

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ**  
**ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА**

*Кафедра теоретичної фізики*

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ**  
**з навчальної дисципліни «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА,**  
**ВЕКТОРНИЙ І ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ»**

для студентів I курсу фізичного факультету  
та факультету електроніки

**ЛЬВІВ–2011**

*Лінійна алгебра, векторний і тензорний аналіз.* Методичні рекомендації з навчальної дисципліни для студентів за напрямом підготовки 6.040204 Прикладна фізика — Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. — 9 с.

Розробник:

*Криницький Ю. С.*, старший викладач кафедри теоретичної фізики

## 1. Опис навчальної дисципліни

(Витяг з робочої програми навчальної дисципліни

**“Лінійна алгебра, векторний і тензорний аналіз”**)

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни
		<i>денна форма навчання</i>
<b>Кількість кредитів — 4</b>	<b>Галузь знань</b> 0402 Фізико-математичні науки	<b>Нормативна</b>
<b>Модулів — 3</b>	<b>Напрямок підготовки</b> 6.040204 Прикладна фізика	<b>Рік підготовки:</b> 1-й
<b>Змістових модулів — 3</b>		<b>Семестр</b> 2-й
<b>Загальна кількість год.</b> — 144		<b>Лекції</b> 34 год.
Тижневих годин для денної форми навчання: <b>аудиторних — 3</b>	<b>Освітньо-кваліфікаційний рівень:</b> бакалавр	<b>Практичні, семінарські</b> 17 год.
<b>самостійної роботи студента — 5</b>		<b>Лабораторні</b> —
		<b>Самостійна робота</b> 93 год.
		<b>Вид контролю:</b> іспит

## **2. Мета та завдання навчальної дисципліни**

Курс лінійної алгебри, векторного і тензорного аналізу є фундаментальним розділом основного курсу теоретичної фізики.

Мета: формування у фізиків поняття про теорію множин, лінійні простори, лінійні оператори, тензорну алгебру, диференціювання та інтегрування векторних і скалярних полів.

Завдання: навчити студентів користуватись методами лінійної алгебри, володіти апаратом тензорів та технікою диференціювання скалярних і векторних полів, застосовувати інтегральні теореми.

В результаті вивчення даного курсу студент повинен знати основні поняття та рівняння предмету викладені у програмі курсу.

вміти: застосовувати методи, викладені в курсі.

Для вивчення дисципліни необхідні знання з таких розділів математики і фізики: математичний аналіз, векторний аналіз, диференціальні рівняння, механіка, електрика.

## **3. Програма навчальної дисципліни**

### **МОДУЛЬ 1**

#### **Змістовий модуль 1. Теорія лінійних просторів**

##### **Тема 1. Лінійні простори [1: ст.3-20; 4: ст.7-58; 5: ст.7-50]**

1. Множини. Відображення. Алгебраїчні структури: група, абелева група, кільце, поле, модуль, лінійний простір, алгебра, алгебра Лі.

2. Означення лінійного простору. Приклади лінійних просторів (простір векторів на прямій, площині, у просторі; поле чисел як простір). Дійсний і комплексний лінійний простір. Лінійна (не)залежність векторів. Вимір і базис лінійного простору. Координати вектора в базисі.

3. Лінійна оболонка векторів. Лінійні підпростори. Теорема про продовження базису. Монотонність виміру. Внутрішня пряма сума. Розклад простору у пряму суму. Пряме доповнення. Прямий добуток просторів. Зовнішня пряма сума лінійних просторів.

4. Лінійні відображення, їх приклади (тотожне, нульове, гомотетія, відображення в поле чисел, лінійний оператор). Простір лінійних відображень. Ізоморфізм лінійних просторів. Дуальні (спряжені, взаємні) базиси. Двічі спряжений простір. Канонічний ізоморфізм. Ядро і образ лінійного відображення.

5. Заміна базису як дія лінійного оператора. Матриця лінійного оператора. Композиція відображень і добуток матриць. Матриця лінійного відображення. Активна і пасивна інтерпретація перетворення.

##### **Тема 2. Лінійні оператори і білінійні форми [1: ст.23-99; 4: ст.65-86,171-198, 222-312; 5: ст. 100-206]**

1. Матриця лінійного оператора. Простір матриць. Композиція операторів і добуток їх матриць. Асоціативна алгебра лінійних операторів. Асоціативна алгебра матриць. Обернений оператор. Обернена матриця. Критерій існування оберненого оператора. Група невироджених операторів. Матричні групи. Проектор як оператор. Матриця проектора.

