а в другому легко зауважити, що друга похідна зводиться до даламберіана:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x_\nu} \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\Box$$

і з математичного погляду є скаляром, оскільки утворена як скалярний добуток (квадрат 4-вектора $\partial/\partial x^\nu$). Отже, рівняння для потенціалів набуває вигляду

$$\Box A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \tag{12.38}$$

У правій частині маємо 4-вектор j^μ, а в лівій — добуток скаляра на A^μ, звідки й випливає, що A^μ є 4-вектором. Зрозуміло також, що рівняння (12.38) відповідає рівнянням Д'Аламбера для потенціалів (3.20) на стор. 52.

Таким чином, на підставі спостульованого з досить загальних міркувань виразу для дії системи "заряджені частинки + електромагнітне поле"

$$S = -\sum mc \int ds - \frac{1}{c}\int \left(\frac{1}{c} A_\mu j^\mu + \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) d\Omega.$$

ми отримали з варіаційного принципу $\delta S = 0$ рівняння у 4-формі, які відповідають системі рівнянь Максвелла, а саме:

$$\varepsilon^{\rho\lambda\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 0 \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{cases} \tag{12.39}$$

12.7. 4-форма законів збереження

Як і у тривимірному випадку, спочатку отримаємо 4-форму закону збереження заряду. Продиференціюємо рівняння (12.37) за x^μ:

$$\frac{\partial^2 F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu}.$$

Оператор диференціювання $\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu$ — симетричний, тому його згортка з антисиметричним тензором $F^{\mu\mu}$ дає нуль. Отже, в результаті отримаємо ***закон збереження заряду в 4-формі***:

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0. \tag{12.40}$$

Легко переконатися, що це рівняння еквівалентне рівнянню неперервності:

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \frac{\partial j^1}{\partial x^1} + \frac{\partial j^2}{\partial x^2} + \frac{\partial j^3}{\partial x^3} = \frac{\partial (c\rho)}{\partial (ct)} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Далі введемо ***4-вектор густини сили Лоренца***

$$f^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu \tag{12.41}$$

або в коваріантних компонентах

$$f_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} j^\nu, \tag{12.42}$$

його компоненти дорівнюють:

$$f^0 = \frac{1}{c} F^{0\nu} j_\nu = \frac{1}{c}\left(F^{01} j_1 + F^{02} j_2 + F^{03} j_3\right) =$$

$$= \frac{1}{c}\left(E_x j_x + E_y j_y + E_z j_z\right) = \frac{1}{c}(\mathbf{jE}),$$

$$f^1 = \frac{1}{c} F^{1\nu} j_\nu = \frac{1}{c}\left(F^{10} j_0 + F^{12} j_2 + F^{13} j_3\right) =$$

$$= \frac{1}{c}\left(E_x c\rho + B_z j_y - B_y j_z\right) = \rho E_x + \frac{1}{c}[\mathbf{j}, \mathbf{B}]_x.$$

Отже, 4-вектор густини сили можна покомпонентно записати так:

$$f^\mu = \left(\frac{1}{c}(\mathbf{jE}), \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{j}, \mathbf{B}]\right) = \left(\frac{1}{c}(\mathbf{jE}), \mathbf{f}\right), \tag{12.43}$$

де **f** — об'ємна густина сили Лоренца.

Тепер, враховуючи антисиметричність тензора $F^{\mu\nu}$, перепишемо рівняння (12.37) у вигляді

$$j^{\mu} = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial F^{\nu\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

і підставимо його в (12.42):

$$f_{\mu} = \frac{1}{c} \frac{c}{4\pi} F_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\lambda\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left(F_{\mu\nu} F^{\lambda\nu} \right) - F^{\lambda\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right].$$

У другому доданку зробимо перетворення

$$F^{\lambda\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{2} F^{\lambda\nu} \left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} \right),$$

де у другому доданку переставлено індекси ν і λ і враховано антисиметричність тензора електромагнітного поля.

З рівняння (12.24) вираз у дужках дорівнює:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}.$$

У результаті

$$F^{\lambda\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{2} F^{\lambda\nu} \frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(F^{\lambda\nu} F_{\lambda\nu} \right).$$

Як наслідок, для 4-вектора густини сили (12.42) маємо:

$$f_{\mu} = -\frac{\partial T^{\lambda}_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}, \tag{12.44}$$

де тензор

$$T^{\lambda}_{\mu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\lambda\nu} F_{\nu\mu} + \frac{1}{4} \delta^{\lambda}_{\mu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right) \tag{12.45}$$

називають ***тензором енерґії-імпульсу***. Цікаво відзначити, що слід цього тензора рівний нулеві:

$$\mathrm{Sp}\, T = T^{\lambda}_{\lambda} = 0, \tag{12.46}$$

в чому легко переконатися, зважаючи на те, що слід $\delta^\lambda_\lambda = 4$.

