Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кафедра теоретичної фізики

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
з навчальної дисципліни
"ВЕКТОРНИЙ І ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ"

для студентів II-го курсу фізичного факультету

Львів – 2011

Векторний і тензорний аналіз. Методичні рекомендації з навчальної дисципліни для студентів напряму підготовки **6.040203** Фізика. — Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. — 12 с.

Розробник:
Стецко М. М., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри теоретичної фізики

1. Опис навчальної дисципліни

(Витяг з робочої програми навчальної дисципліни “Векторний і тензорний аналіз”)

<table>
<tr><th rowspan="2">Найменування показників</th><th rowspan="2">Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень</th><th>Характеристика навчальної дисципліни</th></tr>
<tr><th>денна форма навчання</th></tr>
<tr><td>Кількість кредитів — 2</td><td>Галузь знань
0402 Фізико-математичні науки</td><td>Нормативна</td></tr>
<tr><td>Модулів — 2</td><td>Напрям підготовки
6.040203 Прикладна фізика</td><td rowspan="2">Рік підготовки:
2-й</td></tr>
<tr><td>Змістових модулів — 2</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">Семестр
3-й</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Загальна кількість годин — 72</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Лекції
18 год.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Тижневих годин для денної форми навчання:
аудиторних — 2
самостійної роботи студента — 2</td><td rowspan="5">Освітньо-кваліфікаційний рівень:
бакалавр</td></tr>
<tr><td>Практичні, семінарські
18 год.</td></tr>
<tr><td>Лабораторні
—</td></tr>
<tr><td>Самостійна робота
36 год.</td></tr>
<tr><td>Вид контролю: іспит</td></tr>
</table>

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Курс векторного і тензорного аналізу є базовою математичною дисципліною, яка розвиває математичний апарат, необхідний для різних розділів теоретичної фізики.

Мета: формування у майбутнього фізика поняття про векторні поля, диференціальні операції над векторними полями, інтегральні теореми для векторних полів, тензори та алгебраїчні операції над ними, перетворення систем координат, диференціальні операції над тензорами.

Завдання: навчити студентів самостійно виконувати обчислення із використанням диференціальних операцій над векторними полями, використовувати інтегральні теореми, виконувати основні операції над тензорами.

В результаті вивчення даного курсу студент повинен

знати основні поняття та теореми викладені у програмі курсу.

вміти: застосовувати поняття і методи викладені в курсі до розв'язування задач, застосовувати диференціальні операції для довільних скалярних та векторних полів, застосовувати інтегральні теореми для розрахунку криволінійних інтегралів та інтегралів по поверхні, виконувати перетворення систем координат, записувати диференціальні операції у довільних системах координат, перетворювати тензори при зміні систем координат, виконувати основні алгебраїчні операції над тензорами (додавання, множення, згортка, піднімання та опускання індексів).

Для вивчення дисципліни необхідні знання з таких розділів математики: математичний аналіз, лінійна алгебра, аналітична геометрія. Бажаним є знання електрики.

3. Програма навчальної дисципліни

МОДУЛЬ 1

***Змістовий модуль 1*. Векторний аналіз**

Тема 1. Прямокутні системи координат (1: §1-4; 3: §1.1-1.5;)

1. Перетворення прямокутних координат точки при перетвореннях систем координат. Властивості коефіцієнтів перетворення. Перетворення компонент вектора при переході від однієї прямокутної системи координат до іншої.
2. Елементи векторної алгебри. Полярні та аксіальні вектори. Псевдовеличини.

Тема 2. Основи векторного аналізу (1: §5-15; 3: §4.1-4.4, 4.8-4.12;)

1. Вектор-функція скалярного аргументу. Диференціювання та інтегрування вектор-фунцій за скалярним аргументом. Годограф.
2. Скалярне поле. Поверхні та лінії рівня.Похідна від скалярної функції за напрямком.
3. Градієнт скалярного поля та його властивості.

4. Потік векторного поля через через поверхню. Дивергенція векторного поля та її властивості.
5. Теорема Осторградського-Гаусса, теорема про градієнт.
6. Лінійний інтеграл від векторного поля. Потенціальне векторне поле.
7. Ротор вектора та його властивості.
8. Теорема Стокса, теорема про ротор.
9. Соленоїдальні векторні поля.
10. Диференціальні операції другого порядку.
11. Теорема про розклад (теорема Гельмгольца).