2. Теореми про ранг добутку операторів. Інваріантність рангу. Інваріантність детермінанта матриці оператора. Слід матриці оператора. Структура лінійного оператора. Інваріантний підпростір. Діагоналізований оператор. Характеристичний многочлен оператора, його незалежність від базису. Власні значення оператора

3. Білінійні форми. Зображення білінійної форми у базисі. Ранг білінійної форми. Симетричні та антисиметричні білінійні форми та їх матриці

4. Полярна квадратична форма (поляризація квадратичної форми). Властивості додатньовизначеної квадратичної форми. Закон інерції квадратичних форм. Класифікація квадратичних форм. Критерій Сильвестра.

5. Скалярний добуток у дійсному просторі як білінійна форма. Півторалінійна форма. Матриця Грама базису щодо скалярного добутку. Напівлінійне відображення. Розклад простору у пряму суму попарно-ортогональних підпросторів.

6. Евклідів скалярний добуток, його властивості. Евклідів простір. Довжина вектора. Нерівність Коші-Буняковського. Кут між векторами. Віддаль між векторами

## **МОДУЛЬ 2**

### ***Змістовий модуль 2. Тензорна алгебра***

#### **Тема 3. Полілінійні форми і тензори [2: ст.139-218; 5: ст.272-314]**

1. Полілінійні відображення. Полілінійні форми. Коваріантні тензори та їх компоненти. Ранг тензора. Перетворення компонент коваріантного тензора при зміні базису. Скалярний добуток як коваріантний тензор

2. Контраваріантні тензори та їх компоненти. Перетворення компонент контраваріантного тензора при зміні базису. Мішані тензори та їх компоненти. Перетворення компонент мішаного тензора при зміні базису

#### **Тема 4. Тензори у 3-вимірному евклідовому просторі [3: ст.57-86]**

1. Тензори в евклідовому просторі. Піднімання і опускання індекса. Компоненти тензорів в ортонормованому базисі.

2. Символ Леві-Чівіті. Векторний добуток. Властивості символів Леві-Чівіті.

## **МОДУЛЬ 3**

### ***Змістовий модуль 3. Векторний аналіз***

#### **Тема 5. Криволінійні координати і диференціювання полів [3: ст.4-28]**

1. Криволінійні координати. Локальний базис. Метричний тензор у криволінійних координатах. Коефіцієнти Ляме. Сферичні та циліндричні координати

2. Векторне поле. Контраваріантні і коваріантні векторні поля. Інтегральні криві векторного поля. Похідна від скалярного поля за напрямом..

#### **Тема 6. Інтегрування векторних полів та інтегральні теореми [3: ст.29-56]**

1. Градієнт скалярного поля. Властивості градієнта. Геометричний зміст вектора градієнта. Градієнт і поверхні рівня

2. Похідна від векторного поля за напрямом. Потенціальне векторне поле. Інтеграл від векторного поля вздовж кривої. Циркуляція векторного поля. Потік векторного поля. Дивергенція. Соленоїдалне поле. Теорема Гріна. Ротор векторного поля. Компоненти ротора в термінах символу Леві-Чевіта

#### 4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	Усього	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	ср
1	2	3	4	5	6	7
<b>МОДУЛЬ 1</b>						
Змістовий модуль 1. Теорія лінійних просторів.						
<b>Тема 1.</b> Лінійні простори.	39	<b>10</b>	<b>3</b>			<b>26</b>
<b>Тема 2.</b> Лінійні оператори і білінійні форми.	43	<b>12</b>	<b>4</b>			<b>27</b>
<b>Разом – зм. модуль 1</b>	82	22	7			53
<b>МОДУЛЬ 2</b>						
Змістовий модуль 2. Тензорна алгебра.						
<b>Тема 3.</b> Полілінійні форми і тензори.	<b>14</b>	<b>2</b>	<b>2</b>			<b>10</b>
<b>Тема 4.</b> Тензори у 3-вимірному евклідовому просторі.	<b>14</b>	<b>2</b>	<b>2</b>			<b>10</b>
<b>Разом – зм. модуль 2</b>	28	4	4			20
<b>МОДУЛЬ 3</b>						
Змістовий модуль 3. Векторний аналіз.						
<b>Тема 5.</b> Криволінійні координати і диференціювання полів.	<b>18</b>	<b>4</b>	<b>4</b>			<b>10</b>
<b>Тема 6.</b> Інтегрування векторних полів та інтегральні теореми.	<b>16</b>	<b>4</b>	<b>2</b>			<b>10</b>
<b>Разом – зм. модуль 3</b>	34	8	6			20
<b>Усього годин</b>	144	34	17			93

