Міністерство освіти України

Львівський державний університет ім. І. Франка

В.М. ТКАЧУК

СУПЕРСИМЕТРІЯ В КВАНТОВІЙ МЕХАНІЦІ

Текст лекцій

Затверджено
на засіданні кафедри теоретичної фізики
як текст лекцій зі спецкурсу
«Суперсиметрія в квантовій механіці»
Протокол № 5 від 29.11.93

Львів ЛДУ 1994

УДК. 530.145.6

Ткачук В.М. Суперсиметрія в квантовій механіці: Текст лекцій. – Львів: Ред.-вид. відділ Львів. ун-ту, 1994. — 66с.

У лекціях викладені основи алгебри суперсиметрії. Розглянуто суперсиметричну квантову механіку і застосування суперсиметрії для точного знаходження енергетичних рівнів і хвильових функцій стаціонарних станів. Наведені приклади класичних задач квантової механіки в яких проявляється суперсиметрія.

Призначено для студентів старших курсів, які спеціалізуються в теретичної фізики.

Бібліограф.: 10 назв., рис. 7.

Рецензенти: **Вакарчук І.О.**, д-р фіз.-мат. наук, професор
Держко О.В., канд. фіз.-мат. наук, с.н.с.

Вступ

Останнім часом одним із перспективних напрямків фізики є дослідження суперсиметрії між бозонами і ферміонами. До появи суперсиметричних теорій бозони і ферміони розглядалися як частинки, які мають принципово різну природу. Бозони вважалися носіями взаємодії, а ферміони носіями матерії. В суперсиметричних теоріях вперше вдалося об'єднати матерію і взаємодію і усунути різницю між ними.

Після появи робіт [1–3], в яких були запропоновані суперсиметричні моделі квантової теорії поля, ідеї суперсиметрії почали проникати і в інші області фізики. Суперсиметрична квантова механіка була запропонована Віттеном [4] як лабораторія для дослідження властивостей суперсиметричних моделей. Ця найпростіша модель зберігає в собі всі найбільш характерні риси суперсиметрії. При дальшому розвитку суперсиметричної квантової механіки виявилось, що суперсиметрія є внутрішньо притаманна реальним задачам квантової механіки [5–10]. Це дає можливість по-новому глянути на класичні задачі квантової механіки .

Автор висловлює щиру подяку Волошанівській Людмилі за допомогу в технічному оформленні рукопису.

I. Супералгебра

§ 1. Генератори суперсиметрії

Під суперсиметрією будемо розуміти наступне:

1. Існують перетворення, які переводить бозони у ферміони і навпаки. Відповідно існують генератори цих перетворень.

2. Гамільтоніан є інваріантний відносно цих перетворень, тобто комутує з названими генераторами. Інваріантність гамільтоніану відносно перетворень, які переводять бозони у ферміони і навпаки, дістала назву суперсиметрії, а відповідні генератори — генератори суперсиметрії.

3. Алгебра цієї симетрії поряд з комутаційними співвідношеннями для генераторів включає також антикомутаційні співвідношення і є, таким чином, узагальненням звичайної алгебри Лі. Ця алгебра носить назву супералгебри Лі.

Ці три пункти дають конструктивний план побудови генераторів суперсиметрії. Хоча залишається ще певна довільність. Однак, принцип простоти майже не залишає свободи у виборі генераторів і гамільтоніану.

Розглянемо систему з одним бозонним і одним ферміонним ступенем вільності. Оператори знищення і породження будемо позначати b^-, b^+ для бозонів, f^-, f^+ для ферміонів. Ці оператори задовільняють наступним переставним співвідношенням

$$[b^-,b^+]=b^-b^+-b^+b^-=1, \tag{1.1.1}$$

$$\{f^-,f^+\}=f^-f^++f^+f^-=1, \tag{1.1.2}$$

$$\{f^\pm,f^\pm\}=0, \quad \text{або} \quad (f^\pm)^2=0. \tag{1.1.3}$$

Бозонні і ферміонні оператори комутують між собою

$$[b,f]=0 \tag{1.1.4}$$

Зауважимо, що властивість ферміонних операторів (1.1.3) називається нільпотентністю і далі буде відігравати важливу роль.

Введемо генератори суперсиметрії — оператори, які переводять бозони у ферміони і навпаки. На мові бозонних і ферміонних операторів знищення і породження генератори суперсиметрії можуть бути записані у вигляді

$$Q_+=gb^-f^+ \text{ — бозон переходить у ферміон,} \tag{1.1.5}$$

$$Q_-=g^*b^+f^- \text{ — ферміон переходить у бозон,} \tag{1.1.6}$$

де g - довільна константа. Оператори Q_+, Q_- є спряжені один до другого $(Q_+)^+=Q_-$, $(Q_-)^+=Q_+$ і є нільпотентними внаслідок наявності в них ферміонних операторів.

$$(Q_\pm)^2=0 \tag{1.1.7}$$

Зауваження відносно позначень: знак "+" чи "–" біля генераторів суперсиметрії відповідає знаку біля ферміонних операторів (див. (1.1.5) і (1.1.6)).

Побудуємо гамільтоніан, який би комутував із введеними генераторами Q_+, Q_-. Найпростіший гамільтоніан, який можна запропонувати, має вигляд

$$H = Q_+Q_- + Q_-Q_+ = \{Q_+, Q_-\}. \qquad (1.1.8)$$

У тому, що гамільтоніан комутує із $Q_\pm$, можна переконатися прямим розрахунком. Справді,

$$Q_+H = Q_+^2Q_- + Q_+Q_-Q_+ = Q_+Q_-Q_+, \qquad (1.1.9)$$

$$HQ_+ = Q_+Q_-Q_+ + Q_-Q_+^2 = Q_+Q_-Q_+, \qquad (1.1.10)$$

і, таким чином,

$$Q_+H = HQ_+, \qquad (1.1.11)$$

аналогічно $Q_-H = HQ_-$.

Слід відмітити, що комутативність гамільтоніану із генераторами суперсиметрії є наслідком їх нільпотентності. Це видно з формул (1.1.9) і (1.1.10).

Ми прийшли до найпростішої алгебри суперсиметрії, яка задається трійкою операторів Q_+, Q_-, H, що задовільняють переставним співвідношенням

$$\{Q_+, Q_-\} = H, \qquad (1.1.12)$$

$$\{Q_+, Q_+\} = \{Q_-, Q_-\} = 0 \quad \text{або} \quad Q_+^2 = Q_-^2 = 0,$$

$$[Q_+, H] = [Q_-, H] = 0.$$

Поставимо собі за ціль перейти від Q_+, Q_-, H до нової трійки ермітових операторів. Із Q_+ і Q_- можемо побудувати два незалежні оператори

$$Q_1 = Q_+ + Q_-, \qquad (1.1.13)$$

$$Q_2 = (Q_+ - Q_-)/i.$$

Зворотнє перетворення має вигляд

$$Q_\pm = \frac{1}{2}(Q_1 \pm iQ_2).$$

Прямий розрахунок показує, що

$$Q_1^2 = Q_2^2 = \{Q_+, Q_-\} = H, \qquad (1.1.14)$$

$$\{Q_1, Q_2\} = 0.$$

Оскільки Q_+, Q_- комутують із гамільтоніаном, то Q_1, Q_2 також комутують із H.

Таким чином, нова трійка операторів Q_1, Q_2, H задає супералгебру із співвідношеннями

$$\{Q_i, Q_j\} = 2\delta_{i,j} H, \qquad i, j = 1,2, \qquad (1.1.15)$$

$$[Q_i, H] = 0.$$

Q_i носять назву суперзарядів.

Ще раз наголосимо на тому, що супералгебра (1.1.12) чи (1.1.15) поряд із співвідношеннями комутації включає співвідношення антикомутації. Відмітимо також, що гамільтоніан виступає як один із генераторів суперсиметрії. Оскільки гамільтоніан є інфінітезимальним оператором (генератором) трансляцій у часі, то про суперсиметрію говорять також як про новий вид динамічної симетрії.

Існує ще одна зручна для пошуку суперсиметрії в реальних системах форма задання супералгебри. Введемо позначення $Q_1 = Q$. Оператор Q_2 подамо у вигляді

$$Q_2 = iQT. \qquad (1.1.16)$$

Ця рівність є фактично означенням нового оператора T. Встановимо властивості цього оператора. Оператор T повинен бути таким, щоб задовільнити всі властивості операторів Q_1 і Q_2:

1°. $\{Q_1, Q_2\} = 0,$

$$\{Q_1, Q_2\} = \{Q, iQT\} = i(QQT + QTQ) =$$

$$= iQ(QT + TQ) = iQ\{Q, T\} = 0.$$

Звідки випливає

$$\{Q, T\} = 0.$$

2°. $Q_2^2 = Q^2 = H,$

$$Q_2^2 = (iQT)^2 = iQTiQT = Q^2T^2 = HT^2 = H.$$

Звідки

$$T^2 = 1.$$

3°. $Q_2^+ = Q_2,$

$$Q_2^+ = (iQT)^+ = -iT^+Q^+ = -iT^+Q,$$

$$Q_2 = iQT = -iTQ.$$

Прирівнюючи Q_2^+ і Q_2, одержимо

$$T^+ = T.$$

Таким чином, алгебра суперсиметрії може бути побудована з допомогою трійки ермітових операторів Q, T, H з властивостями

$$H = Q^2, \tag{1.1.17}$$

$$\{T,Q\} = 0,$$

$$T^2 = 1.$$

Очевидно також, що $[T,H] = 0.$.

Першою ознакою існування суперсиметрії в системі є те, що гамільтоніан можна записати як квадрат певного ермітового оператора. Але цього мало. Для того, щоб мала місце суперсиметрія, повинен існувати оператор T із властивостями (1.1.17). Тоді ми зможемо побудувати два суперзаряди і одержимо алгебру суперсиметрії.

При встановленні властивостей оператора T ми вважали·його лінійним і переставляли з уявною одиницею, тобто $[T,i] = 0$. Відмовимось тепер від вимоги лінійності оператора і будемо вважати, що $\{T,i\} = 0$. Такий оператор можемо назвати антилінійним. Встановимо властивості цього оператора:

1°. $\{Q_1,Q_2\} = 0$

Звідки, аналогічно як і для лінійного T, для антилінійного T одержимо

$$\{Q,T\} = 0.$$

2°. $Q_2^2 = Q^2 = H,$

$$Q_2^2 = iQTiQT = -i^2 QTQT = -Q^2 T^2.$$

Звідки

$$T^2 = -1.$$

3°. Ермітовості Q_2 вимагати не будемо. Важливо, що гамільтоніан $H = Q_2^2$ є ермітовий.

Таким чином, у даному випадку трійка операторів Q, T, H задовільняє властивості

$$H = Q^2, \tag{1.1.18}$$

$$\{T,Q\} = 0,$$

$$T^2 = -1.$$

Зауважимо, що оператор Q_2, аналогічно як і T, є антилінійний.

§ 2. Загальна структура супералгебр

У попередньому параграфі ми розглянули найпростіші супералгебри, які є частковим випадком супералгебр Лі. Дамо характеристику загальної струкутри таких алгебр. Основною властивістю їх є Z_2– градуювання — розділення всіх генераторів на два класи: парні і непарні. Загальна структура переставних співвідношень супералгебр може бути записана у вигляді

$$[D,D] \sim D, \tag{1.2.1}$$

$$[D,Q] \sim Q,$$

$$\{Q,Q\} \sim D,$$

тут D і Q позначають відповідно парні і непарні генератори супералгебри.

У випадку супералгебри (1.1.12) чи (1.1.15) маємо два непарні елементи Q і один парний елемент H. Як приклад, покажемо, що найпростіша супералгебра (1.1.12) чи (1.1.15) може бути розширена введенням в неї оператора T, $T^2 = 1$, який буде виконувати роль парного генератора. Розрахуємо комутатори

$$[Q_1, T] = Q_1T - TQ_1 = 2Q_1T = -2iiQ_1T = -2iQ_2,$$

$$[Q_2, T] = iQ_1TT - TiQ_1T = 2iQ_1.$$

Приходимо до супералгебри із двома непарними елементами Q_1, Q_2 і двома парними H і T, які задовільняють співвідношення

$$\{Q_i, Q_j\} = 2H\delta_{i,j}, \tag{1.2.2}$$

$$[Q_i, H] = 0, \qquad [T, H] = 0;$$

$$[Q_1, T] = -2iQ_2.$$

$$[Q_2, T] = 2iQ_1.$$

Це розширення супералгебри може бути задане також непарними елементами Q_+, Q_-, і парними H, T. Для цього (1.1.12) треба доповнити співвідношеннями

$$[Q_\pm, T] = \mp Q_\pm, \tag{1.2.3}$$

$$[H, T] = 0.$$

Розглянемо антилінійний оператор T, який задовільняє співвідношення (1.1.18). Розрахуємо

$$[Q_1, T] = Q_1T - TQ_1 = 2Q_1T = -2iQ_2,$$

$$[Q_2, T] = iQ_1TT - TiQ_1T = -iQ_1 - iQ_1T^2 = 0,$$

$$[Q_+, T] = \frac{1}{2}[Q_1, T] + \frac{1}{2}[iQ_2, T] = -iQ_2 + \frac{1}{2}(iiQ_1TT - TiiQ_1T) =$$

$$= -iQ_2 + \frac{1}{2}(Q_1 + TQ_1T) = Q_1 - iQ_2 = Q_-,$$

$$[Q_-, T] = \frac{1}{2}[Q_1, T] - \frac{1}{2}[iQ_2, T] = -iQ_2 - Q_1 = -Q_+.$$

Таким чином, антилінійний оператор T задовільняє співвідношення

$$[Q_1, T] = -2iQ_2, \qquad [Q_2, T] = 0, \tag{1.2.4}$$

або

$$[Q_+, T] = Q_-, \qquad [Q_-, T] = -Q_+. \tag{1.2.5}$$

§ 3. Двократне виродження енергетичних рівнів

Тепер ми вивчимо ті властивості гамільтоніану, які визначаються наявністю суперсиметрії і не залежать від конкретної моделі. Перш за все зауважимо, що оскільки гамільтоніан рівний квадрату ермітового оператора, то спектр його є додатньо визначений. Доведемо, що енергетичні рівні H із енергією не рівною нулю є двократно виродженими. Ця властивість є результатом співвідношень супералгебри (1.1.12) чи (1.1.15), або співвідношень (1.1.17) чи (1.1.18).

