**  $x(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \operatorname{ch} t) - t - 1$ . **II.54.**  $x(t) = \operatorname{ch} t - \frac{1}{2}t^2 - 1$ .

**II.55.**  $x(t) = 2 + t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}te^t - \frac{3}{2}e^t$ .

**II.56.**  $x(t) = 1 - \frac{22}{25}e^{-t} - \frac{6}{5}te^{-t} - \frac{3}{25}\cos 2t + \frac{4}{25}\sin 2t$ .

**II.57.**  $x(t) = \frac{t}{4}\sin 2t + \frac{1}{12}(\cos 2t - \cos 4t)$ .

**II.58.**  $x(t) = 2t - 3 + 3e^{-t} - \frac{1}{5}(\sin 2t - 2\cos 2t + 2e^{-t})$ .

**II.59.**  $x(t) = \frac{\gamma}{2}t^2 + (1 - \gamma)t + (\gamma - 1) + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$ .

**II.60.**  $x(t) = 1 - e^{-t}\left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right)$ .

**II.61.**  $x(t) = \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{9}t + \frac{35}{54} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{4}{27}e^{-3t}$ .



$$\text{II.62. } x(t) = \frac{83}{80} \operatorname{ch} 2t - \frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{16} \cos 2t.$$

$$\text{II.63. } x(t) = \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{9}t + \frac{35}{54} - e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{4}{27}e^{-3t}.$$

$$\text{II.64. } x(t) = C_1 t^2 e^{-t} + x(0)e^{-t}, \quad C_1 = \text{const.}$$

$$\text{II.65. } x(t) = C_1 = \text{const.}$$

$$\text{II.66. } x(t) = e^{-t}.$$

$$\text{II.67. } x(t) = -1.$$

$$\text{II.68. } x(t) = e^t.$$

$$\text{II.71. } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k} \delta\left(x - \frac{\pi n}{k}\right). \quad \text{II.72. } A = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}. \quad \text{II.73. } A = \frac{a}{\pi}.$$

$$\text{II.75. } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad \text{— теорема Парсеваля.}$$

$$\text{II.76. } \delta(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z); \quad \delta(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi r^2} \delta(r).$$

$$\text{II.77. } \frac{1}{\pi}, \quad \frac{1}{2\pi}, \quad 0.$$

$$\text{II.78. } \operatorname{ch} 1.$$

$$\text{II.79. } -\frac{1}{\pi}.$$

$$\text{II.80. } -1.$$

$$\text{II.81. } -e.$$

$$\text{II.82. } -i\frac{\pi}{2} \operatorname{cth} \frac{ap}{2}.$$

*Вказівка:* Розкласти  $f(x)$  на прості дробі і застосувати формулу Сохоцького.

$$\text{II.83. } \theta_\omega = \frac{1}{i\omega}.$$

$$\text{II.84. } \text{Рівняння Пуассона у Фур'є-зображенні має вигляд: } -k^2 \varphi_{\mathbf{k}} = -4\pi \rho_{\mathbf{k}}.$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Переходячи в інтегралі до сферичних координат, остаточно отримаємо

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

$$\text{II.86. } \frac{d|x|}{dx} = \theta(x), \quad \frac{d^2|x|}{dx^2} = \delta(x).$$

$$\text{II.88. } \mathcal{L}[\delta(x)] = 1.$$

$$\text{II.93. } \theta(x) \cos x.$$

$$\text{II.94. } \delta(x) - \theta(x) \sin x.$$

- II.95.**  $\frac{\pi^4}{90}$ .                      **II.96.**  $\frac{\pi}{a \operatorname{sh} \pi a}$ .                      **II.97.**  $\frac{\pi^6}{945}$ .  
**II.98.**  $\frac{\pi^2}{8}$ .                      **II.99.**  $\frac{\pi}{a \operatorname{sh} \pi a}$ .  
**II.100.**  $\frac{\pi}{a^3 \sqrt{2}} \frac{\operatorname{sh}(\pi a \sqrt{2}) + \sin(\pi a \sqrt{2})}{\operatorname{ch}(\pi a \sqrt{2}) + \cos(\pi a \sqrt{2})}$ .                      **II.101.**  $\frac{1}{16}(\pi^2 - 4)$ .  
**II.102.**  $\frac{\pi}{b(a^2 + b^2)^2} [2ab \operatorname{ctg} \pi a + (a^2 - b^2) \operatorname{cth} \pi b + \pi b(a^2 + b^2) \operatorname{cosec}^2 \pi a]$ .  
**II.103.**  $10 - \pi^2$ .                      **II.104.**  $\frac{\pi}{4}$ .  
**II.105.**  $-\frac{1}{a^2 t^2} + \frac{\pi}{2at(a^2 - t^2)} [a \operatorname{cth} \pi t - t \operatorname{cth} \pi a]$ .  
**II.106.**  $\frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2 t^2}{12} + \frac{\pi t^3}{12} - \frac{t^4}{48}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .                      **II.107.**  $\frac{1}{2}(\pi - t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .  
**II.108.**  $\frac{1}{12}(2\pi^2 t - 3\pi t^2 + t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .                      **II.109.**  $\frac{\pi^2 \operatorname{ctg} \pi a}{\sin \pi a}$ .  
**II.110.**  $\frac{1}{4a^4} \left( \frac{\pi^2 a^2 \operatorname{ch} \pi a}{\operatorname{sh}^2 \pi a} + \frac{\pi a}{\operatorname{sh} \pi a} - 2 \right)$ .  
**III.1.**  $u_{\xi\eta} - \frac{1}{16}(u_{\xi} - u_{\eta}) = 0$ ,     $\xi = x - y$ ,     $\eta = 3x + y$ .  
**III.2.**  $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\xi} = 0$ ,     $\xi = x$ ,     $\eta = 3x + y$ .  
**III.3.**  $u_{\eta\eta} + u_{\xi} = 0$ ,     $\xi = x - 2y$ ,     $\eta = x$ .  
**III.4.**  $u_{\xi\eta} + \frac{1}{6(\xi + \eta)}(u_{\xi} + u_{\eta}) = 0$ ,     $\xi = \frac{2}{3}x^{3/2} + y$ ,     $\eta = \frac{2}{3}x^{3/2} - y$ .  
 $x > 0$ ;     $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\xi}u_{\xi} = 0$ ,     $\xi = \frac{2}{3}(-x)^{3/2}$ ,     $\eta = y$ ,     $x < 0$ .  
**III.5.**  $u_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi - \eta)}(u_{\xi} - u_{\eta}) = 0$ ,     $\xi = x + 2\sqrt{y}$ ,     $\eta = x - 2\sqrt{y}$ ,     $y > 0$ .  
 $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}u_{\eta} = 0$ ,     $\xi = x$ ,     $\eta = 2\sqrt{-y}$ ,     $y < 0$ .  
**III.6.**  $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - \frac{1}{\xi}u_{\xi} + \frac{1}{\eta}u_{\eta} = 0$ ,     $\xi = \sqrt{|x|}$ ,     $\eta = \sqrt{|y|}$   
 $(x > 0, y > 0 \text{ або } x < 0 < y < 0)$ ;     $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\xi}u_{\xi} - \frac{1}{\eta}u_{\eta} = 0$ ,  
 $\xi = \sqrt{|x|}$ ,     $\eta = \sqrt{|y|}$  ( $x > 0, y < 0$  або  $x < 0, y > 0$ ).

