що дає очікуване співвідношення: $\mathbf{E}_1 = [\mathbf{n}, \mathbf{B}_1]$.

Тепер пригадаємо умови, за яких отримано ці результати. Якщо позначити характерні розміри системи як L, то відстань від точки спостереження до системи — велика, тобто $r \gg L$, і водночас довжина хвилі значно перевищує розміри системи: $\lambda \gg L$.

Співвідношення між величинами квазістатичного доданка $\mathbf{B}_0$ у магнітному полі та його випромінювальної частини $\mathbf{B}_1$ оцінимо так:

$$\frac{B_1}{B_0} = \left| \frac{\frac{1}{c^2 r}[\ddot{\mathbf{d}}, \mathbf{n}]}{\frac{1}{c r^2}[\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{n}]} \right| = \frac{|\ddot{\mathbf{d}}| r}{|\dot{\mathbf{d}}| c}.$$

Якщо $\mathbf{d} \sim e^{i\omega(t - r/c)}$, то

$$\frac{B_1}{B_0} \simeq \frac{\omega^2 r}{\omega c} \simeq \frac{r}{\lambda}. \tag{10.23}$$

Отже, при $r \ll \lambda$ співвідношення між величинами полів буде $B_1 \ll B_0$, і таку область простору називають ***близькою зоною***. Натомість при $r \gg \lambda$ маємо $B_1 \gg B_0$, тобто випромінювальна частина суттєво переважає, і таку область простору називають ***хвильовою зоною***.

10.2 Дипольне випромінювання

Об'ємна густина потоку енергії, яку випромінює система заряджених частинок, визначається вектором

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1]. \tag{10.24}$$

Інтенсивність випромінювання в тілесний кут $d\Omega$ на відстані r, як і раніше, буде дорівнювати:

$$dI = |\mathbf{S}| r^2 \, d\Omega. \tag{10.25}$$

З метою її розрахунку скористаємося виразами для полів випромінювання у дипольному наближенні:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}, \mathbf{n}]}{c^2 r}, \tag{10.26}$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{[\mathbf{n}, [\ddot{\mathbf{d}}, \mathbf{n}]]}{c^2 r} = [\mathbf{n}, \mathbf{B}_1]. \tag{10.27}$$

Якщо кут між векторами $\ddot{\mathbf{d}}$ і $\mathbf{n}$ позначити θ, то матимемо:

$$dI = \frac{c}{4\pi}\frac{1}{c^4 r^2}|\ddot{\mathbf{d}}|^2 r^2 \sin^2\theta\, d\Omega, \tag{10.28}$$

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2 \sin^2\theta, \tag{10.29}$$

а для повної ***інтенсивності дипольного випромінювання***:

$$I = -\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2\Big(t - \frac{r}{c}\Big). \tag{10.30}$$

Легко зауважити, що отриманий вираз корелює з результатом для інтенсивності випромінювання точкового заряду. Справді,

$$\ddot{\mathbf{d}} = \sum_i e_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i e_i \mathbf{a}_i, \tag{10.31}$$

і у випадку одного заряду приходимо до формули (9.23).

Цікавим прикладом є система, у якій питомі заряди (відношення заряду до маси) всіх частинок однакові:

$$\frac{e_i}{m_i} = \text{const} \quad \text{для всіх } i. \tag{10.32}$$

Перетворимо вираз для дипольного моменту такої системи:

$$\mathbf{d} = \sum_i \frac{e_i}{m_i} m_i \mathbf{r}_i = \text{const}\sum_i m_i \mathbf{r}_i = \text{const}\cdot M\,\underbrace{\frac{\sum_i m_i\mathbf{r}_i}{M}}_{\mathbf{R}_{\text{ц.м.}}}. \tag{10.33}$$

У цьому виразі $M = \sum_i m_i$ — повна маса системи, а $\mathbf{R}_{\text{ц.м.}}$ — радіус-вектор центра мас. З механіки відомо, що координата центра мас з часом не змінюється або змінюється лінійно. Отже, $\ddot{\mathbf{R}}_{\text{ц.м.}} = 0$, а тому й $\ddot{\mathbf{d}} = 0$, і складається враження, що випромінювання немає. Насправді ж у системі частинок з однаковими питомими зарядами відсутнє лише дипольне випромінювання, і треба розглядати точніші наближення — так звані магнітне дипольне й електричне квадрупольне випромінювання.

