МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ФРАНКА

І. О. ВАКАРЧУК, О. В. КНІГІНІЦЬКИЙ,
О. М. ПОПЕЛЬ, Т. В. КУЛІЙ

# ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ТЕРМОДИНАМІКИ І СТАТИСТИЧНОЇ ФІЗИКИ

ЛЬВІВ 1998

Міністерство освіти України
Львівський державний університет ім. І. Франка

І. О. Вакарчук, О. В. Книгініцький,
О. М. Попель, Т. В. Кулій

# ЗБІРНИК ЗАДАЧ
# З ТЕРМОДИНАМІКИ І СТАТИСТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Рекомендовано до друку
кафедрою теоретичної фізики
Протокол № 30 від 07.04.1997

Львів ЛДУ 1998

УДК 530.145.6

Збірник задач з термодинаміки і статистичної фізики/ І.О. Вакарчук, О.В. Кнігініцький, О.М. Попель, Т.В. Кулій. – Львів: Ред.-вид. відділ Львів. ун-ту, 1998. – 36 с.

Збірник містить задачі з відповідями і вказівками до основних розділів курсу «Термодинаміка і статистична фізика», який читають студентам фізичного факультету Львівського державного університету ім. І. Франка.

Для студентів фізичних факультетів університетів, аспірантів та наукових працівників.

Рецензенти: член-кор. НАН України, проф. І.В. Стасюк (ІФКС НАН України);
канд. фіз.-мат. наук, доц. В.М. Ткачук (Львів. ун-т)

Редактор: Я.В. Прихода

## I. Розподіл Максвелла-Больцмана

1. Припускаючи, що потенціальна енергія електрона в металі менша від потенціальної енергії електрона поза металом на величину $A = e_0\varphi$, обчислити густину струму термоелектронної емісії. Маса електрона $m$, концентрація електронів $n_0$.

2. Ідеальний газ знаходиться в центрифузі радіуса $R$, яка обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega$. Визначити:

а) середню енергію частинки газу $\langle\varepsilon\rangle$; б) дисперсію $\left\langle(\Delta r)^2\right\rangle$.

3. Використовуючи розподіл Максвелла, обчислити:

а) $\langle v^n\rangle$ якщо $n > -2$;

б) $\langle v\rangle, \langle v^2\rangle$;

в) $v_{н.і.}$ (найбільш імовірне значення модуля швидкості).

4. Використовуючи розподіл Максвелла, обчислити для двовимірного випадку:

а) $\left\langle\dfrac{1}{v}\right\rangle$; б) $\langle v\rangle$; в) $\langle v^2\rangle$; г) $v_{н.і.}$.

5. Яка частина молекул газу має значення абсолютної величини швидкості в інтервалі $[0{,}5v_{н.і.};\ 2v_{н.і.}]$?

6. Записати розподіл імовірності того, що значення кінетичної енергії частинки системи знаходиться в інтервалі $[\varepsilon;\ \varepsilon + d\varepsilon]$.

7. Знайти імовірність того, що дві частинки мають абсолютну величину швидкості відносного руху $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ в інтервалі $[v';\ v'+dv']$. Визначити $\langle v'\rangle$.

8. Розріджений газ знаходиться в посудині при тиску $P$. Вважаючи $P$ весь час постійним, визначити швидкість витікання газу $\frac{d\langle N\rangle}{dt}$ у вакуум через отвір площею $S_0$ при максвеллівському розподілі частинок газу за швидкостями.

9. Знайти центр ваги безмежно високого стовпа ідеального газу в полі сили тяжіння, маса частинки газу $m$, температура $T$.

10. Знайти центр ваги ідеального газу, який знаходиться в циліндричній посудині з висотою $h$ в полі сили тяжіння. Маса частинки газу $m$, температура $T$.

11. Суміш $l$ сортів ідеальних газів, що містять однакову кількість частинок з різними масами $m_1,\ldots,m_l$, знаходиться в циліндрі з висотою $h$ в полі сили земного тяжіння. Знайти положення центра ваги цієї системи.

12. Визначити діелектричну проникливість $\varepsilon$ ідеального газу, який складається з $N$ дипольних молекул з постійним моментом $p_0$. Об'єм газу $V$. Розглянути випадок $\frac{p_0 E}{kT} \ll 1$ ( $E$ — напруженість зовнішнього однорідного електричного поля ).

13. Атоми в двоатомній молекулі взаємодіють за законом:

$$U(r) = \frac{B}{r^{12}} - \frac{A}{r^6} \qquad A > 0, \;\; B > 0.$$

Визначити "коефіцієнт лінійного розширення" такої молекули.

## II. Основні співвідношення термодинаміки. Метод характеристичних функцій

14. Знайти $C_P - C_V$ у змінних: а) $P, T$; б) $V, T$.

15. Обчислити $C_P - C_V$ для одного моля ідеального газу.

16. Вивести рівняння адіабати ідеального газу, використовуючи похідну $\left(\dfrac{\partial P}{\partial V}\right)_S$.

17. Обчислити $C_P - C_V$ для газу, який описується рівнянням стану типу Ван-дер-Ваальса.

18. Для одного моля класичного ідеального газу обчислити:

а) $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T$; б) $\left(\dfrac{\partial T}{\partial V}\right)_S$; в) $\left(\dfrac{\partial H}{\partial P}\right)_T$.

19. Обчислити: а) $\left(\dfrac{\partial G}{\partial S}\right)_V$; б) $\left(\dfrac{\partial G}{\partial S}\right)_T$.

20. Довести співвідношення:

а) $\alpha = P_0\beta\gamma$; б) $\beta - \delta = \dfrac{T}{C_P} V_0\alpha^2$,

де $\alpha = \dfrac{1}{V_0}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ — коефіцієнт термічного розширення,

$\beta = -\dfrac{1}{V_0}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ — ізотермічна стисливість,

$\gamma = \dfrac{1}{P_0}\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ — термічний коефіцієнт тиску,

$\delta = -\dfrac{1}{V_0}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_S$ — адіабатична стисливість.

21. Довести співвідношення $\frac{C_P}{C_V} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S}$ .

22. З'ясувати, в яких системах:

а) теплоємність $C_P$ не залежить явно від тиску;

б) теплоємність $C_V$ не залежить явно від об'єму.

23. Довести: а) $C_P - C_V = \left[V - \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T\right]\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ ;

б) $C_P - C_V = \left[V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ .

24. Визначити теплоємність ідеального газу в такому процесі:

а) $PV^2 = \text{const}$; б) $P^2V = \text{const}$; в) $P / V = \text{const}$;
г) $PV^3 = \text{const}$; ґ) $P^3V = \text{const}$.

25. Обчислити швидкість звуку в ідеальному газі, використовуючи співвідношення $\upsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S}$ .

26. Для одиниці об'єму діелектрика з постійною густиною $\rho$ обчислити різницю теплоємностей при постійній напруженості електричного поля $E$ та індукції $D$ $C_E - C_D$.

**Примітка.** Вираз для диференціала внутрішньої енергії одиниці об'єму системи $u$ при наявності електричного поля $\boldsymbol{E}$ записується у вигляді

$$du = \frac{TdS}{V} + \frac{\mu}{V}dN + \frac{1}{4\pi}EdD.$$

27. Яку кількість теплоти треба підвести до 1 моля газу Ван-дер-Ваальса, щоб при постійному тиску $P$ він розширився від об'єму $V_1$ до об'єму $V_2$? Припустити, що $C_V$ не залежить від $T$.