$$\text{III.7. } u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\xi}u_{\xi} - \frac{1}{3\eta}u_{\eta} = 0, \quad \xi = |x|^{3/2}, \quad \eta = |y|^{3/2}$$

$$(x > 0, y > 0 \text{ або } x < 0, y < 0); \quad u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\xi}u_{\xi} + \frac{1}{3\eta}u_{\eta} = 0, \\ \xi = |x|^{3/2} (x > 0, y < 0 \text{ або } x < 0, y > 0).$$

$$\text{III.8. } u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - u_{\xi} - u_{\eta} = 0, \quad \xi = \ln|x|, \quad \eta = \ln|y| \text{ (у кожному квадранті)}.$$

$$\text{III.9. } u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\xi}u_{\xi} + \frac{1}{2\eta}u_{\eta} = 0, \quad \xi = y^2, \quad \eta = x^2 \text{ (у кожному квадранті)}.$$

$$\text{III.10. } u_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\eta^2 - \xi^2)}(\eta u_{\xi} - \xi u_{\eta}) = 0, \quad \xi = y^2 - x^2, \quad \eta = y^2 + x^2 \\ \text{(у кожному квадранті)}.$$

$$\text{III.11. } u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \operatorname{th} \xi u_{\xi} = 0, \quad \xi = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad \eta = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

$$\text{III.12. } u_{\xi\eta} - \frac{1}{2(\xi - \eta)}(u_{\xi} - u_{\eta}) + \frac{1}{4(\xi - \eta)}(u_{\xi} + u_{\eta}) = 0, \quad \xi = y^2 + e^x, \\ \eta = y^2 - e^x (y > 0 \text{ або } y < 0).$$

$$\text{III.13. } u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \cos \xi u_{\eta} = 0, \quad \xi = x, \quad \eta = y - \cos x.$$

$$\text{III.14. } u_{\eta\eta} - 2u_{\xi} = 0, \quad \xi = 2x - y^2, \quad \eta = y.$$

$$\text{III.15. } u_{\eta\eta} - 3u_{\xi} = 0, \quad \xi = xe^y, \quad \eta = y.$$

$$\text{III.16. } u_{\eta\eta} + 2\frac{\xi^2}{\eta^2}u_{\xi} + \frac{1}{\eta}e^{\xi} = 0, \quad \xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = y.$$

$$\text{III.17. } u_{\eta\eta} - \frac{\xi}{1 + \xi e^{\eta}}u_{\xi} - \eta e^{-2\eta}u = 0, \quad \xi = e^{-y} - e^{-x}, \quad \eta = x.$$

$$\text{III.18. } u_{\xi\eta} = 0, \quad \xi = x + y - \cos x, \quad \eta = -x + y - \cos x.$$

$$\text{III.19. } u_{\xi\eta} + \frac{\xi - \eta}{2[4 - (\xi - \eta)^2]}(u_{\xi} - u_{\eta}) = 0, \quad \xi = y + \cos x + \sin x, \\ \eta = y + \cos x - \sin x, \text{ якщо } x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

$$\text{III.20. } u_{\xi\eta} - \frac{1}{3(\xi^2 - \eta^2)}[(2\xi - \eta)u_{\xi} - (2\eta - \xi)u_{\eta}] = 0, \\ \xi = -2(-y)^{1/2} + \frac{2}{3}x^{3/2}, \quad \eta = -2(-y)^{1/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} (x > 0, y < 0), \\ \text{і } \xi = 2y^{1/2} + \frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \quad \eta = 2y^{1/2} - \frac{2}{3}(-x)^{3/2} (x < 0, y > 0); \\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\xi}u_{\xi} + \frac{1}{3\eta}u_{\eta} = 0, \quad \xi = 2y^{1/2}, \quad \eta = \frac{2}{3}x^{3/2} \\ (x > 0, y > 0) \text{ і } \xi = 2(-y)^{1/2}, \quad \eta = \frac{2}{3}(-x)^{3/2} (x < 0, y < 0).$$

**III.21.**  $u(x, y) = \varphi(x + y - \cos x) + \psi(x - y + \cos x).$

**III.22.**  $u(x, y) = \varphi(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + \psi(\sqrt{y} + \sqrt{x}).$

**III.23.**  $u(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}\varphi(xy) + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$

**III.24.**  $u(x, y) = \varphi(xy)\ln y + \psi(xy).$

**III.25.**  $u(x, y) = \frac{1}{x}[(\varphi(x - y) + \psi(x + y))].$

Ввести нову функцію  $v = xu$ .

**III.26.**  $u(x, y) = \frac{1}{x - y}[\varphi(x) + \psi(y)].$

Ввести нову функцію  $v = (x - y)u$ .

**III.27.**  $u(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}[\varphi(x) + \psi(y)].$

**III.28.**  $u(x, y) = \frac{1}{x - y} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\varphi(x) - \psi(y)}{x - y} \right], \quad \text{обрати } v = (x - y)u.$

**III.29.**  $u(x, y) = \varphi(y + x) + \psi(y + 3/2x).$

**III.30.**  $u(x, y) = e^{\frac{x-y}{2}}\varphi(y - 2x) + \psi(y - x).$

**III.31.**  $u(x, y) = e^{\frac{7x+y}{16}}[\varphi(y + 3x) + \psi(x + 3y)].$

**III.32.**  $u(x, y) = e^{-\frac{(x+y)}{16}} \left[ \varphi(y - 3x) + \psi(3y - x) - \frac{1}{8}(y - 3x)(3y - x)x \right].$

Зробити заміну  $v(\xi, \eta) = e^{\frac{\xi-\eta}{32}}w(\xi, \eta)$  у зведеному до канонічної форми рівнянні.

**III.33.**  $u(x, y) = 2e^x + e^{\frac{2y+x}{2}}[\varphi(x) + \psi(x + 2y)].$

**III.34.**  $u(x, y) = e^{x+\frac{y}{2}} + [(2x + y)e^{4x+y} + \varphi(2x + y) + \psi(4x + y)].$

**III.35.**  $u(x, y) = \varphi(y + 2x + \sin x) + e^{-\frac{1}{4}(y+2x+\sin x)}\psi(y - 2x + \sin x).$

**III.36.**  $u(x, y) = e^y(e^{2y} - e^{2x}) + \varphi(e^y + e^x) + \psi(e^y - e^x).$

**III.37.**  $u(x, y) = e^{-x} \left[ \varphi(y) + \int_0^x e^{-\xi^2 y^2 + \xi} \psi(\xi) d\xi \right].$

**III.38.**  $u(x, y) = y^{1/4}x^{3/4}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(yx^3).$

**III.39.**  $u(x, y) = \sqrt{xy}\varphi(y/x) + \psi(xy).$

$$\text{III.40. } u(x, y) = x \varphi(y) - \varphi'(y) + \int_0^x (x - \xi) C(\xi) e^{\xi y} d\xi.$$

Позначивши  $v = u_x$ , одержати співвідношення  
 $u = xv - v_y$ ,  $v_{xy} - xv_x = 0$ .

$$\text{III.41. } u = \frac{4}{5} \left( y^{5/4} - |x|^{5/2} \right). \quad \text{III.42. } u = \sin y - 1 + e^{x-y}.$$

$$\text{III.43. } u = x - y - 1/2 + \frac{1}{2} e^{2y}.$$

$$\text{III.44. } u = \frac{1}{2} [1 - x - 3y + (x + y - 1)e^{2x}].$$

$$\text{III.45. } u = xy + \frac{3}{2} \sin \frac{2y}{3} \cos \left( x + \frac{y}{3} \right). \quad \text{III.46. } u = x + \frac{1}{4} y^2, \quad x > 0.$$

$$\text{III.47. } u = x^3 y + \sin x - \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{2} x^2 y^2, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

$$\text{III.48. } u = \frac{x^2}{y}, \quad x > 0, \quad y > 0. \quad \text{III.49. } u = 2x + y - x^2.$$

$$\text{III.50. } u = \frac{y}{3x} + \frac{2x^2 y}{3}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

$$\text{III.51. } u = x^4 + y^2, \quad x > 0.$$

$$\text{III.52. } u = \frac{3}{4} \sqrt[4]{x^7 y} \left( \sqrt[3]{y} - \frac{1}{y} \right), \quad x > 0, \quad y > 0.$$

$$\text{III.53. } u = x^2 + 2y^2 + y, \quad x > 0. \quad \text{III.54. } u = x^2 + xy + y^2.$$

$$\text{III.55. } u = x + \cos(x - y + \sin x).$$

$$\text{III.56. } u = -\frac{x^2}{2} + \cos(x - 1 + e^y) - \cos x.$$

$$\text{III.57. } u = e^x \operatorname{sh} \left( \frac{y - \cos x}{2} \right) - \sin x \cos \left( \frac{y - \cos x}{2} \right).$$

$$\text{III.58. } u = 2e^{-\frac{1}{4}(2x-y+\cos x)} \cos x \sin \frac{1}{2}(y - \cos x).$$

$$\text{III.59. } u(x, y) = \varphi \left( x - \frac{2}{3} y^3 \right) + \frac{1}{2} \int_{x-2/3y^3}^{x+2y} \psi(\alpha) d\alpha.$$

$$\text{III.60. } u = (y - 3x) e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

$$\text{III.61. } u(x, y, z, t) = u(r, t) = \frac{(r - at)\varphi(r - at) + (r + at)\varphi(r + at)}{2r} + \\ + \frac{1}{2ar} \int_{r-at}^{r+at} r' \psi(r') dr'.$$