10.3 Вище наближення для випромінювання

Розрахуємо інтенсивність випромінювання у вищих наближеннях. Для вектора $\mathbf{B}$ з використанням розкладу векторного потенціалу (10.14) маємо:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \left[\boldsymbol{\nabla}, \frac{1}{cr}\dot{\mathbf{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{cr}\left[\dot{\mathbf{m}}\left(t-\frac{r}{c}\right), \mathbf{n}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2c^2r}\ddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{2c^2r}\ddot{\mathcal{M}}_{ikl}\left(t-\frac{r}{c}\right)n_k n_l \mathbf{e}_i\right].$$

Виконуючи необхідні перетворення подібно до того, як це було зроблено в дипольному наближенні, для випромінювальної частини $\mathbf{B}_1$ (тобто доданків, пропорційних до $1/r$) маємо:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}, \mathbf{n}]}{c^2r} + \frac{[\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \ddot{\mathbf{m}}]]}{c^2r} + \frac{[\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}, \mathbf{n}]}{2c^3r} + \frac{1}{2c^3r}\dddot{\mathcal{M}}_{ijk}\varepsilon_{rsi}n_k n_l n_r \mathbf{e}_s. \quad (10.34)$$

Останній доданок, що відповідає квадрупольному магнітному випромінюванню, можна отримати так:

$$\mathbf{B}_{\mathrm{QM}} = \operatorname{rot}\left\{\frac{1}{2c^2r}\ddot{\mathcal{M}}_{ikl}\left(t-\frac{r}{c}\right)n_k n_l \mathbf{e}_i\right\} =$$
$$= \left[-\frac{\mathbf{n}}{c}, \frac{1}{2c^2r}\dddot{\mathcal{M}}_{ikl}n_k n_l \mathbf{e}_i\right] + \text{невипромінювальна частина.}$$

Розписуючи векторний добуток за допомогою символа Леві-Чівіти, матимемо:

$$\mathbf{B}_{\mathrm{QM}} = \frac{1}{2c^3r}\dddot{\mathcal{M}}_{ikl}\varepsilon_{rsi}n_k n_l n_r \mathbf{e}_s \quad (10.35)$$

Величина об'ємної густини потоку енерґії дорівнює

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi}\big|[\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1]\big| = \frac{c}{4\pi}|\mathbf{B}_1|^2. \quad (10.36)$$

Повна інтенсивність випромінювання відповідно буде

$$I = \int\limits_{\Omega=4\pi} |\mathbf{S}|r^2\,d\Omega = \frac{c}{4\pi}\int\limits_{\Omega=4\pi} |\mathbf{B}_1|^2 r^2\,d\Omega. \quad (10.37)$$

Основна технічна складність розрахунку цього інтеґрала полягає в існуванні перехресних добутків від різних членів у векторі $\mathbf{B}_1$: електричного дипольного, магніто-дипольного, електричного і магнітного квадрупольних. Розглянемо їх послідовно.

Спочатку розглянемо перехресний добуток електричного і магнітного дипольного внесків. При цьому виникає скалярний добуток:

$$\begin{aligned}([\ddot{\mathbf{d}},\mathbf{n}],[\mathbf{n},[\mathbf{n},\ddot{\mathfrak{m}}]]) &= ([\ddot{\mathbf{d}},\mathbf{n}],\mathbf{n}(\mathbf{n},\ddot{\mathfrak{m}})-\ddot{\mathfrak{m}}) = \\ &= (\ddot{\mathbf{d}},\underbrace{[\mathbf{n},\mathbf{n}]}_{=0})(\mathbf{n},\ddot{\mathfrak{m}})-([\ddot{\mathbf{d}},\mathbf{n}],\ddot{\mathfrak{m}}) = (\mathbf{n},[\ddot{\mathbf{d}},\ddot{\mathfrak{m}}]).\end{aligned}$$