28. Обчислити: $$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P - \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_V.$$

29. Використовуючи властивості якобіанів, довести співвідношення:

а) $$\frac{\partial^2 U}{\partial V^2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S}\right)^2 = -\frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T;$$

б) $$\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V}\right)^2 = \frac{C_p}{T}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T;$$

в) $$\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}\frac{\partial^2 H}{\partial P^2} - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial S \partial P}\right)^2 = \frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S.$$

30. Знайти рівняння адіабати для одного моля ідеального газу в змінних $T, V$.

31. Довести співвідношення: $$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = \frac{P - T*\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}{C_V}.$$

32. Знайти рівняння стану системи, для якої виконуються умови:

а) $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$, $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = 0$; б) $\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_T = 0$, $\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_T = 0$.

33. Знайти ентропію системи, для якої виконуються умови:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_S = 0, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_S = 0.$$

34. З'ясувати, як змінюється ентропія системи при її квазістатичному розширенні, якщо тиск постійний. Чи залежить характер зміни ентропії від коефіцієнта теплового розширення

$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$?

35. Термодинамічна система розширюється так, що її енергія $U$ залишається постійною.

а) Як змінюється при цьому температура системи (дослідити похідну $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U$)?

б) Чи буде такий процес зворотним (дослідити похідну $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U$)?

в) Як змінюється тиск у такій системі?

36. Визначити ентропію газу, для якого виконуються такі умови:

$$V = V_0(1 + \alpha(T - T_0)), \quad \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = 0, \quad C_P = \text{const}.$$

37. Знайти рівняння адіабати газу Ван-дер-Ваальса в загальному вигляді та припускаючи, що $C_V$ не залежить від $T$.

38. Знайти рівняння адіабати для газу, рівняння стану якого має вигляд: $P = P_0(1 + \alpha T - \beta V)$, $C_V = \text{const}$.

39. Термічне і калоричне рівняння стану електронного газу пов'язані співвідношенням $PV = \frac{2}{3}U$. Знайти рівняння адіабати для цього газу в змінних: а) $T$ і $V$; б) $P$ і $V$.

40. Знайти рівняння політропи для одноатомного ідеального газу. Політропним називається процес, у результаті якого теплоємність системи $C = \frac{dQ}{dT}$ не змінюється.

41. Використовуючи співвідношення $P = \frac{1}{3}\rho(T)$, де $\rho(T)$ — густина енергії рівноважного випромінювання, вивести закон Стефана-Больцмана: $\rho \sim T^4$.

## III. Фазові переходи і критичні явища

42. Довести, що для всіх газів і рідин рівняння Ван-дер-Ваальса може бути представлене у вигляді:

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau, \quad \pi = \frac{P}{P_{\text{кр}}}; \quad \tau = \frac{T}{T_{\text{кр}}}; \quad \omega = \frac{V}{V_{\text{кр}}}.$$

43. Записати в зведених змінних рівняння стану реального газу типу Дітерічі:

$$\text{а) } P(V - b) = RT * \exp\left(-\frac{a}{RTV}\right) \qquad \text{б) } \left(P + \frac{a}{V^{5/3}}\right)(V - b) = RT.$$

44. При низьких температурах теплоємність $C_n$ металів пропорційна до температури $T$. Якщо метал переходить у надпровідний стан, його теплоємність $C_s$ пропорційна до $T^3$. Показати, що при критичній температурі $C_s = 3C_n$.

45. Довести, що в критичній точці похідна $\frac{\partial^2 P}{\partial V \partial T} \neq 0$.

## IV. Рівноважна статистика класичних і квантових систем. Канонічний розподіл Гіббса

46. Суміш двох ідеальних газів, що складаються з $N_1$ і $N_2$ частинок з масами $m_1$ і $m_2$ відповідно, знаходиться в безмежно високій циліндричній посудині в полі сили тяжіння. Обчислити $U$ і $C_V$ такої системи.

47. Суміш двох ідеальних газів, що складаються з $N_1$ і $N_2$ частинок з масами $m_1$ і $m_2$ відповідно, знаходиться в циліндричній посудині з висотою $h$. Суміш знаходиться в полі сили тяжіння. Знайти:

а) тиск на верхню стінку посудини;

б) положення центра мас.

48. Ідеальний газ, що складається з $N$ однакових частинок, знаходиться в об'ємі $V$ в зовнішньому полі $U(\mathbf{r})$.

а) знайти імовірність $p_n(v)$ того, що всередині об'єму $v < V$ опиниться $n$ частинок;

б) обчислити середню кількість частинок $\langle n \rangle$ в об'ємі $v$ і середнє квадратичне відхилення $\Delta(n) = \sqrt{\left\langle \left(n - \langle n \rangle\right)^2 \right\rangle}$;

в) записати $p_n(v)$ у випадку $n \ll N$;

г) записати $p_n(v)$ у випадку $n \gg 1$, $\Delta n = n - \langle n \rangle \ll \langle n \rangle$.

49. Використовуючи теорему про рівномірний розподіл кінетичної енерґії і віріал, розрахувати середнє значення енерґії для:

а) гармонічного одновимірного осцилятора $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2 x^2}{2}$;

б) ангармонічного одновимірного осцилятора

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{mw^2 x^2}{2} + \beta x^4, \ \ \beta = \text{const}.$$

в) частинки в зовнішньому полі $U(x) = \alpha x^{2n}$, $n \in N$ (одновимірний випадок).

50. Знаючи нормуючий дільник мікроканонічного розподілу $g(E) = \dfrac{d\Gamma(E)}{dE}$, знайти інтеграл станів $Z(\theta)$.

51. Ідеальний газ, що складається з $N$ частинок, знаходиться в об'ємі $V$ і підкоряється мікроканонічному розподілу з енерґією $E$. Визначити:

а) фазовий об'єм $\Gamma$; б) ентропію $S$;

в) температуру $T$; г) рівняння стану.

52. Система, що складається з $N$ незалежних гармонічних осциляторів, описується мікроканонічним розподілом з енерґією $E$. Визначити:

а) $\Gamma$; б) $S$; в) $T$; г) рівняння стану системи.

53. Для релятивістського ідеального газу в граничному випадку нерелятивістських частинок обчислити середню енерґію. Газ складається з $N$ частинок.

54. Для ультрарелятивістського ідеального газу, що складається з $N$ частинок, обчислити середню енерґію. Об'єм газу $V$.

55. Для великого канонічного ансамблю довести співвідношення:

$$\langle N \rangle = V\left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{T,V}.$$

56. Для системи зі змінною кількістю частинок двох сортів $N_+$ і $N_-$ виконується умова $N_+ - N_- = \nu = \text{const}$. Нехтуючи взаємодією між частинками, знайти середні числа частинок $\langle N_+ \rangle$, $\langle N_- \rangle$ в умовах термодинамічної рівноваги.

57. В об'ємі $V$ знаходиться газ, що складається з $N$ невзаємодіючих двоатомних молекул, кожна з яких є жорстким ротатором. Рівноважна відстань між атомами в молекулі $r_0$. Обчислити:

а) $P$; б) $S$; в) $E$; г) $C_V$.

58. Ідеальний газ знаходиться в посудині, що закрита зверху поршнем з певною масою, який рухається без тертя. Визначити рівняння стану газу. Газ складається з $N$ частинок.