*Вказівка:* Ввести сферичні координати і врахувати, що розв'язок не буде залежати від кутових координат. Тому потрібно розв'язувати рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

$$\text{III.62. } u = \frac{l}{2\pi a} \sin \frac{2\pi a}{\ell} t \sin \frac{2\pi}{\ell} x.$$

$$\text{III.63. } u = \frac{2l}{a\pi} \sin \frac{a\pi}{2\ell} t \sin \frac{\pi}{2\ell} x + \cos \frac{5a\pi}{2\ell} t \sin \frac{5\pi}{2\ell} x.$$

$$\text{III.64. } u = \frac{2\ell}{a\pi} \sin \frac{a\pi}{2\ell} t \sin \frac{\pi}{2\ell} x + \frac{2\ell}{3a\pi} \sin \frac{3a\pi}{2\ell} t \sin \frac{3\pi}{2\ell} x + \\ + \frac{8\ell}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)a\pi}{2\ell} t \sin \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} x.$$

$$\text{III.65. } u = \cos \frac{a\pi}{2\ell} t \cos \frac{\pi}{2\ell} x + \frac{2\ell}{3a\pi} \sin \frac{3a\pi}{2\ell} t \cos \frac{3\pi}{2\ell} x + \\ + \frac{2\ell}{5a\pi} \sin \frac{5a\pi}{2\ell} t \cos \frac{5\pi}{2\ell} x.$$

$$\text{III.66. } u = t + \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)a\pi}{\ell} t \cos \frac{(2n+1)\pi}{\ell} x.$$

$$\text{III.67. } u = \frac{A}{1 + \left(\frac{a\pi}{\ell}\right)^2} \left( e^{-t} - \cos \frac{a\pi}{\ell} t + \frac{l}{a\pi} \sin \frac{a\pi}{\ell} t \right) \sin \frac{\pi}{\ell} x.$$

$$\text{III.68. } u = \frac{2\ell A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \left[ 1 + \left(\frac{na\pi}{\ell}\right)^2 \right]} \left( e^{-t} - \cos \frac{na\pi}{\ell} t + \frac{\ell}{na\pi} \sin \frac{n\pi a}{\ell} t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

$$\text{III.69. } u = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \left\{ \left[ \frac{a\pi(2n+1)}{2\ell} \right]^2 - 1 \right\}} \times \\ \times \left[ \sin t - \frac{2\ell}{a\pi(2n+1)} \sin \frac{a\pi(2n+1)}{2\ell} t \right] \sin \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} x.$$

$$\text{III.70. } u = \frac{A}{1 + \left(\frac{a\pi}{2\ell}\right)^2} \left( e^{-t} - \cos \frac{a\pi}{2\ell} t + \frac{2\ell}{a\pi} \sin \frac{a\pi}{2\ell} t \right) \cos \frac{\pi}{2\ell} x.$$

$$\text{III.71. } u = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) t^2 + \frac{x}{\pi} t^3 + \sin x \cos t + \\ + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[ (-1)^n 3t - 1 + \cos nt - \frac{3(-1)^n}{n} \sin nt \right] \sin nx.$$

$$\text{III.72. } u = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) e^{-t} + \frac{xt}{\pi} + \frac{1}{2} \cos 2t \sin 2x - \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n^2)} \left[ e^{-t} + n^2 \cos nt - \left(2n + \frac{1}{n}\right) \sin nt \right] \sin x.$$

$$\text{III.73. } u = x + t + \cos \frac{t}{2} \sin \frac{x}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)}{2} t \sin \frac{(2n+1)}{2} x.$$

$$\text{III.74. } u = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{4t}{[(2n+1)\frac{\pi}{2}]^3} - \frac{4}{[(2n+1)\frac{\pi}{2}]^4} \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} t \right\} \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} x.$$

$$\text{III.75. } u = -\frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^3} \cos(\sqrt{(2n+1)^2\pi^2 + 4t}).$$

$$\text{III.76. } u = \frac{8e^{-t}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \times \\ \times \left[ \cos(2n+1)t + \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)t \right] \sin(2n+1)x.$$

$$\text{III.77. } u(x, t) = e^{-bt} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t) \cos \frac{\alpha_n}{\ell} x,$$

$$\text{де } q_n = \left[ \left( \frac{a\alpha_n}{\ell} \right)^2 - b^2 \right]^{1/2}, \quad \alpha_n = \ell \lambda_n,$$

$$A_n = \frac{2}{e} \frac{\alpha_n^2 + (\beta\ell)^2}{\alpha_n^2 + (\beta\ell)^2 + \beta\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \cos \frac{\alpha_n}{\ell x} dx,$$

$$B_n = \frac{2}{e} \frac{\alpha_n^2 + (\beta\ell)^2}{\alpha_n^2 + (\beta\ell)^2 + \beta\ell} \int_0^{\ell} [\psi(x) + b\varphi(x)] \cos \frac{\alpha_n}{\ell x} dx.$$

$$\text{III.78. } u = t(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t/2} \frac{1}{(n\pi)^3} \left[ 2 \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n t - 2e^{t/2} \right] \sin \pi n x, \\ \lambda_n = \sqrt{(n\pi)^2 - 1/4}.$$

$$\text{III.79. } u = (2-x)t + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4t}{n\pi\lambda_n^2} - \frac{n\pi}{\lambda_n^3} \sin \lambda_n t \right) \sin \frac{n\pi}{2}x,$$

$$\lambda_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi^2}{2}\right) - 1}.$$

$$\text{III.80. } u = \frac{xt}{\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n\lambda_n^2} \left( t - \frac{\sin \lambda_n t}{\lambda_n} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

$$\lambda_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi^2}{2}\right) - 1}.$$

$$\text{III.81. } u = \sin 2x \cos 2t + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^3} (-1 + \cos nt) \sin nx.$$

$$\text{III.82. } u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2L} + B_n \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2L} \right] \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L},$$

де

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L} dx,$$

$$B_n = \frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^L g(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L} dx.$$

*Вказівка:* Задача полягає у знаходженні розв'язку рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

з умовами

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0 \quad (t > 0),$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad (0 \leq x \leq L).$$

Тут  $u$  — поздовжнє зміщення перерізу стрижня,  $L$  — довжина стрижня,  $\rho$  — об'ємна густина,  $E$  — модуль пружності (модуль Юнга).

$$\text{III.83. } u(x, t) = e^{-ht} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right] \sin \frac{\pi n x}{L}.$$

де

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx,$$



$$B_n = \frac{h}{\omega_n} A_n + \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L g(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx,$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\pi^2 n^2 a^2}{L^2} - h^2}.$$

*Вказівка:* Задача полягає у знаходженні розв'язку рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

з умовами

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0 \quad (t > 0),$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad (0 \leq x \leq L).$$

Тут  $h$  — коефіцієнт пропорційності.

**III.84.**  $u = \frac{2\ell A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$

**III.85.**  $u = \frac{8\ell A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-\left[\frac{(2n+1)a\pi}{2\ell}\right]^2 t} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} x.$

**III.86.**  $u = A.$  **III.87.**  $u = e^{-\left(\frac{a^2\pi^2}{4\ell^2} + \beta\right)t} \sin \frac{\pi}{2\ell} x.$

**III.88.**  $u = \frac{A-B}{\ell} x + B + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [(-1)^n A - B] e^{-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$

**III.89.**  $u = \frac{1}{\beta + \left(\frac{a\pi}{\ell}\right)^2} \left[ 1 - e^{-\left[\beta + \left(\frac{a\pi}{\ell}\right)^2\right]t} \right] \sin \frac{\pi}{\ell} x.$

**III.90.**  $u = \frac{aA}{\cos \frac{\ell}{a}} e^{-t} \sin \frac{x}{a} + \frac{2}{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{B}{\lambda_n} + \frac{(-1)^n A a^2}{1 - a^2 \lambda_n^2} \right] e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x,$

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\ell}, \quad \lambda_n \neq \frac{1}{a}.$$

Обрати  $w = e^{-t} f(x)$ ,  $u = v + w.$

**III.91.**  $u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^3} (\lambda_n t - 1 + e^{-\lambda_n t}) \cos \sqrt{\lambda_n} x, \quad \sqrt{\lambda_n} = (2n+1) \frac{\pi}{2}.$