Якщо тепер при інтеґруванні в (10.37) за кут θ сферичної системи координат вибрати кут між векторами $[\ddot{\mathbf{d}},\ddot{\mathfrak{m}}]$ і $\mathbf{n}$, то внесок від цього доданка буде рівний нулеві завдяки інтеґралу

$$\int\limits_0^\pi \sin\theta\cos\theta\,d\theta = 0.$$

Аналогічними міркуваннями внесок від добутку магніто-дипольного й електричного квадрупольного доданків, тобто $([\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}},\mathbf{n}],[\mathbf{n},[\mathbf{n},\ddot{\mathfrak{m}}]])$, зведемо до вигляду

$$([\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}},\mathbf{n}],[\mathbf{n},[\mathbf{n},\ddot{\mathfrak{m}}]]) = (\mathbf{n},[\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}},\ddot{\mathfrak{m}}]).$$

Тепер пригадаємо, що вектор $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ є згорткою тензора квадрупольного момента Q_{ij} з одиничним вектором $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, отже:

$$(\mathbf{n},[\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}},\ddot{\mathfrak{m}}]) = n_i\varepsilon_{ijk}\dddot{\mathcal{D}}_j\ddot{\mathfrak{m}}_k = \varepsilon_{ijk}\dddot{Q}_{jl}n_l n_i\ddot{\mathfrak{m}}_k.$$

Як нам вдасться згодом показати, внеску в інтенсивність випромінювання від цього доданка не буде.

Далі з'ясуємо, який внесок дає добуток електричного дипольного й електричного квадрупольного доданків $([\ddot{\mathbf{d}},\mathbf{n}],[\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}},\mathbf{n}])$. Спочатку перетворимо його:

$$([\ddot{\mathbf{d}},\mathbf{n}],[\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}},\mathbf{n}]) = (\ddot{\mathbf{d}},[\mathbf{n},[\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}},\mathbf{n}]]) = (\ddot{\mathbf{d}},\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}) - (\mathbf{n},\ddot{\mathbf{d}})(\mathbf{n},\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}).$$

Знову ж таки, зважаючи на зміст вектора $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, запишемо:

$$(\ddot{\mathbf{d}},\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}) \equiv \ddot{d}_i\dddot{\mathcal{D}}_i = \ddot{d}_i\dddot{Q}_{ij}n_j, \qquad (\mathbf{n},\ddot{\mathbf{d}})(\mathbf{n},\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}) \equiv \ddot{d}_i n_i\dddot{\mathcal{D}}_j n_j = \ddot{d}_i\dddot{Q}_{jk}n_i n_j n_k,$$

де за індексами, які повторюються, відбувається підсумовування. Нескладно переконатися, що інтеґрування за повним тілесним кутом від компонент n_i дасть нуль, наприклад:

$$\int\limits_{\Omega=4\pi} n_x\,d\Omega = \int\limits_0^{2\pi} d\psi\int\limits_0^\pi d\theta\,\sin\theta\cdot\underbrace{\sin\theta\cos\psi}_{n_x=x/r} = 0.$$

Аналогічно можна показати, що

$$\int\limits_{\Omega=4\pi} n_i n_j n_k \, d\Omega = 0.$$

Таким чином, і від перехресного добутку електричного дипольного й квадрупольного доданків не буде внеску в сумарну інтенсивність випромінювання.

Щоб зберегти в остаточних виразах для інтенсивності випромінювання лише доданки, пропорційні до $1/c^5$, потрібно ще розглянути перехресний внесок від електричного дипольного й магнітного квадрупольного доданків, який при піднесенні $|\mathbf{B}_1|$ до квадрату дає подвоєний скалярний добуток $2(\mathbf{B}_\mathrm{d}, \mathbf{B}_\mathrm{QM})$. Враховуючи, що

$$\mathbf{B}_\mathrm{d} = \frac{1}{c^2 r}[\ddot{\mathbf{d}}, \mathbf{n}] = \frac{1}{c^2 r}\varepsilon_{pqt}\mathbf{e}_p \ddot{d}_q n_t,$$

матимемо:

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{B}_\mathrm{d}, \mathbf{B}_\mathrm{QM}) &= \left(2\frac{1}{c^2 r}\varepsilon_{pqt}\mathbf{e}_p \ddot{d}_q n_t, \frac{1}{2c^3 r}\dddot{\mathcal{M}}_{ikl}\varepsilon_{rsi} n_k n_l n_r \mathbf{e}_s\right) = \\ &= \frac{1}{c^5 r^2}\underbrace{(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_s)}_{=\delta_{ps}}\varepsilon_{pqt}\varepsilon_{rsi} n_k n_l n_r n_t \ddot{d}_q \dddot{\mathcal{M}}_{ikl} = \\ &= \frac{1}{c^5 r^2}\ddot{d}_q \dddot{\mathcal{M}}_{ikl}\varepsilon_{pqt}\varepsilon_{rpi} n_k n_l n_r n_t. \end{aligned}$$

Згорнемо символи Леві-Чівіти:

$$\varepsilon_{pqt}\varepsilon_{rpi} = \varepsilon_{pqt}\varepsilon_{pir} = \delta_{qi}\delta_{tr} - \delta_{qr}\delta_{it}$$

і в результаті матимемо:

$$2(\mathbf{B}_\mathrm{d}, \mathbf{B}_\mathrm{QM}) = \frac{1}{c^5 r^2}\left(\ddot{d}_i \dddot{\mathcal{M}}_{ikl} n_k n_l - \ddot{d}_q \dddot{\mathcal{M}}_{ikl} n_k n_l n_q n_i\right),$$

де враховано, що скалярний добуток $n_r n_r = 1$.

Отже, після нескладних перетворень, подібних до зроблених у дипольному наближенні, можна показати, що вираз для інтенсивності випромінювання системи зарядів з точністю до наступних після дипольного доданків матиме таку структуру:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{dW}{dt} = \underbrace{\frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3}}_{\substack{\text{ел. дип.}\\ \text{випром.}}} + \underbrace{\frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3}}_{\substack{\text{магн. дип.}\\ \text{випром.}}} + \underbrace{\frac{\alpha\,\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^2}{c^5}}_{\substack{\text{ел. квадруп.}\\ \text{випром.}}} + \underbrace{\frac{\beta\,\langle\ddot{d}, \dddot{\mathcal{M}}\rangle}{c^4}}_{\substack{\text{анапольне}\\ \text{випром.}}} = \\ &= I_\mathrm{d} + I_\mathrm{m} + I_\mathrm{Q} + I_\mathrm{A}, \end{aligned} \tag{10.38}$$

де α і β — деякі числові коефіцієнти, зміст запису $\langle \ddot{d}, \dddot{\mathcal{M}} \rangle$ буде з'ясовано пізніше, а часовий арґумент у всіх векторів і тензорів дорівнює $t - r/c$.

З'ясуємо, чому в інтенсивності немає перехресного внеску від магнітодипольного й електричного квадрупольного доданків, вираз для якого має вигляд $\varepsilon_{ijk}\dddot{Q}_{jl} n_l n_i \mathfrak{m}_k$. Позначимо усереднення за тілесним кутом рискою зверху, при цьому, очевидно, результат інтеґрування за Ω в інтенсивності буде дорівнюватиме добутку такого середнього на 4π — величину повного тілесного кута. Середнє від добутку двох одиничних векторів дорівнює (див., напр., [2]):

$$\overline{n_j n_k} = \frac{1}{3}\delta_{jk}, \tag{10.39}$$

отже,

$$\varepsilon_{ijk}\dddot{Q}_{jl}\overline{n_l n_i}\mathfrak{m}_k = \frac{1}{3}\varepsilon_{ijk}\dddot{Q}_{jl}\delta_{li}\mathfrak{m}_k = \frac{1}{3}\varepsilon_{ijk}\dddot{Q}_{ji}\mathfrak{m}_k.$$

За індексами i, j ми отримали згортку антисиметричного тензора ε_{ijk} із симетричним Q_{ji}, яка дорівнює нулеві.