59. Дано $N$ невзаємодіючих дворівневих атомів. Енерґія основного стану атома $\varepsilon_0$, збудженого $\varepsilon_1$, стани невироджені. Обчислити $S$, $U$, $C_V$, середні числа заповнення рівнів $\langle n_0 \rangle$, $\langle n_1 \rangle$ (середні числа атомів, які знаходяться в основному і збудженому станах при температурі $T$).

60. Дано $N$ невзаємодіючих дворівневих атомів. Енерґії і кратності виродження рівнів $\varepsilon_0$, $g_0$ та $\varepsilon_1$, $g_1$ відповідно. Обчислити $S$, $U$, $C_V$, середні числа заповнення рівнів $\langle n_0 \rangle$, $\langle n_1 \rangle$.

61. Дві Бозе-частинки знаходяться на двох рівнях з енерґіями $\varepsilon_0$ і $\varepsilon_1$. Знайти $F$, $S$, $U$, $C_V$, середні числа заповнення рівнів $\langle n_0 \rangle$, $\langle n_1 \rangle$.

62. Дві Фермі-частинки можуть знаходитися на трьох рівнях, енерґії яких $\varepsilon$, $\varepsilon + \Delta$, $\varepsilon + 2\Delta$. Знайти $F$, $S$, $U$.

63. Система складається з $N$ незалежних двовимірних квантових гармонічних осциляторів. Рівні енерґії $\varepsilon_n$ кожного осцилятора $n+1$ — кратно вироджені, $\varepsilon_n = \hbar\omega(n+1)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Обчислити теплоємність такої системи.

64. Система має невироджений енерґетичний спектр $\varepsilon_l = l\varepsilon$, $(l = 0, 1, \ldots, n-1;\ \varepsilon = \mathrm{const})$. Визначити середню енерґію такої системи.

65. Обчислити середню енерґію одновимірного квантового гармонічного осцилятора. Знайти граничне значення його теплоємності, якщо $T \to 0$.

66. Обчислити $F$, $S$, $U$, $C_V$ для системи $N$ невзаємодіючих одновимірних гармонічних:

а) квантових осциляторів;

б) класичних осциляторів.

67. 1. Довести нерівність $\langle \exp\varphi(x)\rangle \geq \exp\langle\varphi(x)\rangle$.

**Примітка.** Використати нерівність Шварца-Буняковського

$$\left(\int_a^b \phi(x)\psi(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b \phi^2(x)dx * \int_a^b \psi^2(x)dx.$$

2. Використовуючи нерівність $\langle \exp\phi(x)\rangle \geq \exp\langle\phi(x)\rangle$, довести варіаційну теорему Боголюбова: при розділенні функції Гамільтона $H$ системи на дві частини $(H = H_0 + H_1)$ вільна енерґія $F$ задовольняє умові $F \leq F_0 + \langle H_1\rangle_0$, де $F_0$ — вільна енерґія системи з гамільтоніаном $H_0$, а $\langle\ldots\rangle_0$ — усереднення по ансамблю з функцією Гамільтона $H_0$.

68. Довести, що класична система не може володіти магнетними властивостями (теорема Бора-ван Левен).

69. Спіновий гамільтоніан електрона в магнетному полі $\hat{H} = -\mu(\hat{\sigma}, \boldsymbol{B})$ ($\mu$ — магнетон Бора, $\hat{\sigma}$ — спіновий оператор Паулі, $\hat{\sigma}_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}$ — індукція магнетного поля). Вважаючи вісь $OZ$ спрямованою вздовж магнетного поля, знайти середнє значення $\langle\sigma_z\rangle$ в ансамблі з фіксованою температурою $T$.

## V. Квантова статистика ідеальних Бозе- та Фермі-газів

70. Для ультрарелятивістського електронного газу, що складається з $N$ невзаємодіючих частинок і знаходиться в об'ємі $V$, знайти:

а) густину станів $g(\varepsilon)$, $\varepsilon_F$;

б) $E$, $\langle\varepsilon\rangle$, $P$ і рівняння стану, якщо $T \approx 0\ ^oK$.

71. Показати, що врахування тотожності станів при перестановках частинок дає для $\langle n_k \rangle$ вираз класичного типу.

72. Знайти залежність між тиском і середньою енергією для квантового ідеального газу, якщо відомо, що $g(\varepsilon) = A_n \varepsilon^n$.

73. Оцінити теплоємність сильно виродженого ідеального електронного газу.

74. Використовуючи великий канонічний розподіл Гіббса, виразити $S$ через середні числа заповнення рівнів $\langle n_k \rangle$ для ідеального газу, який описується:

а) статистикою Фермі; б) статистикою Бозе.

75. Обчислити першу поправку, зумовлену квантовою статистикою, в рівнянні стану ідеального газу.

76. Довести, що для газу, який описується статистикою Фермі-Дірака, при $kT \ll \mu_0$ справедлива формула:

$$C_V = \frac{\pi^2}{3} k^2 T g(\mu_0), \qquad g(\varepsilon) \text{ — одночастинкова густина станів.}$$

77. Знайти залежність від $T$ хімічного потенціалу Бозе-газу, якщо $\mu \ll kT$ ( закон дисперсії $\varepsilon(k) = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ).

78. Отримати рівняння стану релятивістського повністю виродженого електронного газу, який складається з $N$ частинок і знаходиться в об'ємі $V$.

## VI. Теорія флуктуацій

79. Для ідеального газу, що складається з $N$ частинок, безпосереднім обчисленням знайти $\langle \rho(\boldsymbol{r})\, \rho(\boldsymbol{r}') \rangle$, $\langle \Delta\rho(\boldsymbol{r})\, \Delta\rho(\boldsymbol{r}') \rangle$.

80. Для ідеального газу, що складається з $N$ частинок, обчислити відносну флуктуацію положення центра мас $\left\langle (\Delta \boldsymbol{r}_c)^2 \right\rangle \big/ \left\langle \boldsymbol{r}_c{}^2 \right\rangle$.

81. Обчислити дисперсію положення центра мас $\left\langle (\Delta \boldsymbol{r}_c)^2 \right\rangle$ ідеального однорідного ($\langle \rho \rangle = \mathrm{const}$) газу, що знаходиться в сферичній посудині з радіусом $R$.

82. Обчислити дисперсію $z$-координати центра мас $\left\langle (\Delta z_c)^2 \right\rangle$ ідеального газу, що знаходиться в циліндрі з висотою $h$ у полі сили тяжіння, спрямованої вздовж осі $OZ$.

83. Використовуючи канонічний розподіл, розрахувати $\left\langle (\Delta E)^2 \right\rangle$ для системи, яка контактує з термостатом.

84. Використовуючи великий канонічний розподіл, обчислити $\left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle$ для системи, яка контактує з термостатом.

85. Використовуючи великий канонічний розподіл, обчислити $\left\langle \Delta n_k \Delta n_l \right\rangle$ $(k \neq l)$, $\left\langle (\Delta n_k)^2 \right\rangle$ для квантового ідеального газу; $n_k$ — числа заповнення енергетичних рівнів. Знайти вираз для $\left\langle (\Delta n_k)^2 \right\rangle$ при переході до класичного випадку.

86. Обчислити середній квадрат флуктуаційного відхилення $\left\langle (\Delta \varphi)^2 \right\rangle$ математичного маятника масою $m$; довжина підвісу $l$.

