Отже, рівняння

$$\frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x^{\lambda}} = -\frac{4\pi}{c} j^{\nu},$$

що відповідає парі рівнянь Максвелла із зарядами і струмами, виконується *майже завжди*: винятком є випадок $\det F = 0$. Своєю чергою, визначник тензора парного ранґу можна записати як квадрат його ***пфаффіана***[1]:

$$\det F = (\operatorname{Pf} F)^2,$$

де для тензора четвертого ранґу $\operatorname{Pf} F = \frac{1}{8}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$ — один із інваріантів поля, пропорційний до скалярного добутку $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Тобто рівняння Максвелла випливають із законів збереження енерґії та імпульсу електромагнітного поля у всіх випадках, крім $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.

12.8.* Рівняння Лоренца–Абрагама–Дірака

Як ми переконалися раніше [див. (12.8)], 4-вектор сили Лоренца $\mathcal{F}^{\mu} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_{\nu}$ задовольняє умову $\mathcal{F}^{\mu} u_{\mu} = 0$. Така умова у спеціальній теорії відносності повинна виконуватися для будь-якого 4-вектора сили внаслідок ортогональності 4-векторів швидкості і прискорення (10.55). Розглянемо з цього погляду вираз для сили радіаційного гальмування (див. стор. 128), тривимірний вираз якої отримав Лоренц:

$$\mathbf{f}_{\mathrm{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}} = \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\mathbf{a}}.$$

Зрозуміло, що у границі малих швидкостей координатна частина 4-вектора $\mathcal{F}^{\mu}_{\mathrm{rad}}$ повинна збігатися з класичним результатом. Отже, найпростішим узагальненням буде

$$\mathcal{F}^{\mu}_{\mathrm{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{dw^{\mu}}{d\tau} = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{d^2 u^{\mu}}{d\tau^2}. \tag{12.53}$$

Такий вектор, однак, не задовольняє умови $\mathcal{F}^{\mu}_{\mathrm{rad}} u_{\mu} = 0$. Вперше релятивістське узагальнення сили радіаційного гальмування дав

[1] Див., напр., `https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Pfaffian`.

Абрагам[2], розглянувши баланс енерґії й імпульсу при випромінюванні[3]. У довільній системі відліку він отримав силу в такому вигляді:

$$\mathbf{f}_{\mathrm{rad;\,LA}} = \frac{2e^2}{3c^3}\left[\frac{\dot{\mathbf{a}}}{1-\beta^2} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v},\dot{\mathbf{a}})}{c^2(1-\beta^2)^2} + \frac{3\mathbf{a}(\mathbf{v},\mathbf{a})}{c^2(1-\beta^2)^2} + \frac{3\mathbf{v}(\mathbf{v},\mathbf{a})^2}{c^4(1-\beta^2)^3}\right],$$

де $\beta = v/c$. Нескладно переконатися, що з точністю до $(v/c)^2$ така сила відповідає $\dfrac{2e^2}{3c^3}\dot{\mathbf{w}}$, де вектор $\mathbf{w}$ — координатна частина 4-прискорення (10.53):

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{a}}{1-v^2/c^2} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v},\mathbf{a})}{c^2(1-v^2/c^2)^2}. \tag{12.54}$$

Виявляється також, що результат Абрагама можна отримати внаслідок перетворення Лоренца класичного виразу (8.49) для сили радіаційного гальмування[4].

Коректну 4-силу найпростіше отримати з (12.53), додавши величину, яка зникає у границі малих швидкостей:

$$\mathcal{F}^{\mu}_{\mathrm{LAD}} = \frac{2e^2}{3c^3}\,\frac{d^2u^{\mu}}{d\tau^2} + \alpha u^{\mu}.$$

З умови $\mathcal{F}^{\mu}_{\mathrm{LAD}}u_{\mu} = 0$, тобто

$$\mathcal{F}^{\mu}_{\mathrm{LAD}}u_{\mu} = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{d^2u^{\mu}}{d\tau^2}u_{\mu} + \alpha\,\underbrace{u^{\mu}u_{\mu}}_{=c^2} = 0,$$

матимемо, помінявши в другому доданку верхні й нижні індекси місцями,

$$\mathcal{F}^{\mu}_{\mathrm{LAD}} = \frac{2e^2}{3c^3}\left[\frac{d^2u^{\mu}}{d\tau^2} - \frac{u^{\mu}u^{\nu}}{c^2}\frac{d^2u_{\nu}}{d\tau^2}\right] \tag{12.55}$$

---

[2]Макс Абрагам (Max Abraham, 1875–1922) — німецький фізик-теоретик.

[3]M. Abraham, “Zur Theorie der Strahlung und des Strahlungsdruckes”. Annalen der Physik **14**(7): 236–287 (1904), `https://doi.org/10.1002/andp.19043190703`; M. Abraham, *Theorie der Elektrizität: Elektromagnetische Theorie der Strahlung* (Leipzig: Teubner, 1905), формула (85) на стор. 123.

[4]M. Laue, “Die Wellenstrahlung einer bewegten Punktladung nach dem Relativitätsprinzip”. Annalen der Physik **333**(2), 436–442 (1909), `https://doi.org/10.1002/andp.19093330210`.