Нехай Ψ_q є власною функцією оператора $Q_1 = Q$

$$Q\Psi_q = q\Psi_q. \tag{1.3.1}$$

Тоді, оскільки $H = Q^2$

$$H\Psi_q = q^2\Psi_q. \tag{1.3.2}$$

Подіємо на (1.3.1) і (1.3.2) оператором T і скористаємось співвідношенням антикомутації T із Q.

$$QT\Psi_q = -qT\Psi_q, \tag{1.3.3}$$

$$HT\Psi_q = q^2 T\Psi_q.$$

Із (1.3.3) випливає, що $T\Psi_q = c\Psi_{-q}$, де c — константа нормування. Ψ_{-q} поряд із Ψ_q є власною функцією гамільтоніану із власним значенням q^2. Якщо $q \neq 0$, то має місце двократне виродження енергетичних рівнів.

Знайдемо константу нормування. Нехай Ψ_q є нормована на одиницю

$$<\Psi_q|\Psi_q>= 1.$$

Будемо вимагати, щоб Ψ_{-q} була також нормована

$$< T\Psi_q | T\Psi_q > = |c|^2 < \Psi_{-q} | \Psi_{-q} > = |c|^2 .$$

Використовуючи властивості оператора T (1.1.17), знаходимо

$$|c|^2 = < \Psi_q | T^+ T | \Psi_q > = < \Psi_q | T^2 | \Psi_q > = < \Psi_q | \Psi_q > = 1.$$

Можемо вибрати $c = 1$.
Таким чином,

$$T\Psi_q = \Psi_{-q} \quad \text{і} \quad T\Psi_{-q} = \Psi_q . \tag{1.3.4}$$

Двократне виродження ненульових енергетичних рівнів є одним із найважливіших наслідків суперсиметрії. Якщо існує стан з нульовою енергією, то говорять, що має місце точна суперсиметрія, якщо не існує стану з нульовою енергією, то суперсиметрія є спонтанно порушена. Питання про порушення суперсиметрії буде детально розглянуте пізніше.

Приведемо ще один спосіб доведення двократного виродження ненульових енергетичних рівнів. Оскільки $[H,T]=0$, то існує спільна система власних функцій **для** H і T

$$T\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda , \tag{1.3.5}$$

$$H\varphi_\lambda = E_\lambda \varphi_\lambda ,$$

де $\lambda = \pm 1$, оскільки $T^2 = 1$.
Подіємо оператором Q на ці рівняння і, використовуючи антикомутацію T і Q, маємо

$$TQ\varphi_\lambda = -\lambda Q\varphi_\lambda , \tag{1.3.6}$$

$$HQ\varphi_\lambda = E_\lambda \varphi_\lambda .$$

Звідки випливає, що

$$Q\varphi_\lambda = c\varphi_{-\lambda} , \tag{1.3.7}$$

$$E_\lambda = E_{-\lambda} .$$

Нульовий енергетичний рівень визначається із рівняння $Q^2\varphi_\lambda = 0$ або $Q\varphi_\lambda = 0$. Тому оператор Q, діючи на φ_λ, не породжує стан $\varphi_{-\lambda}$, а дає нуль (див. (1.3.7)) і нульовий енергетичний рівень не має двократного виродження.

Знайдемо константу нормування, яка входить у формулу (1.3.7)

$$|c|^2 = < Q\varphi_\lambda | Q\varphi_\lambda > = < \varphi_\lambda | Q^2 | \varphi_\lambda > = E.$$

Звідки

$$c = \sqrt{E}.$$

Тому

$$Q\varphi_\lambda = \sqrt{E}\varphi_{-\lambda}. \qquad (1.3.8)$$

Знайдемо дію $Q_\pm$ на φ_λ.

$$Q_\pm\varphi_\lambda = \frac{1}{2}(Q_1 \pm iQ_2)\varphi_\lambda = \frac{1}{2}Q(1 \mp T)\varphi_\lambda = \qquad (1.3.9)$$

$$= \frac{1}{2}Q(1 \mp \lambda)\varphi_\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{E}(1 \mp \lambda)\varphi_{-\lambda}.$$

Тобто

$$Q_+\varphi_{-1} = \sqrt{E}\varphi_1, \qquad Q_+\varphi_1 = 0, \qquad (1.3.10)$$

$$Q_-\varphi_{-1} = 0, \qquad Q_-\varphi_1 = \sqrt{E}\varphi_{-1}.$$

Встановимо зв'язок між Ψ_q і φ_λ, які відповідають одному і тому самому енергетичному рівню. Розкладемо φ_λ по Ψ_q

$$\varphi_\lambda = c_q\Psi_q + c_{-q}\Psi_{-q}$$

Оскільки φ_λ задовільняє рівняння $T\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$, одержимо

$$c_q T\Psi_q + c_{-q}T\Psi_{-q} = \lambda(c_q\Psi_q + c_{-q}\Psi_{-q})$$

Діючи оператором T на Ψ_q і Ψ_{-q}, маємо

$$c_q\Psi_{-q} + c_{-q}\Psi_q = \lambda c_q\Psi_q + c_{-q}\Psi_{-q}.$$

Звідки

$$c_q = \lambda c_{-q},$$

$$c_{-q} = \lambda c_q .$$

Розв'язок цієї системи є наступний

$$\lambda = 1, \qquad c_q = c_{-q} ,$$

$$\lambda = -1, \qquad c_q = -c_{-q} .$$

Тоді

$$\varphi_1 = c_q(\Psi_q + \Psi_{-q}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_q + \Psi_{-q}), \qquad (1.3.11)$$

$$\varphi_{-1} = c_q(\Psi_q - \Psi_{-q}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_q - \Psi_{-q}),$$

де $c_q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ із умови нормування.

§ 4. Найпростіші суперсиметричні системи

1. Суперсиметричний гармонічний осцилятор

У цьому параграфі ми розглянемо найпростіші приклади суперсиметрії в квантовій механіці. Перший приклад — суперсиметричний гармонічний осцилятор є фактично збудований власними руками в § 1. Використовуючи (1.1.5) і (1.1.6) запишемо гамільтоніан

$$H = \{Q_+, Q_-\} = |g|^2 (b^- f^+ b^+ f^- + b^+ f^- b^- f^+) =$$

$$= |g|^2 (b^- b^+ f^+ f^- + b^+ b^- f^- f^+).$$

Оскільки $b^- b^+ = b^+ b^- + 1$, одержимо

$$H = |g|^2 (f^+ f^- + b^+ b^- (f^- f^+ + f^+ f^-)) = \qquad (1.4.1)$$

$$= |g|^2 (f^+ f^- + b^+ b^- \{f^-, f^+\}) = |g|^2 (b^+ b^- + f^+ f^-).$$

Зазначимо, що суперсиметричний гармонічний осцилятор складається із суми бозонного і ферміонного осциляторів

$$H = H_b + H_f = |g|^2 (b^+ b^- + 1/2) + |g|^2 (f^+ f^- - 1/2). \qquad (1.4.2)$$

Енергія вакууму суперсиметричного осцилятора рівна нулю: енергія нульових коливань бозонного і ферміонного осциляторів скорочується. Це один із важливих моментів суперсиметричних моделей, який зберігається також у квантовій теорії поля.

Суперзаряди гармонічного осцилятора мають вигляд

$$Q_1 = gb^- f^+ + g^* b^+ f^-, \qquad (1.4.3)$$

$$Q_2 = -i(gb^- f^+ - g^* b^+ f^-).$$

Як відомо, Q_2 можемо записати у вигляді $Q_2 = iQ_1 T$.

Оператор

$$T = 2f^+ f^- - 1 \qquad (1.4.4).$$

Справді,

$$iQ_1 T = i(gb^- f^+ + g^* b^+ f^-)(2f^+ f^- - 1) =$$

$$= 2ig^* b^+ f^- f^+ f^- - i(gb^- f^+ + g^* b^+ f^-) =$$

$$= 2ig^* b^+ f^- - igb^- f^+ - ig^* b^+ f^- =$$

$$= -i(gb^- f^+ - g^* b^+ f^-) = Q_2.$$

Власні стани і енергетичні рівні суперсиметричного гармонічного осцилятора мають вигляд

$$\Psi_{n_b, n_f} = |n_b, n_f>, \qquad (1.4.5)$$

$$E_{n_b, n_f} = |g|^2 (n_b + n_f),$$

де

$$n_b = 0, 1, 2, \ldots, \qquad n_f = 0, 1.$$

Зауважимо, що в даному випадку власний стан H є також власним станом оператора T

$$T|n_b, n_f> = (2n_f - 1)|n_f, n_f>$$

із власним значенням $2n_f - 1$, яке може набувати значень ±1 (див. попередній параграф).

Енергетичні рівні суперсиметричного гармонічного осцилятора є двократно виродженими. Із (1.4.5) бачимо, що це є наслідком співпадання частот бозонного і ферміонного осциляторів. Основний стан має нульову енергію і є невироджений. Картина енергетичних рівнів суперсиметричного осцилятора зображена на рис. 1.

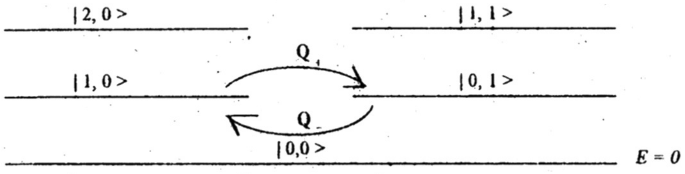

Рис. 1. Енергетичні рівні суперсиметричного гармонічного осцилятора.

Стрілками на рис. 1 зображена дія операторів $Q_\pm$

$$Q_+|n_b,0>=g\sqrt{n_b}\,|n_b-1,1>,\quad Q_+|n_b-1,1>=0, \tag{1.4.6}$$
$$Q_-|n_b,0>=0,\quad Q_-|n_b-1,1>=g^*\sqrt{n_b}\,|n_b,0>,$$

де $g=|g|e^{i\varphi}$, $g^*=|g|e^{-i\varphi}$. Ці формули, з точністю до фазового множника $e^{i\varphi}$, є конкретною реалізацією формул (1.3.10), де

$$|n_b,0>=\varphi_{-1},\quad |n_b-1,1>=\varphi_1,\quad |g|\sqrt{n_b}=\sqrt{E}$$

2. Суперсиметрія вільної частинки

Це є перший приклад проявлення суперсиметрії в реальній системі. Розглянемо вільну частинку ($m=1$, $\hbar=1$), яка рухається в одновимірному просторі:

$$H=\frac{p^2}{2},\qquad p=-i\frac{d}{dx}. \tag{1.4.11}$$

Ми вже говорили, що першою ознакою суперсиметрії є те, що гамільтоніан можна записати у вигляді $H=Q^2$. В даному випадку

$$Q=p/\sqrt{2} \tag{1.4.12}$$

Для існування суперсиметрії треба знати оператор T, який би антикомутував із Q. Такий оператор легко побачити: з похідною антикомутує оператор інверсії I, $I^2 = 1$, $I^+ = I$,

$$\{Q, I\} = 0. \tag{1.4.13}$$

Тому $T = I$.

Таким чином, маючи Q, I, H, ми можемо побудувати алгебру суперсиметрії (див. § 1).

Власними функціями Q і H є $\Psi_k = \mathrm{const} \times e^{ikx}$:

$$Q\Psi_k = q\Psi_k, \qquad q = k/\sqrt{2},$$

$$H\Psi_k = E_k\Psi_k, \qquad E_k = q^2 = k^2/2,$$

$$I\Psi_k = \Psi_{-k}, \qquad I\Psi_{-k} = \Psi_k,$$

Енергетичні рівні є двократно виродженими відповідно до знаку k, який відповідає руху частинки в додатньому чи від'ємному напрямку. Нульовий енергетичний рівень із $k = 0$ є невироджений. Картина енергетичних рівнів вільної частинки зображена на рис. 2.

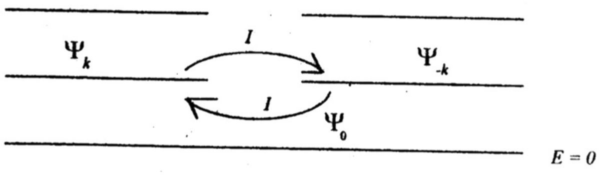

Рис. 2. Енергетичні рівні вільної частинки. Стрілками зображена дія оператора інверсії на хвильові функції.

§ 5. Симетрія двовимірного гармонічного осцилятора. Заряди і суперзаряди

Ціль цього параграфа є порівняти алгебру і супералгебру. Таке порівняння дає можливість глибше зрозуміти два об'єкти, які порівнюються.

Раніше ми розглядали одну бозонну і одну ферміонну ступені вільності. Розглянемо тепер дві бозонні ступені вільності. Введемо оператори, які описують переходи між двома ступенями вільності

$$L_- = b_1^- b_2^+, \qquad L_+ = b_2^- b_1^+, \tag{1.5.1}$$

L_+, L_- є аналогом генераторів суперсиметрії Q_+, Q_- з тою відмінністю, що $L_\pm$ описують переходи бозон-бозон.

Найпростіший гамільтоніан, який інваріантний відносно дії операторів $L_\pm$, тобто $[L_\pm, H] = 0$ має вигляд

$$H = (b_1^+ b_1 + 1/2) + (b_2^+ b_2 + 1/2), \qquad w = 1. \tag{1.5.2}$$

Це ізотропний двовимірний гармонічний осцилятор. Зауважимо, що саме співпадіння частот першого і другого осциляторів в гамільтоніані забезпечує комутацію його із $L_\pm$.