**III.92.**  $u = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3} e^{-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2 t} \cos \frac{2n+1}{2} \pi x.$

$$\text{III.93. } u = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-\left(\frac{\pi^2(2n+1)^2}{\ell^2} + 1\right)t} \sin \frac{2n+1}{\ell} \pi x.$$

$$\text{III.94. } u = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-(4+(2n+1)^2)t} \sin(2n+1)x.$$

$$\text{III.95. } u = x - \ell + \frac{8\ell}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t}}{(2n+1)^2} \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2\ell}.$$

$$\text{III.96. } u = t \cos x + \frac{1}{8} (e^{-8t} - 1) \cos 3x.$$

$$\text{III.97. } u = x + t \sin x + \frac{1}{8} (1 - e^{-8t}) \sin 3x.$$

$$\text{III.98. } u = tx^2 + \frac{1}{4} (e^{4t} - 1) + t \cos 2x.$$

$$\text{III.99. } u = t^2 x + e^t + e^{-3t} \cos 2x + \sin t - \cos t.$$

$$\text{III.100. } u = x^2 + 2e^{9t} + (2t - \sin 2t) \cos 3x.$$

$$\text{III.101. } u = e^x \sin x (1 - e^{-t}) + e^{x-4t} \sin 2x + 1 + t.$$

$$\text{III.102. } u = x^2 t + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{2k-1}}{(2k-1)^2 - 6} \left(1 - e^{-[(2n-1)^2 - 6]t}\right) \cos(2n-1)x,$$

$$C_{2k-1} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-3} \right).$$

$$\text{III.103. } u = t(x+1) + e^{-2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n^2 \pi^2 + 4} \left[1 - e^{-(n^2 \pi^2 + 4)t}\right] \sin n\pi x,$$

$$C_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k-3} \right), & n = 2k-1. \end{cases}$$

III.104. Потрібно розв'язати рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

за умов

$$u(0, t) < \infty, \quad u_r(R, t) = \frac{q}{k}, \quad u(r, 0) = 0.$$

У результаті отримаємо

$$u(r, t) = \frac{qR}{k} \left( \frac{3a^2}{R^2} t - \frac{3R^2 - 5r^2}{10R^2} - \frac{2R}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^3 \cos \mu_n} e^{-\frac{a^2 \mu_n^2}{R^2} t} \sin \frac{\mu_n r}{R} \right),$$

де  $\mu_1, \mu_2, \dots$  — додатні корені рівняння  $\mu = \operatorname{tg} \mu$ .

$$\text{III.105. } u = A \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{b}} \sin \frac{\pi y}{b} + B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

$$\text{III.106. } u = \frac{4v}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)(a-x)\pi}{b} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{b}}{(2n+1) \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi a}{b}}.$$

$$\begin{aligned} \text{III.107. } u &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2a} y, \\ C_n &= \frac{2}{a} \operatorname{cosech} \frac{(2n+1)\pi b}{2a} \int_0^a f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \, dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III.108. } u &= \frac{(a^2 B - 2A)y}{2b} + A - \frac{4aB}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi b}{a}} \times \\ &\times \cos \frac{(2n+1)\pi}{a} x \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{a} y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III.109. } u &= A + \frac{2a}{\pi} \left[ B \operatorname{sh} \frac{\pi}{2a} y - \left( \operatorname{sech} \frac{\pi b}{2a} \right) \left( \frac{2A}{a} + B \operatorname{sh} \frac{\pi b}{2a} \right) \operatorname{ch} \frac{\pi}{2a} y \right] \times \\ &\times \sin \frac{\pi}{2a} x - \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sech} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}}{2n+1} \operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi}{2a} y \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x. \end{aligned}$$

$$\text{III.110. } u = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi x}{2b} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b}}{(2n+1) \operatorname{ch} \frac{2n+1}{2b} \pi a}.$$

$$\begin{aligned} \text{III.111. } u &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{(2n+1)\pi}{2b} x} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b}, \\ C_n &= \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} \, dy. \end{aligned}$$

$$\text{III.112. } u = Ar \cos \varphi + C.$$

$$\text{III.113. } u = \frac{1}{4} \left( 3r \sin \varphi - \frac{r^3}{3R^2} \sin 3\varphi \right) + C.$$

$$\text{III.114. } u = \frac{1}{2} (1 + r^2 \cos 2\varphi).$$

$$\text{III.115. } u = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} r^4 \cos 4\varphi.$$

$$\text{III.116. } u = A + (B - A) \frac{\ln r}{\ln 2}.$$

$$\text{III.117. } u = \frac{3}{2} - \frac{\ln r}{\ln 2} + \left( \frac{2}{3r^2} - \frac{1}{6}r^2 \right) \cos 2\varphi.$$

$$\text{III.118. } u = \frac{b}{b^2 - a^2} \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi.$$

$$\text{III.119. } u = A \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)} + \frac{Bb^2}{b^4 - a^4} \left( r^2 - \frac{a^4}{r^2} \right) \sin 2\varphi.$$

$$\text{III.120. } u = A + \frac{a^2 q}{a^2 + b^2} \left( r - \frac{b^2}{r} \right) \cos \varphi + \frac{b^2 B}{a^4 + b^4} \left( r^2 + \frac{a^4}{r^2} \right) \sin 2\varphi.$$

$$\text{III.121. } u = \frac{2A\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \varphi.$$

$$\text{III.122. } u = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^{\frac{(2n+1)\pi}{2\alpha}} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} \varphi,$$

$$C_n = \frac{2}{\alpha} R^{-\frac{(2n+1)\pi}{2\alpha}} \int_0^{\alpha} f(\varphi) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} \varphi d\varphi.$$

$$\text{III.123. } u = C + \frac{A}{4}(r^2 - b^2) + \frac{B - C + \frac{A}{4}(b^2 - a^2)}{\ln b - \ln a} \ln \frac{b}{r}.$$

$$\text{III.124. } u = \frac{Ar^2}{24}(R^2 - r^2) \sin 2\varphi.$$

$$\text{III.125. } u(\rho, \theta) = \frac{1}{3}(1 - \rho^2) + \rho^2 \cos^2 \theta.$$

*Вказівка:* Ввівши сферичні координати  $(\rho, \theta, \varphi)$  і врахувавши, що результат не залежить від азимутального кута  $\varphi$ , вихідне рівняння Лапласа можна звести до такого вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0.$$

**III.126.** Розглядатимемо задачу в полярних координатах  $(r, \varphi)$ :

$$\Delta u = 0, \quad u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, \quad u(R, \varphi) = k\varphi.$$

Її розв'язком є функція

$$u(r, \varphi) = \frac{2k\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left( \frac{r}{R} \right)^{\pi n / \alpha} \sin \frac{\pi n \varphi}{\alpha}.$$

$$\text{III.127. } u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha.$$

$$\text{III.128. } u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\alpha, \tau) d\tau.$$

$$\text{III.129. } u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta) e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2t}} d\eta.$$

$$\text{III.130. } u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta, \tau) \frac{e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} d\eta.$$

$$\text{III.131. } u(x, y, t) = -\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

$$\text{III.132. } u(x, y, t) = -\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^2} \int_0^t \frac{d\tau}{(\sqrt{t-\tau})^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta.$$

$$\text{III.133. } u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

$$\text{III.134. } u(x, t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

$$\begin{aligned} \text{III.135. } u(x, t) &= \frac{A\kappa}{(\kappa^4 + a^2t^2)^{1/4}} \exp \left[ -\frac{\kappa^2 x^2}{4(\kappa^4 + a^2t^2)} \right] \times \\ &\times \cos \left[ \frac{atx^2}{4(\kappa^4 + a^2t^2)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{at}{\kappa^2} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{III.136. } u(x, t) = u_0 \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\eta^2} d\eta \right).$$

$$\text{III.137. } u(x, t) = u_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\eta^2} d\eta.$$

$$\text{III.138. } u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau.$$

$$\text{III.139. } u(x, y) = -\frac{1}{a} \int_0^x f(x-\xi) \sin \xi d\xi.$$

$$\text{III.140. } u(x, y) = Ae^{-3y} \cos 2x - \frac{B}{2} x \sin x.$$

$$\text{III.141. } u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}t^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2n\ell + x) e^{-\frac{(2n\ell+x)^2}{4a^2t}}.$$

$$\text{III.142. } u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

$$\text{III.143. } u(x, t) = e^{-a^2t} \sin x.$$

$$\text{III.144. } u(x, t) = A \sin \frac{\pi}{\ell} x \cos \frac{\pi a}{\ell} t.$$

$$\text{III.145. } u(x, t) = \frac{C_1 + C_2}{2} + \frac{C_2 - C_1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \text{ де } \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

— функція (інтеграл) помилок, її позначають також  $\operatorname{erf}(x)$ .

$$\text{III.146. } u(x, t) = \frac{a}{\sqrt{1+4a^2t}} e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}}.$$

$$\text{III.147. } G(r, r_0, t) = \frac{1}{8\pi r r_0 \sqrt{\pi t}} \left[ e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(r+r_0)^2}{4a^2t}} \right].$$