або, після перетворення

$$u^\nu \frac{d^2 u_\nu}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\underbrace{\left(u^\nu \frac{du_\nu}{d\tau}\right)}_{u^\nu w_\nu = 0} - \frac{du^\nu}{d\tau}\frac{du_\nu}{d\tau} = -\frac{du^\nu}{d\tau}\frac{du_\nu}{d\tau},$$

у трохи іншому вигляді:

$$\mathcal{F}^\mu_{\text{LAD}} = \frac{2e^2}{3c^3}\left[\frac{d^2 u^\mu}{d\tau^2} + \frac{u^\mu}{c^2}\frac{du^\nu}{d\tau}\frac{du_\nu}{d\tau}\right]. \tag{12.56}$$

Дірак 1938 року[5] отримав такий вираз із дещо інших міркувань, розглядаючи рух електрона в зовнішньому електромагнітному полі, яке описується тензором $F^{\mu\nu}$ з урахуванням втрат на випромінювання внаслідок радіаційного гальмування. Рівняння руху електрона можна подати в такому вигляді:

$$m\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_\nu + \mathcal{F}^\mu_{\text{LAD}}. \tag{12.57}$$

12.9.* Випадок довільного поля

У цьому розділі ми активно використовуватимемо похідні виду $\dfrac{\partial q}{\partial x^\mu}$, тому для них введемо традиційне в 4-формалізмі позначення:

$$\frac{\partial q}{\partial x^\mu} \equiv q_{,\mu}, \tag{12.58}$$

який застосовуватимемо для спрощення запису громіздких виразів.

Загальний вираз для дії можна записати у вигляді:

$$S = \int \Lambda(q, q_{,\mu})\, dV\, dt = \frac{1}{c}\int \Lambda(q, q_{,\mu})\, d\Omega, \tag{12.59}$$

де Λ — густина лаґранжіанв,

$$L = \int \Lambda\, dV. \tag{12.60}$$

[5] P. A. M. Dirac, "Classical theory of radiating electrons", Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences **167**(929): 148–169 (1938), `https://doi.org/10.1098/rspa.1938.0124`.

Для електромагнітного поля, наприклад, роль узагальнених змінних q відіграють компоненти 4-потенціалу A_μ, проте поки що конкретизувати вигляд Λ не будемо.

З варіаційного принципу маємо:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\delta q + \frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\mu}}\delta\left(\frac{\partial q}{\partial x^\mu}\right)\right\} d\Omega = 0.$$

Перетворимо другий доданок так:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\mu}}\delta\left(\frac{\partial q}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\mu}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta q = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\mu}}\delta q\right] - \delta q\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\mu}}.$$

Застосовуючи узагальнену на 4-простір теорему Ґаусса, перепишемо інтеґрал по 4-об'єму як інтеґрал по гіперповерхні:

$$\int\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\mu}}\delta q\right] d\Omega = \oint\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\mu}}\delta q\, d\Sigma_\mu = 0,$$

де рівність поверхневого інтеґрала нулеві забезпечимо вибором безмежно віддаленої поверхні.

У результаті варіація буде:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\Lambda}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\mu}}\right\}\delta q\, d\Omega = 0, \qquad (12.61)$$

звідки отримаємо рівняння для функції Λ:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\mu}} - \frac{\partial\Lambda}{\partial q} = 0. \qquad (12.62)$$

Далі запишемо похідну:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\Lambda}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\nu}}\frac{\partial q_{,\nu}}{\partial x^\mu}.$$

Підставляючи сюди похідну $\partial\Lambda/\partial q$ з (12.62), отримаємо:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^\mu} = \frac{\partial q}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\nu}}\right) + \frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\nu}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial q}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial q}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\mu}}\right). \qquad (12.63)$$

Вираз $\partial\Lambda/\partial x^\mu$ можна тотожно замінити так:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu \frac{\partial\Lambda}{\partial x^\nu}.$$

Тоді, підставляючи його в (12.63), отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial q}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\mu}} - \delta_\mu^\nu\Lambda\right) = 0. \tag{12.64}$$

Величина в дужках є тензором, який позначимо T_ν^μ:

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial q}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\mu}} - \delta_\mu^\nu\Lambda. \tag{12.65}$$

Тоді рівняння (12.64) набуде вигляду

$$\frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x^\nu} = 0, \tag{12.66}$$

який відповідає структурі закону збереження величини T_μ^ν. Відзначимо, що у випадку набору змінних $\{q^{(l)}\}$ цей тензор визначається так:

$$T_\mu^\nu = \sum_l \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,\mu}^{(l)}} - \delta_\mu^\nu\Lambda. \tag{12.67}$$

Завдання

12.1. Враховуючи інваріантність заряду щодо переходу між інерціальними системами відліку, переконайтесь на прикладі рівномірно рухомого точкового заряду в тому, що величини $(c\rho, \mathbf{j})$ справді утворюють 4-вектор j^μ.

Розв'язок. Запишемо густину струму в системі K у вигляді $\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = e\delta(x - vt)\delta(y)\delta(z)$. Надалі достатньо обмежитися залежністю від x. Застосувавши до арґумента дельта-функції перетворення Лоренца і релятивістський закон додавання швидкостей, отримаємо:

$$c\rho = ce\delta(x - vt) =$$

$$= ce\delta\left(\frac{x'+v_0t'}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{v'+v_0}{1+v'v_0/c^2}\,\frac{t'+v_0x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=$$

$$= ce\delta\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+v'v_0/c^2}(x'-v't')\right)=$$

$$= e\frac{c+v'v_0/c}{\sqrt{1-\beta^2}}\delta(x'-v't')=\frac{c\rho'+\beta j'_x}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

де використано властивість дельта-функції $\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x)$ та враховано, що $\rho'v' = j'_x$. Аналогічно переконуємося, що

$$j_x = ev\delta(x-vt) = \frac{j'_x+\beta c\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

тобто величини $c\rho$ і j_x перетворюються як компоненти 4-вектора, що і треба було показати.

12.2. Отримайте інваріанти поля $B^2 - E^2$ та $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, розписуючи вирази (12.20) явно.