## 5. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Дослідження лінійних просторів [6: ст.166-174]	3
2	Лінійні оператори, їх властивості [6: ст.187-193]	2
3	Знаходження власних значень і векторів [6: ст.194-200]	2
4	Білінійні форми, скалярні добутки [6: ст.155-165]	2
5	Тензори і їх властивості [3: ст.80-88]	2
6	Криволінійні координати [3: ст.91-95]	2
7	Диференціювання тензорних полів [3: ст.89-144]	2
8	Інтегральні векторні теореми і їх застосування [3: ст.42-50]	2
	<b>Разом</b>	<b>17</b>

## 6. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Векторна алгебра [5: ст.7-21]	26
2	Лінійні оператори [5: ст.22-28]	27
3	Тензори у евклідовому просторі [2: ст.160-164]	10
4	Алгебра тензорів [2: ст.139-218]	10
5	Ортогональні координати [3: ст.91-96]	10
6	Інтегральні теореми Стокса [2: ст.227-246]	10
	<b>Разом</b>	<b>93</b>

## 7. Методи контролю

Контроль засвоєння матеріалу включає поточний контроль (контрольні роботи за трьома змістовими модулями,  $3 \times 10 = 30$  балів), оцінку відповідей та роботи на практичних заняттях (20 балів) — разом за семестр 50 балів — та іспит, що складається з теоретичної ( $13 \times 2 = 26$  балів) та практичної ( $3 \times 8 = 24$  балів) частин — разом 50 балів. Сумарна оцінка, таким чином, виставляється за 100-бальною шкалою.

## 8. Розподіл балів, що присвоюється студентам

Розподіл балів, які отримують студенти (для екзамену)

Поточне тестування та самостійна робота						Робота на практичних	Підсумковий тест (екзамен)	Сума
Змістовий модуль 1		Змістовий модуль 2		Змістовий модуль 3				
T1	T2	T3	T4	T5	T6			
5	5	5	5	5	5	20	50	100

Шкала оцінювання: Університету, національна та ECTS

Оцінка в балах	Оцінка ECTS	Визначення	За національною шкалою	
			Екзаменаційна оцінка, оцінка з диференційованого заліку	Залік
90–100	A	Відмінно	Відмінно	Зараховано
81-89	B	Дуже добре	Добре	
71-80	C	Добре		
61-70	D	Задовільно	Задовільно	
51-60	E	Достатньо		

## 9. Методичне забезпечення

1. В. І Андрійчук, Б. В. Забавський. Лінійна алгебра. Навчально-методичний посібник. — Львів: ЛНУ, 2008.

## 10. Рекомендована література

Базова

2. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1979.
3. М.Т.Сеньків. Векторний і тензорний аналіз. – Львів – 1991.
4. Ф. Р. Гантмахер Теория матриц. – Москва, 1966
5. А.И.Кострикин, Ю.И.Манин. Линейная алгебра и геометрия. – М. – 1980.

Допоміжна

6. И. В. Проскураков. Сборник задач по линейной алгебре.— Москва, 1966.

### 14. Інформаційні ресурси

1. Eric Weisstein's World of Physics <http://scienceworld.wolfram.com/physics/>
2. Wikipedia. <http://www.wikipedia.org>



### **11. Приклад завдання, що виносяться на іспит**

1. Теорема про зв'язок вимірностей суми і перетину (13 балів)
2. Закон інерції квадратичних форм (13 балів)
3. Знайти ротор векторного поля  $r[a,r]$  (8 балів)
4. Ортогоналізувати вектори:  $f_1 = (-4, -5, 0)$ ,  $f_2 = (-4, -3, 2)$  (8 балів)
5. Діагоналізувати матрицю оператора:  $A_{11} = -3$ ,  $A_{12} = 4$ ,  $A_{21} = -6$ ,  $A_{22} = 7$  (8 балів)