МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені Івана ФРАНКА

І. О. ВАКАРЧУК, Т. В. КУЛІЙ,
О. В. КНІГІНІЦЬКИЙ, В. М. ТКАЧУК

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

ЛЬВІВ 1997

Міністерство освіти України
Львівський державний університет ім. Івана Франка

І. О. Вакарчук, Т. В. Кулій,
О. В. Кнігініцький, В. М. Ткачук

ЗБІРНИК ЗАДАЧ
З КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

Рекомендовано до друку
кафедрою теоретичної фізики
Протокол № 2 від 30.01.96

Львів ЛДУ 1996

УДК 530.145.6

Збірник задач з квантової механіки/ І.О. Вакарчук, Т.В. Кулій, О.В. Кігініцький, В.М. Ткачук.– Львів: Ред.-вид. відділ Львів. ун-ту, 1996. – 32 с.

У збірнику наведені задачі з відповідями до всіх розділів курсу «Квантова механіка», що його читають студентам фізичного факультету Львівського державного університету імені Івана Франка.

Для студентів фізичних факультетів університетів, а також аспірантів та молодих вчених.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. Л.Ф. Блажиєвський (Львів. ун-т);
канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб. Ю.В. Головач (ІФКС НАН України).

Редактор М.М. Мартиняк

I. Основні принципи квантової механіки

1. Довести, що групова швидкість хвиль де Бройля дорівнює швидкості вільної частинки:

а) в нерелятивістському випадку; б) в релятивістському випадку.

2. Використовуючи співвідношення невизначеностей Гайзенберґа, відшукати точну нижню межу спектра частинки масою m, що перебуває:

а) у прямокутній потенціальній ямі шириною a з безмежно високими стінками;

б) у потенціальному полі $U(x) = \alpha x^2$;

в) у потенціальному полі $U(x) = \alpha x^4$.

II. Математичний апарат квантової механіки

3. Задано оператор $\hat{A}$:

а) $i\dfrac{d}{dx}x$; б) $\left(x+\dfrac{d}{dx}\right)^2$; в) $i\dfrac{d^2}{dx^2}$; г) $x\dfrac{d}{dx}x$; ґ) $x^2\dfrac{d}{dx}$; д) $i\dfrac{d}{dx}x\dfrac{d}{dx}$;

е) $i\dfrac{d}{dx}x^2$; є) $\left(1+\dfrac{d}{dx}\right)^3$; ж) $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{d}{dx}\right)^2$; з) $\left(\dfrac{d}{dx}x\right)^2$; и) $\left(x\dfrac{d}{dx}\right)^2$;

і) $\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}x\right)^2$; ї) $x^2\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{x}$; й) $\left(x\dfrac{\partial}{\partial y}+y\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2$; к) $x^2\hat{P}_x$; л) $ix\hat{P}_x^{\,2}$;

м) $x\hat{P}_x^{\,2}x$; н) $\hat{P}_x x^3$; о) $\left(x\hat{P}_x\right)^4$; п) $\left(\hat{P}_x x^2\right)^2$; р) $\left(\hat{P}_x+\dfrac{1}{x}\right)^3$; с) $\left(\hat{\mathbf{P}}+\mathbf{B}(\mathbf{r})\right)^2$.

1° Звести оператор $\hat{A}$ до нормального вигляду (у якому оператори похідних будуть праворуч).

2° Знайти спряжений оператор $\hat{A}^+$ і перевірити, чи оператор $\hat{A}$ ермітовий.

3° Визначити комутатор $\left[\hat{A}, \hat{A}^+\right]$.

4. Задано оператор $\hat{A}$:

а) $\exp\left(ax^2\dfrac{d}{dx}\right)$; б) $\exp\left(a\left(x+\hat{P}_x\right)\right)x^{20}\exp\left(-a\left(x+\hat{P}_x\right)\right)$; в) $\exp\left(iax\hat{P}_x\right)$;

г) $\exp\left[-i\hat{P}_x+x\right]\left(-i\hat{P}_x+x\right)\exp\left[i\hat{P}_x-x\right]$; ґ) $\exp\left[-a\hat{P}_x^{\,2}\right]x\exp\left[a\hat{P}_x^{\,2}\right]$;

д) $\exp\left[-a\hat{P}_x\right]x^{100}\exp\left[a\hat{P}_x\right]$;   е) $\exp\left[-2i\hat{P}_x\right](x-3)^3\exp\left[2i\hat{P}_x\right]$;   є) $\exp\left[-a\exp[x]\dfrac{d}{dx}\right]$;

$a=\mathrm{const}$.

Визначити його дію на довільну функцію $f(x)$.

5. Знайти комутатор:

а) $\left[\hat{X}_i,\hat{P}_j\right]$;   б) $\left[\hat{X}_i,\hat{P}_j^2\right]$;   в) $\left[\hat{Y},\hat{P}^2\right]$;   г) $\left[\hat{X},\hat{H}\right]$;   ґ) $\left[\hat{P}_x,\hat{H}\right]$, де $\hat{H}=\hat{T}+U(\mathbf{r})$.

6. Задано $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=\hat{1}$, $\hat{B}$ — відомий оператор. Визначити:

а) $\left[\hat{A},\hat{B}^3\right]$;   б) $\exp\left[\hat{A}\right]\hat{B}\exp\left[-\hat{A}\right]$.

7. Відомо, що $\hat{A}$ і $\hat{B}$ — ермітові оператори. Перевірити, чи буде ермітовим оператор: а) $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$;   б) $i\left[\hat{A},\hat{B}\right]$.

8. Задано оператор інверсії $\hat{I}$. Відшукати його власні функції і власні значення, а також оператор $\hat{I}^+$.

9. Спростити операторний вираз:

а) $\exp\left[i\dfrac{\pi}{2}\hat{I}\right]$;   б) $\exp\left[i\dfrac{\pi}{2}\left(\hat{I}-1\right)\right]$;   в) $\sin\left[\hat{I}\dfrac{\pi}{2}\right]$; $\hat{I}$ — оператор інверсії.

10. Задано оператор трансляції $\hat{T}_a=\exp\left[a\dfrac{d}{dx}\right]$, де a — дійсна константа.

а) Довести рівність $\hat{T}_a\psi(x)=\psi(x+a)$;   б) визначити оператор $\hat{T}_a^{\,+}$; в) відшукати власні функції і власні значення оператора $\hat{T}_a$.

11. Відшукати власні значення і власні функції оператора:

а) $x+\dfrac{d}{dx}$;   б) $\dfrac{d^2}{dx^2}$, $\psi(0)=\psi(l)=0$;   в) $\left(\dfrac{d}{dx}+\dfrac{1}{x}\right)^2$;   г) $\dfrac{d^2}{dx^2}+\dfrac{2}{x}\dfrac{d}{dx}$;

ґ) $-i\hbar\dfrac{d}{d\varphi}+a\sin\varphi$;   д) $\exp\left[ia\dfrac{d}{d\varphi}\right]$;   е) $\sin\left[\dfrac{d}{d\varphi}\right]$;   є) $\hat{\sigma}_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$;

ж) $\hat{\sigma}_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$;   з) $\hat{\sigma}_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$,

$a=\mathrm{const}$, $0\le\varphi\le2\pi$.

12. Стан частинки описує хвильова функція $\psi(x)=c\varphi(x)\exp\left(i\frac{p}{\hbar}x\right)$, $\varphi(x)=\varphi^*(x)$, $c=const$. Обчислити середнє значення оператора імпульсу (одновимірний випадок).

13. Записати в імпульсному зображенні хвильові функції, якщо в координатному зображенні вони мають вигляд:

а) $\psi(x)=A\exp(ikx)$; б) $\psi(x)=A\exp\left(-\alpha x^2\right)$; в) $\psi(x)=Ax\exp\left(-\alpha x^2\right)$;

г) $\psi(x)=A\exp(-\alpha|x|)$; $A=\text{const}$, $\alpha=\text{const}$.

14. Відшукати вигляд оператора $\hat{X}$ у P-зображенні, обчислити його власні значення і власні функції.

15. Для частинки, стан якої описує функція $\psi(x)=\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}+ik_0x\right)$, відшукати: а) $\langle\hat{X}\rangle$, $\langle\hat{P}\rangle$; б) $\left\langle\left(\Delta\hat{X}\right)^2\right\rangle$, $\left\langle\left(\Delta\hat{P}\right)^2\right\rangle$; в) коефіцієнти Фур'є-розкладу хвильової функції і ширину хвильового пакета в імпульсному просторі.

16. Записати та розв'язати в імпульсному зображенні рівняння на власні значення і власні функції оператора $\hat{A}=\alpha\hat{X}+\beta\hat{P}_x$, α і β — константи.

III. Рівняння Шредінгера

17. Визначити еволюцію в часі хвильової функції для вільної одновимірної частинки, якщо в початковий момент часу $\psi(x)=Ae^{-\alpha x^2}$, де A — стала нормування.

18. Відшукати зміну $\langle x\rangle$ з часом для квантової частинки в полі:

а) $U(x)=kx$; б) $U(x)=kx^2$.