Для того, щоб встановити алгебру симетрії гамільтоніана (1.5.2), розрахуємо

$$[L_+, L_-] = [b_2^- b_1^+, b_1^- b_2^+] = b_1^+ b_1^- - b_2^+ b_2^- .$$

Позначимо $N = \frac{1}{2}(b_1^+ b_1^- - b_2^+ b_2^-)$,

$$[L_-, N] = \frac{1}{2}[b_1^- b_2^+, b_1^+ b_1^- - b_2^+ b_2^-] = \tag{1.5.3}$$

$$= \frac{1}{2}(b_1^- b_2^+ + b_2^+ b_1^-) = b_1^- b_2^+ = L_- ,$$

$$[L_+, N] = \frac{1}{2}[b_2^- b_1^+, b_1^+ b_1^- - b_2^+ b_2^-] =$$

$$= -\frac{1}{2}(b_1^+ b_2^- + b_2^- b_1^+) = -b_2^- b_1^+ = -L_+ .$$

Таким чином, алгебра симетрії H задається генераторами L_+, L_-, N, які задовольняють співвідношенням

$$[L_+, L_-] = 2N, \tag{1.5.4}$$

$$[L_\pm, N] = \mp L_\pm ,$$

$$[L_\pm, H] = 0, \qquad [N, H] = 0.$$

Зауважимо, що алгебра комутаторів операторів L_+, L_-, N, збігається з алгеброю комутаторів спінових операторів.

Порівнюючи алгебру (1.5.4) із алгеброю суперсиметрії відмітимо дві суттєві відмінності:

1. Алгебра (1.5.4) включає тільки комутатори, тоді як алгебра суперсиметрії задається як комутаторами, так і антикомутаторами.

2. Права частина (1.5.4) не містить гамільтоніану, тоді як в суперсиметрії гамільтоніан входить у праву частину переставних співвідношень $\{Q_+,Q_-\}=H$.

Із L_+ і L_- побудуємо ермітові оператори

$$L_1 = L_+ + L_- , \qquad (1.5.6)$$

$$L_2 = (L_+ - L_-)/i.$$

Цікаво подивитись на вигляд цих операторів у координатному представленні. Оскільки

$$b_1^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 \mp ip_1), \qquad (1.5.6)$$

$$b_2^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 \mp ip_2),$$

знаходимо

$$L_1 = \frac{1}{2}((x_1+ip_1)(x_2-ip_2)+(x_2+ip_2)(x_1-ip_1)) = p_1p_2 + x_1x_2,$$

$$L_2 = -i\frac{1}{2}((x_2+ip_2)(x_1-ip_1)-(x_1+ip_1)(x_2-ip_2)) = x_1p_2 - x_2p_1$$

Очевидно, що L_1 і I_2 комутують із H. $L_2 = L_z$ — компонента моменту кількості руху. Те, що $[L_2,H]=0$, є результатом інваріантності гамільтоніану відносно поворотів у площині x_1x_2. Якщо ввести одну комплексну змінну $z = x_1 + ix_2$, то перетворення повороту набере вигляду фазового перетворення:

$$z' = e^{i\varphi} z.$$

Інваріантність відносно такого перетворення в теорії поля веде до збереження заряду. Тому за аналогією з квантовою теорією поля в цьому випадку роль заряду виконує L_z. Відповідно в суперсиметрії Q

носить назву суперзаряду. L_z генерує повороти в просторі двох бозонних ступенів вільності. Аналогічно можемо сказати, що генератори суперсиметрії генерують повороти в просторі бозонного і ферміонного ступенів вільності.

Алгебра Лі генераторів симетрії пов'язана із відповідною групою Лі. Виникає питання: яка група (точніше ми будемо називати супергрупа) відповідає супералгебрі Лі. Цим питанням ми займемось у наступному параграфі.

§ 6. Супергрупи

Пригадаємо спочатку деякі властивості груп Лі. Нехай J_i $(i=1,\ldots,n)$ генератори (інфінітезимальні оператори) групи Лі, які задовільняють алгебрі Лі

$$[J_i, J_j] = c_{ij}^k J_k, \tag{1.6.1}$$

c_{ij}^k називаються структурними константами.

Елемент групи Лі можна записати у вигляді

$$G = e^U, \tag{1.6.2}$$

де

$$U = \sum_{i=1}^n \gamma_i J_i,$$

γ_i — параметри перетворення.

Розглянемо зміну генераторів симетрії під дією елементів групи

$$\tilde{J}_i = e^U J_i e^{-U} = J_i + [U, J_i] + \tag{1.6.3}$$

$$+\frac{1}{2}[U,[U,J_i]] + \frac{1}{3!}[U,[U,[U,J_i]]] + \ldots$$

Оскільки має місце властивість (1.6.1), то кожен із доданків (1.6.3) можна записати як лінійну комбінацію генераторів. Тому

$$\tilde{J}_i = \sum_j A_{ij} J_j. \tag{1.6.4}$$

Отже, нові генератори симетрії, які утворюються під дією елементів групи, рівні лінійній комбінації старих.

Будемо вимагати, щоб така сама властивість мала місце і для супергрупи. Нехай Q_i— непарні елементи супер922алгебри, D_i — парні елементи. Супералгебра задається співвідношеннями

$$\{Q_i, Q_j\} = A_{ij}^k D_k, \qquad (1.6.5)$$

$$[D_i, D_j] = B_{ij}^k D_k,$$

$$[Q_i, D_j] = C_{ij}^k Q_k,$$

де A_{ij}^k, B_{ij}^k, C_{ij}^k — структурні константи.

Елемент супергрупи запишемо в такому самому вигляді як для звичайної групи (1.6.2), де

$$U = U_+ + U_- = \sum_i \gamma_i D_i + \sum_i \varepsilon_i Q_i \,, \qquad (1.6.6)$$

γ_i — звичайні числа, а ε_i, як буде показано нижче, володіють дещо незвичайними властивостями.

Розглянемо зміну непарних елементів під дією елементів супергрупи $G_- = e^{U_-}$

$$\tilde{Q}_i = e^{U_-} Q_i e^{-U_-} = Q_i + [U_-, Q_i] + \frac{1}{2}[U_-, [U_-, Q_i]] + \ldots = Q_i + Q_i^{(1)} + Q_i^{(2)} + \ldots$$

Розглянемо перший порядок

$$Q_i^{(1)} = [U_-, Q_i] = \sum_j [\varepsilon_j Q_j, Q_i] = \sum_j (\varepsilon_j Q_j Q_i - Q_i \varepsilon_j Q_j).$$

Якщо ε_j звичайні числа, то одержимо

$$Q_i^{(1)} = \sum_j \varepsilon_j [Q_j, Q_i].$$

Але $[Q_i, Q_j]$ не заданий в алгебрі суперсиметрії. Нам відомо антикомутатор $\{Q_j, Q_i\}$.

Щоб одержати в правій частині $Q_i^{(1)}$ антикомутатор, будемо вважати, що ε_i антикомутують із всіма непарними елементами і комутують з парними. Тоді

$$Q_i^{(1)} = \sum_j \varepsilon_j (Q_j Q_i + Q_i Q_j) = \sum_j \varepsilon_j \{Q_j Q_i\} = \sum_j \varepsilon_j A_{ij}^k D_k .$$

Таким чином, перший порядок є лінійна комбінація генераторів.

Розглянемо другий порядок

$$Q_i^{(2)} = \frac{1}{2}[U_-,[U_-,Q_i]] = \frac{1}{2}[\sum_j \varepsilon_j Q_j, \sum_l \varepsilon_l A_{il}^k D_k] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_j \sum_l A_{il}^k (\varepsilon_j Q_j \varepsilon_l D_k - \varepsilon_l D_k \varepsilon_j Q_j) = -\frac{1}{2}\sum_j \sum_l A_{il}^k (\varepsilon_j \varepsilon_l Q_j D_k + \varepsilon_l \varepsilon_j D_k Q_j).$$

Добитися того, щоб $Q_i^{(2)}$ виражався через лінійну комбінацію генераторів можна вимогою $\{\varepsilon_i, \varepsilon_j\} = 0$. Тоді

$$Q_i^{(2)} = -\frac{1}{2}\sum_j \sum_l A_{il}^k \varepsilon_j \varepsilon_l (Q_j D_k - D_k Q_j) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_j \sum_l A_{il}^k \varepsilon_j \varepsilon_l [Q_j, D_k] = -\frac{1}{2}\sum_j \sum_l A_{il}^k A_{jk}^s \varepsilon_j \varepsilon_l Q_s .$$

Аналогічно можна показати, що коли параметри ε_i задовільняють вищезгаданим властивостям, то вищі порядки також виражаються через лінійну комбінацію генераторів.

Нам вдалося досягнути, що $\tilde{Q}_i$ виражається через лінійну комбінацію генераторів, але параметри перетворень мають дещо незвичні властивості:

1°. ε_i антикомутують зі всіма непарними елементами і комутують із парними елементами супералгебри

$$\{\varepsilon_i, Q_j\} = 0, \qquad [\varepsilon_i, D_j] = 0,$$

2°. ε_i антикомутують між собою

$$\{\varepsilon_i, \varepsilon_j\} = 0$$

і називаються змінними Грасмана.

Розглянемо для прикладу суперсиметрію, генератори якої задовільняють супералгебрі (1.1.15). Покажемо, що

$$G = e^{U}, \tag{1.6.7}$$

де

$$U = \sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i Q_i + t H,$$

справді утворюють групу відносно операції множення.

Розрахуємо добуток двох елементів

$$G = e^{\sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i Q_i + t H} = e^{U}, \tag{1.6.8}$$

і

$$G' = e^{\sum_{i=1}^{2} \varepsilon'_i Q_i + t' H} = e^{U'}.$$

Скористаємось властивістю

$$e^{U} e^{U'} = e^{U + U' + \frac{1}{2}[U, U']}, \tag{1.6.9}$$

справедливою для випадку, коли оператор $[U, U']$ комутує із U і U'.

У нашому випадку

$$[U, U'] = [\sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i Q_i + t H, \sum_{j=1}^{2} \varepsilon'_j Q_j + t' H] = \tag{1.6.10}$$

$$= [\sum_{i,j} \varepsilon_i Q_i, \varepsilon'_j Q_j] = -\sum_{i,j} \left(\varepsilon_i Q_i \varepsilon'_j Q_j - \varepsilon'_j Q_j \varepsilon_i Q_i \right) =$$

$$= -\sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon'_j \{Q_i, Q_j\} = -\sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon'_j 2 H \delta_{i,j} = -2 \sum_{i} \varepsilon_i \varepsilon'_i H,$$

де ми використали те, що ε_i і ε'_j антикомутують між собою $\{\varepsilon_i, \varepsilon'_j\} = 0$ і з непарними елементами супералгебри.

Із (1.6.10) бачимо, що $[U, U']$ справді комутує з U і U', оскільки H комутує із суперзарядами. Тоді

$$GG' = e^{\sum_i (\varepsilon_i + \varepsilon_i') Q_i + (t + t')H - \sum_i \varepsilon_i \varepsilon_i' H} = G'' = e^{U''}, \qquad (1.6.11)$$

де

$$U'' = \sum_i \varepsilon_i'' Q_i + t'' H,$$

$$\varepsilon_i'' = \varepsilon_i + \varepsilon_i', \qquad t'' = t + t' - \sum_i \varepsilon_i \varepsilon_i'.$$

Таким чином, з (1.6.11) випливає, що множина G утворює групу, точніше супергрупу (існує також одиничний елемент і елемент, обернений до даного). Це досягається завдяки тому, що параметри супергрупи біля непарних елементів є змінними Грасмана.

Відмітимо ще один важливий момент формули (1.6.11). Послідовна дія двох елементів групи G і G' навіть у випадку $t = t' = 0$ (інфінітезимальні оператори U і U' не містять H) генерує часові трансляції, оскільки інфінітезимальний оператор нового елемента містить гамільтоніан з множником $t'' = -\sum_i \varepsilon_i \varepsilon_i'$. Саме в цьому і проявляється динамічний характер супергрупи.

II. Суперсиметрична квантова механіка

§ 1. Суперсиметрія і включення взаємодії

Суперсиметричний гармонічний осцилятор, який ми розглянули в § 1 першого розділу, описує невзаємодіючі бозони і ферміони. Виникає питання: чи можна зберегти суперсиметрію, якщо включити взаємодію між бозонами і ферміонами?

Пригадаємо, що суперсиметрія зобов'язана нільпотентному характеру генераторів $Q_\pm^2=0$, де $Q_+=gb^-f^+$, $Q_-=g^*b^+f^-$. Нільпотентний характер $Q_\pm$ є в, свою чергу, наслідком того, що $Q_\pm \sim f^\pm$. Тому можемо зберегти нільпотентний характер генераторів, а тим самим і суперсиметрію, замінивши бозонні оператори b^+, b^-, які входять в $Q_\pm$ певними функціями цих операторів

$$gb^- \to B^-(b^-,b^+), \tag{2.1.1}$$

$$g^*b^+ \to B^+(b^-,b^+),$$

причому

$$(B^-(b^-,b^+))^+ = B^+(b^-,b^+).$$

Тоді

$$Q_+ = B^-(b^-,b^+)f^+, \tag{2.1.2}$$

$$Q_- = B^+(b^-,b^+)f^-.$$

Суперсиметричний гамільтоніан запишемо

$$H = B^-B^+f^+f^- + B^+B^-f^-f^+ = \tag{2.1.3}$$

$$= B^-B^+f^+f^- + B^+B^-(1-f^+f^-) = [B^-,B^+]f^+f^- + B^+B^-.$$

Нехай $[B^-,B^+]=1+V(b^-,b^+)$. Тоді гамільтоніан перепишемо

$$H = f^+f^- + B^+B^- + V(b^-,b^+)f^+f^-. \tag{2.1.4}$$

Перший доданок описує невзаємодіючі ферміони, другий — взаємодіючі між собою бозони, третій — взаємодію між бозонами і ферміонами.

З самого початку § 1 розділу 1, коли ми вводили генератори суперсиметрії, то ми визначали їх як оператори, які переводять бозони у ферміони і навпаки. Про генератори, введені в цьому параграфі (2.1.2), так сказати не можна. Правильно сказати, що генератори суперсиметрії (2.1.2) переводять бозонний стан у ферміонний і навпаки.