Проаналізуємо тепер детальніше доданок I_Q. Насправді він є результатом інтеґрування за повним тілесним кутом виразу $|[\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}, \mathbf{n}]|^2$, тобто:

$$\begin{aligned}([\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}, \mathbf{n}], [\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}, \mathbf{n}]) &= (\dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}, \dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}) - (\mathbf{n}, \dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}})(\mathbf{n}, \dddot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}) = \dddot{\mathcal{D}}_i\dddot{\mathcal{D}}_i - n_i\dddot{\mathcal{D}}_i n_j \dddot{\mathcal{D}}_j = \\ &= \dddot{Q}_{ij} n_j \dddot{Q}_{ik} n_k - n_i \dddot{Q}_{ik} n_k n_j \dddot{Q}_{jl} n_l\end{aligned}$$

Отже, інтенсивність квадрупольного випромінювання буде:

$$I_\mathrm{Q} = \frac{c}{4\pi}\frac{1}{4c^6}4\pi\left\{\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ik}\overline{n_j n_k} - \dddot{Q}_{ik}\dddot{Q}_{jl}\overline{n_i n_j n_k n_l}\right\} \tag{10.40}$$

Середнє від добутку чотирьох одиничних векторів дорівнює (див., напр., [2]):

$$\overline{n_i n_j n_k n_l} = \frac{1}{15}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{10.41}$$

Підставляючи значення середніх у вираз (10.40) і пригадуючи, що слід Q_{ii} тензора квадрупольного момента рівний нулеві, отримаємо остаточно:

$$I_\mathrm{Q} = \frac{1}{20c^5}\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij}. \tag{10.42}$$

Потрібно пам'ятати, що в цьому виразі за індексами i, j відбувається підсумовування. Крім того, порівнюючи з іншими літературними джерелами, треба зважати на означення тензора квадрупольного момента. Так, при означенні

$$D_{jk} = \sum_i e_i \left\{ 3x_j^{(i)} x_k^{(i)} - r_{(i)}^2 \delta_{jk} \right\}$$

замість Q_{ij} для інтенсивності матимемо, очевидно:

$$I_{\text{Q}} = \frac{1}{180c^5} \dddot{D}_{ij} \dddot{D}_{ij}. \tag{10.43}$$

Зробимо аналогічні перетворення для доданка I_{A}:

$$\begin{aligned} I_{\text{A}} &= \frac{c}{4\pi} \frac{1}{c^5} 4\pi \left(\ddot{d}_i \dddot{\mathcal{M}}_{ikl} \overline{n_k n_l} - \ddot{d}_q \dddot{\mathcal{M}}_{ikl} \overline{n_k n_l n_q n_i} \right) = \\ &= \frac{1}{c^4} \left(\frac{4}{15} \dddot{\mathcal{M}}_{ikk} \ddot{d}_i - \frac{2}{15} \dddot{\mathcal{M}}_{iik} \ddot{d}_k \right) = -\frac{2}{15c^4} \left(\dddot{\mathcal{M}}_{kki} - 2\dddot{\mathcal{M}}_{ikk} \right) \ddot{d}_i. \end{aligned}$$

Цей результат можна також переписати за допомогою вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\tau) &= \frac{1}{10} \left(\dddot{\mathcal{M}}_{kki} - 2\dddot{\mathcal{M}}_{ikk} \right) \mathbf{e}_i = \\ &= \frac{1}{10c} \int\limits_V d\mathbf{r}' \left\{ \big(\mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau), \mathbf{r}' \big) \mathbf{r}' - 2r'^2 \, \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau) \right\}, \end{aligned} \tag{10.44}$$

який називають ***анапольним моментом*** або ***тороїдністю***. Перша назва пов'язана з тим, що цей вираз в розкладі векторного потенціалу не відповідає ніяким мультиполям. З іншого боку, тороїдальний соленоїд (з парною кількістю витків) створює поле, яке описується за допомогою вектора $\mathbf{T}$.

У підсумку інтенсивність випромінювання з точністю до $1/c^5$ матиме вигляд:

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} + \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3} + \frac{1}{20c^5} \dddot{Q}_{ij} \dddot{Q}_{ij} - \frac{4}{3c^4} (\dddot{\mathbf{T}}, \ddot{\mathbf{d}}). \tag{10.45}$$

Зважаючи на те, що множник $1/c$ входить як в означення магнітного дипольного момента, так і в означення тороїдності, бачимо, що останні три доданки є поправкою до дипольного наближення, пропорційною до $1/c^5$. Врахування будь-яких наступних членів у розкладі векторного потенціалу будуть уже давати вищі поправки.