87. Використовуючи формулу для густини імовірності флуктуацій фізичних величин, обчислити:

а) $\left\langle (\Delta T)^2 \right\rangle$; б) $\left\langle (\Delta V)^2 \right\rangle$; в) $\left\langle \Delta T \Delta V \right\rangle$;

г) $\left\langle (\Delta S)^2 \right\rangle$; ґ) $\left\langle (\Delta P)^2 \right\rangle$; д) $\left\langle \Delta S \Delta P \right\rangle$;

е) $\left\langle (\Delta H)^2 \right\rangle$, використовуючи як незалежні змінні $P, S$;

є) $\langle(\Delta E)^2\rangle$ , використовуючи як незалежні змінні $V, T$;

ж) $\langle\Delta T\Delta P\rangle$ , використовуючи як незалежні змінні $V, T$;

з) $\langle\Delta V\Delta P\rangle$ , використовуючи як незалежні змінні $V, T$;

и) $\langle\Delta S\Delta V\rangle$ , використовуючи як незалежні змінні $V, T$;

і) $\langle\Delta S\Delta T\rangle$ , використовуючи як незалежні змінні $V, T$.

88. Газ знаходиться в посудині і стиснений поршнем з постійним навантаженням, сила тиску з боку поршня, $Ps$ де $s$ — площа основи поршня. Обчислити відносну флуктуацію $\Delta(V)/\langle V\rangle$, відносну похибку при обчисленні температури таким термометром $\Delta(T)/T$.

## VII. Елементи теорії нерівноважних процесів. Кінетичне рівняння Больцмана

89. Показати, що для однорідного газу умова мінімуму $H$ - функції (максимуму ентропії) при заданих середній енергії $\langle E\rangle$ і кількості частинок $\langle N\rangle$ приводить до розподілу Максвелла-Больцмана. $H = \int\limits_r\int\limits_v f(r,v,t)\ln f(r,v,t)drdv$.

90. Довести, що при наявності зовнішнього поля стаціонарним розв'язком рівняння Больцмана є розподіл Максвелла-Больцмана.

91. Всередині сфери, що має радіус $a$, з постійною густиною ( $\rho_0 = \text{const}$ ) розподілені частинки з масами $m$ при температурі $T$. У момент часу $t = 0$ оболонка сфери зникає і починається вільне "розлітання" частинок. Нехтуючи зіткненнями частинок, знайти густину кількості частинок $\rho(r,t)$ на відстані $r$ від центра сфери в момент часу $t$.

92. Вважаючи, що рівняння Больцмана для сильно виродженого електронного газу має вигляд:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(v,\nabla_r f)+\frac{1}{m}(eE,\nabla_v f)=-\frac{f-f_0}{\tau},$$

де $\tau$ — час релаксації, визначити електропровідність металу за низьких температур.

93. Визначити тензор електропровідності для електронів у металі в однорідних електричному і магнетному полях. Електрони вважати виродженими.

## Відповіді і вказівки

### I. Розподіл Максвелла-Больцмана

1. Якщо $n_0$ — концентрація електронів, що подолали потенціальний бар'єр, то, вважаючи вісь $OX$ перпендикулярною до поверхні металу, одержимо:

$$j_x = e_0 n_0 \langle v_x \rangle = e_0 n_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \exp\left(-\frac{e_0\varphi}{kT}\right) = e_0 n_0 \frac{\langle v \rangle}{4} \exp\left(-\frac{e_0\varphi}{kT}\right),$$

$$\langle v_x \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int\limits_{v_{\min}}^{\infty} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) v_x \, dv_x, \quad v_{\min} = \sqrt{\frac{2e_0\varphi}{m}};$$

якщо $n_0$ — концентрація вільних електронів у металі, то

$$j_x = \frac{e_0 n_0}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{e_0\varphi}{kT}\right)\right)\langle v_x \rangle = e_0 n_0 \left(1 - \Phi\left(\frac{e_0\varphi}{kT}\right)\right)\sqrt{\frac{kT}{8\pi m}} \exp\left(-\frac{e_0\varphi}{kT}\right),$$

$\Phi(x) = \mathrm{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int\limits_0^x e^{-t^2} dt$ — інтеґрал помилок.

2.а) $$\langle \varepsilon \rangle = \frac{m\langle v^2 \rangle}{2} = kT + \frac{m\omega^2 R^2}{2\left(1 - \exp\left(\frac{m\omega^2}{2kT}\right)\right)};$$

б) $$\langle (\Delta r)^2 \rangle = \frac{2}{a} + \frac{R^2}{1 - e^{aR^2}} - \left(\frac{R}{1 - e^{aR^2}} + \frac{\sqrt{\pi}\Phi(R\sqrt{a})}{2\sqrt{a}\left(1 - e^{-aR^2}\right)}\right)^2, \quad a = \frac{m\omega^2}{2kT}.$$

3. а) $\langle v^n \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)$, $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty l^{-x}x^{p-1}dx$ — Гамма-функція,

для парних $n$, $n = 2l$, $\langle v^{2l} \rangle = \left(\frac{kT}{m}\right)^l \prod\limits_{p=1}^{l}(2p+1)$,

для непарних $n$, $n = 2l+1$ $\langle v^{2l+1} \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{l+\frac{1}{2}}(l+1)!$,

б) $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$, $\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}$; в) $v_{\text{н.і.}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$.

4. а) $\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \sqrt{\frac{\pi m}{2kT}}$; б) $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{\pi kT}{2m}}$; в) $\langle v^2 \rangle = \frac{2kT}{m}$; г) $\langle v_{\text{н.і.}} \rangle = \sqrt{\frac{kT}{m}}$.

5. $\frac{N'}{N} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(e^{-\frac{1}{4}} - 4e^{-4}\right) + \Phi(2) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)$.

6. $d\omega(\varepsilon) = f(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon$.

7. $d\omega(v') = f(v')dv' = 4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\mu v'^2}{2kT}\right)v'^2dv'$,

де $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ — приведена маса, $\left|\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(v_0, v')}\right| = 1$, $\bar{v}_0 = \frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2}{m_1+m_2}$;

$\langle v' \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}}$, якщо $m_1 = m_2 = m$, то $\mu = \frac{m}{2}$, $\langle v' \rangle = \sqrt{\frac{16kT}{\pi m}} = \sqrt{2}\langle v_{1,2} \rangle$.

8. $-dN = \frac{n}{2}\langle v_{x+}\rangle S_0 dt$, $\langle v_{x+}\rangle = \int\limits_0^{\infty} f(v_x)v_x dv_x$

$$-\frac{dN}{dt} = pS_0(8\pi mkT)^{-1/2} = \frac{pS_0}{8kT}\langle v\rangle.$$

9. $h_{c\infty} = \langle z\rangle = \frac{kT}{mg}$.

10. $h_c = \langle z\rangle = \frac{kT}{mg} + \frac{h}{1-\exp\left(\frac{mgh}{kT}\right)} = h_{c\infty} + \frac{h}{1-\exp\left(\frac{h}{h_0}\right)}$.

11. $h_c = \frac{1}{M}\left(\frac{lkT}{g} - \sum\limits_{i=1}^{l}\frac{m_i h}{\exp(h/h_{0i})-1}\right)$, де $M = \sum\limits_{i=1}^{l} m_i$, $\quad h_{0i} = \frac{kT}{m_i g}$.

12. $\varepsilon = 1 + 4\pi\frac{NP_0}{VE}\left(\mathrm{cth}\left(\frac{P_0E}{kT}\right) - \frac{kT}{P_0E}\right) = 1 + 4\pi\frac{NP_0}{VE}\mathrm{L}\left(\frac{P_0E}{kT}\right)$,

$\mathrm{L}(x) = \mathrm{cth}x - \frac{1}{x}$ — функція Ланжевена.

