Тому

$$\dddot{\mathbf{r}} \simeq -\omega_0^2 \dot{\mathbf{r}}, \tag{9.55}$$

і для сили отримуємо попередній результат (9.47).

9.3 Розсіяння електромагнітних хвиль точковим зарядом

Розглядатимемо плоску електромагнітну хвилю, яка розсіюється на точковому заряді e, див. рис. 9.1. За означенням переріз розсіяння

$$d\sigma = \frac{dI}{I_0}, \tag{9.56}$$

де I_0 — повна інтенсивність налітаючого потоку

$$I_0 = \frac{c}{4\pi} \big| [\mathbf{E}, \mathbf{B}] \big|, \tag{9.57}$$

а dI — інтенсивність частки розсіяного потоку в тілесному куті $d\Omega$ під кутом θ щодо початкового напрямку поширення хвилі:

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} a^2 \sin^2\theta \, d\Omega. \tag{9.58}$$

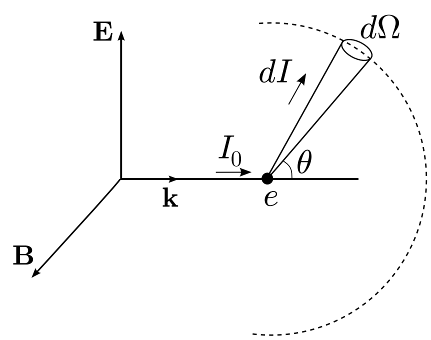

Рис. 9.1:

Для плоскої хвилі модулі векторів електричного й магнітного поля рівні, $E = B$, а самі вектори перпендикулярні, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Тому

$$I_0 = \frac{c}{4\pi} E^2, \qquad \text{де} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}. \tag{9.59}$$

Нехай заряд, на якому відбувається розсіяння, — це електрон в атомі. Для його опису можна використати таке рівняння руху:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2\mathbf{r} - m\gamma\dot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[\mathbf{v},\mathbf{B}]. \tag{9.60}$$

Тут враховано силу променистого тертя $\mathbf{f} = -m\gamma\dot{\mathbf{r}}$.

Для спрощення вважатимемо швидкість $\mathbf{v}$ малою порівняно зі швидкістю світла, $v/c \ll 1$, що дозволить нам знехтувати силою Лоренца. Крім того, вважатимемо довжину хвилі набагато більшою від розмірів атома, тобто $\mathbf{kr} \ll 1$ і відповідним доданком в експоненті також можна знехтувати. У результаті отримаємо:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \tag{9.61}$$

Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}. \tag{9.62}$$

Підставляючи його в (9.61), отримаємо:

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_0\,\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \tag{9.63}$$

Відповідно для прискорення $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$ матимемо:

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2\mathbf{r}_0 e^{-i\omega t} = \frac{e}{m}\omega^2\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{9.64}$$

Для розрахунку інтенсивності розсіяного потоку нам буде потрібне значення квадрата модуля прискорення:

$$a^2 = |\mathbf{a}(t)|^2 = \frac{e^2\omega^4}{m^2}\frac{E_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \tag{9.65}$$

де враховано, що $|e^{i\delta}| = 1$ для довільної фази δ.

Отже,

$$d\sigma = \frac{dI}{I_0} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\,d\Omega\frac{e^2\omega^4}{m^2}\frac{E_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}\frac{4\pi}{c}\frac{1}{E_0^2} \tag{9.66}$$

Остаточно для перерізу розсіяння маємо

$$d\sigma = \frac{e^4}{m^2c^4}\frac{\omega^4\sin^2\theta\,d\Omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{9.67}$$

Вводячи позначення

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} \tag{9.68}$$

— так званий ***класичний радіус електрона*** (розрахований з умови, що повна енергія електрона має лише електростатичну природу), для повного перерізу матимемо:

$$\sigma = \int d\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \tag{9.69}$$

Для вільного електрона відповідні вирази значно спрощуються (оскільки $\omega_0^2 = \gamma = 0$):

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta \, d\Omega \tag{9.70}$$

— ***формула Томсона***[1], а повний переріз

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2. \tag{9.71}$$

9.4 Природна ширина спектральних ліній

Спектр випромінювання осцилятора з частотою ω_0 з урахуванням сили променистого тертя розмивається. Розглянемо прості міркування, що дадуть змогу оцінити це розмиття.

Рівняння руху осцилятора з тертям:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0, \tag{9.72}$$

де $\gamma = \dfrac{2e^2\omega_0^2}{3c^3m}$, див. (9.42).

Його розв'язком є функція:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{-\gamma t/2}\cos\omega_0 t \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \tag{9.73}$$

$$\mathbf{r}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0, \tag{9.74}$$

[1] Джозеф Джон Томсон (Sir Joseph John "J. J." Thomson, 18.XII.1856–30.VII.1940) — британський фізик, лауреат Нобелівської премії 1906 р.