19. Система, стаціонарні стани якої описують відомі функції $|\psi_0\rangle$ і $|\psi_1\rangle$, перебуває в стані $|\psi_0\rangle$. У момент часу $t=0$ вмикається збурення $\hat{W}$, що не залежить від часу. Визначити хвильову функцію $|\psi(t)\rangle$, що описує збурену систему.

IV. Найпростіші задачі квантової механіки

20. Для частинки, що перебуває в однорідному потенціальному полі, знайти власні значення і власні функції оператора енергії в імпульсному зображенні.

21. Визначити рівні енергії і хвильові функції зв'язаних станів для частинки масою m, яка перебуває в потенціальному полі:

а) $U(x) = -\alpha\delta(x)$;   б) $U(x) = -\alpha(\delta(x+a)+\delta(x-a))$;   в) $U(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,a] \\ \infty, & x \notin [0,a] \end{cases}$;

г) $U(x) = \begin{cases} -\alpha\delta(x-a), & x > 0 \\ \infty, & x < 0 \end{cases}$; $\alpha = \mathrm{const} > 0$, $a = \mathrm{const} > 0$.

22. Для частинки масою m, що перебуває на n-му рівні в одновимірній прямокутній потенціальній ямі шириною a з безмежно високими стінками, обчислити:

а) $\langle \hat{X} \rangle$, $\langle \hat{P} \rangle$;   б) $\left\langle (\Delta\hat{X})^2 \right\rangle$, $\left\langle (\Delta\hat{P})^2 \right\rangle$;   в) ймовірність того, що $x \in \left[0, \frac{a}{3}\right]$;

г) ймовірність того, що $x \in \left[\frac{a}{4}, \frac{a}{3}\right]$.

23. Частинка масою m перебуває в одновимірній прямокутній потенціальній ямі шириною a з безмежно високими стінками в стані з енергією $E = \dfrac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$. Визначити для неї розподіл за імпульсами.

24. Одновимірна прямокутна потенціальна яма шириною a з безмежно високими стінками розділена на дві частини рухомою непроникною перегородкою. В кожній частині ями міститься по одній частинці з масами m_1 та m_2 в основному стані. Визначити розташування перегородки.

25. Частинка масою m перебуває в потенціальній ямі:

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x \le 0 \\ 0, & 0 < x < a \\ U_0, & x \ge a \end{cases}, \quad a > 0.$$

Отримати рівняння, яке описує спектр власних значень енергії частинки в області $E < U_0$.

26. Для частинки, що перебуває в двовимірній потенціальній ямі:

$$U(x) = \begin{cases} 0, x \in [0, L_1] \cap y \in [0, L_2] \\ \infty, x \notin [0, L_1] \cup y \notin [0, L_2] \end{cases};$$

а) визначити рівні енергії і відповідні нормовані хвильові функції;

б) у стані з енергією $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m}\left[\frac{4}{L_1^2} + \frac{9}{L_2^2}\right]$ відшукати точки, у яких ймовірність знайти частинку максимальна.

27. Для потенціального бар'єра

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a \\ U_0, & |x| < a \end{cases}, \quad U_0 > 0$$

відшукати хвилі, для яких коефіцієнт відбивання дорівнює нулеві.

28. Визначити рівні енергії і відповідні хвильові функції одновимірного гармонічного осцилятора, поміщеного в постійне однорідне електричне поле напруженістю $\mathcal{E}$. Заряд осцилятора e.

29. Для одновимірного гармонічного осцилятора розрахувати матричні елементи $\langle n|\hat{X}|m\rangle$, $\langle n|\hat{P}|m\rangle$.

30. Для одновимірного гармонічного осцилятора, енергія якого дорівнює $\frac{5}{2}\hbar\omega$, обчислити середню кінетичну енергію.

31. На одновимірний гармонічний осцилятор, що перебуває в основному стані, миттєво накладається однорідне електричне поле напруженістю $\mathcal{E}$. Заряд осцилятора e. Обчислити ймовірності переходу осцилятора в збуджені стани.

32. Гармонічний осцилятор масою m, частотою ω перебуває в основному стані. Раптово його частота стає ω'. Яка ймовірність виявити осцилятор в основному стані після зміни частоти?

33. Гармонічний осцилятор масою m, частотою ω перебуває в основному стані. Раптово його маса стає m'. Визначити ймовірність збудження осцилятора.

34. Записати і розв'язати стаціонарне рівняння Шредінгера для одновимірного гармонічного осцилятора в імпульсному зображенні.

V. Зв'язок квантової механіки з класичною

35. Користуючись правилом квантування Бора — Зоммерфельда, визначити рівні енергії одновимірного гармонічного осцилятора.

36. Частинка масою m вертикально падає на горизонтальну пластину і пружно від неї відбивається. Проквантувати рух частинки, користуючись постулатом Бора — Зоммерфельда, визначити допустимі висоти, обчислити рівні енергії.

37. Визначити в квазікласичному наближенні для частинки з енергією $E < V_0$ коефіцієнт проходження через потенціальний бар'єр:

а) $V(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,l] \\ V_0\left(1-\dfrac{x}{l}\right), & x \in [0,l] \end{cases}, \quad V_0 > 0;$ б) $V(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-l,l] \\ V_0\left(1-\dfrac{x^2}{l^2}\right), & x \in [-l,l] \end{cases}, \quad V_0 > 0;$

в) $V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0\dfrac{l}{x+l}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad V_0 > 0, \quad l > 0$

VI. Момент кількості руху

38. Довести співвідношення $\left[\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{L}}\right] = i\hbar\hat{\mathbf{L}}$ для оператора моменту кількості руху.

39. Довести, що квадрат оператора орбітального моменту імпульсу комутує з операторами кожної з його складових, — $\left[\hat{L}^2, \hat{L}_i\right] = 0$, $i = (x,y,z)$.

40. Обчислити комутатор:

а) $\left[\hat{X}_i, \hat{L}_j\right]$; б) $\left[\hat{X}_i^2, \hat{L}_j\right]$; в) $\left[\hat{L}_y, \hat{P}^2\right]$; г) $\left[\hat{Z}, \hat{L}^2\right]$; ґ) $\left[\hat{L}_i, \hat{P}_j\right]$; д) $\left[\hat{L}^2, \hat{P}^2\right]$;

е) $\left[\hat{L}_x, \hat{H}\right]$; є) $\left[\hat{L}^2, \hat{H}\right]$, де $\hat{H} = \hat{T} + U(\mathbf{r})$, $i,j = (x,y,z)$.

41. Визначити нормовані власні значення і власні функції оператора $\hat{l}_z = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$.

VII. Рух у центрально-симетричному полі

42. Визначити хвильові функції та рівні енергії частинки масою m, яка перебуває в сферично-симетричній потенціальній ямі радіусом R з абсолютно непроникними стінками. Орбітальний момент частинки дорівнює нулеві.

43. Для частинки, яка перебуває на n-му s-рівні в сферично-симетричній потенціальній ямі з абсолютно непроникними стінками, визначити:

а) $\langle r\rangle$, $\left\langle(\Delta r)^2\right\rangle$; б) $\left\langle\hat{P}^2\right\rangle$, $\left\langle\left(\Delta\hat{P}\right)^2\right\rangle$; в) $\left\langle r^2\right\rangle$, найбільш імовірну відстань частинки від центра ями;

г) радіус сфери, усередині якої частинка перебуває з імовірністю $1/2$.

44. Електрон в атомі водню перебуває в основному стані. Обчислити:

а) $\langle r\rangle$, $\left\langle r^2\right\rangle$, найбільш імовірну відстань електрона від ядра;

б) $\left\langle\hat{T}\right\rangle$, $\left\langle\hat{U}\right\rangle$; в) ймовірність перебування електрона в області $\frac{1}{2}a<r<\frac{3}{2}a$, ($a$ — борівський радіус).

VIII. Теорія збурень

45. На частинку масою m, що перебуває в потенціальній ямі з непроникними стінками шириною a, накладене деяке періодичне збурення. Визначити поправки до енергії стаціонарних станів з точністю до 2-го порядку теорії збурень включно, якщо збурення має вигляд:

а) $V(x)=V_0\sin\left[\frac{2\pi x}{a}\right]$; б) $V(x)=V_0\cos^2\left[\frac{\pi x}{a}\right]$; в) $V(x)=V_0\sin\left[\frac{4\pi x}{a}\right]$;

г) $V(x)=\begin{cases}0, & x\in]0,b[\cup]a-b,a[\\ V_0, & x\in[b,a-b]\end{cases}$, $b<a/2$; г) $\frac{V_0}{a}(a-|2x-a|)$;

д) $\begin{cases}V_0\sin\left[\frac{2\pi x}{a}\right], & x\in[0,a/2]\\ 0, & x\notin[0,a/2]\end{cases}$, $V_0=\text{const}$.

46. Обчислити першу поправку до енергії основного стану одновимірного гармонічного осцилятора при накладанні збурення:

а) $V(x)=\gamma x^5$; б) $V(x)=\gamma x^6$.