Якщо $\frac{P_0E}{kT} \ll 1$, то $\mathrm{L}\left(\frac{P_0E}{kT}\right) \approx \frac{P_0E}{3kT}$, $\quad \varepsilon = 1 + 4\pi\frac{NP_0^{\,2}}{3VkT}$

13. Якщо $r = r_0 + x$, де $r_0$ — рівноважна відстань між атомами, $x$ — зміщення атома з положення рівноваги, то

$\alpha = \dfrac{\langle x \rangle}{r_0 T} = \dfrac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\dfrac{U(x)}{kT}\right) x\,dx}{r_0 T \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\dfrac{U(x)}{kT}\right) dx}$. Розкладаючи $U(x)$ у ряд по зміщеннях $x$, $U(x) \approx U_0 + \gamma x^2 - \delta x^3$, отримаємо:

$$\alpha = \frac{3\delta k}{4\gamma^2 r_0} = \frac{7kr_0^{12}(13A - 2Br_0^6)}{3(26A - 7Br_0^6)}.$$

## II. Основні співвідношення термодинаміки. Метод характеристичних функцій

14. а) $-T\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2 \Big/ \left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_T$; б) $-T\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2 \Big/ \left(\dfrac{\partial P}{\partial V}\right)_T$.

15. $R$.

16. $PV^{\frac{C_P}{C_V}} = \text{const}$.

17. Для 1 моля $C_p - C_V = R\left(1 - \dfrac{2a(V-b)^2}{V^3 RT}\right)^{-1}$.

18. а) $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P = 0$; б) $\left(\dfrac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\dfrac{T}{C_V}\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\dfrac{P}{C_V}$;

в) $\left(\dfrac{\partial H}{\partial P}\right)_T = -T\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_P + V = 0$.

19. а) $\left(\dfrac{\partial G}{\partial S}\right)_V = -\dfrac{T}{C_V}\left(V\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V - S\right)$; б) $\left(\dfrac{\partial G}{\partial S}\right)_T = -V\left(\dfrac{\partial T}{\partial V}\right)_P$.

22. а) $V = C_0(P)T + C_1(P)$, $C_0(P)$, $C_1(P)$ — константи інтегрування, для точнішого їх визначення потрібні додаткові умови;

б) $p = C_0(V)T + C_1(V)$.

24. а) $C_{PV^2} = C_V - R$; б) $C_{P^2V} = C_V + 2R$; в) $C_{P/V} = C_V + \frac{R}{2}$;

г) $C_{PV^2} = C_V - \frac{R}{2}$; ґ) $C_{P^3V} = C_V + \frac{2}{3}R$.

Для розрахунку теплоємностей можна використати співвідношення $C_x = C_V + P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_x$, або рівняння політропи (див. відп. зад. 40).

25. $V = \sqrt{\frac{C_P RT}{C_V M}}$, де $M$ — молярна маса.

26. $C_E - C_D = \frac{TE^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_D^2$.

27. $dQ = C_V dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV$; припускаючи, що $C_V$ не залежить від $T$, одержимо:

$$Q = \frac{C_V}{R}\left(\left(P + \frac{a}{V_2^2}\right)(V_2 - b) - \left(P + \frac{a}{V_1^2}\right)(V_1 - b)\right) + P(V_2 - V_1) + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$$

28. 1.

30. $TV^{\frac{R}{C_V}} = \mathrm{const}$, або $TV^{\gamma-1} = \mathrm{const}$, де $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$.

32. а), б) $PV = CT$, де $C$ — постійна, для визначення якої потрібні додаткові умови.

33. Вважаючи $S$ функцією $P, V$, отримаємо $S = CPV$, для визначення $C$ потрібні додаткові умови.

34. $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P = \frac{C_P}{TV_0\alpha}$, $C_P > 0$, $S$ зростає, якщо $\alpha > 0$ і зменшується, якщо $\alpha < 0$.

35. а) $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = \frac{P - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}{C_V}$, $T$ зростає, якщо $P > T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ і зменшується, якщо $P < T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$;

б) $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{P}{T} > 0$, цей процес завжди незворотний;

в) $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_U = \frac{1}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left[C_P - P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right]$, якщо вважати, що $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0$, то $P$ зростає при $C_P < P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ і зменшується при $C_P > P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$.

36. $S = S_0 + C_P \ln T - \alpha V_0 P$.

37. $C_V \ln T + \alpha P_0 V$

38. $(V - b)^R \exp\left(\int \frac{C_V}{T} dT\right) = \text{const}$; якщо припустити, що $C_V$ не залежить від $T$, рівняння набуде вигляду $T(V - b)^{\frac{R}{C_V}} = \text{const}$, або $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b)^{\left(1+\frac{R}{C_V}\right)} = \text{const}$.

39. а) $TV^{\frac{3}{2}} = \text{const}$;

б) $PV^{\frac{5}{3}} = \text{const}$.

40. $PV^n = \text{const}$, де $n = \dfrac{C - C_P}{C - C_V}$ — показник політропи.

## III. Фазові переходи і критичні явища

42. а) $\pi(2\omega - 1) = \tau \exp\left(2 - \dfrac{2}{\omega\tau}\right)$, $\quad \pi = \dfrac{P}{P_{кр}}$, $\quad \tau = \dfrac{T}{T_{кр}}$, $\quad \omega = \dfrac{V}{V_{кр}}$ ;

б) $\left(\pi + \dfrac{4}{\omega^{5/3}}\right)(4\omega - 1) = 15\tau$ .

## IV. Рівноважна статистика класичних і квантових систем. Канонічний розподіл Гіббса

46. $U = \dfrac{5}{2}(N_1 + N_2)kT$, $\qquad C_V = \dfrac{5}{2}(N_1 + N_2)k$.

47. а) $P = \dfrac{g}{s}\sum\limits_{i=1}^{2} \dfrac{N_i m_i}{\exp\left(\dfrac{m_i g h}{kT}\right) - 1}$ ;

б) $h_c = \dfrac{1}{g\sum\limits_{i=1}^{2} m_i N_i}\left(2kT - \sum\limits_{i=1}^{2} \dfrac{m_i g h}{\exp\left(\dfrac{m_i g h}{kT}\right) - 1}\right)$.

48. а) якщо $p = \int\limits_{v} \exp\left(-\frac{U(\mathbf{r})}{kT}\right) d\mathbf{r} \left[\int\limits_{V} \exp\left(-\frac{U(\mathbf{r})}{kT}\right) d\mathbf{r}\right]^{-1}$ — імовірність того, що одна частинка знаходиться в об'ємі $v < V$, то

$$p_n(v) = \frac{N!}{(N-n)!\,n!}\, p^n (1-p)^{N-n} ;$$

б) $\langle n \rangle = Np, \quad \left\langle (\Delta n)^2 \right\rangle = Np(1-p) = \langle n \rangle \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N}\right)$ ;

в) $p_n(v) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}$ — розподіл Пуассона;

г) якщо умовно вважати $n$ неперервною величиною і виконати нормування, то отримаємо розподіл Гаусса для імовірності:

$$p_n(v) = \left(2\pi \langle n \rangle\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\left(n - \langle n \rangle\right)^2}{2\langle n \rangle}\right).$$

49. а) за теоремою про рівномірний розподіл кінетичної енерґії і про віріал $\left\langle p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle = \left\langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle = kT$, т.ч. $\langle K \rangle = \langle U \rangle = \frac{kT}{2}$, $\langle H \rangle = kT$ ;

б) $\langle H \rangle = kT - \beta \langle x^4 \rangle$ ; в) $\langle H \rangle = \frac{kT}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

50. $Z(\theta) = \int\limits_0^\infty e^{-E/\theta} g(E)\, dE$ .

