Потрібно пам'ятати, що циклічна перестановка індексів у цьому символі вже не зберігає знак, як це було у тривимірному випадку.

Після нескладних (але трохи марудних) обчислень з першого інваріанта (12.20) матимемо

$$B^2 - E^2 = \mathrm{inv}, \tag{12.22}$$

а з другого —

$$(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = \mathrm{inv}. \tag{12.23}$$

На підставі інваріантів електромагнітного поля можна зробити деякі прості висновки про взаємну орієнтацію векторів **E** та **B** у різних системах відліку. Зокрема, якщо в якійсь системі відліку $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, то в будь-якій іншій системі відліку вектори будуть або перпендикулярні, або один із них дорівнюватиме нулеві.

Треба сказати, що інваріант $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ є не просто скаляром, а ***псевдоскаляром***: у цьому скалярному добуткові звичайний (***полярний***) вектор **E** множиться на ***псевдовектор*** (***аксіальний*** вектор) **B**. На відміну від звичайного вектора, аксіальний не змінює знака при інверсії координат.

12.4. Рівняння для поля без зарядів і струмів

Покажемо, що для тензора електромагнітного поля справедливе співвідношення:

$$\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 0, \tag{12.24}$$

причому всі індекси різні. Як можна зауважити, кожен наступний доданок утворено циклічною перестановкою індексів λ, μ, ν.

Переконатися у правильності рівняння (12.24) можна безпосередньою підстановкою означення тензора $F_{\mu\nu}$:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} = 0.$$

При перетворення ми врахували незалежність мішаних похідних від порядку диференціювання.

Подивимось тепер, до чого приводить рівність (12.24), переписана мовою звичних тривимірних величин. Насамперед розглянемо набір індексів $\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3$:

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} = \frac{\partial(-B_z)}{\partial z} + \frac{\partial(-B_y)}{\partial y} + \frac{\partial(-B_x)}{\partial x} = -\operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

Ми отримали одне з рівнянь Максвелла: $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$.

Набір $\lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2$ дає рівняння:

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} = \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial(-E_y)}{\partial x} + \frac{\partial(-B_z)}{\partial(ct)} =$$

$$-(\operatorname{rot}\mathbf{E})_z - \frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0.$$

Очевидно, що це — z-компонента рівняння $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Легко бачити, що решта дві компоненти цього векторного рівняння отримаємо, розглянувши комбінації $\lambda, \mu, \nu = 0, 1, 3$ і $\lambda, \mu, \nu = 0, 2, 3$.

Таким чином, пару рівнянь Максвелла, які не містять зарядів і струмів, можна записати у 4-формалізмі так:

$$\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 0,$$

де насправді фіґурує чотири скалярних рівняння, які виникають внаслідок різних комбінацій λ, μ, ν. Це ж рівняння можна переписати так, щоб явно показати існування чотирьох незалежних скалярних рівнянь:

$$\varepsilon^{\rho\lambda\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 0. \tag{12.25}$$

12.5. Дія для електромагнітного поля

У загальному вигляді дію системи “заряджені частинки + електромагнітне поле” можна уявити як таку структуру:

$$S = S_{\mathrm{p}} + S_{\mathrm{pf}} + S_{\mathrm{f}}, \tag{12.26}$$

де доданок S_p відповідає за частинки:

$$S_\mathrm{p} = -\sum mc \int ds, \tag{12.27}$$

а доданок S_pf відображає взаємодію частинок із полем:

$$S_\mathrm{pf} = -\sum \frac{e}{c} \int A_\mu \, dx^\mu. \tag{12.28}$$

Тут знаки суми відповідають підсумовуванню за частинками. Фактично, як ми вже переконалися, дія $S_\mathrm{p} + S_\mathrm{pf}$ дає змогу отримати пару рівнянь Максвелла, які не містять зарядів і струмів.

Доданок S_f мав би враховувати саме електромагнітне поле. Структура цього останнього доданка нам поки що невідома. Розглянемо загальні міркування, за допомогою яких можна встановити його структуру.