47. Застосовуючи теорію збурень, визначити в 2-му наближенні рівні енергії і в 1-му наближенні хвильові функції частинки в полі:

а) $U(x)=\dfrac{m\omega^2}{2}x^2+\alpha x^3$; б) $U(x)=\dfrac{m\omega^2}{2}x^2+\beta x^4$.

48. Для системи двох одновимірних гармонічних осциляторів, що взаємодіють, обчислити поправку до енергетичних рівнів у першому порядку теорії збурень.

$$\hat{H}=\frac{\hat{P}_{x_1}^{\,2}}{2m_1}+\frac{\hat{P}_{x_2}^{\,2}}{2m_2}+\frac{k_1x_1^2}{2}+\frac{k_2x_2^2}{2}+V(x_1,x_2);$$

а) $V(x_1,x_2)=\alpha(x_1-x_2)^4$, б) $V(x_1,x_2)=\gamma x_1x_2$, в) $V(x_1,x_2)=\gamma x_1^2x_2^2$,

г) $V(x_1,x_2)=\alpha(x_1-x_2)^2$.

49. Визначити в першому наближенні зміну енергії електрона $1s$ стану в кулонівському полі $-\dfrac{ze^2}{r}$ при збільшенні заряду ядра на одиницю (β-розпад).

50. Оцінити в першому наближенні поправку до енергії основного стану атома водню, пов'язану з просторовим розподілом заряду в ядрі ($b \ll a_B$):
а) вважаючи ядро однорідно зарядженою сферою з радіусом b;
б) вважаючи ядро однорідно зарядженою кулею з радіусом b;
припускаючи, що потенціальна енергія електрона $U(r)$ дорівнює:

в) $-\dfrac{e^2}{r+b}$; г) $-\dfrac{e^2}{\sqrt{r^2+b^2}}$; ґ) $-\dfrac{e^2}{\sqrt[3]{r^3+b^3}}$.

51. Для подвійно виродженого рівня визначити поправки першого порядку до енергії і правильні хвильові функції нульового наближення, якщо оператор збурення не залежить від часу.

52. Показати, що для атомів елементів першої групи, в яких рівні енергії E_{nl} визначаються квантовими числами n і l, лінійного ефекту Штарка (розщеплення енергетичних рівнів в зовнішньому однорідному електричному полі) нема.

53. За допомогою варіаційного методу визначити енергію основного стану частинки в потенціальному полі $U(x) = U_0 x^4$ $(U_0 = \text{const})$. Як пробну функцію використати $\varphi(x) = A\exp\left(-\alpha x^2\right)$.

54. Обчислити варіаційним методом енергії основного і першого збудженого станів гармонічного осцилятора, використовуючи пробні функції

$$\psi_0(x) = A\exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right), \ \psi_1(x) = Bx\exp\left(-\frac{\beta x^2}{2}\right).$$

55. Застосовуючи варіаційний метод, визначити найнижчий рівень енергії тривимірного осцилятора, використавши пробну функцію:

а) $\varphi = A(1+\alpha r)e^{-\alpha r}$; б) $\varphi = Ae^{-\frac{\alpha r^2}{2}}$; в) $\varphi = Ae^{-\alpha r}$;

56. Порівняти точне значення енергії основного стану електрона в атомі водню зі значенням енергії, обчисленим за допомогою варіаційного методу з використанням пробної функції:

а) $\varphi = Ae^{-\alpha r}$; б) $\varphi = Ae^{-\alpha r^2}$; в) $\varphi = A(1+\alpha r)e^{-\alpha r}$.

57. Частинка масою m перебуває в основному стані в безмежній потенціальній ямі шириною l. На проміжку часу t система рухається з прискоренням a. Розрахувати імовірності переходу частинки в збуджені стани.

58. Визначити ймовірність переходу гармонічного осцилятора з n-го на m-й рівень за одиницю часу при дії збурення:

а) $V(x,t) = \alpha x^3 \cos(\omega t)$; б) $V(x,t) = \beta x^2 \cos(\omega t)$; в) $V(x,t) = \gamma x \cos(\omega t)$.

59. Частинка з зарядом e має подвійно вироджений рівень з енергією E. Хвильові функції, що відповідають цьому рівню:

$$\varphi_1 = \exp(-r/a)\cos\theta, \qquad \varphi_2 = \left(r - \frac{3}{2}a\right)\exp(-r/a).$$

Визначити рівні енергії та хвильові функції частинки, якщо на систему накладене зовнішнє однорідне електричне поле напруженістю $\mathcal{E}$, a — радіус Бора.

IX. Взаємодія атома з електромагнетним полем

60. За допомогою співвідношення невизначеностей для координати та імпульсу електромагнетного поля оцінити мінімальне власне значення оператора кількості фотонів.

61. Визначити енергію поляризації вакууму електромагнетного поля при накладанні граничних умов, що локалізують поле в скінченному об'ємі. Розрахувати для цього різницю густин енергій поля $\mathcal{E}$ для обмеженого та необмеженого простору (ефект Казимира). Обчислення виконати для одновимірного випадку $D=1$, накладаючи умови рівності нулеві амплітуд поля в точках $x=0$, $x=a$.

Вказівка: для забезпечення збіжності рядів та інтегралів, що виникають у задачі, ввести обрізні множники з параметром η, а в остаточних результатах спрямувати η до нуля.

62. Визначити власні функції і власні значення оператора:

а) $\exp(\alpha\hat{\sigma}_x)$, $\alpha = const$; б) $\hat{S}^+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y$; в) $\hat{S}^- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y$;

г) $\exp\left[i\beta\left(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y\right)\right]$; ґ) $\sin\left(\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y\right)$. $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ — матриці Паулі, $\hat{\mathbf{S}}$ — оператор спіну $\hbar/2$.

63. Обчислити квадрат проекції спіну $\hbar/2$ на довільний напрям.

64. Задано оператор $\hat{H} = \left(\mathbf{h}, \hat{\mathbf{S}}\right)$, $\mathbf{h}$ — сталий вектор. Обчислити власні значення і власні функції цього оператора. $\hat{\mathbf{S}}$ — оператор спіну, $S = \hbar/2$.

X. Квантова механіка систем багатьох частинок

65. Два ферміони, що не взаємодіють і перебувають у тому самому спіновому стані, описуються одночастинковими функціями $\varphi(\mathbf{r}) = -\varphi(-\mathbf{r})$ та $\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r})$. Яка ймовірність того, що обидві частинки перебувають у півпросторі $x > 0$?

66. Два безспінові бозони, що не взаємодіють, описуються одночастинковими функціями $\varphi(\mathbf{r}) = -\varphi(-\mathbf{r})$ та $\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r})$. Яка ймовірність того, що обидві частинки перебувають у півпросторі $x > 0$?

67. N ферміонів, що не взаємодіють, зі спіном 1/2 перебувають у потенціальному полі $-\frac{\alpha}{r}$, послідовно заповнюючи енергетичні рівні. Визначити:

а) рівень Фермі системи (енергію найвищого заповненого рівня);
б) повну енергію системи.

68. За допомогою методу Гайтлера—Лондона обчислити енергію основного стану іона водню H_2^+, якщо відстань між атомними центрами R.

69. Обчислити інтеграл кулонівської взаємодії Q для двох $1s$-електронів в атомі гелію.

70. Використовуючи принцип суперпозиції, обчислити значення електронної енергії основного стану молекули бензолу C_6H_6 (для π-електронів). Енергія основного стану валентних електронів в атомі вуглецю дорівнює E_0, енергія обмінної взаємодії між валентними електронами сусідніх атомів вуглецю — A.

71. Використовуючи функції $|2s\rangle$, $|2p_x\rangle$, $|2p_y\rangle$, $|2p_z\rangle$, одержати вирази для ортонормованих гібридних функцій атома вуглецю

а) у молекулі C_2H_2 (sp-гібридизація),

б) у молекулі C_2H_4 (sp^2-гібридизація),

в) у молекулі CH_4 (sp^3-гібридизація)

і визначити просторову структуру молекули.

XI. Теорія розсіяння

72. У борнівському наближенні обчислити переріз розсіяння частинки потенціальним полем:

а) $U(r)=\dfrac{ze^2}{r}$; б) $U(r)=ze^2\dfrac{e^{-\kappa r}}{r}$; в) $U(r)=U_0e^{-r/a}$.

73. Обчислити точне значення зсуву фази s-хвилі в полі:

$$U(r)=\begin{cases}\infty, & r\le R;\\ 0, & r>R.\end{cases}$$

Відповіді

I. Основні принципи квантової механіки

2. а) $E_0 \geq \dfrac{\hbar^2}{2ma^2}$; б) $E_0 \geq \hbar\sqrt{\dfrac{\alpha}{2m}}$; в) $E_0 \geq \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\alpha\hbar^4}{4m^2}\right)^{1/3}$.

