

# Перелік задач на іспит з теоретичної механіки

## для спеціальності “фізика”

1. Знайдіть закон руху частинки в потенціальному полі

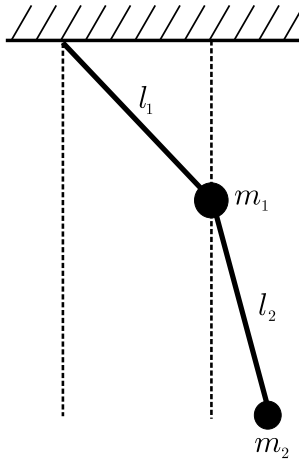
$$U(x) = U_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}).$$

2. Знайдіть закон руху частинки в потенціальному полі

$$U(x) = U_0 \tan^2(\alpha x).$$

3. Обчисліть дужки Пуассона  $\{e^{x+y}, p_x p_y\}$ ,  $\{\cos xy, p_x p_y\}$ .

4. Отримайте рівняння Лагранжа для подвійного математичного маятника (плоского). Знайдіть частоти малих коливань.



5. Знайдіть лагранжіан і гамільтоніан системи, зображеної на рисунку 1(а). Вантажі підвішено на невагомих жорстких стрижнях.  $k$  — жорсткість пружини,  $a$  — довжина нерозтягнутої пружини.

6. Знайдіть лагранжіан і гамільтоніан системи, зображеної на рисунку 1(б). Вантаж підвішено на невагомому жорсткому стрижні.

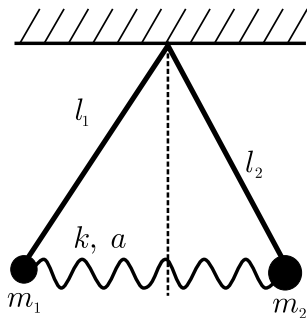


Рис. 1: (а)

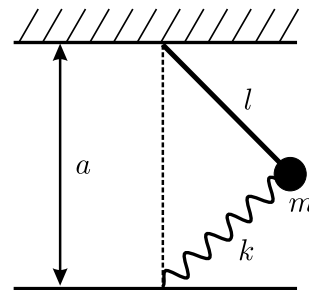
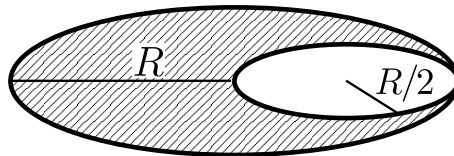


Рис. 1: (б)

7. Знайдіть гамільтоніан системи, якщо відомий лагранжіан.  $L = \dot{x}^2 - \dot{x}x \sin t - \cos t$ . Запишіть канонічні рівняння.

8. Частинка перебуває в потенціальному полі  $U = U_0 e^{-\alpha x + \beta x^2}$ ;  $U_0, \beta > 0$ . Знайдіть положення рівноваги та частоту малих коливань.
9. Частинка перебуває в потенціальному полі  $U = -\frac{U_0}{\cosh^2 ax}$ ;  $U_0 > 0$ . Знайдіть положення рівноваги та частоту малих коливань.
10. Знайдіть швидкість  $v(t)$  падіння частинки в однорідному полі з тертям, пропорційним  $v^2(t)$ . Визначте встановлену швидкість руху.
11. Проінтегруйте рівняння руху  $\ddot{x} = k \sin \frac{x}{a}$ ,  $k > 0, a > 0$ . Початкові умови:  $x(t = 0) = \pi a$ ,  $\dot{x}(t = 0) = 2\sqrt{ka}$ .
12. Знайдіть енергію  $E$ , набуту осцилятором без загасання під дією сили  $F(t) = \frac{F_0}{1 + (t/\tau)^2}$  за весь час її дії. При  $t = -\infty$  осцилятор був у спокої.
13. Методом Боголюбова–Крилова знайдіть першу поправку до частоти для лагранжіану  $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} - \frac{\alpha}{4} x^4$ .
14. Методом Гамільтона–Якобі знайдіть розв'язки рівнянь руху для потенціалу  $U = \beta x^2$ .
15. Обчисліть момент інерції квадратної пластини відносно діагоналі. Її маса —  $m$ , довжина сторони  $a$ .
16. Обчисліть головні моменти інерції диска радіуса  $R$  з вирізаним отвором радіуса  $R/2$  (див. рис.). Маса диска  $m$ .



17. Дано твірну функцію канонічного перетворення:  $F(q, Q) = \frac{1}{2} m \omega q^2 \operatorname{ctg} Q$ . Знайдіть твірну функцію  $F_2(q, P)$ .
18. Для гармонічного осцилятора з частотою  $\omega$  задано твірну функцію канонічного перетворення  $F(q, Q) = \frac{1}{2} m \omega q^2 \operatorname{ctg} Q$ . Знайдіть гамільтоніан у змінних  $Q, P$  і розв'яжіть рівняння руху.
19. Матеріальна точка рухається в полі тяжіння по гладкій похилій площині (кут нахилу  $\alpha$ ). Використовуючи рівняння Лагранжа 1-го роду, знайдіть закон руху точки та реакцію площини.
20. Знайдіть частоти коливань системи з лагранжіаном  $L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{\omega_0 x^2 + \omega_0 y^2}{2} + \alpha xy$ .
21. Знайдіть момент інерції кругового конуса відносно осі обертання. Маса конуса  $m$ , радіус основи  $R$ , висота  $h$ .
22. Знайдіть тензор інерції  $I_{\alpha\beta}$  кулі масою  $m$ , радіусом  $R$ .