*Вказівка:* Заміною  $u = \frac{v}{r}$  звести задачу до одновимірної

$$v_t = a^2 v_{rr}, \quad v(r, 0) = \frac{r}{4\pi} \frac{\delta(r-r_0)}{r_0^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{III.148. } u(r, t) = & \frac{1}{2a\sqrt{\pi}t} \frac{1}{r} \int_0^\infty \xi^2 \varphi(\xi) \left[ e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(r+\xi)^2}{4a^2t}} \right] d\xi + \\ & + \frac{1}{2ar\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{\xi^2}{\sqrt{t-\tau}} f(\xi, \tau) \left[ e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(r+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\xi. \end{aligned}$$

$$\text{III.149. } G(x, x_0, t) = \frac{e^{-bt}}{2a\sqrt{\pi}t} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}.$$

$$\text{III.150. } u(x, t) = \frac{e^{-bt}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] \varphi(\xi) d\xi.$$

$$\text{III.151. } u(x, t) = \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^\infty f(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi,$$

де функція  $G$  визначається формулою (III.6-16).

$$\text{III.152. } u(x, t) = \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^\infty f(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi,$$

$$G(x, \xi, t) = \frac{e^{-bt}}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}.$$

*Вказівка:* Звести до задачі III.151 шляхом заміни

$$u(x, t) = e^{-bt} v(x, t).$$

$$\text{III.153. } u(x, t) = U_0 \left[ \Phi \left( \frac{x+\ell}{2a\sqrt{t}} \right) - \Phi \left( \frac{x-\ell}{2a\sqrt{t}} \right) \right], \text{ де } \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

— функція (інтеграл) помилок.

$$\text{III.154. } u(x, t) = \frac{A}{2} e^{-\alpha x + a^2 x^2 t} \left[ 1 - \Phi \left( -\frac{x}{2a\sqrt{t}} + \alpha a\sqrt{t} \right) \right].$$

$$\text{III.155. } u(x, t) = U_0 e^{-bt} \left[ \Phi \left( \frac{x+\ell}{2a\sqrt{t}} \right) - \Phi \left( \frac{x-\ell}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$$

*Вказівка.* Заміною  $u(x, t) = e^{-bt} v(x, t)$  звести до задачі III.153.

$$\text{III.156. } u(x, t) = U_0 \Phi \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right).$$

$$\text{III.157. } u(x, t) = U_0 \left[ 1 - \Phi \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$$

*Вказівка:* Зробити підстановку  $u(x, t) = v(x, t) + U_0$  і звести до задачі III.156.

$$\text{III.158. } u(x, t) = U_0 \Phi \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) + e^{bx+b^2a^2t} U_0 \left[ 1 - \Phi \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} + ab\sqrt{t} \right) \right].$$

$$\text{III.159. } u(x, t) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x+1}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz = \frac{U_0}{2} \left[ \Phi \left( \frac{x+1}{2a\sqrt{t}} \right) - \Phi \left( \frac{x-1}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$$

$$\text{III.160. } u(x, t) = 2aq\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} - qx \left[ 1 - \Phi \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$$

$$\begin{aligned} \text{III.161. } u(x, t) = & \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{v_0}{2a^2}(x - v_0t) - \frac{v_0^2 t}{4a^2} \right] \times \\ & \times \int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} f(\xi + v_0\tau, \tau) \exp \left[ -\frac{v_0}{2a^2}\xi + \frac{v_0^2}{4a^2}\tau \right] \times \\ & \times \left( e^{-\frac{(x-v_0t-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x-v_0t+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) d\xi. \end{aligned}$$

$$v_0t < x < \infty, \quad 0 < t < \infty.$$

*Вказівка:* Перейти до нових змінних  $\xi = x - v_0t$ ,  $t = t$ , і до нової функції  $u(x, t) = e^{\alpha\xi + \beta t} v(\xi, t)$ .

$$\begin{aligned} \text{III.162. } u(x, t) = & \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{v_0}{2a^2}(x - v_0t) - \frac{v_0^2}{4a^2t} \right] \times \\ & \times \int_0^\infty e^{-\frac{v_0}{2a^2}\xi} \varphi(\xi) \left( e^{-\frac{(x-v_0t-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x-v_0t+\xi)^2}{4a^2t}} \right) d\xi. \end{aligned}$$

$$\text{III.163. } u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

$$\text{III.164. } u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

$$\text{III.165. } u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{e^{-b(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

*Вказівка:* Заміною  $u(x, t) = e^{-bt} v(x, t)$  звести до задачі, розглянутої у Прикладі 2, стор. 215.

$$\text{III.166. } u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{e^{-b(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$



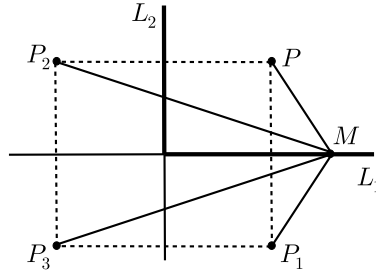
$$\text{III.167. } u(x, t) = \frac{e^{-bt}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] \varphi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{e^{-b(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

$$\text{III.168. } u(x, t) = e^{-bt} \int_0^\infty \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] \varphi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{e^{-b(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

$$\text{III.169. } G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^\infty \left[ e^{-\frac{(x-\xi+2n\ell)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi-2n\ell)^2}{4a^2t}} \right].$$

$$\text{III.170. } G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^\infty (-1)^n \left[ e^{-\frac{(x-\xi+2n\ell)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2n\ell)^2}{4a^2t}} \right].$$

$$\text{III.173. } G(M, P) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MP_1}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MP_2}} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MP_3}}.$$

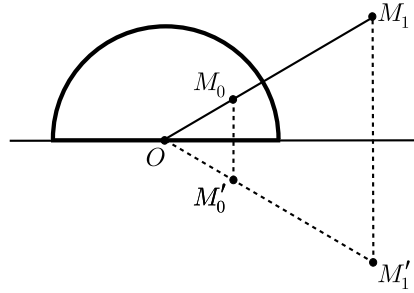


$$\text{III.174. } u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2)g(\varphi) d\varphi}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}, \text{ де } (\rho_0, \varphi_0) - \text{ полярні } \\ \text{координати точки } P, \text{ а } (R, \varphi) - \text{ полярні координати точки } M.$$

$$\text{III.175. } G(M, P) = \sum_{m=0}^{n-1} \left[ G_c(M, P_m) - G_c(M, \bar{P}_m) \right], \text{ де } G_c(M, P) - \text{ функція Гріна для круга, } P_m, \bar{P}_m - \text{ точки з полярними координатами } \\ \left( r_0, \varphi_0 + \frac{2m}{n}\pi \right) \text{ і } \left( r_0, \frac{2m}{n}\pi - \varphi_0 \right) \text{ відповідно, } (r_0, \varphi_0) - \text{ координати точки } P.$$

**III.176.**  $G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{r_{MP_n}} - \frac{1}{r_{MP'_n}} \right]$ , де  $P_n$  — точки з координатами  $(x_0, y_0, z_0 + 2nh)$ ,  $P'_n$  — точки з координатами  $(x_0, y_0, z_0 - (2n+1)h)$ ,  $(x_0, y_0, y_0)$  — координати точки  $P$ .

**III.177.**  $G = G_s(M, M_0) - G_s(M, M'_0)$ , де  $G_s = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{a}{\rho_0} \frac{1}{r_1} \right)$  (див. Приклад 2),  $a$  — радіус кулі,  $M'_0(\rho_0, \pi - \theta_0, \varphi_0)$  — точка, симетрична точці  $M_0(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$  відносно площини  $z = 0$ .