МОДУЛЬ 2

***Змістовий модуль 2*. Тензорний аналіз**

Тема 3. Косокутні системи координат (1: §16-21; 3: §1.6-1.7; 4: Гл. 1. §1-2;)

1. Косокутні системи координат. Узагальнені проекції та узагальнені складові вектора.
2. Масштабні та дуальні вектори. Метричний тензор в косокутних координатах.
3. Скалярний і векторний добутки в косокутних координатах.
4. Піднімання і опускання індексів. Правила індексів, приклади їхнього застосування.
5. Перетворення координат і компонент вектора при переході від однієї косокутної системи координат до іншої.

Тема 4. Тензори та їх властивості (1: §22-27; 3: §2.1-2.6, 3.1-3.10; 4: Гл. 1. §4-5, Гл. 2. §1-4, Гл. 3. §1-2;)

1. Перетворення векторів при зміні базису. Полілінійні форми. Тензори. Ранг тезора Перетворення тензорів при перетворенні систем координат.
2. Алгебраїчні операції над тензорами (додавання, множення, згортка, піднімання та опускання індексів).
3. Трансформаційні властивості компонент метричного тензора при переході від однієї до іншої системи координат.
4. Деякі властивості тензорів 2-го рангу. Подвійна згортка добутку симетричного і антисиметричного тензорів 2-го рангу.
5. Диференціальні операції над тензорами у косокутних координатах. Векторна дивергенція тензора.

Тема 5. Криволінійні системи координат (1: §28-35; 3: §2.8-2.9, 4.5-4.7; 4: Гл. 3. §7-8, Гл. 4. §6-7, Гл. 5. §1-5;)

1. Криволінійні системи координат. Масштабні та дуальні вектори у криволінійних системах координат. Локальний базис.
2. Ортогональні системи координат. Коефіцієнти Ламе.

3. Метричний тензор у криволінійних координатах. Ко- і контраваріантні метричні тензори. Метричні тензори для ортогональних систем координат. Метричні тензори для циліндричних та сферичних координат.
4. Перетворення криволінійних координат. Тензори в криволінійних системах координат.
5. Метричні простори. Задача про паралельне перенесення вектора. Символи Крістоффеля. Класифікація просторів.
6. Коваріантне диференціювання. Диференціальні операції в метричних просторах.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	**Кількість годин**					
	Денна форма					
	Усього	**у тому числі**				
		л	**п**	**лаб**	**інд**	**Ср**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
МОДУЛЬ 1						
Змістовий модуль 1. Векторний аналіз.						
Тема 1. **Прямокутні системи координат.**	**8**	2	2			4
Тема 2. **Основи векторного аналізу.**	**35**	7	12			16
Разом – зм. модуль1	***43***	***9***	***14***			***20***
МОДУЛЬ 2						
Змістовий модуль 2. Тензорний аналіз.						
Тема 3. **Косокутні системи координат.**	**8**	2	2			4
Тема 4. **Тензори та їх властивості.**	**9**	3	0			6
Тема 5. **Криволінійні системи координат.**	**12**	4	2			6
Разом – зм. модуль 2	**29**	***9***	***4***			***16***
Усього годин	***72***	***18***	***18***			***36***

5. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість Годин
1	Найпростіші формули векторного числення [1: §1-3, 6: §1]	2
2	Вектор-функція скалярного аргументу і її похідна. Головна нормаль. Кривина кривої [1: §4-5; 2: §1-5; 6: §1]	1
3	Похідна від скалярного поля по напрямку [1: §6-8; 2: §7-8; 6: §2]	2
4	Обчислення ґрадієнта скалярного поля [1: §6-8; 2: §9; 6: §2]	2
5	Обчислення дивергенції векторних полів [1: §9-10, 14; 2: §13, 20; 6: §2]	2
6	Обчислення ротора векторних полів [1: §12-14; 2: §15, 20; 6: §2]	2
7	Обчислення дії оператора Лапласа на скалярні функції [1: §11, 14; 2: §21; 6: §2]	1
8	Обчислення поверхневих та лінійних інтегралів [1: §10, 13; 2: §12, 16, 17; 6: §2]	2
9	Косокутні координати [1: §16-18; 6: §2]	2
10	Криволінійні координати [1: §28-29; 2: §23-24; 5: Гл. 5. §1; 6: §3]	2
	Разом	**18**

6. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Основні формули векторного числення. [1: §1-3, 6: §1]	2
2	Перетворення ортогональних систем координат та перетворення компонент вектора при цьому. Полярні та аксіальні вектори. [1: §1-3; 3: §1.1-1.5; 6: §1]	2
3	Розв’язування задач на обчислення градієнта, дивергенції, ротора [1: §6-14; 2: §7, 9, 13, 15, 20; 6: §2]	10
4	Застосування інтегральних теорем для обчислення криволінійних інтегралів та інтегралів по поверхні [1: §10, 13; 2: §12, 16, 17; 6: §2]	6
5	Вектори у косокутних координатах. Метричний тензор у косокутних координатах [1: §16-18; 6: §2]	2
6	Диференціальні операції у косокутних координатах [1: §20; 6: §2]	2
7	Перетворення тензорів при зміні базису [1: §22-26; 5: Гл. 5. §1; 6: §2]	2
8	Алгебраїчні операції над тензорами (розв’язування задач) [1: §22-26; 5: Гл. 5. §1; 6: §2]	2

9	Властивості симетричних та антисиметричних тензорів 2-го рангу [1: §25-26; 5: Гл. 5. §1; 6: §2]	2
10	Локальний базис для криволінійних систем координат. Ортогональні системи координат [1: §28; 5: Гл. 5. §1; 6: §3]	2
11	Метричний тензор у криволінійних координатах [1: §29; 5: Гл. 5. §1; 6: §3]	2
12	Диференціальні операції над векторами та тензорами у криволінійних координатах [1: §34-35; 2: §23-25; 5: Гл. 5. §1; 6: §3]	2
	Разом	**36**

7. Методи контролю

Контроль засвоєння матеріалу включає поточний контроль (контрольні роботи за трьома змістовими модулями, 2×15 = 30 балів), оцінку відповідей та роботи на практичних заняттях (20 балів) — разом за семестр 50 балів — та іспит, що складається з тестової частини (10×3 = 30 балів) і перевірки теоретичних та практичних знань за допомогою завдань більшого обсягу (2×10 = 20 балів) — разом 50 балів. Сумарна оцінка, таким чином, виставляється за 100-бальною шкалою.

8. Розподіл балів, що присвоюється студентам

Розподіл балів, які отримують студенти (для екзамену)

Поточне тестування та самостійна робота					**Робота на практичних**	**Підсумковий тест (іспит)**	**Сума**
Змістовий модуль 1		**Змістовий модуль 2**					
Т1	**Т2**	**Т3**	**Т4**	**Т5**			
5	10	5	5	5	20	50	100

Шкала оцінювання: Університету , національна та ECTS

Оцінка в балах	***Оцінка ECTS***	***Визначення***	***За національною шкалою***	
			Екзаменаційна оцінка, оцінка з диференційованого заліку	***Залік***
90–100	**A**	***Відмінно***	***Відмінно***	***Зараховано***
81-89	**B**	***Дуже добре***	***Добре***	
71-80	**C**	***Добре***		
61-70	**D**	***Задовільно***	***Задовільно***	
51-60	**E**	***Достатньо***		

9. Методичне забезпечення

1. *М. Т. Сеньків,* Векторний і тензорний аналіз. Львів: вид-во Львів. ун-ту, 1990, 148 с.

10. Рекомендована література

Базова література

2. *М. Л. Краснов,* Векторный анализ. — М.: Наука, 1978, 160 с.
3. *А. И. Борисенко, И. Е. Тарапов,* Векторный анализ и начала тензорного исчисления. — М.: Высшая школа, 1966, 252с.
4. *Б. Е. Победря*, Лекции по тензорному анализу. — М.: Изд-во МГУ, 1986, 264с.
5. *Н. И. Кованцов, Г. М. Зражевская и др.* Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ, сборник задач. — К.: Вища школа, 1982, 376с.
6. *В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин.* Сборник задач по электродинамике. — М.: Наука, 1970, 504с.

Додаткова література

7. *П. К. Рашевский.* Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967, 664с.
8. *Я. П. Терлецкий, Ю. П. Рыбаков*, Электродинамика. —М.: Высшая школа, 1990, 352с.
9. *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1986, 760с.

Інформаційні ресурси

10. Eric Weisstein's World of Physics http://scienceworld.wolfram.com/physics/
11. Wikipedia. http://www.wikipedia.org

11. Приклад завдання для контролю поточної успішності

Задачі до змістового модуля 1

Варіант 3

1. Обчислити $grad\ \frac{r^3}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{r})}$**;**
2. Обчислити $div\ \{\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{r})}{r}\boldsymbol{r}\}$;
3. Очислити $rot\{r[\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}]\}$ (у завданнях 1-3 вектор $\boldsymbol{a}$- сталий);
4. Використовуючи теорему Остроградського-Гаусса обчислити інтеграл: $\oint([\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}]\boldsymbol{r})\,dS$, тут вектор $\boldsymbol{a}$- сталий, $\boldsymbol{n}$ −вектор нормалі до поверхні.