§ 2. Матрична реалізація ферміонних ступенів вільності

Ферміонні числа заповнення набувають двох значень $n_f = 0,1$. Тому вектор стану можна описувати з допомогою двокомпонентної хвильової функції

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \end{pmatrix}, \tag{2.2.1}$$

Ψ_1 відповідає $n_f = 1$, Ψ_0 — $n_f = 0$.

Ферміонні оператори задаються матрицями

$$f^+ = \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f^- = \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.2}$$

Тому можемо записати

$$Q_+ = B^- \sigma^+, \tag{2.2.3}$$

$$Q_- = B^+ \sigma^-,$$

σ^+ і σ^- зв'язані з матрицями Паулі

$$\sigma^+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2), \tag{2.2.4}$$

$$\sigma^- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2).$$

Суперзаряди тоді запишемо

$$Q_1 = Q_+ + Q_- = \frac{1}{2}B^-(\sigma_1 + i\sigma_2) + \frac{1}{2}B^+(\sigma_1 - i\sigma_2) = \tag{2.2.5}$$

$$= \frac{1}{2}(B^- + B^+)\sigma_1 + \frac{i}{2}(B^- - B^+)\sigma_2 = B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2,$$

$$Q_2 = (Q_+ - Q_-)/i = -\frac{i}{2}B^-(\sigma_1 + i\sigma_2) + \frac{i}{2}B^+(\sigma_1 - i\sigma_2) = \tag{2.2.6}$$

$$= -\frac{i}{2}(B^- - B^+)\sigma_1 + \frac{1}{2}(B^- + B^+)\sigma_2 = B_1\sigma_2 - B_2\sigma_1,$$

де ми ввели позначення ермітових операторів

$$B_1 = \frac{1}{2}(B^+ + B^-), \tag{2.2.7}$$

$$B_2 = \frac{1}{2i}(B^+ - B^-).$$

Нагадаемо також, що $Q_2 = iQ_1T$. Порівнюючи (2.2.6) і (2.2.5) бачимо, що

$$T = \sigma_3 \tag{2.2.8}$$

і таким чином, $Q_2 = iQ_1\sigma_3$.

Про те, що оператор T рівний матриці Паулі σ_3, можна сказати відразу, виходячи із вигляду Q_1 (2.2.5), оскільки саме σ_3 антикомутує із Q_1.

Запишемо гамільтоніан

$$H = B^-B^+\sigma^+\sigma^- + B^+B^-\sigma^-\sigma^+.$$

Використовуючи

$$\sigma^+\sigma^- = \frac{1}{2}(1 + \sigma_z), \tag{2.2.9}$$

$$\sigma^-\sigma^+ = \frac{1}{2}(1 - \sigma_z),$$

маємо

$$H = \frac{1}{2}(B^-B^+ + B^+B^-) + \frac{1}{2}(B^-B^+ - B^+B^-)\sigma_3 = \qquad (2.2.10)$$

$$= \frac{1}{2}\{B^-, B^+\} + \frac{1}{2}[B^-, B^+]\sigma_3.$$

У матричному представленні, в якому σ_3 діагональна, гамільтоніан запишемо

$$H = \begin{pmatrix} B^-B^+ & 0 \\ 0 & B^+B^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \qquad (2.2.11)$$

де

$$H_+ = B^-B^+, \qquad (2.2.12)$$

$$H_- = B^+B^-$$

H_+ і H_- називаються суперсиметричними партнерами і діють у просторі однокомпонентних функцій.

На мові операторів B_1 і B_2 гамільтоніан запишемо

$$H = Q_1^2 = (B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2)^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_1B_2\sigma_1\sigma_2 + B_2B_1\sigma_2\sigma_1 = \qquad (2.2.13)$$

$$= B_1^2 + B_2^2 + i[B_1, B_2]\sigma_3$$

Цікаво відмітити, що H_+ і H_- представлені у факторизованому вигляді (2.2.12) (факторизація означає представлення у вигляді добутку). Наперед зауважимо, що саме факторизація гамільтоніану дасть можливість знайти точні розв'язки багатьох задач квантової механіки. Вперше безвідносно до суперсиметрії метод факторизації був запропонований Шредінгером.

§ 3. Суперпотенціал

У цьому параграфі ми конкретизуємо вигляд операторів B_+, B_-. Будемо вимагати, щоб гамільтоніан (2.2.10) чи (2.2.13) був квадратичний за імпульсом. Це забезпечується вибором

$$B^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp ip + W(x)), \qquad p = -i\frac{d}{dx}, \tag{2.3.1}$$

де $W(x)$ — довільна функція координати x.

При $W(x) = x$ $B^{\pm} = b^{\pm}$ і ми приходимо до розглядуваного раніше суперсиметричного гармонічного осцилятора. Тому (2.3.1) можна розглядати як певне узагальнення операторів знищення і народження гармонічного осцилятора.

Розрахуємо антикомутатор і комутатор, які входять у гамільтоніан (2.2.10)

$$\{B^-, B^+\} = \frac{1}{2}(p^2 + W^2), \tag{2.3.2}$$

$$[B^-, B^+] = \frac{dW}{dx} = W'.$$

Таким чином, суперсиметричний гамільтоніан запишеться [4]

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + W^2 + W'\sigma_z). \tag{2.3.3}$$

У представленні, в якому σ_z діагональна матриця, суперсиметричні партнери мають вигляд

$$H_{\pm} = \frac{1}{2}(p^2 + W^2 \pm W') = \frac{1}{2}(p^2 + U_{\pm}), \tag{2.3.4}$$

де

$$U_{\pm} = W^2 \pm W'.$$

W^2 описує взаємодію бозонів з бозонами, $W'\sigma_z$ — взаємодію ферміонів з бозонами. Важливо відмітити, що бозон-бозонна взаємодія і ферміон-бозонна взаємодія задаються одною і тою самою функцією $W(x)$, яку ми будемо називати суперпотенціалом. Часто суперпотенціалом називають функцію $V(x)$, яка зв'язана із $W(x)$ співвідношенням $V'(x) = W(x)$.

Розглянемо більш детально випадок $W(x) = x$. Суперсиметричний гамільтоніан запишемо

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + x^2 + \sigma_z).$$

Суперсиметричні партнери $H_\pm$ — це гармонічні осцилятори, гамільтоніани яких зміщені один відносно другого на константу

$$H_\pm = \frac{1}{2}(p^2 + x^2 \pm 1) = \frac{1}{2}(p^2 + U_\pm),$$

$$U_\pm = x^2 \pm 1,$$

з енергетичними рівнями

$$E_\pm = n + 1/2 \pm 1/2, \qquad n = 0,1,2,\dots.$$

Потенціальні енергії і спектр $H_\pm$ зображені на рис. 3.

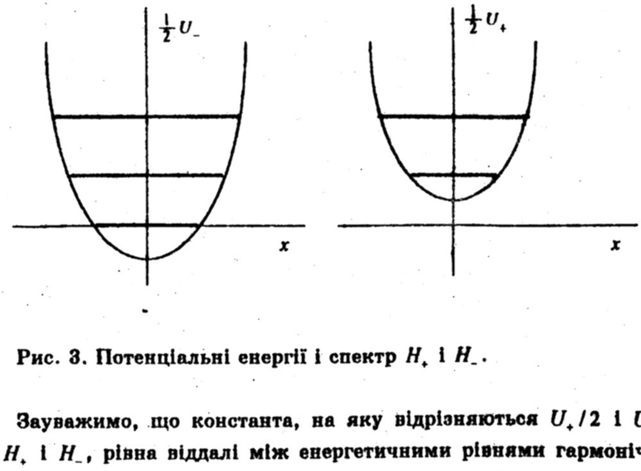

Рис. 3. Потенціальні енергії і спектр H_+ і H_-.

Зауважимо, що константа, на яку відрізняються $U_+/2$ і $U_-/2$ чи H_+ і H_-, рівна віддалі між енергетичними рівнями гармонічних осциляторів. Саме це забезпечує збігання енергетичних рівнів H_+ і H_-, за винятком $E = 0$ (для H_+ не існує рівня $E = 0$). Це приводить до суперсиметричного спектру повного гамільтоніану: всі енергетичні рівні, крім нульового, є двократно виродженими.

§ 4. Енергія вакууму і топологія суперпотенціалу

У цьому параграфі ми вияснимо умови існування або відсутності невиродженого рівня з енергією $E=0$ для гамільтоніану (2.3.3)). Це питання досліджено Віттеном [4]. Було показано, що існування рівня із $E=0$ визначається глобальними властивостями суперпотенціалу і не залежить від його конкретного вигляду.

Рівняння для основного стану запишемо

$$H\Psi_0 = 0. \tag{2.4.1}$$

Зауважимо, що $[H,\sigma_z]=0$. Тому Ψ_0 може бути одночасно власною функцією H і σ_z.

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} \Psi_0^+ \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{для проекції} \quad \sigma_z = 1, \tag{2.4.2}$$

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_0^- \end{pmatrix} \quad \text{для проекції} \quad \sigma_z = -1. \tag{2.4.3}$$

Підставляючи (2.4.2) в (2.4.1), одержимо

$$\begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0^+ \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

звідки

$$H_+\Psi_0^+ = 0 \quad \text{або} \quad B^-B^+\Psi_0^+ = 0. \tag{2.4.4}$$

Аналогічно для Ψ_0^- маємо рівняння

$$H_-\Psi_0^- = 0 \quad \text{або} \quad B^+B^-\Psi_0^- = 0. \tag{2.4.5}$$

Із (2.4.4) і (2.4.5) для Ψ_0^+ і Ψ_0^- одержуємо рівняння

$$B^\pm\Psi_0^\pm = 0. \tag{2.4.6}$$

Справді, на основі (2.4.4) можемо записати

$$<\Psi_0^+|B^-B^+|\Psi_0^+>=<B^+\Psi_0^+|B^+\Psi_0^+>=0,$$

звідки випливає, що $B^+\Psi_0^+=0$. Аналогічно на основі (2.4.5) для Ψ_0^- одержуємо рівняння $B^-\Psi_0^-=0$. Очевидно також, що якщо задовільняються рівняння (2.4.6), то задовільняються (2.4.4) чи (2.4.5).

В явному вигляді рівняння (2.4.6) запишемо

$$\left(\mp\frac{d}{dx}+W(x)\right)\Psi_0^\pm=0. \qquad (2.4.7)$$

Розв'язки цих рівнянь мають вигляд

$$\Psi_0^\pm=c\exp\left(\pm\int_0^x W(x)dx\right). \qquad (2.4.8)$$

Для того, щоб $\Psi_0^\pm$ дійсно була власною функцією H, вона повинна бути квадратично інтегровна. Для квадратичної інтегровності Ψ_0^- потрібно, щоб

$$\int_0^x W(x)dx\to\infty \quad \text{при} \quad x\to\pm\infty. \qquad (2.4.9)$$

Для квадратичної інтегровності Ψ_0^+ потрібно, щоб

$$\int_0^x W(x)dx\to-\infty \quad \text{при} \quad x\to\pm\infty. \qquad (2.4.10)$$

Умови (2.4.9) і (2.4.10) несумісні. Тому існує тільки одна із функцій $\Psi_0^\pm$, яка може бути нормована. Якщо існує стан з нульовою енергією для H_-, то не існує для H_+ і навпаки. Це означає, що стан з нульовою енергією для системи з повним гамільтоніаном H з одним бозонним ступенем вільності є невироджений.

Звичайно, може бути випадок, коли ні одна із функцій $\Psi_0^\pm$ не може бути нормована. Це означає, що не існує стану із нульовою енергією.

Таким чином, (2.4.9) і (2.4.10) визначають умови на суперпотенціал при яких існує стан з нульовою енергією і має місце точна суперсиметрія. Мала деформація суперпотенціалу в скінченій області не може вплинути на виконання умов (2.4.9) чи (2.4.10). Тому говорять, що існування або порушення суперсиметрії визначається топологічними властивостями суперпотенціалу. Особливо просто виглядають ці властивості, коли $W(x)$ має визначені знаки при $x \to \pm\infty$. (див. рис.4).

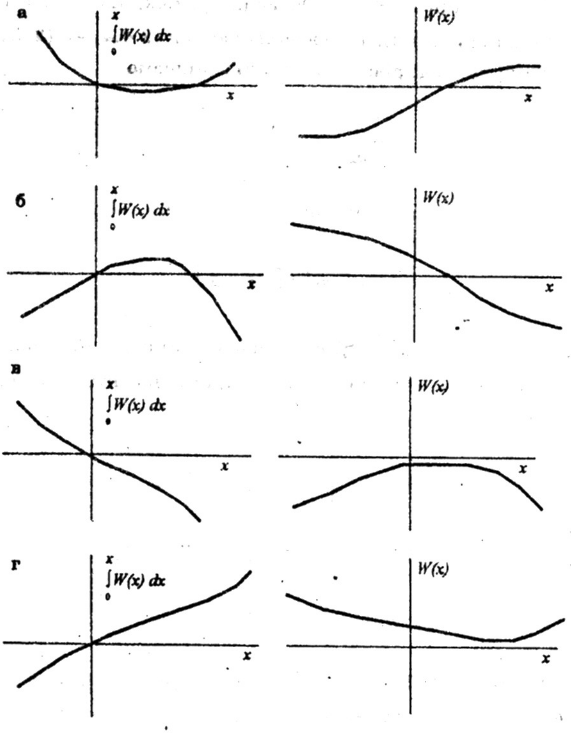

Рис. 4.
- а — точна суперсиметрія: існує нормований розв'язок для Ψ_0^-;
- б — точна суперсиметрія: існує нормований розв'язок для Ψ_0^+;
- в, г — спонтанно порушена суперсиметрія: не існує нормованого розв'язку ні для однієї із $\Psi_0^\pm$.