51. а) $\Gamma(E, V) = (2\pi m E)^{\frac{3N}{2}} V^N \left(\Gamma\left(\frac{3N}{2} + 1\right)\right)^{-1}$, $\Gamma(\ldots)$ — Гамма-функція;

б) $S = k\ln\Gamma = \frac{3Nk}{2}\ln(2\pi m) + \frac{3Nk}{2}\ln E + Nk\ln V$ ;

в) $T = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)^{-1} = \frac{2E}{3Nk}$ ;

г) $PV = \frac{2}{3}E = NkT$ ($V$ є зовнішнім параметром).

52. а) $\Gamma(E) = \frac{(2\pi m)^{3N}}{\Gamma(3N+1)}E^{3N} = \frac{(2\pi m)^{3N}}{(3N)!}E^{3N}$ ;

б) $S = 3Nk\ln(2\pi m) - k\ln[(3N)!] + 3Nk\ln E$ ;

в) $T = \frac{E}{3Nk}$ ; г) $E = 3NkT$ , об'єм $V$ не є зовнішнім параметром,

тому $P$ не можна обчислювати, беручи похідну $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S$.

53. $\varepsilon(p) = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$, $\langle E\rangle = U = N\left(mc^2 + \frac{3}{2}\theta\right)$, $\theta = kT$.

53. $\varepsilon(p) = cp$, $\langle E\rangle = 3N\theta$.

56. В умовах термодинамічної рівноваги, якщо $N_+ - N_- = \text{const}$, можна отримати, що $\mu_+ = -\mu_-$, отже,

$$\langle N_+\rangle = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_+}\right)_{\mu_+=-\mu_-},\quad \langle N_-\rangle = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_-}\right)_{\mu_+=-\mu_-},$$

$$\Omega = -\theta\ln\sum_{N_-=0}^{\infty}\frac{Z_-^{N_-}Z_+^{N_-+\nu}}{(N_-)!(N_-+\nu)!},$$ де

$$Z_+ = \exp\left(\frac{\mu_+}{\theta}\right)\int\limits_{\Gamma_l} \exp\left(-\frac{H_l(p_l,q_l)}{\theta}\right)dp_l dq_l = \exp\left(\frac{\mu_+}{\theta}\right)Z_{0+} ,$$

$Z_- = \exp\left(\frac{\mu_-}{\theta}\right)\int\limits_{\Gamma_l} \exp\left(-\frac{H_l(p_l,q_l)}{\theta}\right)dp_l dq_l = \exp\left(\frac{\mu_-}{\theta}\right)Z_{0-}$ , $Z_{0\pm}$ — статистичний інтеґрал однієї частинки якогось сорту.

Тоді $\langle N_+\rangle = \dfrac{\sum\limits_{N_-=0}^{\infty}\dfrac{Z_{0-}^{\ N_-}Z_{0+}^{\ N_-+\nu}}{(N_-)!(N_-+\nu-1)!}}{\sum\limits_{N_-=0}^{\infty}\dfrac{Z_{0-}^{\ N_-}Z_{0+}^{\ N_-+\nu}}{(N_-)!(N_-+\nu)!}}$ , $\langle N_-\rangle = \dfrac{\sum\limits_{N_-=0}^{\infty}\dfrac{Z_{0-}^{\ N_-}Z_{0+}^{\ N_-+\nu}}{(N_--1)!(N_-+\nu)!}}{\sum\limits_{N_-=0}^{\infty}\dfrac{Z_{0-}^{\ N_-}Z_{0+}^{\ N_-+\nu}}{(N_-)!(N_-+\nu)!}}$ .

Якщо використати циліндричні функції уявного арґументу $I_\nu(x) = \sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{1}{l!(l+\nu)!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2l+\nu}$ , відповідь можна записати так:

$$\langle N_\pm\rangle = \frac{\sqrt{Z_{0-}Z_{0+}}\,I_{\nu\mp1}\left(2\sqrt{Z_{0-}Z_{0+}}\right)}{I_\nu\left(2\sqrt{Z_{0-}Z_{0+}}\right)}.$$

57. Гамільтоніан однієї молекули з масами атомів $m_1$, $m_2$ $H_l = \dfrac{p_c^2}{2M} + \dfrac{1}{2\mu r_0^2}\left(p_\alpha^2 + \dfrac{p_\varphi^2}{\sin^2\alpha}\right)$, $M = m_1 + m_2$, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{M}$, $\alpha, \varphi$ — кутові змінні в сферичній системі координат. Тоді

$$Z_l = \frac{2\pi^3}{\hbar^5}(2\pi M)^{\frac{3}{2}}\mu r_0^2 V\theta^{\frac{5}{2}} = AV\theta^{\frac{5}{2}};$$

а) $P = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial V}\right)_S = \dfrac{N\theta}{V}$; б) $S = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial T}\right)_V = kN\left(\ln AV\theta^{\frac{5}{2}} + \dfrac{5}{2}\right)$;

в) $E = F + TS = \frac{5}{2} N\theta$;  г) $C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{5}{2} kN$.

58. Оскільки в задачі зовнішнім параметром є тиск, то з умови $\langle V \rangle = \left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)_T$ одержуємо рівняння стану $PV = (N+1)kT$.

59. $S = Nk \ln\left(1 + e^{-\Delta/kT}\right) + \frac{N\Delta}{T\left(1 + e^{\Delta/kT}\right)}$,  $U = \varepsilon_0 N + \frac{N\Delta}{\left(1 + e^{\Delta/kT}\right)}$,

$C_V = \frac{N\Delta^2 e^{\Delta/kT}}{kT^2\left(1 + e^{\Delta/kT}\right)^2}$, $\langle n_0 \rangle = \frac{N}{1 + e^{-\Delta/kT}}$,  $\langle n_1 \rangle = \frac{N}{1 + e^{\Delta/kT}}$,

$\Delta = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$.

60. $S = Nk \ln\left(g_0 + g_1 e^{-\Delta/kT}\right) + \frac{N\Delta g_1}{T\left(g_1 + g_0 e^{\Delta/kT}\right)}$,

$U = \varepsilon_0 N + \frac{N\Delta g_1}{\left(g_1 + g_0 e^{\Delta/kT}\right)}$,  $C_V = \frac{N\Delta^2 g_0 g_1 e^{\Delta/kT}}{kT^2\left(g_1 + g_0 e^{\Delta/kT}\right)^2}$,

$\langle n_0 \rangle = \frac{N g_0}{g_0 + g_1 e^{-\Delta/kT}}$,  $\langle n_1 \rangle = \frac{N g_1}{g_1 + g_0 e^{\Delta/kT}}$,  $\Delta = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$.