$$\text{III.178. } \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z^2 - \bar{z}_0^2|}{|z^2 - z_0^2|}.$$

$$\text{III.179. } \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z - \bar{z}_0| \cdot |R^2 - z\bar{z}_0|}{|z - z_0| \cdot |R^2 - zz_0|}.$$

$$\text{III.180. } \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z^2 - \bar{z}_0^2| \cdot |R^4 - (z\bar{z}_0)^2|}{|z^2 - z_0^2| \cdot |R^4 - (zz_0)^2|}.$$

$$\text{III.181. } \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \bar{z}_0|}{|\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} z_0|}.$$

$$\text{III.182. } u(r) = \begin{cases} 4\pi R \rho_0 & , \quad r \leq R, \\ \frac{4\pi R^2 \rho_0}{r} & , \quad r > R. \end{cases}$$

$$\text{III.183. } u(r) = \begin{cases} \pi R^2 \rho_0 \left( \frac{1}{2} - \ln R - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right) & , \quad r \leq R, \\ \pi R^2 \rho_0 \ln \frac{1}{r} & , \quad r > R. \end{cases}$$

$$\text{III.184. } v(x, y) = \rho_0 \int_0^\ell \ln \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}} d\xi.$$

$$\text{III.185. } w(M) = \tau_0 \int_0^\ell \frac{\cos \varphi}{r_{MP}} d\xi_P = \tau_0 y \int_0^\ell \ln \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}} d\xi.$$

$$\text{III.186. } w(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi.$$

$$\text{III.187. } \rho = -\frac{5}{\pi}(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$\text{III.188. } m = -4r^5.$$

$$\text{III.189. } \rho = x.$$

$$\text{III.190. } \mu = 2x + 8xy.$$

$$\text{III.191. } u(x, y) = \begin{cases} -1 & , \quad x^2 + y^2 < 1, \\ 0 & , \quad x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

$$\text{IV.1. } \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} + x \operatorname{erf}(x).$$

$$\text{IV.2. } \frac{A}{4\alpha^{3/2}} \left\{ 2\sqrt{\alpha} \left[ v_1 e^{-\alpha v_1^2} - v_2 e^{-\alpha v_2^2} \right] + \sqrt{\pi} \left[ \operatorname{erf}(\sqrt{\alpha} v_2) - \operatorname{erf}(\sqrt{\alpha} v_1) \right] \right\}.$$

$$\text{IV.4. } \Gamma(p)\zeta(p).$$

$$\text{IV.5. } (1 - 2^{1-p}) \Gamma(p)\zeta(p).$$

$$\text{IV.6. } \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)}.$$

$$\text{IV.7. } \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$\text{IV.8. } \frac{1}{2} \text{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

$$\text{IV.9. } \Gamma'(1) = -C, \\ C \text{ — стала Ейлера.}$$

$$\text{IV.10. } 2F\left(\frac{\varphi_0}{2} \middle| \operatorname{cosec} \frac{\varphi_0}{2}\right) \operatorname{cosec} \frac{\varphi_0}{2}.$$

$$\text{IV.12. } S_D = R^{D-1} \Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} R^{D-1}.$$

$\Omega_1 = 2$  — відрізок має довжину “два радіуси”;

$\Omega_2 = 2\pi$  — розгорнутий кут;  $\Omega_3 = 4\pi$  — повний тілесний кут.

$$\text{IV.13. } (2n)!! = 2^n \Gamma(n+1) \Rightarrow \Xi_{\text{even}}(z) = 2^{z/2} \Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right),$$

$$(2n-1)!! = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Xi_{\text{odd}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{z/2} \Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right).$$

Можливі узагальнення:

$$\Xi(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{(1-\cos \pi z)/4} 2^{z/2} \Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right)$$

(саме так воно реалізоване в пакеті *Mathematica*, див. [32]),

$$\Xi(z) = \left( \cos^2 \frac{\pi z}{2} + \sin^2 \frac{\pi z}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) 2^{z/2} \Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right) \quad \text{та ін.}$$

$$\text{IV.14.} \quad \frac{dE(k)}{dk} = \frac{E(k) - K(k)}{k}.$$

$$\text{IV.15.} \quad 4a E\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right) = 4a E(\varepsilon), \quad \text{де } \varepsilon - \text{ексцентриситет.}$$

$$\text{IV.16.} \quad \text{а) } \operatorname{sn}(z, 0) = \sin z; \quad \text{б) } \operatorname{cn}(z, 0) = \cos z; \quad \text{в) } \operatorname{dn}(z, 0) = 1.$$

$$\text{IV.17.} \quad \text{а) } \operatorname{sn}(z, 1) = \operatorname{th} z; \quad \text{б) } \operatorname{cn}(z, 1) = \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \operatorname{sech} z;$$

$$\text{в) } \operatorname{dn}(z, 1) = \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \operatorname{sech} z.$$

$$\begin{aligned} \text{IV.18.} \quad \frac{1}{|\mathbf{k} + \mathbf{R}|} &= \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2\mathbf{k}\mathbf{R} + R^2}} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{k}{R}\right) + \left(\frac{k}{R}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos \theta) \left(\frac{k}{R}\right)^n, \end{aligned}$$

$$\text{де } \theta = (\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{R}}).$$

$$\text{IV.19.} \quad H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x).$$

$$\text{IV.20.} \quad T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

$$\text{IV.22.} \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}, \quad J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}},$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \frac{\sin x}{x} - \cos x \right).$$

$$\text{IV.23.} \quad \Gamma(z) \text{ має прості полюси в точках } z = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\operatorname{res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

*Вказівка:* багаторатне застосування рекурентної формули дає

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)}. \quad \text{Нехай } z = -n + \zeta, \quad \zeta \rightarrow 0.$$

Матимемо:

$$\begin{aligned} \Gamma(-n + \zeta) &= \frac{\Gamma(\zeta)}{(-n + \zeta)(-n + \zeta + 1)\dots(\zeta - 1)} = \\ &= \frac{\Gamma(1 + \zeta)}{(-n + \zeta)(-n + \zeta + 1)\dots(\zeta - 1)\zeta} \simeq \frac{(-1)^n \Gamma(1)}{n! \zeta}, \end{aligned}$$

звідки й випливає результат.

**IV.24.**  $A = f(0, 0).$

**IV.25.**  $J'_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} J_\nu(z).$

**IV.26.**  $\frac{1}{a} {}_0F_1(; 1+a; z).$

**IV.27.**  $\frac{a}{b} {}_1F_1(1+a; 1+b; z).$

**IV.28.**  $x J_1(x).$

**IV.29.**  $(a-1)_0 F_1(; a-1; z).$

**IV.30.**  $\frac{b-1}{a-1} \left[ {}_1F_1(a-1; b-1; z) - 1 \right].$

*Вказівка:* отримати зв'язок між  $(a)_k$  і  $(a-1)_k$ .

**IV.31.**  $\frac{a_1 \dots a_n}{b_1 \dots b_n} {}_nF_m(1+a_1, \dots, 1+a_n; 1+b_1, \dots, 1+b_m; z).$

**IV.32.**  $\ln(1+z) = z {}_2F_1(1, 1; 2; -z).$     **IV.33.**  $(1+z)^\alpha = {}_2F_1(-\alpha, 1; 1; -z).$

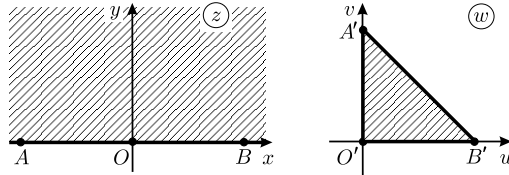
**IV.34.**  $\frac{1}{1-z} = {}_2F_1(1, 1; 1; z).$

**IV.37.**  $(1-z) \frac{dw}{dz} + a w = 0, \quad w(z) = C(1-z)^{-a}, \quad {}_1F_0(z) = (1-z)^{-a}.$

**IV.39.**  $f(s) = \mathcal{K}_\nu[f(r)] = \frac{a^{\nu+1}}{s} J_{\nu+1}(as).$

**IV.40.**  $f(z) = \mathcal{M}[f(t)] = \frac{1}{2} b^{-z/2} \Gamma\left(\frac{z}{2}, ba^2\right).$

**IV.41.**  $w(z) = \frac{4\sqrt{\pi z}}{\Gamma^2(1/4)} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; z^2\right)$



**IV.42.**  $n E_{n+1}(z) = e^{-z} - z E_n(z).$     **IV.43.**  $\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}.$

**IV.44.**  $\psi(n) = -C + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$  де  $C$  — стала Ейлера.

$$\text{IV.45. } u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp \left( -a^2 \frac{\mu_n^2}{R^2} t \right) J_0 \left( \frac{\mu_n}{R} r \right),$$

$$C_n = \frac{2}{R^2 [J_0'(\mu_n)]^2} \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left( \frac{\mu_n}{R} r \right) dr,$$

де  $\mu_n$  — корені рівняння  $J_0(\mu) = 0$ .

$$\text{IV.47. } u(r, t) = 8AR^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} J_0 \left( \frac{\mu_n}{R} r \right) \cos \frac{a\mu_n t}{R},$$

де  $\mu_n$  — додатні корені рівняння  $J_0(\mu) = 0$ .

$$\text{IV.48. } u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n Y_n(\theta, \varphi),$$

$$\text{де } Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^n (A_{nk} \cos k\varphi + B_{nk} \sin k\varphi) P_n^{(k)}(\cos \theta),$$

$$A_{00} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta f(\theta, \varphi) \sin \theta,$$

$$A_{nk} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi(n+k)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta f(\theta, \varphi) P_n^{(k)}(\cos \theta) \cos k\varphi \sin \theta,$$

$$B_{nk} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi(n+k)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta f(\theta, \varphi) P_n^{(k)}(\cos \theta) \sin k\varphi \sin \theta.$$

$$\begin{aligned} \text{IV.49. } u(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n Y_n(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} (A_{nk} \cos k\varphi + B_{nk} \sin k\varphi) P_n^{(k)}(\cos \theta), \end{aligned}$$