Таким чином, якщо $W(x)$ має різні знаки при $x \to \pm\infty$., то існує стан із $E=0$ і має місце точна суперсиметрія, якщо $W(x)$ має однакові знаки при $x \to \pm\infty$., то не існує стану із $E=0$ і суперсиметрія є спонтанно порушена. Можна сказати, що питання про існування чи порушення суперсиметрії зв'язано із топологічними властивостями суперпотенціалу. Знаки $W(x)$ при $x \to \pm\infty$ є топологічними характеристиками і вони не міняються при малих деформаціях суперпотенціалу.

§ 5. Факторизація гамільтоніану і суперсиметрія

Розглянемо гамільтоніан, який описує рух частинки в одновимірному просторі

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + U(x)). \qquad (2.5.1)$$

Факторизувати гамільтоніан означає записати його у вигляді

$$H = B^+B^- + \varepsilon = H_- + \varepsilon, \qquad (2.5.2)$$

де

$$B^+B^- = H_- = \frac{1}{2}(p^2 + W^2 - W'),$$

ε — константа, яка називається енергією факторизації.
Із (2.5.2) для суперпотенціалу одержуємо рівняння

$$\frac{1}{2}(W^2 - W') + \varepsilon = \frac{1}{2}U(x). \qquad (2.5.3)$$

Це є нелінійне диференціальне рівняння з якого треба знайти як $W(x)$, так і ε.

Нехай суперпотенціал має визначені знаки "+" і "–", коли x прямує до $+\infty$ і $-\infty$ відповідно. Основний стан гамільтоніану H_- при цьому має нульову енергію. Оскільки H і H_- відрізняються на константу ε, то енергія і хвильова функція основного стану H тоді запишуться

$$E_0 = \varepsilon,$$

$$\Psi_0(x) = c\exp\left(-\int_0^x W(x)dx\right).$$

Таким чином, якщо вдається факторизувати гамільтоніан, то ми можемо точно знайти енергію і хвильову функцію основного стану.

Як приклад розглянемо факторизацію гамільтоніану для випадку руху частинки в потенціалі

$$\frac{1}{2}U(x) = -\alpha\delta(x), \quad \alpha > 0,$$

де $\delta(x)$ — δ-функція.

Суперпотенціал шукаємо у вигляді, зображеному на рис. 5.

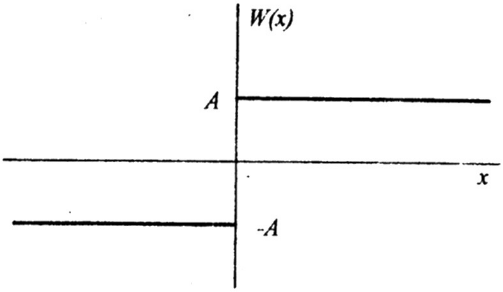

Рис. 5. Суперпотенціал для випадку руху частинки в потенціалі $-\alpha\delta(x)$.

В аналітичній формі суперпотенціал запишемо

$$W(x) = A(\theta(x) - \theta(-x)),$$

де $\theta(x)$ — θ-функція.

Тоді рівняння (2.5.2) має вигляд

$$\frac{1}{2}(A^2 - 2A\delta(x)) + \varepsilon = -\alpha\delta(x),$$

звідки знаходимо

$$A = \alpha,$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}A^2 = -\frac{1}{2}\alpha^2.$$

Енергія і хвильова функція основного стану в цьому випадку запишуться

$$E_0 = \varepsilon = -\frac{1}{2}\alpha^2,$$

$$\Psi_0 = c\,e^{-\alpha|x|}.$$

Після проведеної факторизації до H_-, ми можемо побудувати суперсиметричний партнер H_+ і утворити у такий спосіб суперсиметричний гамільтоніан, який відповідає вихідному гамільтоніану (2.5.1). Спектри вихідного гамільтоніану H і H_- зміщені один відносно одного на константу ε відповідно до (2.5.2).

§ 6. Зв'язок хвильових функцій суперсиметричних партнерів

Пригадаємо, що суперсиметричний гамільтоніан може бути записаний у вигляді

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix},$$

де $H_+ = B^- B^+$, $H_- = B^+ B^-$ є факторизовані.

Розглянемо задачу на власні значення і власні функції

$$\begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_n^+ \\ \Psi_n^- \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} \Psi_n^+ \\ \Psi_n^- \end{pmatrix} \qquad (2.6.1)$$

Це рівняння розпадається на два незалежні рівняння

$$B^- B^+ \Psi_n^+ = E_n \Psi_n^+, \qquad (2.6.2)$$

$$B^+ B^- \Psi_n^- = E_n \Psi_n^-, \qquad (2.6.3)$$

Ψ_n^+ є власна функція H_+, Ψ_n^- — власна функція H_-.

Знайдемо зв'язок хвильових функцій суперсиметричних партнерів. Для цього подіємо на ліву і праву частини (2.6.2) оператором B^+

$$B^+ B^- B^+ \Psi_n^+ = E_n B^+ \Psi_n^+. \qquad (2.6.4)$$

Порівнюючи це рівняння із (2.6.3), знаходимо

$$B^+ \Psi_n^+ = c \Psi_n^-.$$

Для константи нормування c одержуємо

$$|c|^2 = < B^+ \Psi_n^+ | B^+ \Psi_n^+ > = < \Psi_n^+ | B^- B^+ | \Psi_n^+ > = E_n.$$

Таким чином,

$$B^+\Psi_n^+ = \sqrt{E_n}\Psi_n^-. \qquad (2.6.5)$$

Аналогічно подіявши оператором B^- на (2.6.3), знаходимо

$$B^-\Psi_n^- = \sqrt{E_n}\Psi_n^+. \qquad (2.6.6)$$

Формули (2.6.5) і (2.6.6) задають зв'язок між хвильовими функціями суперсиметричних партнерів.

Зауважимо, що (2.6.5) і (2.6.6) є відображенням формули (1.3.8), яка є наслідком суперсиметрії. Справді,

$$Q = B^-\sigma^+ + B^-\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & B^- \\ B^+ & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \Psi_n^+ \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_n^- \end{pmatrix},$$

де φ_1 φ_{-1} власні вектори оператора $T = \sigma_z$.

Формулу (1.3.8) тоді запишемо

$$\begin{pmatrix} 0 & B^- \\ B^+ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi_n^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{E_n}\begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_n^- \end{pmatrix} \qquad \text{для} \quad \lambda = 1,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & B^- \\ B^+ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_n^- \end{pmatrix} = \sqrt{E_n}\begin{pmatrix} \Psi_n^+ \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{для} \quad \lambda = -1,$$

звідки

$$B^+\Psi_n^+ = \sqrt{E_n}\Psi_n^-,$$

$$B^-\Psi_n^- = \sqrt{E_n}\Psi_n^+.$$

Отже, ми знову приходимо до формул (2.6.5) і (2.6.6).

Нехай для H_- існує стан з нульовою енергією, який визначається з рівняння $B^-\Psi_0^-=0$. Тоді для H_+ не існує стану з нульовою енергією.

Картина енергетичних рівнів H_- і H_+ зображена на рис. 6.

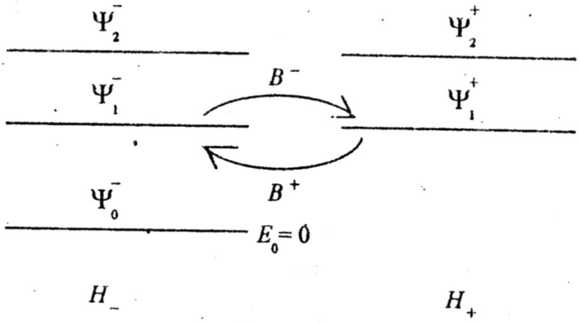

Рис. 6. Енергетичні спектри суперсиметричних партнерів H_- і H_+. Стрілками зображено дію операторів $B^\pm$ на $\Psi_n^\pm$.

Енергетичні рівні суперсиметричних партнерів $H_\pm$ збігаються, за винятком найнижчого енергетичного рівня $E=0$. Для H_+ у даному випадку не існує стану із $E=0$. Після об'єднання суперсиметричних партнерів у єдиний гамільтоніан приходимо до суперсиметричної картини: всі енергетичні рівні є двократно виродженими за винятком нульового енергетичного рівня.

§ 7. Точне знаходження спектра і хвильових функцій рівняння Шредінгера з допомогою суперсиметрії

Дві властивості суперсиметрії, а саме двократне виродження ненульових рівнів і існування стану із нульовою енергією, дають можливість при певних умовах точно знайти спектр і хвильові функції рівняння Шредінгера [9]. Внаслідок суперсиметрії суперсиметричні партнери $H_\pm$ мають однакові спектри, за винятком самого рівня з енергією рівною нулю.

Розглянемо рівняння на власні значення і власні функції $H_\pm$. Перед тим, як сформулювати загальну схему точного знаходження енергетичних рівнів і хвильових функцій $H_\pm$, розглянемо приклад із суперпотенціалом $W(x)=\alpha\,\mathrm{th}\,x$, де $\alpha>0$. При $\alpha>0$ $H_\pm$ має стан із нульовою енергією $E=0$.

Пригадаємо

$$H_\pm=\frac{1}{2}(p^2+U_\pm).$$

В цьому прикладі

$$U_-(\alpha,x)=\alpha^2\,\mathrm{th}^2x-\frac{\alpha}{\mathrm{ch}^2x}=\alpha^2\frac{\mathrm{ch}^2x-1}{\mathrm{ch}^2x}-\frac{\alpha}{\mathrm{ch}^2x}=-\frac{\alpha(\alpha+1)}{\mathrm{ch}^2x}+\alpha^2. \tag{2.7.1}$$

Аналогічно

$$U_+(\alpha,x)=-\frac{\alpha(\alpha-1)}{\mathrm{ch}^2x}+\alpha^2. \tag{2.7.2}$$

Суттєвим є наступний момент. $U_+(\alpha,x)$ після заміни $\alpha-1=\alpha_1$ можна переписати через U_-

$$U_+(\alpha,x)=-\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{\mathrm{ch}^2x}+\alpha^2=-\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{\mathrm{ch}^2x}+\alpha_1^2+\alpha^2-\alpha_1^2= \tag{2.7.3}$$

$$=U_-(\alpha_1,x)+\alpha^2-\alpha_1^2.$$

Тому

$$H_+(\alpha,x)=H_-(\alpha_1,x)+\frac{\alpha^2-\alpha_1^2}{2}. \tag{2.7.4}$$

Якщо $\alpha_1>0$, то найнижчий рівень для $H_-(\alpha_1,x)$- знову рівний нулю. Це дає можливість, використовуючи (2.7.4), визначити найнижчий рівень $H_+(\alpha,x)$

$$E_1=\frac{\alpha^2-\alpha_1^2}{2}. \tag{2.7.5}$$

При знаходженні E_1 ми суттєво використали одну із властивостей суперсиметрії, а саме те, що H_- має найнижчий рівень з нульовою енергією.

Скористаємось другою властивістю: енергетичні рівні $H_+(\alpha,x)$ і $H_-(\alpha,x)$ збігаються, за винятком найнижчого нульового рівня. Тому E_1 є також енергетичним рівнем $H_-(\alpha,x)$, який слідує за нульовим рівнем. Тобто E_1 — це перший збуджений рівень $H_-(\alpha,x)$.

Повторюючи ще раз описану вище процедуру, побудуємо до $H_-(\alpha_1,x)$ суперсиметричного партнера

$$H_+(\alpha_1,x)=H_-(\alpha_2,x)+\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{2},$$

де

$$\alpha_2=\alpha_1-1=\alpha-2.$$

Звідки знаходимо

$$E_2=\frac{\alpha^2-\alpha_1^2}{2}+\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{2}=\frac{\alpha^2-(\alpha-2)^2}{2}. \tag{2.7.6}$$

Продовжуємо дану процедуру, роблячи на кожному кроці заміну $\alpha_n=\alpha_{n-1}-1=\alpha-n$ до тих пір, поки $\alpha_n\ge 0$, $n\le\alpha$. У такий спосіб одержуємо повний енергетичний спектр гамільтоніану

$$E_n=\frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha_1^2+\alpha_1^2-\alpha_2^2+\ldots+\alpha_{n-1}^2-\alpha_n^2)= \tag{2.7.7}$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha_n^2)=\frac{1}{2}(\alpha^2-(\alpha-n)^2),$$

де $n\le\alpha$.

Для частинки, що рухається в потенціалі $-\alpha(\alpha+1)/2\mathrm{ch}^2 x$ енергетичний спектр запишеться

$$E_n=\frac{1}{2}(\alpha^2-(\alpha-n)^2)-\frac{\alpha^2}{2}=-\frac{(\alpha-n)^2}{2}, \qquad n\le\alpha.$$

Вирішальним моментом, крім властивостей суперсиметрії, який дав можливість побудувати ітераційну процедуру і знайти енергетичний спектр було те, що H_+ і H_- (чи U_+ і U_-) відрізняються тільки значенням параметрів і адетивною постійною (див.(2.7.3) і (2.7.4)). Співвідношення (2.7.3) в загальному запишемо

$$U_+(\alpha,x)=U_-(\alpha_1,x)+2R(\alpha_1), \qquad (2.7.8)$$

де R — константа, а α може означати цілий набір параметрів. Умову (2.7.8) будемо називати умовою формінваріантності, а потенціали, які задовільняють цю умову — формінваріантними потенціалами.

Для формінваріантних потенціалів ми можемо побудувати ітераційну процедуру знаходження енергетичного спектра, а також хвильових функцій.