II. Математичний апарат квантової механіки

3. а) $i\left(1 + x\dfrac{d}{dx}\right)$, $ix\dfrac{d}{dx}$, 0; б) $1 + x^2 + 2x\dfrac{d}{dx} + \dfrac{d^2}{dx^2}$, $-1 + x^2 - 2x\dfrac{d}{dx} + \dfrac{d^2}{dx^2}$, $8\left(x^2 - \dfrac{d^2}{dx^2}\right)$; в) $i\dfrac{d^2}{dx^2}$, $-i\dfrac{d^2}{dx^2}$, 0; г) $x + x^2\dfrac{d}{dx}$, $-x - x^2\dfrac{d}{dx}$, 0; ґ) $x^2\dfrac{d}{dx}$, $-2x - x^2\dfrac{d}{dx}$, $-2x^2$; д) $i\left(\dfrac{d}{dx} + x\dfrac{d^2}{dx^2}\right)$, $-i\left(\dfrac{d}{dx} + x\dfrac{d^2}{dx^2}\right)$, 0; е) $i\left(2x + x^2\dfrac{d}{dx}\right)$, $ix^2\dfrac{d}{dx}$, $2x^2$; є) $1 + 3\dfrac{d}{dx} + 3\dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{d^3}{dx^3}$, $1 - 3\dfrac{d}{dx} + 3\dfrac{d^2}{dx^2} - \dfrac{d^3}{dx^3}$, 0;

ж) $\dfrac{2}{x}\dfrac{d}{dx} + \dfrac{d^2}{dx^2}$, $\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{2}{x}\dfrac{d}{dx} + \dfrac{d^2}{dx^2}$, $\dfrac{4}{x^4} - \dfrac{16}{x^3}\dfrac{d}{dx} + \dfrac{8}{x^2}\dfrac{d^2}{dx^2}$; з) $1 + 3x\dfrac{d}{dx} + x^2\dfrac{d^2}{dx^2}$, $x\dfrac{d}{dx} + x^2\dfrac{d^2}{dx^2}$, 0; и) $x\dfrac{d}{dx} + x^2\dfrac{d^2}{dx^2}$, $1 + 3x\dfrac{d}{dx} + x^2\dfrac{d^2}{dx^2}$, 0; і) $\dfrac{2}{x}\dfrac{d}{dx} + \dfrac{d^2}{dx^2}$, $\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{2}{x}\dfrac{d}{dx} + \dfrac{d^2}{dx^2}$, $\dfrac{4}{x^4} - \dfrac{16}{x^3}\dfrac{d}{dx} + \dfrac{8}{x^2}\dfrac{d^2}{dx^2}$; ї) $-1 + x\dfrac{d}{dx}$, $-2 - x\dfrac{d}{dx}$, 0;

й) $x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + x^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + y^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}$, $\hat{A}^+ = \hat{A}$, 0; к) $x^2\hat{P}_x$, $-2i\hbar x + x^2\hat{P}_x$, $-2\hbar^2 x^2$; л) $ix\hat{P}_x^{\,2}$, $-2\hbar\hat{P}_x - ix\hat{P}_x^{\,2}$, $2\hbar^2\hat{P}_x^{\,2}$; м) $-2i\hbar x\hat{P}_x + x^2\hat{P}_x^{\,2}$, $-2i\hbar x\hat{P}_x + x^2\hat{P}_x^{\,2}$, 0; н) $-3i\hbar x^2 + x^3\hat{P}_x$, $x^3\hat{P}_x$, $6\hbar^2 x^4$;
о) $i\hbar^3 x\hat{P}_x - 7\hbar^2 x^2\hat{P}_x^{\,2} - 6i\hbar x^3\hat{P}_x^{\,3} + x^4\hat{P}_x^{\,4}$, $\hbar^4 + 15i\hbar^3 x\hat{P}_x - 25\hbar^2 x^2\hat{P}_x^{\,2} - 10i\hbar x^3\hat{P}_x^{\,3} + x^4\hat{P}_x^{\,4}$, 0; п) $-6\hbar^2 x^2 - 6i\hbar x^3\hat{P}_x + x^4\hat{P}_x^{\,2}$, $-2i\hbar x^3\hat{P}_x + x^4\hat{P}_x^{\,2}$, $-36\hbar^4 x^4 - 48i\hbar^3 x^5\hat{P}_x + 8\hbar^2 x^6\hat{P}_x^{\,2}$;

р) $\dfrac{1+3i\hbar+2\hbar^2}{x^3}+\dfrac{3+3i\hbar}{x^2}\hat{P}_x+\dfrac{3}{x}\hat{P}_x^{\,2}+\hat{P}_x^{\,3}$, $\hat{A}^+=\hat{A}$, 0;

с) $B^2(\mathbf{r})-i\hbar\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r})+2\left(\mathbf{B}(\mathbf{r})\cdot\hat{\mathbf{P}}\right)+\hat{P}^2$, $\hat{A}^+=\hat{A}$, 0. **4.** а) $f\left(\dfrac{x}{1-ax}\right)$;

б) $(x-i\hbar a)^{20}f(x)$; в) $f(xe^{a\hbar})$; г) $-\hbar\dfrac{df(x)}{dx}+xf(x)$;

ґ) $2a\hbar^2\dfrac{df(x)}{dx}+xf(x)$; д) $(x+i\hbar a)^{100}f(x)$; е) $(x-3-2\hbar)^3f(x)$;

є) $f\left(-\ln\left(e^{-x}+a\right)\right)$. **5.** а) $i\hbar\delta_{i,j}$; б) $2i\hbar\delta_{i,j}\hat{P}_j$; в) $2i\hbar\hat{P}_y$; г) $i\hbar\dfrac{\hat{P}_x}{m}$;

ґ) $-i\hbar\dfrac{\partial U}{\partial x}$. **6.** а) $3\hat{B}^2$; б) $\hat{B}+\hat{1}$. **7.** а) Ні; б) так. **8.** $\lambda=\pm1$,
ψ_1 — довільна парна функція, ψ_2 — довільна непарна функція,
$\hat{I}^+=\hat{I}$. **9.** а) $i\hat{I}$; б) $\hat{I}$; в) $\hat{I}$.

10. а) $\hat{T}_a\psi(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n\psi(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\psi^{(n)}(x)}{n!}a^n=\psi(x+a)$; б) $\hat{T}_{-a}$; в) $\forall\lambda$

$\psi_\lambda(x)=\lambda^{\frac{x}{a}}f(x)$, де $f(x)$ — довільна періодична функція з періодом a.

11. а) $\forall\lambda$ $\psi_\lambda(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}+\lambda x-\dfrac{(\mathrm{Re}\lambda)^2}{2}\right)$; б) $\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$,

$\psi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{l}x\right)$, $n\in\mathbf{Z}^+$; в) $\forall\lambda$ $\psi_\lambda(x)=\dfrac{C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x}}{x}$, для
від'ємних λ, $\lambda=-k^2$, існують квадратично інтеґровні власні функції

$\psi_k=\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}\dfrac{\sin kx}{x}$; г) $\equiv$ в); ґ) $\lambda_m=\hbar m$, $\psi_m=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{i}{\hbar}(\hbar m\varphi+a\cos\varphi)}$, $m\in\mathbf{Z}$;

д) $\lambda_m=e^{-am}$, $\psi_m=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$, $m\in\mathbf{Z}$; е) $\lambda_m=i\,\mathrm{sh}\,m$, $\psi_m=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$, $m\in\mathbf{Z}$;

є) $\lambda=\pm1$, $\psi_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\psi_{-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$; ж) $\lambda=\pm1$, $\psi_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$,

$\psi_{-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$; з) $\lambda=\pm1$, $\psi_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\psi_{-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. **12.** p.

13. а) $\tilde{\psi}(p) = A\sqrt{2\pi\hbar}\,\delta(p - \hbar k)$; б) $\tilde{\psi}(p) = \dfrac{A}{\sqrt{2\alpha\hbar}}\exp\left(-\dfrac{p^2}{4\alpha\hbar^2}\right)$;

в) $\tilde{\psi}(p) = \dfrac{-ipA}{(2\alpha\hbar)^{3/2}}\exp\left(-\dfrac{p^2}{4\alpha\hbar^2}\right)$; г) $\tilde{\psi}(p) = \dfrac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}}\dfrac{2\alpha\hbar^2}{p^2 + \hbar^2\alpha^2}$.

14. $i\hbar\dfrac{d}{dp}$, $\tilde{\psi}_x(p) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-i\frac{x}{\hbar}p}$, $\forall x \in R$. **15.** а) 0, $\hbar k_0$; б) $\dfrac{a^2}{2}$, $\dfrac{\hbar^2}{2a^2}$;

в) $\tilde{\psi}(p) = \dfrac{a}{\sqrt{\hbar}}\exp\left(-\dfrac{a^2(p - \hbar k_0)^2}{2\hbar^2}\right)$, $\dfrac{\hbar}{\sqrt{2}a}$.