вирази для коефіцієнтів  $A_{nk}$ ,  $B_{nk}$  див. у попередній задачі.

$$\text{IV.50. } e^{ikr \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\sqrt{kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n(\cos \theta), \quad C_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} i^n (2n+1).$$

$$\text{IV.51. } e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n^{\alpha}(x), \quad C_n = \frac{n!}{2^{n+\alpha+1}}.$$

$$\text{IV.53. } 0.$$

$$\text{IV.54. } e^{-y(x)} [1 + y'^2(x) - 2y''(x)].$$

$$\text{IV.55. } 2a_2(y) y^2 e^{-a^2(y) y^2}.$$

$$\text{IV.56. } \frac{A_q}{2} [\alpha(q) + \alpha(-q)].$$

$$\text{IV.57. } \delta \mathcal{F}[y(x)] = \int_0^1 \left[ 2y \left( x - y' e^{-y^2} \right) \delta y + e^{-y^2} \delta y' \right] dx.$$

$$\text{IV.58. } \frac{d}{dx} \left( F - y' \frac{dF}{dy'} \right) = 0, \quad \text{або} \quad F - y' \frac{dF}{dy'} = \text{const.}$$

$$\text{IV.59. } y(x) = \begin{cases} C_2 + C_1 \frac{x^{1-n}}{1-n} & , \quad n \neq 1 \\ C_2 + C_1 \ln x & , \quad n = 1 \end{cases}$$

Сталі  $C_1, C_2$  визначаються з початкових умов.

$$\text{IV.60. } y(x) = x - 7x^2 + 7x^3 - x^6.$$

$$\text{IV.61. } y(x) = x; \quad z(x) = -\frac{e^{-1-x}(e^4 + e^{2x})}{1 + e^2} = -\frac{\text{ch}(x-2)}{\text{ch } 1}.$$

$$\text{IV.62. } z(x, y) = y.$$

$$\text{IV.63. } y(x) = 1 - x + 6x^3 - 9x^4 + 5x^5 - x^6.$$

$$\text{IV.64. } y_\varepsilon(x) = \text{cosech } \frac{1}{\varepsilon} \text{sh } \frac{x}{\varepsilon} \text{ при } \varepsilon \neq 0. \text{ В останньому випадку екстремум}$$

реалізує розривна функція  $y(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x < 1, \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$ , яку можна

отримати як границю  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(x)$ .

$$\text{IV.65. } y(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) + y_0 \text{ — це рівняння прямої, що проходить}$$

через точки  $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ .

**IV.66.** Рівняння Ейлера–Лагранжа можна отримати у формі

$$y(1 + y'^2) = 2C_1, \quad C_1 = \text{const.}$$

За допомогою підстановки  $y' = \text{ctg } \frac{\varphi}{2}$  після певних перетворень матимемо таке параметричне рівняння кривої:

$$x = C_1(\varphi - \sin \varphi) + C_2, \quad y = C_1(1 - \cos \varphi).$$

Воно задає *циклоїду*.

**IV.67.** Шукаємо екстремум функціонала

$$\mathcal{B}[y(x)] = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{y} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = h.$$

Результат:  $y(x) = \sqrt{(h^2 + a^2)\frac{x}{a} - x^2}$  — це рівняння **кола**.

**IV.68.**  $u = 2(r-1) - \frac{4}{\ln 3} \ln r$ , де  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\min \mathcal{J} = 32\pi \left( \frac{1}{\ln 3} - 1 \right)$ .

**IV.69.**  $y(x) = ax^n$ ,  $\min \mathcal{J}_n = na^2$ .

**IV.70.**  $y_0(x) = \frac{2\sqrt{e}}{1+e} \operatorname{ch} \left( x - \frac{1}{2} \right) - 1$ .

**IV.71.**  $y(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}$ ,  $\min \mathcal{J}[y] = \operatorname{cth} 1$ .

**IV.72.**  $y(x) = \sin x$ .

**IV.73.** Шукаємо екстремум (максимум) функціонала  $\mathcal{S} = \int_{x_1}^{x_2} y \, dx$  за умови

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} \, dx = L, \quad y(x_1) = y(x_2) = 0, \text{ тобто екстремум функціонала } \bar{\mathcal{S}} = \int_{x_1}^{x_2} \left( y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right) dx.$$

Отримаємо рівняння  $y(x) = C_1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}$ , з якого після заміни  $y' = \operatorname{tg} \varphi$  матимемо  $y = C_1 - \lambda \cos \varphi$ ,  $x = C_2 + \lambda \sin \varphi$ . Це параметричні рівняння **кола**, значення сталих  $C_1, C_2$  визначаються з граничних умов.

Для параметра  $\lambda$  з умови  $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} \, dx = L$  можна отримати (за певних значень сталих) трансцендентне рівняння  $\sin \frac{L}{\lambda} = \frac{\operatorname{const}}{\lambda}$ .

**IV.74.** Шукаємо екстремум функціонала

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \left[ \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \lambda(x) (x + y - z) \right] dx.$$

Додаючи два рівняння Ейлера–Лагранжа, матимемо

$$\frac{d}{dx} \frac{y' + z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0$$



З рівняння поверхні  $z' = y' + 1$ .

Остаточно розв'язками будуть функції

$$y(x) = -bx + b, \quad z(x) = (1 - b)x + b, \quad \lambda(x) \equiv 0.$$

Відстань між точками дорівнює  $\sqrt{2}\sqrt{1-b+b^2}$ , цей результат легко перевірити за теоремою Піфагора, оскільки точки лежать на площині.

**IV.75.** Шукаємо екстремум функціонала  $\mathcal{S} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2} dx$ . Враховуючи, що явна залежність від  $x$  відсутня, можна отримати рівняння Ейлера–Лагранжа у формі:

$$y' \frac{yy''}{\sqrt{1+y'^2}} - y\sqrt{1+y'^2} = C_1, \quad C_1 = \text{const}$$

звідки

$$x = \int \frac{C_1 dy}{\sqrt{y^2 - C_1^2}}.$$

Після заміни  $y = C_1 \operatorname{ch} t$  матимемо  $x = C_1 t + C_2$ ,  $C_2 = \text{const}$ . Тобто рівняння лінії у площині  $xOy$  буде  $y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1}$  — це **ланцюгова лінія**. Поверхня, яку вона утворює обертанням навколо осі  $Ox$ , називається **катеноїдом**.

**IV.76.**  $\varphi = A + Bz$ ,  $r = R$ .

**IV.77.** Виберемо  $Oz$  як вісь обертання, тоді для диференціалу довжини кривою після переходу до циліндричних координат ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z(r)$ ) матимемо:

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{r^2 + \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

Враховуючи залежність  $z(r)$ , яку легко вивести з параметричного рівняння трактиси,

$$z(r) = \sqrt{R^2 - r^2} + \frac{r}{2} \ln \frac{R - \sqrt{R^2 - r^2}}{R + \sqrt{R^2 - r^2}},$$

отримаємо задачу знаходження мінімуму функціонала

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \frac{R^2}{r^2}} r'^2 d\varphi, \quad \text{де } r' = \frac{dr}{d\varphi}.$$

Оскільки цей функціонал явно від  $\varphi$  не залежить, матимемо таке рівняння:

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \frac{R^2}{r^2}}} = C_1.$$

розв'язками якого є

$$r(\varphi) = R \left( \frac{R^2}{C_1^2} - \varphi^2 + 2C_2\varphi - C_2^2 \right)^{-1/2},$$

сталі  $C_1, C_2$  визначаються з початкових умов.

$$\text{IV.78. } \varphi(\theta) = C_2 + C_1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \theta}{a^2 \sin^2 \theta - C_1^2}}, \quad \varepsilon^2 = \frac{c^2 - a^2}{a^2}.$$

$$\text{IV.79. а), б) } \mathcal{D}^\mu x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\mu+1)} x^{n-\mu}.$$

$$\text{IV.80. } \mathcal{L}[\mathcal{I}^\nu f(t), p] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \mathcal{L}[t^{\nu-1}, p] \mathcal{L}[f(t), p] = p^{-\nu} \mathcal{L}[f(t), p].$$