61. $F = 2\varepsilon_0 - 2kT \ln\left(1 + e^{-\Delta/kT}\right)$,  $S = 2k \ln\left(1 + e^{-\Delta/kT}\right) + \frac{2\Delta}{T\left(1 + e^{\Delta/kT}\right)}$,

$U = 2\varepsilon_0 + \frac{2\Delta}{\left(1 + e^{\Delta/kT}\right)}$,  $C_V = \frac{2\Delta^2 e^{\Delta/kT}}{kT^2\left(1 + e^{\Delta/kT}\right)^2}$,

$$\langle n_0 \rangle = \frac{2}{1+e^{-\Delta/kT}}, \qquad \langle n_1 \rangle = \frac{2}{1+e^{\Delta/kT}}, \qquad \Delta = \varepsilon_1 - \varepsilon_0.$$

62. $F = 2\varepsilon + \Delta - \theta \ln 2\left(1 + e^{-\Delta/\theta} + e^{-2\Delta/\theta}\right),$

$$S = k \ln 2\left(1 + e^{-\Delta/\theta} + e^{-2\Delta/\theta}\right) + \frac{\Delta\left(e^{-\Delta/\theta} + 2e^{-2\Delta/\theta}\right)}{T\left(1 + e^{-\Delta/\theta} + e^{-2\Delta/\theta}\right)},$$

$$U = 2\varepsilon + \Delta \frac{1 + 2e^{-\Delta/\theta} + 3e^{-2\Delta/\theta}}{1 + e^{-\Delta/\theta} + e^{-2\Delta/\theta}}, \qquad \Delta = \varepsilon_1 - \varepsilon_0.$$

63. $C_V = \frac{Nk}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^2\left(\operatorname{sh}\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)^{-2}.$

64. $\langle E \rangle = \varepsilon\left(\frac{n}{1 - e^{n\varepsilon/\theta}} - \frac{1}{1 - e^{\varepsilon/\theta}}\right).$

65. $\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2\theta}\right), \qquad C_V = k\left(\frac{\hbar\omega}{2\theta}\right)^2\left(\operatorname{sh}\frac{\hbar\omega}{2\theta}\right)^{-2}, \qquad \lim_{T\to 0} C_V = 0.$

66. а) $F = N\theta \ln\left(2\operatorname{sh}\frac{\hbar\omega}{2\theta}\right), \quad S = Nk\left(\frac{\hbar\omega}{2\theta}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\theta} - \ln\left(2\operatorname{sh}\frac{\hbar\omega}{2\theta}\right)\right),$

$$U = \frac{N\hbar\omega}{2}\operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2\theta}\right), \qquad C_V = Nk\left(\frac{\hbar\omega}{2\theta}\right)^2\left(\operatorname{sh}\frac{\hbar\omega}{2\theta}\right)^{-2};$$

б) $F = \theta \ln(N!) + N\theta \ln\frac{\hbar\omega}{\theta}, \quad S = -k\ln(N!) - Nk\left(\ln\frac{\hbar\omega}{\theta} - 1\right), \qquad U = N\theta,$

$C_V = Nk.$

Якщо спрямувати $\hbar \to 0$, можна перейти від квантових виразів пункту а) до класичних виразів пункту б).

69. $\langle\sigma_z\rangle = \dfrac{Sp\left(\hat{\sigma}_z \exp\left(-\hat{H}/\theta\right)\right)}{Sp\left(\exp\left(-\hat{H}/\theta\right)\right)} = \mathrm{th}\left(\dfrac{\mu B}{\theta}\right)$ .

## V. Квантова статистика ідеальних Бозе- та Фермі-газів.

70. а) $g(\varepsilon) = \dfrac{V\varepsilon^2}{\pi^2(\hbar c)^3}$, $\qquad \varepsilon_F = \hbar c\left(3\pi^2 \dfrac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$ ;

б) $E = \dfrac{3}{4} N\hbar c\left(3\pi^2 \dfrac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$ , $\qquad \langle\varepsilon\rangle = \dfrac{3}{4}\varepsilon_F$,

$P = -\left(\dfrac{\partial E}{\partial V}\right)_S = \dfrac{1}{4}\hbar c\left(3\pi^2\right)^{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$, звідси отримуємо рівняння стану $E = 3PV$.

72. $P = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{E}{V}$.

73. Якщо вважати, що $C_V = \dfrac{3}{2}k\Delta N$, де $\Delta N$ — кількість електронів, які беруть участь в тепловому русі (належать до "зони розмитості" функції розподілу), то $C_V = \dfrac{9}{2}\dfrac{k^2 NT}{\varepsilon_F}$.

74. а) $S = k\sum\limits_{l=0}\left(\langle n_l\rangle - 1\right)\ln\left(1 - \langle n_l\rangle\right) - \langle n_l\rangle \ln\langle n_l\rangle$;

б) $S = k\sum\limits_{l=0}\left(\left(\langle n_l\rangle + 1\right)\ln\left(1 + \langle n_l\rangle\right) - \langle n_l\rangle \ln\langle n_l\rangle\right)$.

75. Використання виразу для $\Omega$-потенціалу дає співвідношення:

$$\begin{cases} pV = \theta Z(\theta)e^{\frac{\mu}{\theta}} - \dfrac{\theta\sigma}{2}Z\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{\frac{2\mu}{\theta}} \\ N\theta = \theta Z(\theta)e^{\frac{\mu}{\theta}} - \theta\sigma Z\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{\frac{2\mu}{\theta}} \end{cases}.$$

$\sigma = +1$ для статистики Фермі-Дірака, $\sigma = -1$ для статистики Бозе-Айнштайна, $Z\left(\dfrac{\theta}{n}\right) = \sum\limits_{l=0} \exp\left(-\dfrac{\varepsilon_l}{\theta}\right)$. Вилучаючи зі системи $e^{\frac{2\mu}{\theta}}$, одержимо рівняння стану:

$pV = N\theta(1 + A)$, де $A = \dfrac{N\sigma}{8Z\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}\left(Z(\theta) - \sqrt{Z^2(\theta) - 4N\sigma Z\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}\right)^2$ — перша поправка. Якщо ж друге рівняння системи відняти від першого і припустити, що $N\theta \approx \theta Z(\theta)e^{\frac{\mu}{\theta}}$, то одержимо $A = \dfrac{\sigma N Z\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{2Z^2(\theta)}$.

Скажімо, якщо $\varepsilon = \dfrac{p^2}{2m}$, $A = \dfrac{\sigma N}{2gV}\left(\dfrac{\pi\hbar^2}{m\theta}\right)^{3/2}$, де $g$ — мультиплетність.

77. $\mu = -\dfrac{N^2}{A^2k^2T_0^{\,3}}\left(\dfrac{T_0^{\,3/2}}{T} - T^{1/2}\right)^2$, тут $A = \dfrac{gm^2V}{\sqrt{2}\pi\hbar^3}$, $T_0$ — температура Бозе-конденсації.

78. $p = -\left(\dfrac{\partial E}{\partial V}\right)_S = \dfrac{C}{8\pi^2\hbar^3}\left((mc)^4 \operatorname{arsh}\dfrac{p_F}{mc} + p_F\left(\dfrac{2}{3}p_F^2 - (mc)^2\right)\sqrt{(mc)^2 + p_F^2}\right)$,

де $p_F = \hbar\left(\dfrac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3}$; якщо позначити $\xi = 4\operatorname{arsh}\dfrac{p_F}{mc}$, рівняння стану можна записати дещо компактніше:

$$p = \frac{m^4c^5}{32\pi^2\hbar^3}\left(\xi + \frac{1}{3}\operatorname{sh}\xi - \frac{8}{3}\operatorname{sh}\frac{\xi}{2}\right).$$

## VI. Теорія флуктуацій.

79. а) $\langle\rho(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\rangle \approx \langle\rho(\boldsymbol{r})\rangle\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) + \langle\rho(\boldsymbol{r})\rangle\langle\rho(\boldsymbol{r}')\rangle$, $\langle\rho(\boldsymbol{r})\rangle = N\omega(\boldsymbol{r})$;

б) $\langle\Delta\rho(\boldsymbol{r})\Delta\rho(\boldsymbol{r}')\rangle \approx \langle\rho(\boldsymbol{r})\rangle\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$.