16. $\left(\alpha i\hbar\dfrac{\partial}{\partial p_x} + \beta p_x\right)\tilde{\psi}_\lambda(p_x) = \lambda\tilde{\psi}_\lambda(p_x)$, $\forall\,\lambda$

$$\tilde{\psi}_\lambda(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\alpha}}\exp\left(-\frac{i}{\hbar\alpha}\left(\lambda p - \beta\frac{p^2}{2}\right)\right).$$

III. Рівняння Шредінгера

17. $\tilde{\psi}(p,t) = \dfrac{A}{\sqrt{2\alpha\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t - \frac{p^2}{4\alpha\hbar^2}}$,

$$\psi(x,t) = \frac{A}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\alpha\hbar}{m}t\right)^2}}\exp\left[-\frac{i}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\alpha\hbar}{m}t\right) - \alpha x^2\frac{1 - i\frac{2\alpha\hbar}{m}t}{1 + \left(\frac{2\alpha\hbar}{m}t\right)^2}\right].$$

18. а) $\langle x(t)\rangle = \langle x(0)\rangle + \dfrac{\langle\hat{P}(0)\rangle}{m}t - \dfrac{k}{m}\dfrac{t^2}{2}$;

б) $\langle x(t)\rangle = \langle x(0)\rangle\cos\left(\sqrt{\dfrac{2k}{m}}t\right) + \dfrac{\langle\hat{P}(0)\rangle}{m}\sqrt{\dfrac{m}{2k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{2k}{m}}t\right)$.

19. $|\psi(t)\rangle = \dfrac{1}{2\sqrt{a^2 + |b|^2}}\left(\left(\sqrt{a^2 + |b|^2} + a\right)|\psi_0\rangle - b|\psi_1\rangle\right)e^{-\frac{i}{\hbar}E_-t} +$

$$+\frac{1}{2\sqrt{a^2+|b|^2}}\left(\left(\sqrt{a^2+|b|^2}-a\right)|\psi_0\rangle+b|\psi_1\rangle\right)e^{-\frac{i}{\hbar}E_+t}, \text{ де } a=\frac{H_{11}-H_{00}}{2},\ b=H_{10}=W_{10},$$

$$E_\pm=\frac{H_{11}+H_{00}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{H_{11}-H_{00}}{2}\right)^2+|W_{01}|^2},\ H_{00}=E_0+W_{00},\ H_{11}=E_1+W_{11}.$$

IV. Найпростіші задачі квантової механіки

20. $\psi_E(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar F}}\exp\left(\frac{i}{\hbar F}\left(Ep-\frac{p^3}{6m}\right)\right),\ \forall E\in R.$ **21.** а) $E=-\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$,

$\psi=\frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}e^{-\frac{m\alpha}{\hbar^2}|x|}$; б) $\psi_0=\sqrt{\frac{\kappa_0}{2+(1+2a\kappa_0)e^{-2\kappa_0 a}}}\left(e^{-\kappa_0|x-a|}+e^{-\kappa_0|x+a|}\right)$,

$E_0=-\frac{\hbar^2\kappa_0^2}{2m}$, де κ_0 є розв'язком рівняння $\frac{\hbar^2}{m\alpha}\kappa_0=1+e^{-2\kappa_0 a}$. Якщо

$2a>\frac{\hbar^2}{m\alpha}$, то існує збуджений зв'язаний стан

$\psi_1=\sqrt{\frac{\kappa_1}{2-(1+2a\kappa_1)e^{-2\kappa_1 a}}}\left(e^{-\kappa_1|x-a|}-e^{-\kappa_1|x+a|}\right)$, $E_1=-\frac{\hbar^2\kappa_1^2}{2m}$, де κ_1 є

ненульовим розв'язком рівняння $\frac{\hbar^2}{m\alpha}\kappa_1=1-e^{-2\kappa_1 a}$; в) $E_n=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$,

$\psi_n=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$; г) якщо $a>\frac{\hbar^2}{2m\alpha}$, то існує зв'язаний стан

$\psi_1=\sqrt{\frac{2\kappa}{2-(1+2a\kappa)e^{-2\kappa a}}}\left(e^{-\kappa|x-a|}-e^{-\kappa(x+a)}\right)\Theta(x)$, $E=-\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}$, де κ є

ненульовим розв'язком рівняння $\frac{\hbar^2}{m\alpha}\kappa=1-e^{-2\kappa a}$. **22.** а) $\frac{a}{2}$, 0;

б) $\frac{a^2}{12}$, $\left(\frac{\hbar n\pi}{a}\right)^2$; в) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}$; г) $\frac{1}{12}-\frac{1}{2n\pi}\left(\sin\frac{2n\pi}{3}-\sin\frac{n\pi}{2}\right)$.

23. $\tilde{\psi}(p)=\frac{4\sqrt{a\pi}}{\sqrt{\hbar}}\frac{\sin\frac{pa}{2\hbar}}{\left(\frac{pa}{\hbar}\right)^2+(2\pi)^2}e^{-i\left(\frac{pa}{2\hbar}+\frac{\pi}{2}\right)}$. **24.** Ширина частини ями, де міститься частинка масою m_1, дорівнює $\frac{a}{\left(1+(m_1/m_2)^{1/3}\right)}$.

25. $\mathrm{tg}\frac{\sqrt{2mE}a}{\hbar}=-\sqrt{\frac{E}{U_0-E}}$. **26.** а) $E_{n_1,n_2}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left[\frac{n_1^2}{L_1^2}+\frac{n_2^2}{L_2^2}\right]$,

$\psi_{n_1,n_2}=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}\sin\frac{n_1\pi x}{L_1}\sin\frac{n_2\pi y}{L_2}$; б) $(x_{\max},y_{\max})$, $x_{\max}=\frac{1}{4}L_1,\frac{3}{4}L_1$,

$y_{\max}=\frac{1}{6}L_2,\frac{1}{2}L_2,\frac{5}{6}L_2$. **27.** $E_n=U_0+\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2$.

28. $E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{e^2E^2}{2m\omega^2}$, $\psi_n(x)=\psi_n^0\left(x-\frac{eE}{m\omega^2}\right)$, де $\psi_n^0(x)$ — хвильові функції незарядженого одновимірного гармонічного осцилятора.

29. $\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\left(\sqrt{m}\delta_{n,m-1}+\sqrt{m+1}\delta_{n,m+1}\right)$, $i\sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}}\left(\sqrt{m+1}\delta_{n,m+1}-\sqrt{m}\delta_{n,m-1}\right)$.

30. $\frac{5}{4}\hbar\omega$. **31.** $w_{0\to n}=e^{-k}\frac{k^n}{n!}$, де $k=\frac{e^2E^2}{2m\hbar\omega^3}$.

32. $w_{0\to 0}=\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{\frac{1}{2}(\omega+\omega')}$. **33.** $w_{0\to\neq 0}=1-\frac{\sqrt{mm'}}{\frac{1}{2}(m+m')}$.

34. $\left(\frac{p^2}{2m}-\frac{m\omega^2\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dp^2}\right)\tilde{\psi}_n(p)=E_n\tilde{\psi}_n(p)$, $E_n=\hbar\omega(n+1/2)$,

$\tilde{\psi}_n(p)=\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n(\eta)\frac{1}{\sqrt[4]{\pi p_0^2}}e^{-\frac{\eta^2}{2}}$, де $\eta=\frac{p}{p_0}$, $p_0=\sqrt{\hbar m\omega}$.

V. Зв'язок квантової механіки з класичною

35. $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$. **36.** $h_n = \left[\dfrac{3\pi\hbar}{2\sqrt{2gm}}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right]^{2/3}$, $E_n = mgh_n$.

37. а) $D_0 e^{-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2mV_0}l}{\hbar}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)^{3/2}}$; б) $D_0 e^{-\pi\frac{\sqrt{2mV_0}l}{\hbar}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)}$;

в) $D_0 e^{-2\frac{\sqrt{2mV_0}l}{\hbar}\left(\arcsin\sqrt{1-\frac{E}{V_0}}-\sqrt{1-\frac{E}{V_0}}\right)}$.

VI. Момент кількості руху

40. а) $i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{X}^k$; б) $2i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{X}_l\hat{X}^k$; в) 0; г) $-2i\hbar\left[\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{L}}\right]_z$ $-2\hbar^2\hat{Z}$;

ґ) $i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{P}^k$; д) 0; е) $-i\hbar\left[\mathbf{r}\times\nabla U\right]_x$; є) $-i\hbar\left\{\left(\hat{\mathbf{L}}\cdot\left[\mathbf{r}\times\nabla U\right]\right)+\left(\left[\mathbf{r}\times\nabla U\right]\cdot\hat{\mathbf{L}}\right)\right\}$;

(ε_{ijk} — одиничний антисиметричний тензор третього рангу).

41. $\lambda_m = \hbar m$, $\psi_m = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$, $m \in \mathbb{Z}$.

VII. Рух у центрально-симетричному полі

42. $\psi_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi R}}\dfrac{\sin\frac{n\pi r}{R}}{r}$, $E_n = \dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{n\pi}{R}\right)^2$. **43.** а) $R/2$, $R^2\left(\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{(2\pi n)^2}\right)$;

б) $\left(\dfrac{\hbar n\pi}{R}\right)^2$, $\left(\dfrac{\hbar n\pi}{R}\right)^2$; в) $R^2\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{(2\pi n)^2}\right)$, таких значень є n: $r_{0k} = R\dfrac{k+\frac{1}{2}}{n}$,

$k = 0,\ldots,n-1$; г) R_x є розв'язком рівняння $\dfrac{R_x}{R} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi n}\sin\left(2\pi n\dfrac{R_x}{R}\right)$.