Насамперед, для електромагнітного поля виконується принцип суперпозиції, а рівняння для поля — лінійні диференціальні (їх розв'язки задовольняють принцип суперпозиції). Отже, в дію S_f повинні входити квадратичні за полем доданки, оскільки варіація δS їх лінеаризує. Дія S_f може залежати лише від тензора електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$, але вона повинна бути скалярним інваріантом. Тому запишемо:

$$S_\mathrm{f} = a \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \, dV \, dt, \qquad dV = dx \, dy \, dz. \tag{12.29}$$

Зазначимо, що елемент об'єму в 4-просторі $dV\,dt$ є інваріантом. Вибір саме $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, а не $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ пояснюється тим, що другий інваріант, який зводиться до скалярного добутку $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, є псевдоскаляром, а не звичайним скаляром. Ще однією підказкою може слугувати те, що інваріант $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2)$ має структуру, яка траплялася нам у лаґранжіані електромагнітного поля:

$$L_\mathrm{f} = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - B^2) \, dV. \tag{12.30}$$

До визначення знака множника a також можна підійти так. Оскільки електричне поле $\mathbf{E}$ містить похідну векторного потенціалу $\partial \mathbf{A}/\partial t$, то в дії вираз $(\partial \mathbf{A}/\partial t)^2$ мусить стояти зі знаком "+", інакше могла би скластися ситуація, коли швидка зміна потенціалу $\mathbf{A}$ давала би великі від'ємні значення дії, і тоді би не існувало мінімуму. Тому $a < 0$. Значення ж a залежить від вибору системи одиниць — в системі Ґаусса $a = -1/16\pi$, в чому можна переконатися, порівнюючи (12.29) і (12.30). У результаті для дії поля маємо:

$$S_{\mathrm{f}} = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,d\Omega, \qquad \text{де} \quad d\Omega = c\,dt\,dV \tag{12.31}$$

— елемент об'єму в 4-просторі.

Остаточно дія системи набуде вигляду:

$$S = -\sum mc\int ds - \sum\frac{e}{c}\int A_\mu\,dx^\mu - \frac{1}{16\pi c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,d\Omega. \tag{12.32}$$

Розглянемо у другому доданку електричний заряд системи:

$$\sum e = \int \rho\,dV,$$

де ρ — об'ємна густина заряду. Отже, можна формально зробити такий перехід:

$$\underbrace{e\,dx^\mu}_{\text{4-вектор}} \to \rho\,dV\,dx^\mu = \rho\,\underbrace{dV\,dt}_{\text{скаляр}}\,\frac{dx^\mu}{dt},$$

звідки випливає, що величина $\rho\dfrac{dx^\mu}{dt}$ є 4-вектором. Позначимо його так:

$$j^\mu = \rho\frac{dx^\mu}{dt} = (c\rho, \mathbf{j}) \tag{12.33}$$

і називатимемо ***4-струмом***. Часова компонента, як бачимо, пов'язана з густиною заряду, а просторові утворюють вектор густини струму.

Як результат, доданок S_{pf} перетвориться до вигляду:

$$S_{\mathrm{pf}} = -\sum\frac{e}{c}\int A_\mu\,dx^\mu = -\frac{1}{c}\int j^\mu A_\mu\,dV\,dt = -\frac{1}{c^2}\int A_\mu j^\mu\,d\Omega.$$

Тепер дію можна переписати так:

$$S = -\sum mc\int ds - \frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}A_\mu j^\mu + \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)d\Omega. \tag{12.34}$$

12.6. Рівняння для поля із зарядами і струмами

Оскільки рух зарядів задано, тобто $\delta S_{\mathrm{p}} = 0$, то варіація дії зводиться до

$$\delta S = \delta S_{\mathrm{pf}} + \delta S_{\mathrm{f}} = -\frac{1}{c}\,\delta \int \left(\frac{1}{c} A_\mu j^\mu + \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right) d\Omega.$$

Якщо рух зарядів задано, то маємо також $\delta j^\mu = 0$. Крім того, врахуємо, що $F^{\mu\nu}\,\delta F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\,\delta F^{\mu\nu}$, у справедливості чого легко переконатися. Варіацію тензора $F_{\mu\nu}$ розпишемо так:

$$\delta F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta A_\mu.$$

Тепер варіація набуде вигляду:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int \left(\frac{1}{c} j^\mu\,\delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta A_\nu - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta A_\mu\right) d\Omega.$$