Розглянемо рівняння на власні значення і власні функції

$$H_-(\alpha,x)\Psi_n(x)=E_n\Psi_n(x).$$

Побудуємо до $H_-(\alpha,x)$ суперсиметричного партнера і, використовуючи формінваріантність (2.7.8), одержимо

$$H_+(\alpha,x)=H_-(\alpha_1,x)+R_1(\alpha_1).$$

До $H_-(\alpha_1,x)$ знову будуємо суперсиметричного партнера і використовуємо формінваріантність

$$H_+(\alpha_1,x)=H_-(\alpha_2,x)+R_2(\alpha_2).$$

Продовжуючи ітераційну процедуру, одержуємо

$$H_+(\alpha_{n-1},x)=H_-(\alpha_n,x)+R_n(\alpha_n). \qquad (2.7.9)$$

Звідки енергетичний спектр $H_-(\alpha,x)$ запишемо

$$E_n=R_1(\alpha_1)+R_2(\alpha_2)+\ldots+R_n(\alpha_n). \qquad (2.7.10)$$

На рис. 7 зображена ітераційна процедура

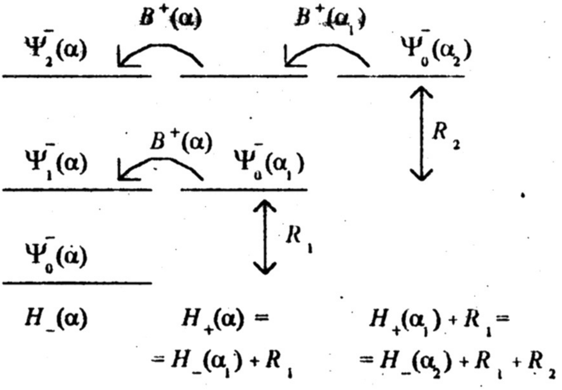

Рис. 7. Енергетичні спектри гамільтоніанів, які виникають внаслідок ітераційної процедури. Стрілками зображена дія операторів.

Цей рисунок допомагає написати вирази для хвильових функцій

$$\Psi_1^{-}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{R_1}} B^{+}(\alpha) \Psi_0^{-}(\alpha_1),$$

$$\Psi_2^{-}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{R_1 + R_2}} B^{+}(\alpha) \frac{1}{\sqrt{R_2}} B^{+}(\alpha_1) \Psi_0^{-}(\alpha_2), \tag{2.7.11}$$

$$\Psi_n^{-}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{R_1 + \ldots + R_n}} B^{+}(\alpha) \frac{1}{\sqrt{R_2 + \ldots + R_n}} B^{+}(\alpha_1) \ldots \frac{1}{\sqrt{R_n}} B^{+}(\alpha_{n-1}) \Psi_0^{-}(\alpha_n).$$

Хвильова функція $\Psi_0^{-}(\alpha_n)$ визначається рівнянням

$$B^{-}(\alpha_n, x) \Psi_0^{-}(\alpha_n) = 0,$$

або в явній формі

$$\left(\frac{d}{dx} + W(\alpha_n, x) \right) \Psi_0^{-}(\alpha_n) = 0.$$

Звідки

$$\Psi_0^-(\alpha_n) = c\exp\left(-\int_0^x W(\alpha_n,x)dx\right). \qquad (2.7.12)$$

Таким чином, у випадку формінваріантних потенціалів з допомогою суперсиметрії вдається чисто алгебраїчними методами знайти як енергетичний спектр, так і хвильові функції рівняння Шредінгера. У випадку гармонічного осцилятора (2.7.11) переходить у відому формулу

$$\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(b^+)^n\Psi_0 .$$

§ 8. Формінваріантні потенціали

Дослідимо рівняння на формінваріантні потенціали (2.7.8). На мові суперпотенціалу це рівняння запишеться у такій формі

$$W^2(\alpha,x)+W'(\alpha,x)=W^2(\alpha_1,x)-W'(\alpha_1,x)+2R(\alpha_1). \qquad (2.8.1)$$

Це складне нелінійне функціонально-диференціальне рівняння і знайти його загальний розв'язок видається неможливим. Знайдемо кілька часткових розв'язків.

1°. Шукаємо розв'язок у вигляді

$$W(\alpha,\beta,x)=\alpha f(x)+\beta. \qquad (2.8.2)$$

Рівняння (2.8.1) запишемо

$$\alpha^2 f^2+2\alpha\beta f+\beta^2+\alpha f' =$$

$$=\alpha_1^2 f^2+2\alpha_1\beta_1 f+\beta_1^2-\alpha_1 f'+2R(\alpha_1,\beta_1).$$

З цього рівняння ми маємо знайти $\alpha_1=\alpha_1(\alpha,\beta)$, $\beta_1=\beta_1(\alpha,\beta)$ і $R_1=R_1(\alpha_1,\beta_1)$. Тобто маємо одержати не більше, ніж три рівняння для параметрів α_1, β_1 і адетивної постійної R_1. Це досягається вибором

$$f'=Af^2+Bf+C, \qquad (2.8.3)$$

де $A, B, C = \mathrm{const}$. Прирівнюючи коефіцієнти біля f^2 f і 1, одержимо три рівняння з яких можемо знайти α_1, β_1, R_1. Таким чином, (2.8.2) і (2.8.3) визначають один із розв'язків (2.7.13).

2°.
$$W(x) = \alpha f(x) + \beta / f(x). \qquad (2.8.4)$$

Провівши аналіз, аналогічний першому випадку, знаходимо, що $f(x)$ повинна задовільняти рівняння

$$f' = Af^2 + B. \qquad (2.8.5)$$

3°.
$$W = \frac{\beta + \alpha\sqrt{pf^2 + q}}{f}, \qquad (2.8.6)$$

де

$$f' = \sqrt{pf^2 + q}.$$

Відмітимо, що цей розв'язок може бути записаний також у наступній формі

$$W = \frac{\alpha\varphi + \beta}{\sqrt{p\varphi^2 + q}}, \qquad (2.8.7)$$

де

$$\varphi' = \sqrt{p\varphi^2 + q}.$$

У цьому легко переконатись, зробивши заміну $\varphi = \sqrt{pf^2 + q}$.

4°. Три розв'язки, наведені вище, можуть бути об'єднані в один

$$W = \frac{\alpha f + \beta}{\sqrt{pf^2 + gf + q}}. \qquad (2.8.8)$$

Знайдемо рівняння, якому повинна задовільняти в цьому випадку f. Для цього розрахуємо W^2 і W', що входять у рівняння (2.7.13)

$$W^2 = \frac{\alpha^2 f^2 + 2\alpha\beta f + \beta^2}{p f^2 + g f + q},$$

$$W' = \frac{f(\alpha g + 2\beta p) - (2\alpha q - \beta g)}{p f^2 + g f + q} \times \frac{f'}{\sqrt{p f^2 + g f + q}}.$$

Для того, щоб одержати не більше трьох рівнянь для α_1, β_1, R_1 із структури W^2 і W' видно, що f повинна бути розв'язком рівняння

$$f' = \mathrm{P}(f)\sqrt{p f^2 + g f + q}, \qquad (2.8.10)$$

де $\mathrm{P}(f)$ поліном по f, такий, щоб

$$(f(\alpha g + 2\beta p) - (2\alpha q - \beta g))\mathrm{P}(f) = \mathrm{P}_2(f),$$

де $\mathrm{P}_2(f)$ — поліном не вище другого степеня.

Рівняння формінваріантності набирає вигляду

$$(\alpha f + \beta)^2 + \big(f(\alpha g + 2\beta p) - (2\alpha q - \beta g)\big)\mathrm{P}(f) =$$

$$= (\alpha_1 f + \beta_1)^2 - \big(f(\alpha_1 g + 2\beta_1 p) - (2\alpha_1 q - \beta_1 g)\big)\mathrm{P}(f) +$$

$$+ 2R_1(p f^2 + g f + q).$$

Прирівнявши коефіцієнти біля f^2, f, 1, одержимо три рівняння для α_1, β_1, R_1.

Значенням $p = g = 0,\ q = 1$ відповідає розв'язок 1°,
$p = q = 0,\ g = 1$ відповідає розв'язок 2°,
$g = 0$ відповідає розв'язок 3°.

§ 9. Суперсиметрична квантова механіка з двома бозонними ступенями вільності

У цьому параграфі ми узагальнимо суперсиметричну квантову механіку на випадок кількох бозонних ступенів вільності. Поставимо питання: скільки бозонних ступенів вільності може відповідати одній ферміонній при збереженні діагональності квадратичної за імпульсами частини гамільтоніану

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2) + \ldots \qquad (2.9.1)$$

Узагальнимо формулу (2.3.1) на випадок n бозонних ступенів вільності

$$B^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^* p_\alpha + W^*(x_1,..,x_n)\right), \qquad (2.9.2)$$

$$B^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha p_\alpha + W^*(x_1,..,x_n)\right).$$

Гамільтоніан задається фомулою (2.2.10). Розрахуємо

$$\{B^-, B^+\} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} c_\alpha c_\beta^* p_\alpha p_\beta + WW^* + (\text{лінійні доданки по } p) = \qquad (2.9.3)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}(c_\alpha c_\beta^* + c_\alpha^* c_\beta) p_\alpha p_\beta + \ldots,$$

$$[B^-, B^+] = -\frac{i}{2}\left(-\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \frac{\partial W^*}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^* \frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right).$$

За умови, щоб гамільтоніан за імпульсами мав форму (2.9.1) для коефіцієнтів $c_1,\ldots,c_n$ одержуємо рівняння

$$c_\alpha c_\beta^* + c_\alpha^* c_\beta = 2\delta_{\alpha,\beta}, \qquad (2.9.4)$$

де

$$c_\alpha = a_\alpha + i\, b_\alpha.$$

Рівняння (2.9.4) можемо переписати

$$a_\alpha a_\beta + b_\alpha b_\beta = \delta_{\alpha,\beta}. \qquad (2.9.5)$$

Введемо вектори $\bar{a}_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$, тоді (2.9.5) є скалярним добутком векторів

$$\bar{a}_\alpha \bar{a}_\beta = \delta_{\alpha,\beta}.$$

Оскільки $\bar{a}_\alpha$ двокомпонентний вектор, то існує тільки два взаємоортогональних вектори. Тобто $\alpha = 1,2$. Виберемо

$$\vec{a}_1 = (1,0), \qquad \vec{a}_1 = (0,1),$$

або

$$c_1 = 1, \qquad c_2 = i \tag{2.9.6}$$

Тоді (2.9.2) запишемо

$$B^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_1 - ip_2 + W^*(x_1, x_2)\right), \tag{2.9.7}$$

$$B^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_1 + ip_2 + W(x_1, x_2)\right),$$

де

$$W = W_1 + iW_2.$$

Виходячи із (2.9.7) знайдемо гамільтоніан (2.2.10). Для цього розрахуємо

$$\{B^-, B^+\} = (p_1 + W_1)^2 + (p_2 + W_2)^2, \tag{2.9.8}$$

$$[B^-, B^+] = \frac{1}{2}\left[p_1 + W_1, ip_2 + W_2\right] - \frac{1}{2}\left[i(p_1 + W_1), p_2 + W_2\right] = \tag{2.9.9}$$

$$= i\left[p_1 + W_1, p_2 + W_2\right] = \left(\frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2}\right).$$

Гамільтоніан тоді запишемо

$$H = \frac{1}{2}\left[(p_1 + W_1)^2, (p_2 + W_2)^2\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2}\right)\sigma_z. \tag{2.9.10}$$

Цікаво, що після перепозначення $W_1 = -eA_1$, $W_2 = -eA_2$ (2.9.10) переходить у гамільтоніан Паулі. Справді, якщо під A_1 і A_2 розуміти компоненти векторного потенціалу, одержимо

$$H = \frac{1}{2}\left[(p_1 - eA_1) + (p_2 - eA_2)^2\right] - \frac{1}{2}eB_z\sigma_z, \tag{2.9.11}$$

де $B_z = \partial A_1 / \partial x_2 - \partial A_2 / \partial x_1$, z — компонента магнітного поля. Тут e — заряд електрона, швидкість світла $c = 1$.

Таким чином, узагальнення суперсиметричної квантової механіки на випадок кількох бозонних ступенів вільності привело нас до двовимірного гамільтоніану Паулі.

III. Суперсиметрія в деяких задачах квантової механіки

§ 1. Електрон у магнітному полі. Двовимірний випадок

Ми вже знаємо про те, що двовимірний гамільтоніан Паулі володіє суперсиметрією. Розглянемо тепер задачу про рух електрона в магнітному полі більш детально. Запишемо гамільтоніан Паулі зі всіма розмірними константами

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - g\frac{e\hbar}{2mc}\left(\vec{S}\,\vec{B}\right), \tag{3.1.1}$$

де $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ — магнітне поле.

Скалярний потенціал рівний нулю, тобто рух відбувається тільки в магнітному полі. Надамо далі $m = 1$, $\hbar = 1$, $c = 1$. Одержимо

$$H = \frac{1}{2}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 - \frac{1}{4}ge\left(\vec{\sigma}\,\vec{B}\right). \tag{3.1.2}$$

Для електрона g-фактор рівний 2. Відмітимо, що тільки в цьому випадку, коли $g = 2$, гамільтоніан (3.1.2) може володіти суперсиметрією. Для двовимірного випадку (3.1.2) буде збігатися із (2.9.11).

У випадку, коли $g = 2$, гамільтоніан Паулі, який описує рух електрона в магнітному полі, можна записати у вигляді

$$H = Q^2, \tag{3.1.3}$$

де

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\sigma}\,\vec{\pi}), \tag{3.1.4}$$

$$\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}.$$

Вигляд гамільтоніану (3.1.3) говорить про те, що дана система може володіти суперсиметрією. Для цього потрібно, щоб існував оператор T із властивостями:

$$\{T, Q\} = 0, \qquad T^2 = 1.$$

Існують два широких класи полів, коли можна побудувати алгебру суперсиметрії. Це довільне двовимірне поле, під яким ми розуміємо:

$$B_x = B_y = 0, \qquad B_z = B(x,y)$$

і тривимірне поле $\vec{B}(x,y,z)$ з певною просторовою симетрією[10].