44. а) $\dfrac{3}{2}a$, $3a^2$, a; б) $\dfrac{e^2}{2a}$, $-\dfrac{e^2}{a}$; в) $\dfrac{2}{e}\left(1-\dfrac{17}{4e^2}\right)$,

(a — борівський радіус).

VIII. Теорія збурень

45. а) $$E_n \approx E_n^{(0)} + \frac{256}{\pi^2}\frac{V_0^2}{E_1^{(0)}}\sum_{m\neq n}^{\infty}\frac{\left(\frac{1-(-1)^{n+m}}{2}\right)m^2n^2}{\left[\left(4-m^2-n^2\right)^2-4m^2n^2\right]^2\left(n^2-m^2\right)} = E_n^{(0)} +$$

$$+\frac{256}{\pi^2}\frac{V_0^2}{E_1^{(0)}}\sum_{k=1}^{\infty}\begin{cases}\dfrac{(2k)^2n^2}{\left[\left(4-(2k)^2-n^2\right)^2-4(2k)^2n^2\right]^2\left(n^2-(2k)^2\right)}, & n=2l+1\\ \dfrac{(2k-1)^2n^2}{\left[\left(4-(2k-1)^2-n^2\right)^2-4(2k-1)^2n^2\right]^2\left(n^2-(2k-1)^2\right)}, & n=2l\end{cases},$$

де $E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$;

б) $$E_n \approx E_n^{(0)} + V_0\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\delta_{n,1}\right) + \frac{V_0^2}{64E_1^{(0)}}\left(\frac{1-\delta_{n,1}-\delta_{n,2}}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= E_n^{(0)} + V_0\begin{cases}\frac{3}{4}, & n=1\\ \frac{1}{2}, & n\geq 2\end{cases} - \frac{V_0^2}{32E_1^{(0)}}\begin{cases}\frac{1}{4}, & n=1\\ \frac{1}{6}, & n=2\\ \frac{1}{n^2-1}, & n>2\end{cases}$$, де $E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$;

в) $$E_n \approx E_n^{(0)} + \frac{1024}{\pi^2}\frac{V_0^2}{E_1^{(0)}}\sum_{m\neq n}^{\infty}\frac{\left(\frac{1-(-1)^{n+m}}{2}\right)m^2n^2}{\left[\left(16-m^2-n^2\right)^2-4m^2n^2\right]^2\left(n^2-m^2\right)} = E_n^{(0)} +$$

$$+\frac{1024}{\pi^2}\frac{V_0^2}{E_1^{(0)}}\sum_{k=1}^{\infty}\begin{cases}\dfrac{(2k)^2n^2}{\left[\left(16-(2k)^2-n^2\right)^2-4(2k)^2n^2\right]^2\left(n^2-(2k)^2\right)}, & n=2l+1\\[2ex] \dfrac{(2k-1)^2n^2}{\left[\left(16-(2k-1)^2-n^2\right)^2-4(2k-1)^2n^2\right]^2\left(n^2-(2k-1)^2\right)}, & n=2l\end{cases}, \text{ де}$$

$$E_n^{(0)}=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2; \quad \text{г) } E_n\approx E_n^{(0)}+V_0\left(1-\frac{2b}{a}-\frac{(-1)^n}{\pi n}\sin\left[\left(1-\frac{2b}{a}\right)\pi n\right]\right)+$$

$$+\frac{4V_0^2}{\pi^2E_1^{(0)}}\sum_{l\neq n}\frac{\frac{1+(-1)^{n-l}}{2}\left((n+l)\sin\left[\left(1-\frac{2b}{a}\right)\frac{\pi(n-l)}{2}\right]-(n-l)\sin\left[\left(1-\frac{2b}{a}\right)\frac{\pi(n+l)}{2}\right]\right)^2}{\left(n^2-l^2\right)^3}=$$

$$=E_n^{(0)}+V_0\left(1-\frac{2b}{a}-\frac{(-1)^n}{\pi n}\sin\left[\left(1-\frac{2b}{a}\right)\pi n\right]\right)+\frac{4}{\pi^2}\frac{V_0^2}{E_1^{(0)}}\times$$

$$\times\sum_{k\neq n}^{\infty}\begin{cases}\dfrac{\left(\dfrac{\sin\left[\left(1-\frac{2b}{a}\right)\frac{\pi(n-2k-1)}{2}\right]}{(n-2k-1)}-\dfrac{\sin\left[\left(1-\frac{2b}{a}\right)\frac{\pi(n+2k+1)}{2}\right]}{(n+2k+1)}\right)^2}{n^2-(2k+1)^2}, & n=2l+1\\[3ex] \dfrac{\left(\dfrac{\sin\left[\left(1-\frac{2b}{a}\right)\frac{\pi(n-2k)}{2}\right]}{(n-2k)}-\dfrac{\sin\left[\left(1-\frac{2b}{a}\right)\frac{\pi(n+2k)}{2}\right]}{(n+2k)}\right)^2}{n^2-(2k)^2}, & n=2l\end{cases},$$

$$\text{де } E_n^{(0)}=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2; \quad \text{ґ) } E_n\approx E_n^{(0)}+\frac{V_0}{2}\left(1+\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi^2n^2}\right)+$$

$$+\frac{16V_0^2}{\pi^4E_1^{(0)}}\sum_{l\neq n}\frac{\frac{1+(-1)^{n-l}}{2}\left(4nl+(-1)^{(n+l)/2}\left(\left(n^2+l^2\right)\left(1-(-1)^n\right)-2nl\left(1+(-1)^n\right)\right)\right)^2}{\left(n^2-l^2\right)^5}=$$

$$E_n^{(0)}+\frac{V_0}{2}\begin{cases}\left(1+\dfrac{4}{\pi^2n^2}\right), & n=2l+1\\ 1, & n=2l\end{cases}-\frac{16V_0{}^2}{\pi^4E_1^{(0)}}\times$$

$$\times\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}\frac{\left(4n(2k-1)+(-1)^{k+l}\left((2k-1)^2+n^2\right)\right)^2}{\left(n^2-(2k-1)^2\right)^5}, & n=2l+1\\ \displaystyle 4\sum_{k=1}\frac{n^2(2k)^2\left(2-(-1)^{k+l}\right)^2}{\left(n^2-(2k)^2\right)^5}, & n=2l\end{cases}, \text{ де } E_n^{(0)}=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2;$$

д) $E_n\approx E_n{}^{(0)}+\dfrac{V_0}{\pi}\left(1+\dfrac{1+(-1)^n}{2\left(n^2-1\right)}\right)+$

$$+\frac{64V_0^2}{\pi^2E_1{}^{(0)}}\sum_{l\neq n}\frac{\dfrac{1+(-1)^{n-l}}{2}\left(\left(4-n^2-l^2\right)\left(1-(-1)^n\right)-2nl\left(1+(-1)^n\right)\right)^2}{\left(n^2-l^2\right)\left(\left(l^2-n^2\right)^2+8\left(2-n^2-l^2\right)\right)^2}=$$

$$E_n^{(0)}+\frac{V_0}{\pi}\begin{cases}\dfrac{n^2}{n^2-1}, & n=2l+1\\ 1, & n=2l\end{cases}+\frac{4}{\pi^2}\frac{V_0^2}{E^{(0)}}\times$$

$$\times\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}\frac{\left(4-(2k-1)^2-n^2\right)^2}{\left(n^2-(2k-1)^2\right)\left(\left(n^2-(2k-1)^2\right)^2+8\left(2-n^2-(2k-1)^2\right)\right)^2}, & n=2l+1\\ \displaystyle 2\sum_{k=1}\frac{(2kn)^2}{\left(n^2-(2k)^2\right)\left(\left(n^2-(2k)^2\right)^2+8\left(2-n^2-(2k)^2\right)\right)^2}, & n=2l\end{cases}.$$

46. а) 0; **б)** $\dfrac{15}{8}\gamma\left(\dfrac{\hbar}{m\omega}\right)^3$.