У другому доданку під інтеґралом поміняємо місцями індекси і врахуємо антисиметричність тензора $F^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta A_\nu = F^{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta A_\mu = -F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta A_\mu,$$

після чого отримаємо:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int \left(\frac{1}{c} j^\mu\,\delta A_\mu - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta A_\mu\right) d\Omega = 0. \qquad (12.35)$$

Проінтеґруємо другий доданок частинами:

$$\int F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta A_\mu\, d\Omega = \underbrace{\int F^{\mu\nu}\delta A_\mu\, d\Sigma_\nu}_{=0} - \int \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\,\delta A_\mu\, d\Omega.$$

Інтеґрал по гіперповерхні Σ_ν дорівнює нулю, оскільки поле на безмежності зникає.

Остаточно для варіації дії отримуємо:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}j^{\mu} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}\right)\delta A_{\mu}\, d\Omega = 0, \tag{12.36}$$

звідки випливає рівняння

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{4\pi}{c}j^{\mu}. \tag{12.37}$$

Воно відповідає чотирьом скалярним рівнянням, оскільки μ пробігає значення 0, 1, 2, 3. Розглянемо їх по черзі.

При $\mu = 0$ маємо:

$$\frac{\partial F^{00}}{\partial x^{0}} + \frac{\partial F^{01}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^{3}} = -\frac{4\pi}{c}j^{0},$$

$$\frac{\partial(-E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(-E_y)}{\partial y} + \frac{\partial(-E_z)}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c}\, c\rho, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$$

— одне з рівнянь Максвелла. При $\mu = 1$ маємо:

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x^{0}} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^{3}} = -\frac{4\pi}{c}j^{1},$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial(ct)} + \frac{\partial(-B_z)}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c}\, j_x, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - (\operatorname{rot}\mathbf{B})_x = \frac{4\pi}{c}j_x.$$

Проробляючи такі ж перетворення для $\mu = 2, 3$, отримаємо відповідно ще y- і z-компоненти векторного рівняння

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

яке збігається зі ще одним рівнянням Максвелла.

Із (12.37) нескладно отримати рівняння для 4-потенціалу

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\nu}\partial x_{\nu}}A^{\mu} = -\frac{4\pi}{c}j^{\mu}.$$

У першому доданку застосуємо умову калібрування Лоренца:

$$\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \equiv \frac{\partial A^{0}}{\partial x^{0}} + \frac{\partial A^{1}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial A^{2}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial A^{3}}{\partial x^{3}} = \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A} = 0,$$

а в другому легко зауважити, що друга похідна зводиться до даламберіана:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x_\nu} \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\Box$$

і з математичного погляду є скаляром, оскільки утворена як скалярний добуток (квадрат 4-вектора $\partial/\partial x^\nu$). Отже, рівняння для потенціалів набуває вигляду

$$\Box A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \tag{12.38}$$

У правій частині маємо 4-вектор j^μ, а в лівій — добуток скаляра на A^μ, звідки й випливає, що A^μ є 4-вектором. Зрозуміло також, що рівняння (12.38) відповідає рівнянням Д'Аламбера для потенціалів (3.20) на стор. 52.

Таким чином, на підставі спостульованого з досить загальних міркувань виразу для дії системи "заряджені частинки + електромагнітне поле"

$$S = -\sum mc \int ds - \frac{1}{c}\int \left(\frac{1}{c} A_\mu j^\mu + \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) d\Omega.$$

ми отримали з варіаційного принципу $\delta S = 0$ рівняння у 4-формі, які відповідають системі рівнянь Максвелла, а саме:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{\rho\lambda\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 0 \qquad \longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\[2ex] \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right. \\
&\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \qquad \longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \\[2ex] \operatorname{rot} \mathbf{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{array} \right.
\end{aligned} \tag{12.39}$$

12.7. 4-форма законів збереження

Як і у тривимірному випадку, спочатку отримаємо 4-форму закону збереження заряду. Продиференціюємо рівняння (12.37) за x^μ:

$$\frac{\partial^2 F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu}.$$