Розглянемо двовимірне поле. Векторний потенціал у цьому випадку можна вибрати наступним чином

$$A_x = A_x(x,y), \quad A_y = A_y(x,y), \quad A_z = 0. \tag{3.1.5}$$

Тоді

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \tag{3.1.6}$$

Запишемо гамільтоніан

$$H = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\pi_x + \sigma_y\pi_y + \sigma_z\pi_z\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\sigma_x\pi_x + \sigma_y\pi_y\right)^2 + p_z^2\right]. \tag{3.1.7}$$

Тут ми скористались властивостями матриць Паулі $\{\sigma_\alpha, \sigma_\beta\} = 2\delta_{\alpha,\beta}$. з (3.1.7) видно, що вздовж σ_z електрон рухається як вільна частинка. Розв'язок стаціонарного рівняння Шредінгера шукаємо у вигляді

$$\Psi(x,y,z) = e^{ikz}\Psi(x,y).$$

Для $\Psi(x,y)$ одержуємо рівняння

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_x\pi_x + \sigma_y\pi_y\right)^2\Psi = \left(E - \frac{k^2}{2}\right)\Psi. \tag{3.1.8}$$

Будемо розглядати далі двовимірний гамільтоніан

$$H = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\pi_x + \sigma_y\pi_y\right)^2 = Q^2, \tag{3.1.9}$$

де

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_x\pi_x + \sigma_y\pi_y\right). \tag{3.1.10}$$

Легко побачити, що роль оператора T у цьому випадку виконує σ_z, $T=\sigma_z$. Справді, оскільки

$$\{\sigma_z,\sigma_x\}=\{\sigma_z,\sigma_y\}=0,$$

то $\{\sigma_z,Q\}=0$ і крім того $\sigma_z^2=1$.

Запишемо суперзаряди

$$Q_1=Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_x\pi_x+\sigma_y\pi_y\right), \tag{3.1.11}$$

$$Q_2=iQ\sigma_z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_y\pi_x-\sigma_x\pi_y\right),$$

і генератори суперсиметрії

$$Q_+=\frac{1}{2}(Q_1+iQ_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^-\sigma^+, \tag{3.1.12}$$

$$Q_-=\frac{1}{2}(Q_1-iQ_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^+\sigma^-,$$

де

$$\pi^\pm=\pi_x\pm i\pi_y.$$

Корисно порівняти одержані вирази з відповідними формулами § 2 розділу 2.

Запишемо гамільтоніан Паулі у традиційній для суперсиметричної квантової механіки формі

$$H=\{Q_+,Q_-\}=\begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix},$$

де суперсиметричні партнери на мові операторів $\pi_\pm$ набувають факторизованого вигляду

$$H_+=\frac{1}{2}\pi^-\pi^+, \tag{3.1.13}$$

$$H_-=\frac{1}{2}\pi^+\pi^-. \tag{3.1.14}$$

§ 2. Основний стан електрона у магнітному полі. Двовимірний випадок

Основний стан визначається із рівняння $H\Psi_0 = 0$. Оскільки $[\sigma_z, H] = 0$, то можемо вибрати хвильові функції, які були б власними функціями H і σ_z

$$\Psi_0^{\uparrow} = \begin{pmatrix} \Psi^{+} \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \Psi_0^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi^{-} \end{pmatrix}; \tag{3.2.1}$$

$\Psi^{\pm}$ задовільняють рівняння

$$\pi^{-}\pi^{+}\Psi^{+} = 0, \tag{3.2.2}$$

$$\pi^{+}\pi^{-}\Psi^{-} = 0. \tag{3.2.3}$$

Із (3.2.2) і (3.2.3) як наслідок факторизації одержуємо рівняння

$$\pi^{+}\Psi^{+} = 0, \tag{3.2.4}$$

$$\pi^{-}\Psi^{-} = 0. \tag{3.2.5}$$

Рівняння (3.2.4), (3.2.5) зручно записати в комплексних змінних $z = x + iy$

$$\pi^{+} = -2i\frac{\partial}{\partial z^{*}} - eA, \tag{3.2.6}$$

$$\pi^{-} = -2i\frac{\partial}{\partial z^{*}} - eA^{*}, \tag{3.2.7}$$

де

$$A = A_x + iA_y.$$

Досліджимо рівняння (3.2.5), яке в комплексних змінних набуває вигляду

$$\left(-2i\frac{\partial}{\partial z} - eA^{*}\right)\Psi^{-} = 0. \tag{3.2.8}$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді

$$\Psi^{-} = c(z^{*})^{n}e^{-\varphi}, \tag{3.2.9}$$

де n — довільне ціле число, φ задовільняє рівняння

$$2i\frac{\partial\varphi}{\partial z} - eA^{*} = 0. \qquad (3.2.10)$$

Перетворимо рівняння (3.2.10). Подієმо на це рівняння оператором $\dfrac{\partial}{\partial z^{*}}$

$$2i\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^{*}\partial z} - e\frac{\partial A^{*}}{\partial z^{*}} = 0. \qquad (3.2.11)$$

У декартових змінних

$$4\frac{\partial^2}{\partial z^{*}\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad (3.2.12)$$

$$\frac{\partial A^{*}}{\partial z^{*}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right).$$

Виберемо калібровку $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, тоді

$$\frac{\partial A^{*}}{\partial z^{*}} = -\frac{i}{2}B(x,y). \qquad (3.2.13)$$

На основі (3.2.12) і (3.2.13) рівняння для φ набуває вигляду

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = |e|B(x,y). \qquad (3.2.14)$$

Проаналізуємо розв'язок цього рівняння. Будемо вважати, що магнітне поле зосереджене в області біля початку координат, повний потік магнітного поля через площину xy є скінчений

$$\int dxdyB(x,y) = \Phi > 0. \qquad (3.2.15)$$

Дослідимо поведінку φ на великих віддалях від початку координат. Коли спостерігати за магнітним полем з великих віддалей, то внаслідок того, що поле зосереджене біля початку координат, можемо записати

$$B(x,y) = \Phi\delta(x)\delta(y), \qquad (3.2.16)$$

де $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака

Розв'язок рівняння (3.2.14) із $B(x,y)$, яке задається формулою (3.2.16) має вигляд

$$\varphi = \frac{\Phi}{\Phi_0}\ln\rho, \qquad \rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2}, \tag{3.2.17}$$

де $\Phi_0 = 2\pi/|e|$ — квант магнітного потоку.

Хвильову функцію на великих ρ запишемо

$$\Psi^- = c(z^*)^n |z|^{-\Phi/\Phi_0}, \qquad |z| \to \infty. \tag{3.2.18}$$

За умови збіжності інтеграла нормування на великих ρ знаходимо обмеження на n. На великих ρ інтеграл нормування запишеться

$$2\pi\int_a^\infty \rho\rho^{2n}\rho^{-2\Phi/\Phi_0}d\rho = 2\pi\int_a^\infty \rho^{2n-2\Phi/\Phi_0+1}d\rho,$$

де a — довільне, достатньо велике число

Цей інтеграл збігається при

$$n < \frac{\Phi}{\Phi_0} - 1. \tag{3.2.19}$$

Поведінка Ψ^- на малих ρ визначається $(z^*)^n$. Інтеграл нормування при $\rho \to 0$ запишемо

$$2\pi\int_0^a \rho\rho^{2n}d\rho = 2\pi\int_0^a \rho^{2n+1}d\rho, \tag{3.2.20}$$

де a — достатньо мале число. Інтеграл (3.2.20) збігається, коли $n > -1$ або $n \geq 0$.

Таким чином,

$$0 \leq n < \frac{\Phi}{\Phi_0} - 1. \tag{3.2.21}$$

Цікаво зазначити, що хвильова функція основного стану (3.2.9) є вироджена по n. Кратність виродження N_0 знаходимо із умови (3.2.21)

$$N_0 = n_{\max} + 1 = \begin{cases} \Phi/\Phi_0 - 1, & \Phi \text{ кратне } \Phi_0\,, \\ \left[\Phi/\Phi_0\right], & \Phi \text{ не кратне } \Phi_0\,, \end{cases} \qquad (3.2.22)$$

де [...] — означає цілу частину числа.

Залишилось дослідити рівняння

$$\pi^+\Psi^+ = 0. \qquad (3.2.23)$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді

$$\Psi^+ = z^n e^{\varphi}. \qquad (3.2.24)$$

Для φ одержуємо рівняння (3.2.14), розв'язок якого ми вже дослідили. Оскільки тут φ входить в експоненту (3.2.24) з додатнім знаком, то для $\Phi > 0$ Ψ^+ не може бути пронормована.

Таким чином, для $\Phi > 0$ існує нормований розв'язок Ψ^- і не існує Ψ^+, і навпаки: для $i\Phi < 0$ існує нормований розв'язок Ψ^+ і не існує Ψ^-. Ще раз наголосимо на тому, що основний стан електрона у двовимірному магнітному полі є вироджений. Кратність виродження визначається повним потоком магнітного поля (3.2.22).

§ 3. Електрон у тривимірному магнітному полі

У тривимірному випадку для довільного поля не існує оператора T, який антикомутує із Q. Однак для поля певної парності такий оператор можна знайти.

1°. Розглянемо випадок, коли $\vec{A}(-\vec{r}) = -\vec{A}(\vec{r})$. Магнітне поле в цьому випадку є парна функція $\vec{r}$.

Роль оператора T виконує оператор інверсії. Справді, оскільки $\{I, P_\alpha\} = 0$ і $\{I, A_\alpha\} = 0$, то $\{I, Q\} = 0$. Тому ми можемо побудувати два суперзаряди $Q_1 = Q$ і $Q_2 = iQI$. Таким чином, система володіє суперсиметрією.

2°. Розглянемо другий випадок $\vec{A}(-\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r})$. Магнітне поле є непарна функція $\vec{B}(-\vec{r}) = -\vec{B}(\vec{r})$. Прикладом може бути магнітне поле монополя.

Оператор T має вигляд

$$T = i\sigma_2 I R, \qquad (3.3.1)$$

де I — оператор інверсії, R — оператор комплексного спряження, який діє у такий спосіб

$$R\Psi(\vec{r}) = \Psi^*(\vec{r}). \qquad (3.3.2)$$

Переконаємось у тому, що T антикомутує із

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_1(p_1 - eA_1) + \sigma_2(p_1 - eA_2) + \sigma_3(p_3 - eA_3)\right).$$

Розрахуємо антикомутатор з першим із доданків Q:

$$\begin{aligned}
\{T, \sigma_1 p_1\} &= i\sigma_2 I R\sigma_1 p_1 + \sigma_1 p_1 i\sigma_2 I R = \\
&= i\sigma_2 I R\sigma_1 p_1 + i\sigma_1\sigma_2 I R p_1 = \\
&= i\sigma_2 I R\sigma_1 p_1 - i\sigma_2\sigma_1 I R p_1 = \\
&= i\sigma_2 I R\sigma_1 p_1 - i\sigma_2 I R\sigma_1 p_1 = 0, \\
\{T, \sigma_1 A_1\} &= i\sigma_2 I R\sigma_1 A_1 - \sigma_1 A_1 i\sigma_2 I R = \\
&= i\sigma_2 I R\sigma_1 A_1 + \sigma_1 i\sigma_2 I R A_1 = \\
&= i\sigma_2 I R\sigma_1 A_1 - i\sigma_2 I \sigma_1 R A_1 = 0.
\end{aligned}$$

Тому

$$\{T, \sigma_1(p_1 - eA_1)\} = 0.$$

Аналогічно переконуємось, що T антикомутує також із другим і третім доданком Q. Отже, T антикомутує із Q.

Оператор T є антилінійним. Це є результатом того, що він містить операцію комплексного спряження. Цей оператор має властивості оператора T, введеного в кінці § 1 розділу 1:

$$\{T, i\} = 0,$$

$$T^2 = i\sigma_2 I R\, i\sigma_2 I R = i\sigma_2\, i\sigma_2\, I R I R = -1.$$

Стандартним способом будуємо суперзаряди. Тільки в цьому випадку $Q_2 = iQT$ є антилінійний оператор $\{Q_2, i\} = 0$.

Таким чином рух в парному магнітному полі є суперсиметричним. Зокрема, суперсиметричним є рух електрона в полі монополя.

§ 4. Суперсиметрія рівняння Дірака

Розглянемо гамільтоніан Дірака у двовимірному просторі

$$H_D = \alpha_x\pi_x + \alpha_y\pi_y + \beta m, \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

$\alpha_x, \alpha_y, \beta$ — матриці Дірака.

Для того, щоб побудувати суперзаряди введемо матриці

$$\Sigma_\alpha = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha & 0 \\ 0 & \sigma_\alpha \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(3.4.2)}$$

які задовольняють співвідношенням

$$\alpha_i\Sigma_j = \Sigma_i\alpha_j = i\varepsilon^{ij\gamma}\alpha_\gamma, \qquad \textbf{(3.4.3)}$$

$$[\alpha_i, \Sigma_j] = 2i\varepsilon^{ij\gamma}\alpha_\gamma,$$

$$[\beta, \Sigma_j] = 0,$$

$$\Sigma_i\Sigma_j = i\varepsilon^{ij\gamma}\Sigma_\gamma,$$

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = 2i\varepsilon^{ij\gamma}\Sigma_\gamma.$$

Прямим розрахунком можемо перекопатись, що існують два оператори, які комутують із H_D

$$[H_D, Q_i] = 0, \qquad \textbf{(3.4.4)}$$

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Sigma_x\pi_x + \Sigma_y\pi_y\right), \qquad \textbf{(3.4.5)}$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta\left(\Sigma_y\pi_x - \Sigma_x\pi_y\right),$$

Q_1 і Q_2 є узагальнення суперзарядів (3.1.11), введених для гамільтоніану Паулі.

Наявність двох операторів Q_1 і Q_2, які комутують із гамільтоніаном, і те, що $[Q_1,Q_2]\neq 0$, говорить про те, що спектр є двократновироджений. Але Q_1, Q_2 і H_D не утворюють супералгебри, бо H_D не виражається через суперзаряди. Для існування суперсиметрії потрібно, щоб гамільтоніан був рівний $Q_1^2=Q_2^2$.