47. а) $E_n \approx \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{\alpha^2(\hbar/2m\omega)^3}{\hbar\omega}\left(30n^2+30n+11\right)$,

$$|n\rangle^{(1)}=|n\rangle^{(0)}-\frac{\alpha(\hbar/2m\omega)^{3/2}}{\hbar\omega}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{3}\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\,|n+3\rangle^{(0)}+3(n+1)^{3/2}|n+1\rangle^{(0)}-\\ -3n^{3/2}|n-1\rangle^{(0)}-\frac{1}{3}\sqrt{n(n-1)(n-2)}\,|n-3\rangle^{(0)}\end{array}\right);$$

б) $E_n \approx \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)+6\beta(\hbar/2m\omega)^2\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right)-$

$$-\frac{\beta^2(\hbar/2m\omega)^4}{\hbar\omega}\left(68n^3+102n^2+115n+42\right),\ |n\rangle^{(1)}=|n\rangle^{(0)}-\frac{\beta(\hbar/2m\omega)^2}{\hbar\omega}\times$$

$$\times\left(\begin{array}{l}\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}}{4}|n+4\rangle^{(0)}+(2n+3)\sqrt{(n+1)(n+2)}\,|n+2\rangle^{(0)}-\\ -(2n-1)\sqrt{n(n-1)}\,|n-2\rangle^{(0)}-\frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}}{4}|n-4\rangle^{(0)}\end{array}\right).$$

48. а) $$\Delta E^{(1)}{}_{n_1,n_2}=3\alpha\hbar^2\left(\begin{array}{l}\frac{1}{2k_1m_1}\left(n_1{}^2+n_1+1/2\right)+\frac{1}{2k_2m_2}\left(n_2{}^2+n_2+1/2\right)+\\ +\frac{2}{\sqrt{k_1m_1k_2m_2}}(n_1+1/2)(n_2+1/2)\end{array}\right);$$

б) $\Delta E^{(1)}{}_{n_1,n_2}=0$; в) $\Delta E^{(1)}{}_{n_1,n_2}=\frac{\gamma\hbar^2}{\sqrt{k_1m_1k_2m_2}}(n_1+1/2)(n_2+1/2)$;

г) $\Delta E^{(1)}{}_{n_1,n_2}=\alpha\hbar\left(\frac{1}{\sqrt{k_1m_1}}(n_1+1/2)+\frac{1}{\sqrt{k_2m_2}}(n_2+1/2)\right)$. **49.** $\Delta E^{(1)}=-\frac{mze^4}{2\hbar^2}$.

50. а) $\Delta E^{(1)}\approx-\frac{1}{6}\left(\frac{2b}{a}\right)^2E_0$; б) $\Delta E^{(1)}\approx-\frac{7}{30}\left(\frac{2b}{a}\right)^2E_0$; в) $\Delta E^{(1)}\approx-2E_0\frac{2b}{a}$;

г) $\Delta E^{(1)}\approx E_0\left(\frac{2b}{a}\right)^2\ln\left(\frac{2b}{a}\right)$; г) $\Delta E^{(1)}\approx-\left(\frac{2b}{a}\right)^2E_0$.

51. $\Delta E^{(1)}=\frac{V_{11}+V_{00}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{V_{11}-V_{00}}{2}\right)^2+|V_{01}|^2}$,

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+|b|^2\pm a\sqrt{a^2+|b|^2}}}\left(b|0\rangle+\left(a\pm\sqrt{a^2+|b|^2}\right)|1\rangle\right),\ \text{де}\ a=\frac{V_{11}-V_{00}}{2},$$

$b=V_{10}$. **53.** $E_0\geq\left(\dfrac{\hbar^4U_0\left(\dfrac{3}{4}\right)^4}{m^2}\right)^{\frac{1}{3}}$. **54.** $E_0=\dfrac{1}{2}\hbar\omega$, $E_1=\dfrac{3}{2}\hbar\omega$.

55. а) $E_0\geq\dfrac{9\sqrt{6}}{14}\hbar\omega$; б) $E_0\geq\dfrac{3}{2}\hbar\omega$; в) $E_0\geq\sqrt{3}\hbar\omega$;

56. а) $\widetilde{E}_0=E_0$; б) $\widetilde{E}_0=\dfrac{8}{3\pi}E_0$; в) $\widetilde{E}_0=\dfrac{27}{28}E_0$.

57. $W_{1\to n}=\dfrac{2^9\left(1-(-1)^{n+1}\right)m^4l^6n^2}{\pi^8\hbar^4\left(n^2-1\right)^6}\sin^2\left(\dfrac{\hbar\pi^2\left(n^2-1\right)}{4ml^2}t\right)$.

58. а) $$w_{n\to m}=\frac{\pi\alpha^2}{2\hbar}\left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)^3\left(\begin{array}{l}\delta_{m,n+3}(n+1)(n+2)(n+3)\delta(\hbar\omega-3\hbar\omega_0)+\\+\delta_{m,n+1}9(n+1)^3\delta(\hbar\omega-\hbar\omega_0)+\\+\delta_{m,n-1}9n^3\delta(\hbar\omega-\hbar\omega_0)+\\+\delta_{m,n-3}n(n-1)(n-2)\delta(\hbar\omega-3\hbar\omega_0)\end{array}\right);$$

б) $$w_{n\to m}=\frac{\pi\beta^2}{2\hbar}\left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)^2\delta(\hbar\omega-2\hbar\omega_0)\left(\delta_{m,n+2}(n+1)(n+2)+\delta_{m,n-2}n(n-1)\right);$$

в) $$w_{n\to m}=\frac{\pi\gamma^2}{2\hbar}\frac{\hbar}{2m\omega_0}\delta(\hbar\omega-\hbar\omega_0)\left(\delta_{m,n+1}(n+1)+\delta_{m,n-1}n\right).$$

59. $E_{1,2}=E\pm\dfrac{1}{2}e\mathcal{E}_za$, $\psi_{1,2}=\sqrt{\dfrac{3}{\pi a^3}}\left(\cos\theta\pm\left(\dfrac{2}{3}\dfrac{r}{a}-1\right)\right)\exp(-r/a)$.

IX. Взаємодія атома з електромагнетним полем

60. $N_{\mathbf{k},\alpha} \geq 0$. **61.** $\mathcal{E} = -\dfrac{\pi}{24}\dfrac{\hbar c}{a^2}$. **62.** а) $\lambda_{1,2} = \exp(\pm\alpha)$, $\Psi_{1,2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm 1\end{pmatrix}$;

б) $\lambda = 0$, $\Psi = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; в) $\lambda = 0$, $\Psi = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; г) $\lambda = \exp\left[\pm i\beta\sqrt{2}\right]$,

$\Psi_{1,2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$; ґ) $\lambda = 0$, $\Psi = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. **63.** $\dfrac{1}{4}\hbar^2$.

64. $\lambda_{1,2} = \pm\dfrac{\hbar}{2}h$, $\Psi_{1,2} = \dfrac{1}{\sqrt{2h}}\begin{pmatrix}\sqrt{h \pm h_z}\\ \pm\dfrac{h_x + ih_y}{\sqrt{h \pm h_z}}\end{pmatrix}$.

X. Квантова механіка систем багатьох частинок

65. $W(x_1 > 0, x_2 > 0) = \dfrac{1}{4} - |I|^2$, де $I = \int\limits_{x>0} \varphi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})d^3r$.

66. $W(x_1 > 0, x_2 > 0) = \dfrac{1}{4} + |I|^2$, де $I = \int\limits_{x>0} \varphi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})d^3r$.

67. а) $E_F = -\dfrac{m\alpha^2}{2\hbar^2 N_F^2}$, де $N_F = \mathrm{int}\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}N} + \dfrac{1}{2}\right)$; б) $E = -\dfrac{m\alpha^2}{2\hbar^2}\left(N_F - 1 + \dfrac{n_F}{N_F^2}\right)$,

де $n_F = N - \dfrac{1}{3}(N_F - 1)N_F(2N_F - 1)$ – заселеність рівня Фермі.

68. $E = E_0\left(\dfrac{1 - S - 2I}{1 + S} - \dfrac{2}{\rho}\right)$, $S = \left(1 + \rho + \dfrac{\rho^2}{3}\right)\exp(-\rho)$, $I = \dfrac{1}{\rho}(1 - (1+\rho)\exp(-2\rho))$,

$E_0 = \dfrac{-me^4}{2\hbar^2}$, $\rho = \dfrac{R}{a}$. **69.** $Q = \dfrac{5}{4}\dfrac{e^2}{a}$. **70.** $E_\pi = 6E_0 - 8A$.

71. а) $|1\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|2s\rangle + |2p_x\rangle)$, $|2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|2s\rangle - |2p_x\rangle)$; б) $|1\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{3}}|2s\rangle + \sqrt{\dfrac{2}{3}}|2p_x\rangle$,

$|2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{3}}|2s\rangle - \dfrac{1}{\sqrt{6}}|2p_x\rangle + \dfrac{1}{\sqrt{2}}|2p_y\rangle$, $|3\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{3}}|2s\rangle - \dfrac{1}{\sqrt{6}}|2p_x\rangle - \dfrac{1}{\sqrt{2}}|2p_y\rangle$;

в) $|1\rangle = \frac{1}{2}\left(|2s\rangle + |2p_x\rangle + |2p_y\rangle + |2p_z\rangle\right)$, $|2\rangle = \frac{1}{2}\left(|2s\rangle + |2p_x\rangle - |2p_y\rangle - |2p_z\rangle\right)$,

$|3\rangle = \frac{1}{2}\left(|2s\rangle - |2p_x\rangle + |2p_y\rangle - |2p_z\rangle\right)$, $|4\rangle = \frac{1}{2}\left(|2s\rangle - |2p_x\rangle - |2p_y\rangle + |2p_z\rangle\right)$.