Перейдемо в (12.44)–(12.45) до контраваріантних компонент:

$$f^\mu = -\frac{\partial T^{\lambda\mu}}{\partial x^\lambda}, \tag{12.47}$$

де

$$T^{\lambda\mu} = \frac{1}{4\pi}\left(\eta_{\rho\sigma}F^{\lambda\rho}F^{\sigma\mu} + \frac{1}{4}\eta^{\lambda\mu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right). \tag{12.48}$$

Із цього виразу очевидно, що тензор $T^{\lambda\mu}$ симетричний: $T^{\lambda\mu} = T^{\mu\lambda}$. Далі після нескладних перетворень знайдемо явні вирази його компонент:

$$T^{00} = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} = w; \tag{12.49}$$

$$T^{0j} = T^{j0} = \frac{1}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]_j = \frac{1}{c}S_j = cg_j, \quad j = 1, 2, 3; \tag{12.50}$$

$$T^{jk} = -\frac{1}{4\pi}\left[E_jE_k + B_jB_k - \frac{E^2 + B^2}{2}\delta_{jk}\right] = -\sigma_{jk}, \tag{12.51}$$

де w — об'ємна густина енерґії електромагнітного поля, $\mathbf{S}$ — вектор густини потоку енерґії, $\mathbf{g}$ — густина імпульсу електромагнітного поля, а σ_{jk} — тензор напружень Максвелла. Така структура тензора $T^{\lambda\mu}$ й спричинила його назву. У матричному вигляді тензор енерґії імпульсу записується так:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w & cg_x & cg_y & cg_z \\ S_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y/c & -\sigma_{xy} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z/c & -\sigma_{xz} & -\sigma_{yz} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix}. \tag{12.52}$$

Розписуючи покомпонентно рівняння (12.47), отримаємо:

$$f^0 = \frac{1}{c}(\mathbf{jE}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{c}\operatorname{div}\mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{jE}) + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0$$

— закон збереження енерґії, та

$$f^k = -\frac{\partial g_k}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \mathbf{f} + \mathrm{Div}(-\hat{\sigma}) = 0$$

— закон збереження імпульсу.

Цікаво, що, беручи за основу рівняння (12.44), яке виражає закони збереження енерґії та імпульсу електромагнітного поля, можна отримати рівняння поля, рухаючись у зворотньому напрямку. Підставивши означення тензора енерґії-імпульсу та сили Лоренца, матимемо:

$$\frac{\partial T^\lambda_\mu}{\partial x^\lambda} = -f_\mu \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(F^{\lambda\nu}F_{\nu\mu} + \frac{1}{4}\delta^\lambda_\mu F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right) = -\frac{4\pi}{c}F_{\mu\nu}j^\nu.$$

Далі, після елементарних перетворень у другому доданку,

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(F^{\lambda\nu}F_{\nu\mu}\right) + \frac{1}{2}F^{\rho\sigma}\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} = -\frac{4\pi}{c}F_{\mu\nu}j^\nu.$$

Пару “німих” індексів $\rho\sigma$ зручно замінити на $\lambda\nu$, тому:

$$\frac{\partial F^{\lambda\nu}}{\partial x^\lambda}F_{\nu\mu} + F^{\lambda\nu}\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2}F^{\lambda\nu}\frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} = -\frac{4\pi}{c}F_{\mu\nu}j^\nu.$$

Із другим доданком зробимо тотожні перетворення:

$$F^{\lambda\nu}\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{2}F^{\lambda\nu}\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + \underbrace{\frac{1}{2}F^{\lambda\nu}\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda}}_{\nu\leftrightarrow\lambda} = \frac{1}{2}F^{\lambda\nu}\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2}F^{\nu\lambda}\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} =$$

$$= \frac{1}{2}F^{\lambda\nu}\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2}F^{\lambda\nu}\frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}$$

Звідси отримаємо:

$$F_{\nu\mu}\frac{\partial F^{\lambda\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2}F^{\lambda\nu}\underbrace{\left(\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}\right)}_{=0} = -\frac{4\pi}{c}F_{\mu\nu}j^\nu,$$

де враховано співвідношення (12.24). Остаточно, двічі помінявши індекси у тензорах F у першому доданку, матимемо:

$$F_{\mu\nu}\frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x^\lambda} = -\frac{4\pi}{c}F_{\mu\nu}j^\nu.$$

Отже, рівняння

$$\frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x^{\lambda}} = -\frac{4\pi}{c} j^{\nu},$$

що відповідає парі рівнянь Максвелла із зарядами і струмами, виконується *майже завжди*: винятком є випадок $\det F = 0$. Своєю чергою, визначник тензора парного ранґу можна записати як квадрат його ***пфаффіана***[1]:

$$\det F = (\mathrm{Pf}\, F)^2,$$

де для тензора четвертого ранґу $\mathrm{Pf}\, F = \frac{1}{8}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ — один із інваріантів поля, пропорційний до скалярного добутку $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Тобто рівняння Максвелла випливають із законів збереження енерґії та імпульсу електромагнітного поля у всіх випадках, крім $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.

12.8.* Рівняння Лоренца–Абрагама–Дірака

Як ми переконалися раніше [див. (12.8)], 4-вектор сили Лоренца $\mathcal{F}^{\mu} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_{\nu}$ задовольняє умову $\mathcal{F}^{\mu}u_{\mu} = 0$. Така умова у спеціальній теорії відносності повинна виконуватися для будь-якого 4-вектора сили внаслідок ортогональності 4-векторів швидкості і прискорення (10.55). Розглянемо з цього погляду вираз для сили радіаційного гальмування (див. стор. 128), тривимірний вираз якої отримав Лоренц:

$$\mathbf{f}_{\mathrm{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}} = \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\mathbf{a}}.$$

Зрозуміло, що у границі малих швидкостей координатна частина 4-вектора $\mathcal{F}^{\mu}_{\mathrm{rad}}$ повинна збігатися з класичним результатом. Отже, найпростішим узагальненням буде

$$\mathcal{F}^{\mu}_{\mathrm{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3}\,\frac{dw^{\mu}}{d\tau} = \frac{2e^2}{3c^3}\,\frac{d^2u^{\mu}}{d\tau^2}. \tag{12.53}$$

Такий вектор, однак, не задовольняє умови $\mathcal{F}^{\mu}_{\mathrm{rad}}u_{\mu} = 0$. Вперше релятивістське узагальнення сили радіаційного гальмування дав

[1] Див., напр., `https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Pfaffian`.