Розрахуємо $\{Q_i,Q_j\}$. Якщо врахувати, що властивості матриць Σ збігаються із властивостями σ і те, що β комутує із Σ, одержуємо

$$Q_1^2=\frac{1}{2}\left(\pi_x^2+\pi_y^2-e\Sigma_z B(x,y)\right), \tag{3.4.5}$$

$$Q_2^2=\frac{1}{2}\left(\Sigma_y\pi_y-\Sigma_x\pi_x\right)^2=\frac{1}{2}\left(\pi_x^2+\pi_y^2-e\Sigma_z B(x,y)\right)=Q_1^2,$$

$$\{Q_1,Q_2\}=0.$$

З іншого боку

$$H_D^2=p_1^2+p_2^2-e\Sigma_z B(x,y)+m^2. \tag{3.4.6}$$

Введемо

$$H=\frac{1}{2}\left(H_D^2-m^2\right).$$

Тоді, порівнюючи (3.4.5) і (3.4.6), можемо записати

$$\{Q_i,Q_j\}=2\delta_{i,j}H.$$

Таким чином, Q_1, Q_2 і H утворюють алгебру суперсиметрії.

§ 5. Суперсиметрія кулонівського поля

Розглянемо радіальне рівняння Шредінгера атома водню, яке запишемо у вигляді

$$H\,R(\rho)=E\,R(\rho), \tag{3.5.1}$$

де

$$H=\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{l(l+1)}{\rho^2}-\frac{2}{\rho}\right).$$

Це одновимірне рівняння, визначене на півосі $\rho>0$. Радіальна хвильова функція для зв'язаних станів задовільняє граничним умовам $R(0)=0$ і $R(\rho)\to 0$ при $\rho\to\infty$.

Радіальне рівняння Шредінгера (3.5.1) можна факторизувати. Виберемо суперпотенціал у вигляді

$$W = \alpha/\rho + \beta, \tag{3.5.2}$$

$$U_- = W^2 - W' = \frac{\alpha^2}{\rho^2} + \frac{2\alpha\beta}{\rho} + \beta^2 + \frac{\alpha}{\rho^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\rho^2} + \frac{2\alpha\beta}{\rho} + \beta^2, \tag{3.5.3}$$

α, β і енергію факторизації ε знайдемо з умови, щоб

$$H = H_- + \varepsilon = B^+ B^- + \varepsilon,$$

або

$$\frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} = U_- + \varepsilon.$$

Для α, β і ε одержуємо рівняння

$$\alpha(\alpha+1) = l(l+1), \tag{3.5.4}$$

$$2\alpha\beta = -2,$$

$$\varepsilon = -\beta^2.$$

Існують два розв'язки

1°. $\alpha = l, \quad \beta = -1/l, \quad \varepsilon = -1/l^2.$

Тоді

$$W = \frac{l}{\rho} - \frac{1}{l}.$$

$W \xrightarrow[\rho\to\infty]{} -1/l$, тому для H_- у цьому випадку не існує стану з нульовою енергією

2°. $\alpha = -l-1, \quad \beta = 1/(l+1), \quad \varepsilon = -1/(l+1)^2.$

Тоді

$$W = -\frac{l+1}{\rho} + \frac{1}{l+1}. \tag{3.5.5}$$

Тут $W \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 1/(l+1)$ і H_- має власний стан з нульовою енергією. Зауважимо, що поведінка W при $\rho\to-\infty$ є не важлива, оскільки рівняння визначене на додатній півосі. Поведінка W в околі $\rho=0$ повинна бути така, щоб забезпечити граничну умову $R(0)=0$.

Виберемо другий випадок із суперпотенціалом, який задається формулою (3.5.5). Гамільтоніан (3.5.1) запишемо у факторизованому вигляді

$$H = H_- + \varepsilon = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\rho^2} + W^2 - W'\right) + \varepsilon = B^+B^- + \varepsilon, \tag{3.5.6}$$

де

$$B^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mp\frac{d}{d\rho} + W(\rho)\right),$$

$W(\rho)$ визначається за формулою (3.5.5).

До H_- можемо побудувати суперсиметричного партнера

$$H_+ = B^-B^+ = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\rho^2} + W^2 + W'\right) = \tag{3.5.7}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{(l+1)(l+2)}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} + \frac{1}{(l+1)^2}\right).$$

Для порівняння випишемо в явному вигляді H_-

$$H_- = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} + \frac{1}{(l+1)^2}\right). \tag{3.5.8}$$

Порівнюючи (3.5.8) і (3.5.7) бачимо, що H_- описує рух із орбітальним моментом рівним l, тоді як H_+ описує рух із орбітальним моментом рівним $l+1$. Тому потенціальні енергії $U_\pm$ відрізняються тільки значенням параметрів і задовільняють таким чином умову формінваріантності.

Виберемо для прикладу $l=0$. Тоді H_- описує стани ns (де $n\geq 1$), а $H_+ - np$ (де $n\geq 2$) стани атома водню. Тут важливо відмітити, що в H_+ і H_- входить одна і та сама константа $1/(l+1)^2$. Тому спектри H з орбітальним моментом l і $l+1$ збігаються. Енергетичні рівні ns і np станів для $n\geq 2$ збігаються і ми приходимо до суперсиметричного спектра із двократним виродженням.

Факторизація (3.5.6) дає можливість легко знайти хвильову функцію R_0 і енергію основного стану E_0 гамільтоніану H

$$E_0 = \varepsilon = -1\Big/(l+1)^2,$$

R_0 визначається рівнянням

$$B^- R_0 = 0.$$

Звідки

$$R_0 = c\rho^{l+1}e^{-\rho/(l+1)}. \qquad (3.5.10)$$

E_0 і R_0 — це енергія і хвильова функція стану з орбітальним моментом l і головним квантовим числом, яке рівне найменшому значенню $n=l+1$ при фіксованому l.

Використовуючи процедуру, описану в § 7 розділу II, можемо знайти всі хвильові функції і спектр радіального рівняння Шредінгера. Таким чином, суперсиметрія дає можливість алгебраїчними методами, без розв'язування радіального рівняння Шредінгера для атома водню, знайти його спектр і хвильові функції.

§ 6. Суперсиметрія ізотропного осцилятора

У цьому параграфі ми повторимо для ізотропного осцилятора те, що зроблено для кулонівського поля в попередньому параграфі. Розглянемо радіальне рівняння Шредінгера для тривимірного ізотропного осцилятора

$$HR(\rho) = ER(\rho), \qquad \rho > 0,$$

де

$$H = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \rho^2\right). \qquad (3.6.1)$$

Факторизацію цього гамільтоніану можна здійснити з допомогою суперпотенціалу

$$W = \frac{\alpha}{\rho} + \beta\rho.$$

Розрахуємо

$$U_- = W^2 - W' = \frac{\alpha^2}{\rho^2} + 2\alpha\beta + \beta^2\rho^2 + \frac{\alpha}{\rho^2} - \beta =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\rho^2} + 2\alpha\beta + \beta^2\rho^2 - \beta.$$

α, β і ε знаходимо із умови факторизації $H = B^+B^- + \varepsilon$:

$$\alpha(\alpha+1) = l(l+1),$$

$$\beta^2 = 1,$$

$$\varepsilon = -2\alpha\beta + \beta.$$

Виберемо розв'язок

$$\alpha = -l - 1, \qquad \beta = 1,$$

$$\varepsilon = 2\left(l + 3/2\right).$$

Таким чином,

$$W = -\frac{l+1}{\rho} + \rho, \qquad (3.6.2)$$

$$H_- = B^+B^- = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \rho^2 - 2\left(l + 1/2\right)\right),$$

$$H_+ = B^-B^+ = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{(l+1)(l+2)}{\rho^2} + \rho^2 - 2\left(l + 3/2\right)\right),$$

$$B^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mp\frac{d^2}{d\rho^2}+W(\rho)\right).$$

H_- описує рух із орбітальним моментом l, а H_+ — із $l+1$. На відміну від кулонівської задачі в H_- і H_+ для гармонічного осцилятора входять різні константи $-2(l+1/2)$ і $-2(l+3/2)$ відповідно. Тому, хоча спектри H_- і H_+ збігаються (за винятком найнижчого рівня), спектр H з орбітальним моментом l і $l+1$ не збігаються, а зміщені на константу.

Аналогічно як для кулонівського випадку, факторизація дає можливість знайти хвильову функцію і енергію основного стану вихідної задачі для фіксованого l:

$$E_0=\varepsilon=2\left(l+3/2\right),$$

$$R_0=c\rho^{l+1}e^{-\rho^2/2}.$$

З допомогою процедури, описаної в § 7 розділу II можемо знайти весь спектр і хвильові функції радіального рівняння Шредінгера для ізотропного осцилятора.

§ 7. Виділеність кулонівського потенціалу і потенціалу ізотропного осцилятора

Розглянемо рух частинки в сферично-симетричному потенціалі $U(\rho)$. Радіальне рівняння Шредінгера запишемо у вигляді

$$HR(\rho)=ER(\rho),$$

де

$$H_-=\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{l(l+1)}{\rho^2}+2U(\rho)\right). \qquad \textbf{(3.7.1)}$$

Дослідимо для яких $U(\rho)$ вдасться факторизувати гамільтоніан, тобто записати його у вигляді

$$H=H_-+\varepsilon=B^+B\ \ +\varepsilon. \qquad \textbf{(3.7.2)}$$

Виберемо суперпотенціал

$$W = -\frac{l+1}{\rho} + f(\rho).$$

Тоді

$$H_{-} = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\rho^2} + U_{-}(\rho)\right),$$

де

$$U_{-} = W^2 - W' = \frac{l(l+1)}{\rho^2} + f^2 - f' - \frac{2(l+1)}{\rho} f. \qquad (3.7.3)$$

На основі (3.7.2) для $f(\rho)$ одержуємо рівняння

$$2U(\rho) = f^2 - f' - \frac{2(l+1)}{\rho} f + \varepsilon. \qquad (3.7.4)$$

Для заданого $U(\rho)$ із (3.7.4) потрібно знайти f і ε. Зауважимо, що $U(\rho)$ не залежить від l. Тому розв'язок f має бути такий, щоб скоротити залежність від l у третьому доданку. Знайдемо кілька найпростіших функцій f і ε таких, щоб права частина (3.7.4) не залежала від l.

1°. $f = \beta$, де $\beta(l)$ — константа

$$2U(\rho) = \beta^2 - \frac{2(l+1)}{\rho}\beta + \varepsilon.$$

З умови незалежності $U(\rho)$ від l знаходимо

$$\beta = \frac{\beta_0}{l+1}, \qquad \varepsilon = \frac{\beta_0^2}{(l+1)^2}.$$

Тоді $U(\rho) = -\beta_0/\rho$, $\beta_0 = \text{const}$ незалежна від l.

Таким чином, ми приходимо до кулонівського потенціалу.

2°. $f = \beta\rho$,

$$2U(\rho) = \beta^2\rho^2 - \beta - 2(l+1)\beta + \varepsilon,$$

звідки

$$\varepsilon = \beta + 2(l+1)\beta = 2\beta(l+3/2).$$

Тоді

$$U(\rho) = \beta^2\rho^2/2,$$

де $\beta = \mathrm{const}$ незалежна від l.

Це випадок потенціалу гармонічного осцилятора.

3°. $f = \beta + \gamma/\rho,$

$$2U(\rho) = \frac{(\gamma - 2(l+1))\gamma}{\rho^2} + \frac{2\beta(\gamma - (l+1))}{\rho} + \beta^2 + \varepsilon,$$

γ, β і ε знаходимо із рівнянь

$$\gamma^2 - 2(l+1)\gamma = 2A,$$

$$2\beta(\gamma - (l+1)) = 2B,$$

$$\varepsilon = -\beta^2,$$

де A і B довільні константи, незалежні від l. Тоді

$$U(\rho) = \frac{A}{\rho^2} + \frac{B}{\rho}.$$

4°. $f = \beta\rho + \gamma/\rho,$

$$2U(\rho) = \beta^2\rho^2 + \frac{(\gamma(\gamma+1)) - (l+1)\gamma}{\rho^2} + 2\beta\gamma - 2(l+1)\beta + \varepsilon,$$

γ, β і ε знаходимо із рівняння

$$\gamma(\gamma+1) - 2(l+1)\gamma = 2A,$$

$$\beta^2 = B,$$

$$\varepsilon = 2(l+1)\beta - 2\beta\gamma,$$

A, B не залежать від l.

Тоді

$$U(\rho)=\frac{A}{\rho^2}+\frac{B\rho^2}{2}.$$

Зауважимо, що випадок 3° по суті є потенціал кулонівської взаємодії, а 4° — потенціал гармонічного осцилятора, оскільки доданок A/ρ^2 можна віднести до центробіжного доданка у гамільтоніані $l(l+1)/\rho^2$. Таким чином, вимога факторизації радіального рівняння Шредінгера привела нас до кулонівського потенціалу і потенціалу гармонічного осцилятора.

Література

1. Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П. Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 452.
2. Волков Д.В., Акулов В.П. Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 16. С. 621.
3. Wess J., Zumino B. Nucl. Phys., 1974. Vol. B70. P. 39.
4. Witten E. - Nucl. Phys. Ser. B. 1981. Vol. 185. P. 513.
5. Генденштейн Л.Э., Криве Н.В. УФН. 1985. Т. 146. Вып. 4. С. 553–590.
6. Физика за рубежом. Сер. Б. М.: Мир, 1988. 160 с.
7. Тернов И.М., Жуков В.Ч., Борисов А.В. Квантовые процессы в сильном внешнем поле. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 192 с.
8. Sukuman C.V. J. Phys.: Math. A. Gen. 1985. Vol. 18. P. 2917.
9. Генденштейн Л.Э. Письма в ЖЭТФ. Т. 38. Вып. 6. С. 299–302.
10. Генденштейн Л.Э. Ядерная физика. Т. 41. Вып. 1. 1985, С. 261–270.

Зміст

Володимир Михайлович Ткачук

СУПЕРСИМЕТРІЯ В КВАНТОВІЙ МЕХАНІЦІ

Текст лекцій

Поз. №58

Редактор Л. М. Макітринська

Підписано до друку 16.06.94. Формат 60×84/16. Папір друк. №3.
Друк. офсет. Умовн. друк. арк. 4,6. Обл.-вид. арк. 4,8.
Умовн.- фарб. відб. 4,6. Тираж 150. Зам. 311.
Машинно-офсетна лабораторія Львівського державного університету
ім. І. Франка.
290602, Львів, вул. Університетська 1.