XI. Теорія розсіяння

72. а) $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2 Z^2 e^4}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^4}$; б) $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2 Z^2 e^4}{\left(\hbar^2 \kappa^2 + |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2\right)^2}$;

в) $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{16 m^2 U_0{}^2}{\hbar^4 a^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2}{\hbar^2}\right)^4}$; г) $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 U_0{}^2}{4\pi^2 \hbar^4}$. **73.** $\delta_0(p) = \frac{p}{\hbar} R$.

Список літератури

1. *Давыдов А. С.* Квантовая механика. М., 1973.
2. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. М., 1983.
3. *Юхновський І. Р.* Квантова механіка. К., 1995.
4. *Глауберман А. Ю.* Квантова механіка. Львів, 1962.
5. *Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. И.* Квантовая механика. М., 1979.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М., 1989.
7. *Дирак П. А. М.* Принципы квантовой механики. М., 1960.

* * *

8. *Фок В. А.* Начала квантовой механики. М., 1976.
9. *Ферми Е.* Квантовая механика: Конспект лекций. М., 1968.
10. *Шифф Л.* Квантовая механика. М., 1959.
11. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 8,9. М., 1966.
12. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М., 1968.
13. *Зоммерфельд А.* Строение атома и спектра. Т.2. М., 1956.
14. *Мессиа А.* Квантовая механика. Т. 1,2. М., 1979.

* * *

15. *Гречко Л. Г., Сугаков В. И., Томасевич О. Ф.* и др. Сборник задач по теоретической физике. М., 1972.
16. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. Т. 1, 2. М., 1974.
17. *Иродов И. Е.* Сборник задач по атомной и ядерной физике. М., 1966.
18. *Галицкий В. М., Карнаков Б. М., Коган В. И.* Задачи по квантовой механике. М., 1981.
19. *Кукушкин А. К.* Задачи по квантовой химии и строению молекул. М., 1987.

ПРОГРАМА КУРСУ «КВАНТОВА МЕХАНІКА»
для студентів фізичного факультету

ВСТУП

Основні етапи розвитку квантової теорії. Гіпотеза Планка і «стара» квантова механіка. Хвильова і матрична механіка.

ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

1. Опис стану в квантовій механіці. Хвильова функція.
2. Принцип суперпозиції (приклади з теорії ядерних сил, квантової хемії, фізики твердого тіла, Кіт Шредінґера).
3. Хвильовий пакет.
4. Хвильова функція вільної частинки. Властивості плоских хвиль.
5. Середні значення координати та імпульсу. Оператор імпульсу.
6. Співвідношення невизначеностей Гайзенберґа. Мінімізуючий хвильовий пакет. (Приклади: розміри атомного ядра, рідкий гелій, енергія основного стану атома).

МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

7. Оператори фізичних величин. Дії над операторами. Приклади операторів фізичних величин.
8. Власні функції і власні значення операторів.
9. Властивості власних значень і власних функцій ермітових операторів.
10. Співвідношення невизначеностей для фізичних величин, що зображаються некомутуючими операторами. Когерентні стани. Принцип доповнювальності Бора.
11. Різні зображення хвильових функцій. Бра- і кет-вектори.
12. Різні зображення операторів. Матриці операторів.
13. Квантова механіка — теорія лінійних операторів у гільбертовому просторі.

РІВНЯННЯ ШРЕДІНҐЕРА

14. Хвильове рівняння Шредінґера.
15. Рівняння неперервності. Закон збереження густини ймовірності.
16. Зміна середніх значень фізичних величин з часом. Квантові дужки Пуассона.
17. Стаціонарні стани.
18. Зображення Шредінґера і зображення Гайзенберґа. Зображення взаємодії.

НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

19. Частинка в потенціальній ямі з безмежно високими стінками.
20. Гармонічний осцилятор. Хвильовий та матричний підходи. Оператори народження і знищення. Когерентні стани.
21. Проходження частинки через потенціальний бар'єр. Резонансні стани.
22. Холодна емісія електронів з металу.
23. Теорія Ґамова α-розпаду важких ядер.

ЗВ'ЯЗОК КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ З КЛАСИЧНОЮ

24. Перехід від квантових рівнянь руху до класичних. Розпливання хвильових пакетів з часом.
25. Хвильова функція в квазікласичному наближенні. Метод Вентцеля—Крамерса—Бріллюена.
26. Правило квантування Бора—Зоммерфельда. Приклад гармонічного осцилятора.
27. Квантова механіка й інтеграли по траєкторіях.

МОМЕНТ КІЛЬКОСТІ РУХУ

28. Оператор повороту й орбітальний момент кількості руху.
29. Власні значення та власні функції операторів квадрата і проекцій моменту кількості руху.
30. Власні функції операторів квадрата і проекцій орбітального моменту кількості руху.
31. Оператор моменту кількості руху для $j = 1/2$. Розпад Λ°-частинки.
32. Ротатор.
33. Ядерний квадрупольний резонанс.

РУХ ЧАСТИНКИ В ЦЕНТРАЛЬНОСИМЕТРИЧНОМУ ПОЛІ

34. Рух у полі центральної сили. Радіальне рівняння Шредінґера.
35. Рух у кулонівському полі. Атом водню.
36. Атом водню. Інтеграл руху Лапласа—Рунґе—Ленца (метод В. Паулі).

ТЕОРІЯ ЗБУРЕНЬ

37. Стаціонарна теорія збурень. Невироджений випадок. (Ангармонічні осцилятори $x^2 + x^4$ та x^4. Моделі з малими параметрами, створеними «з нічого».)
38. Ефективна маса домішок у конденсованих тілах.
39. Модель з неаналітичною залежністю енергії від константи взаємодії: надпровідник Бардіна—Купера—Шріффера.
40. Теорія збурень у випадку виродження. Дворівнева система.

41. Ефект Штарка для атома водню.
42. Енергетичні рівні електрона в кристалі. π-електронна теорія органічних молекул.
43. Варіаційний метод. (Ангармонічний осцилятор. Від'ємний іон водню H^-).
44. Теорія збурень, залежних від часу.
45. Ймовірність квантового переходу за одиницю часу. «Золоте правило» Фермі.
46. Дифракція нейтронів у рідинах та твердих тілах.

ВЗАЄМОДІЯ АТОМА З ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИМ ПОЛЕМ

47. Квантування вільного електромагнетного поля. Фотони. Векторний потенціал як оператор. Ефект Казимира.
48. Теорія випромінювання та поглинання світла. Формула Планка.
49. Електричне дипольне випромінювання. Правила відбору.
50. Електричні квадрупольні та магнетні дипольні переходи. Правила відбору.
51. Час життя збуджених станів атомів: Природна ширина спектральних ліній.
52. Квантова теорія дисперсії світла. Показник заломлення, коефіцієнт поглинання. Сила осцилятора.
53. Фотоефект.

РЕЛЯТИВІСТСЬКА КВАНТОВА МЕХАНІКА

54. Рівняння Кляйна—Ґордона—Фока. π-мезонний атом.
55. Рівняння Дірака. Матриці Дірака. Рівняння неперервності.
56. Момент кількості руху в теорії Дірака. Спін.
57. Спінові функції. Сферичний спінор.
58. Вільний рух релятивістської частинки. Проблема від'ємних енергій. Позитрони.
59. Квазірелятивістське наближення рівняння Дірака. Рівняння Паулі.
60. Квазірелятивістське наближення рівняння Дірака. Спін-орбітальна взаємодія.
61. Атом водню з урахуванням релятивістських поправок. Формула тонкої структури. Лембівський зсув рівнів.
62. Атом у магнетному полі.

КВАНТОВА МЕХАНІКА СИСТЕМИ БАГАТЬОХ ЧАСТИНОК

63. Принцип тотожності частинок у квантовій механіці. Симетричні та антисиметричні хвильові функції. Бозони, ферміони.
64. Теорія атома гелію. Пара- та ортогелій.
65. Метод Хартрі—Фока.

66. Метод Томаса—Фермі.
67. Теорія молекул. Адіабатичне наближення.
68. Молекула водню. Метод Гайтлера—Лондона.
69. Хемічний зв'язок. Типи хемічного зв'язку. Властивості ковалентного зв'язку. SP-гібридизація.
70. Коливні та обертальні стани молекул.
71. Сили Ван-дер-Ваальса.

ТЕОРІЯ РОЗСІЯННЯ

72. Амплітуда розсіяння.
73. Амплітуда розсіяння двох тотожних частинок.
74. Борнівське наближення для амплітуди розсіяння. Формула Резерфорда.
75. Розсіяння електронів на атомі.
76. Метод парціальних хвиль. Оптична теорема.
77. Елементи теорії непружного розсіяння.

Навчальне видання

Вакарчук Іван Олександрович
Кулій Тарас Володимирович
Кнігініцький Олександр Васильович
Ткачук Володимир Михайлович

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

Підп. до друку 12.11.96. Формат 60x84/16. Папір друк. №1.
Умовн. друк. арк. 1,8. Умовн. фарбовідб. 1,8. Обл.-вид. арк. 2,0.
Тираж 800 прим. Зам. 39.
Машинно-офсетна лабораторія Львівського держуніверситету ім. І. Франка.
290602, Львів, вул. Університетська 1.