IV.81. Послідовна дія операторів  $\mathcal{D}^{1/2}$  дає:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{1/2} \mathcal{D}^{1/2} x^\alpha &= \mathcal{D}^{1/2} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-1/2+1)} x^{\alpha-1/2} = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-1/2+1)} \frac{\Gamma(\alpha-1/2+1)}{\Gamma(\alpha-1/2-1/2+1)} x^{\alpha-1} = \alpha x^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

що збігається з  $\frac{d}{dx} x^\alpha$ .

$$\text{IV.82. } \mathcal{D}^\alpha(fg) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (\mathcal{D}^{\alpha-k} f) g^{(k)}, \text{ де символ кількості перестановок узагальнено на випадок довільних аргументів:}$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}.$$

**IV.83.**  $\mathcal{D}^\alpha e^{\lambda x} = \lambda^\alpha e^{\lambda x} \frac{\gamma(-\alpha, \lambda x)}{\Gamma(-\alpha)} = \lambda^\alpha e^{\lambda x} \left[ 1 - \frac{\Gamma(-\alpha, \lambda x)}{\Gamma(-\alpha)} \right].$

**IV.84.** Дія оператора дробової похідної, виражена через інтеграл, дорівнює

$$\frac{d}{dx} (\mathcal{J}^{1-\alpha} e^x) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + e^x \left[ 1 - \frac{\Gamma(1-\alpha, x)}{\Gamma(1-\alpha)} \right].$$

Використовуючи рекурентне співвідношення (IV.1-19), можна показати, що

$$\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + e^x \left[ 1 - \frac{\Gamma(1-\alpha, x)}{\Gamma(1-\alpha)} \right] = e^x \left[ 1 - \frac{\Gamma(-\alpha, x)}{\Gamma(-\alpha)} \right],$$

що і треба було довести.

**IV.85.**  $\mathcal{D}^{-1}(\dots) = \int (\dots) dx.$

**IV.86. IV.87.** Потрібно розкласти праву й ліву частину в ряд і скористатися результатом дії оператора  $\mathcal{J}^\alpha$  на функцію  $x^\beta$ .

**IV.88.**  $X = -\infty.$

## Література

- [1] *Адамян В. М., Сушко М. Я.* Вступ до математичної фізики: Навчальний посібник.— Одеса: Астропринт, 2003.— 320 с. (Укр. та англ. мовами).
- [2] *Адамян В. М., Сушко М. Я.* Варіаційне числення: Навчальний посібник.— Одеса: Астропринт, 2005.— 128 с.
- [3] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований.— Т. 1: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина.— Москва: Наука, 1969.— 343 с.; Т. 2: Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций.— Москва: Наука, 1970.— 327 с.
- [4] *Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики.— Москва: Наука, 1985.— 311 с.
- [5] *Бобик О. І.* Методичні вказівки до практичних занять з курсу “Рівняння математичної фізики”.— Львів: Ред.-вид. відділ Львів. ун-ту ім. І. Франка, 1987.— 47 с.
- [6] *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике.— Москва: Наука, 1972.— 688 с.  
*Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике.— 4-е изд., испр.— Москва: Физматлит, 2003.— 688 с.
- [7] *Будылин А. М.* Вариационное исчисление.— Санкт-Петербург, 2001.— 197 с.—  
<<http://www.phys.spb.ru/Stud/Lectures/Budylin/var.pdf>>.

- [8] *Будылин А. М.* Ряды и интегралы Фурье.— Санкт-Петербург, 2002.— 137 с.—  
<<http://www.phys.spb.ru/Stud/Lectures/Budylin/fourier.pdf>>.
- [9] *Владимиров В. С., Михайлов В. П., Вашарин А. А., Каримова Х. Х., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И.* Сборник задач по уравнениям математической физики.— Москва: Наука, 1982.— 256 с.
- [10] *Волковъский Л. И. и др.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного.— Москва: Наука, 1970.— 319 с.
- [11] *Евграфов М. А.* Аналитические функции.— Москва: Наука, 1968.— 472 с.
- [12] *Евграфов М. А.* Сборник задач по теории аналитических функций.— Москва: Наука, 1969.— 367 с.
- [13] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров).— Москва: Наука, 1974.— 832 с.
- [14] *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости.— Москва: Наука, 1971.— 256 с.
- [15] *Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И.* Вариационное исчисление.— Москва: Наука, 1973.— 192 с.
- [16] *Курант Р, Гильберт Д.* Методы математической физики.— Москва; Ленинград: Гос. изд-во технико-теоретической л-ры, 1951.— Т. I.— 476 с.; Т. II.— 544 с.
- [17] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— Москва: Наука, 1973.— 736 с.
- [18] *Мартиненко В. С.* Операционное исчисление.— К.: Вища школа, 1973.— 268 с.

- [19] *Піх С. С.* Методичні рекомендації до проведення практичних занять із курсу “Методи математичної фізики”.— Ч. 1: Теорія функції комплексної змінної.— Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2001.— 60 с.; Ч. 2: Рівняння математичної фізики.— Львів, ЛНУ ім. І. Франка, 2001.— 66 с.
- [20] *Положій Г. М.* Рівняння математичної фізики.— К.: Рад. шк., 1959.— 479 с.
- [21] *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.— Минск: Наука и техника, 1987.— 688 с.
- [22] *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной.— Москва: Наука, 1974.— 319 с.
- [23] *Свідзинський А.* Математичні методи теоретичної фізики.— К.: Вид-во Олени Теліги, 1998.— 442 с.  
*Свідзинський А.* Математичні методи теоретичної фізики.— 2-е вид., перероб. і доп.— Луцьк: Ред.-вид. відділ “Вежа”, 2001.— 563 с.
- [24] *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики.— Москва: Наука, 1968.— 112 с.
- [25] *Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.*— Москва: Наука, 1979.— 832 с.
- [26] *Тальянський І. І.* Методи математичної фізики. Ч. 1. Теорія функцій комплексної змінної. Узагальнені функції: Тексти лекцій.— Львів: Ред.-вид. відділ Львівського ун-ту, 1995.— 70 с.; Ч. 2. Рівняння математичної фізики. Операційне числення. Варіаційне числення: Тексти лекцій.— Львів: Ред.-вид. відділ Львівського ун-ту, 1996.— 67 с. Ч. 3. Спеціальні функції: Тексти лекцій.— Львів: Ред.-вид. відділ Львівського ун-ту, 1999.— 80 с.

- [27] Теория функций комплексного переменного. Решение задач / *А. Е. Грищенко, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев*.— Киев: Вища шк. Головное изд-во, 1986.— 336 с.
- [28] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— Москва: Наука, 1966.— 724 с.
- [29] *Фарлоу С.* Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров.— Москва: Мир, 1985.— 384 с.
- [30] *Цлаф Л. Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения.— Москва: Наука, 1970.— 192 с.
- [31] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.— Москва: Наука, 1969.— 424 с.
- [32] MathWorld: the web most extensive mathematics resource.— <http://mathworld.wolfram.com>.

Навчальне видання

*Світлана Семенівна Піх,  
Андрій Адамович Ровенчак,  
Юрій Степанович Криницький*

## 1001 ЗАДАЧА З МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів  
фізичних спеціальностей університетів  
(Лист №14/18.2-103 від 23.01.2006)*

Мовна редакція  
Верстка і дизайн  
Художнє оформлення

**Соломія Бук  
Андрій Ровенчак  
Федір Лукавий**

**П 32** *Піх С. С., Ровенчак А. А., Криницький Ю. С.* **1001 задача з математичної фізики.**— Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2006.— 328 с.

Збірник складається з чотирьох розділів: “Теорія функцій комплексної змінної”, “Інтегральні перетворення. Узагальнені функції”, “Рівняння математичної фізики”, “Додаткові розділи” (сюди ввійшли окремі задачі варіаційного числення, задачі на спеціальні функції і на інтеграли й похідні дробового порядку). Теоретичний матеріал супроводжують приклади розв’язування типових задач. Збірник містить відповіді до всіх задач (за винятком задач на доведення), подекуди подано вказівки і розв’язки.

Для студентів та аспірантів фізико-математичних спеціальностей університетів і для самоосвіти.

УДК [517.5 + 517.4 + 517.9](075.8)  
ISBN 966-613-412-8

ББК В161я73-4 + В311я73-4

---

Підписано до друку 31.08.2006      Формат 60 × 90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>  
Папір офсетний. Гарнітура “Computer Modern”  
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 20.5  
Зам.                      . Наклад 2000 прим.

Друк: Видавничо-виробниче підприємство “Місіонер”  
вул. Василянська, 8, м. Жовква, Львівська обл., 80300