12. Приклад завдання, що виносяться на іспит

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Освітньо-кваліфікаційний рівень*: спеціаліст*
Галузь знань: 0402 — *фізико-математичні науки*
Напрям підготовки: 6.040203— *Фізика*

Семестр: **ІІІ**

Дисципліна: ***Векторний і тензорний аналіз***

Білет №1

1. Вектор-функція скалярного аргументу. Диференціювання та інтегрування.
2. Косокутні системи координат. Дуальний базис для косокутних систем координат.
3. Завдання 1.

Затверджено на засідання кафедри теоретичної фізики
Протокол № _ від _____________20___р

Завідувач кафедри____________ Екзаменатор_______________

Завдання 1

1. Сформулюйте теорему Остроградського-Гауса.
2. Дайте означення похідної від векторного поля за напрямком.
3. Дайте означення дивергенції векторного поля. .
4. Обчисліть $\operatorname{grad} r^2$.
5. Обчисліть $\operatorname{div} 3r\mathbf{r}$.
6. Обчисліть $\operatorname{rot} r^3\mathbf{a}$.
7. Обчисліть інтеграл: $\oint(\mathbf{a},\mathbf{r})\mathbf{n}dS$, $\mathbf{n}$ - вектор нормалі до поверхні.
8. Згорнути за верхнім та другим нижнім індексами тензор T^i_{jk}:

$$T^1_{11} = x \quad T^1_{12} = y^3 \quad T^1_{21} = -x \quad T^1_{22} = x^2 + y$$
$$T^2_{11} = y \quad T^2_{12} = 0 \quad T^2_{21} = x - y \quad T^2_{22} = x^2y^2 + y$$

9. Перемножити тензори у порядку їх запису:

$$a_{11} = x \quad a_{12} = y - x \quad a_{21} = x + y \quad a_{22} = y$$
$$a^1 = x + y \quad a^2 = x - y$$

10. Підняти другий нижній індекс у тензора T_{jk} використовуючи тензор a^{rs}:

$$T_{11} = x \quad T_{12} = y^3 \quad T_{21} = -x \quad T_{22} = x^2 + y$$
$$a^{11} = x \quad a^{12} = y - x \quad a^{21} = x^2 + y^2 \quad a^{22} = y$$

13. Приклад тесту для контролю якості знань студентів

Львівський національний університет імені Івана Франка

Векторний і тензорний аналіз. Зріз знань

Варіант 1 **Студент**____________________________ **Група**_______

1. Годографом вектора називають:

   a. геометричне місце кінців вектора. b. модуль вектора. c. напрямок вектора.

2. Зв'язок між інтегралом по замкненій поверхні та інтегралом по об'єму, обмеженому цією поверхнею виражається:

   a. теоремою Остроградського-Гаусса. b. теоремою Стокса. c. теоремою Фалеса.

3. Зв'язок між інтегралом по замкненому контуру та інтегралом по поверхні, яка спирається на цей контур виражається:

   a. теоремою Остроградського-Гаусса. b. теоремою Стокса. c. теоремою Піфагора.

4. Соленоїдальне векторне поле це:

   a. поле, в якого відсутні джерела. b. поле з додатніми джерелами. c. відсутня правильна відповідь.

5. Дивергенція векторного поля $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ це:

   a. $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$. b. $A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}$. c. $A_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial A_z}{\partial z}$.

6. Обчислити $\operatorname{div} \mathbf{r}$:

   a. 0. b. 2. c. 3.

7. Обчислити $\operatorname{grad} r^2$:

   a. $2\mathbf{r}$. b. $2r\mathbf{r}$. c. 2.

8. Операція піднімання індексів тензора

   a. зменшує ранг тензора на 1. b. збільшує ранг тензора на 1. c. незмінює ранг тензора.

9. Метричний тензор g_{ik} задовільняє умові:

   a. $g_{ik} = g_{ki}$. b. $g_{ik} = -g_{ki}$. c. $g_{ik} = g_{kk} + g_{ii}$.

10. Обчислити інтеграл: $\oint (3\mathbf{r}, \mathbf{dS})$

    a. 0. b. 3. c. 9V.