80. $\dfrac{\langle(\Delta r_c)^2\rangle}{\langle r_c^{\,2}\rangle} = \dfrac{\langle r^2\rangle - \langle r\rangle^2}{\langle r^2\rangle + (N-1)\langle r\rangle^2}$, якщо припустити $N - 1 \approx N$, то

$\langle(\Delta r_c)^2\rangle = \dfrac{1}{N}\langle r^2\rangle$, $\quad \langle(\Delta r_c)^2\rangle\Big/\langle r_c^{\,2}\rangle = \dfrac{1}{N}$.

81. $\langle(\Delta r_c)^2\rangle = \dfrac{3R^2}{5N}$.

82. $\langle(\Delta r_c)^2\rangle = \dfrac{2\alpha^2}{N} + \dfrac{h^2 + 2\alpha h}{N(1 - e^{h/\alpha})}$, $\quad \alpha = \dfrac{kT}{mg}$.

83. $\langle(\Delta E)^2\rangle = T^2C_V$.

84. $\langle(\Delta N)^2\rangle = T\left(\dfrac{\partial\langle N\rangle}{\partial\mu}\right)_{T,V} = -\dfrac{TN^2}{V^2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_T$.

85. $\langle\Delta n_k\Delta n_l\rangle = T\left(\dfrac{\partial\langle n_l\rangle}{\partial\mu_k}\right)_{\mu_k=\mu_l=\mu}$, рівневі з індексом $l$ відповідає $\mu_l$. Якщо $k \neq l$, $\langle\Delta n_k\Delta n_l\rangle = 0$, оскільки $\langle n_l\rangle$ не залежить від $\mu_k$, при $k = l$ $\quad \langle(\Delta n_k)^2\rangle = \langle\Delta n_k\rangle(1 - \sigma\langle\Delta n_k\rangle)$, $\sigma = +1$ для статистики Фермі-Дірака, $\sigma = -1$ для статистики Бозе-Айнштайна.

Перехід до класичних виразів дає $\langle(\Delta n_k)^2\rangle \approx \langle n_k\rangle$.

86. $\langle(\Delta\varphi)^2\rangle = \dfrac{kT}{mgl}$.

87. а) $\left\langle(\Delta T)^2\right\rangle = \dfrac{kT^2}{C_V}$; б) $\left\langle(\Delta V)^2\right\rangle = -kT\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_T$;

в) $\left\langle\Delta T\Delta V\right\rangle = 0$; г) $\left\langle(\Delta S)^2\right\rangle = kT\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_P = kC_P$;

ґ) $\left\langle(\Delta p)^2\right\rangle = -kT\left(\dfrac{\partial P}{\partial V}\right)_S$; д) $\left\langle\Delta S\Delta P\right\rangle = 0$;

е) $\left\langle(\Delta H)^2\right\rangle = kT^2C_P - kTV^2\left(\dfrac{\partial P}{\partial V}\right)_S$;

є) $\left\langle(\Delta E)^2\right\rangle = kT^2C_V - kT\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_T\left(T\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P\right)^2$;

ж) $\left\langle\Delta T\Delta P\right\rangle = \dfrac{kT^2}{C_V}\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V$; з) $\left\langle\Delta V\Delta P\right\rangle = -kT$;

и) $\left\langle\Delta S\Delta V\right\rangle = kT\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_P$; і) $\left\langle\Delta S\Delta T\right\rangle = kT$.

у пунктах а)-в) як незалежні змінні вибрано $T$ та $V$, у пунктах г)-д) — $P$ та $S$.

88. Для одного моля газу $\dfrac{\Delta(V)}{\langle V\rangle} = \dfrac{\sqrt{\left\langle(\Delta V)^2\right\rangle}}{\langle V\rangle} = \dfrac{1}{\sqrt{N}}$, $\dfrac{\Delta(T)}{T} = \dfrac{1}{\sqrt{N}}$.

## VII. Елементи теорії нерівноважних процесів. Кінетичне рівняння Больцмана

89. Розв'язування задачі на умовний екстремум функції $H$ дає вираз $f = A\exp\left(-\beta\left(\dfrac{mv^2}{2} + U(\mathbf{r})\right)\right)$, якщо $\beta = \dfrac{1}{\theta}$, то $f$ є функцією розподілу Максвелла-Больцмана.

91. $$\rho(r,t)=\frac{\rho_0 t}{2r}\sqrt{\frac{\theta}{2\pi m}}\left[\exp\left(-\frac{m}{2\theta t^2}(a+r)^2\right)-\exp\left(-\frac{m}{2\theta t^2}(a-r)^2\right)\right]+$$
$$+\frac{\rho_0}{2}\left[\Phi\left(\sqrt{\frac{m}{2\theta t^2}}(a+r)\right)+\Phi\left(\sqrt{\frac{m}{2\theta t^2}}(a-r)\right)\right].$$

**92.** Якщо вважати, що електропровідність має тензорний характер $j_\alpha=\sum\limits_{\beta=1}^{3}\sigma_{\alpha\beta}E_\beta$, відповідь матиме вигляд: $\sigma_{\alpha\beta}=\frac{e^2\tau n}{m}\delta_{\alpha\beta}$,

$n=\frac{N}{V}$.

**93.** $$\sigma_{\alpha\beta}=-\frac{4\pi}{3}e_0^2\int\limits_0^\infty\frac{v^4\tau}{1+r^2H'^2}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}(\delta_{\alpha\beta}+\tau^2H'_\alpha H'_\beta+\tau\sum_{\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}H'_\gamma)dv,$$

$H'=\frac{e_0H}{mc}$, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — тензор Леві-Чівіти, $f_0$ — рівноважна функція розподілу. Якщо вісь $OZ$ спрямувати вздовж $H$ ($H_x=H_y=0$, $H_z=0$) і вибрати як $f_0$ функцію розподілу Максвелла, компоненти тензора електропровідності матимуть такий вигляд:

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\frac{e_0^2n\tau}{m(1+\tau^2H'^2)},\quad \sigma_{zz}=\frac{e_0^2n\tau}{m},\quad \sigma_{xy}=-\sigma_{yx}=\frac{e_0^2n\tau^2H'}{m(1+\tau^2H'^2)},$$

$$\sigma_{xz}=\sigma_{zx}=\sigma_{yz}=\sigma_{zy}=0$$

## Список літератури

1.Базаров И.П. Термодинамика. - М.: Высш. шк., 1991. - 376 с

2.Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике. - М.: Высш. шк., 1972. - 336 с.

3.Кондратьев А.С., Романов В.П. Задачи по статистической физике. - М.: Наука, 1992. - 152 с.

4.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. Т. 5. Статистическая физика. - М.: Наука, 1976. - 584 с.

5.Терлецкий Я.П. Статистическая физика. - М.: Высш. шк., 1973. - 280 с.

**Навчальне видання**

**Вакарчук Іван Олександрович**
**Кнігініцький Олександр Васильович**
**Попель Олександр Михайлович**
**Кулій Тарас Володимирович**

# ЗБІРНИК ЗАДАЧ
# З ТЕРМОДИНАМІКИ І СТАТИСТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Підписано до друку 24.04.98. Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 1,8. Умовн. фарбовідб. 1,8. Обл.-вид. арк. 2,0. Тираж 300 прим. Зам. 45.

Видавничий центр Львівського державного університету ім. І. Франка.
290602, Львів, вул. Університетська, 1.