Розділ 13

Рівняння для електромагнітного поля в середовищі

13.1. Усереднення мікроскопічних рівнянь Максвелла–Лоренца

Розглядаючи систему рівнянь Максвелла в середовищі, розділимо заряди і струми на два типи: заряди ρ_{m} і струми $\mathbf{j}_{\mathrm{m}}$ середовища, що відповідають мікроскопічним частинкам (наприклад, електронам), і заряди ρ_0 і струми $\mathbf{j}_0$, внесені в середовище ззовні. Зрозуміло, що густини ρ_{m} і $\mathbf{j}_{\mathrm{m}}$ характеризуються значною мікроскопічною неоднорідністю, тоді як ρ_0 і $\mathbf{j}_0$ можна вважати заданими й розподіленими на мікроскопічному рівні досить однорідно.

Система рівнянь Максвелла набуде вигляду:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\big(\rho_0(\mathbf{r}, t) + \rho_{\mathrm{m}}(\mathbf{r}, t)\big), \tag{13.1a}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{13.1b}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \tag{13.1c}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\big(\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r}, t)\big). \tag{13.1d}$$

Тут індекс m відповідає мікроскопічно розподіленим величинам. Густини заряду і струму визначаються виразами:

$$\rho_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t) = \sum_i e_i \delta\big(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)\big), \tag{13.2}$$

$$\mathbf{j}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t) = \sum_i e_i \mathbf{v}_i(t) \delta\big(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)\big), \tag{13.3}$$

де відбувається за всіма зарядами середовища, а їх координати $\mathbf{r}_i$ і швидкості $\mathbf{v}_i$ визначаються внаслідок розв'язування рівнянь руху

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = e_i \left(\mathbf{E}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r}_i,t) + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_i, \mathbf{B}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r}_i,t)] \right) + \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r}_i,t). \tag{13.4}$$

Тут до сили Лоренца, яка діє на частинку з боку електромагнітного поля, додано для загальності ще деяку зовнішню силу $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}$, що може мати неелектромагнітну природу.

Кількість зарядів у будь-якому макроскопічному об'ємі величезна: навіть у газі в 1 см^3 міститься порядку 10^{19} молекул (в ідеальному газу цю кількість визначає так зване ***число Лошмідта***[1] $n_0 \simeq 2.7 \cdot 10^{19}$, пов'язане з ***числом (сталою) Авоґадро***[2] $N_{\mathrm{A}} \simeq 6.0 \cdot 10^{23}$ через молярний об'єм $V_{\mathrm{mol}} \simeq 22.4$ л як $n_0 = N_{\mathrm{A}}/V_{\mathrm{mol}}$). У рідинах чи твердих тілах кількість буде суттєво більшою.

Очевидно, що знайти рівняння руху кожного заряду середовища й відповідно задати густини ρ_{m} і $\mathbf{j}_{\mathrm{m}}$ нереально — на це забракне будь-яких доступних обчислювальних потужностей. Однак деталі руху кожного окремого заряду середовища навряд чи становлять значний інтерес. Ми проведемо усереднення системи рівнянь Максвелла (13.1) за координатами й часом, використовуючи таке означення середнього деякої величини F:

$$\langle F(\mathbf{r},t) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V} dV' \, \frac{1}{\Delta T} \int\limits_0^{\Delta T} dt \, F(\mathbf{r}+\mathbf{r}', t+t'), \tag{13.5}$$

[1] Йозеф Лошмідт (Johann Josef Loschmidt (15.III.1821–08.VII.1895), австрійський фізик і хімік.

[2] Амедео Авоґадро (Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro di Quaregna e Cerreto, 09.VIII.1776–09.VII.1856), італійський фізик і хімік.

де ΔV — якийсь макроскопічний об'єм, а ΔT — проміжок часу, що перевищує характерні атомні періоди. Це дозволить оперувати з величинами, у яких буде згладжено мікроскопічні неоднорідності, як просторові, так і часові, що зазвичай несуттєві в задачах про електродинамічні властивості середовища як макроскопічного об'єкта, див. рис. 13.1.

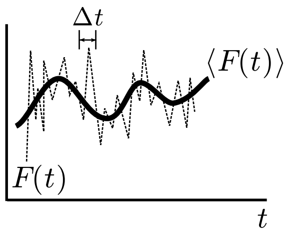

Рис. 13.1. Мікроскопічно неоднорідна функція $F(t)$ (пунктирна лінія) і згладжена функція $\langle F(t)\rangle$ (суцільна товста лінія). Зображення схематичне.

Відповідно макроскопічно усереднені густини позначимо так:

$$\langle \rho_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t)\rangle = \rho'(\mathbf{r},t), \tag{13.6}$$

$$\langle \mathbf{j}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t)\rangle = \mathbf{j}'(\mathbf{r},t). \tag{13.7}$$

Усереднення похідних за часом і координатами проведемо так:

$$\left\langle \frac{\partial F(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta V} dV'\,\frac{1}{\Delta T}\int\limits_{0}^{\Delta T} dt\,\frac{\partial}{\partial(t+t')}F(\mathbf{r}+\mathbf{r}',t+t') =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta V} dV'\,\frac{1}{\Delta T}\int\limits_{0}^{\Delta T} dt\,F(\mathbf{r}+\mathbf{r}',t+t') = \frac{\partial}{\partial t}\langle F(\mathbf{r},t)\rangle.$$

Аналогічно можна зробити перетворення для похідних за координатами, тому

$$\langle \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{r},t)\rangle = \operatorname{div}\langle \mathbf{F}(\mathbf{r},t)\rangle, \tag{13.8}$$

$$\langle \operatorname{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r},t)\rangle = \operatorname{rot}\langle \mathbf{F}(\mathbf{r},t)\rangle. \tag{13.9}$$

Для усереднених полів використовуватимемо позначення:

$$\langle \mathbf{E}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t)\rangle = \mathbf{E}(\mathbf{r},t), \qquad \langle \mathbf{B}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t)\rangle = \mathbf{B}(\mathbf{r},t). \tag{13.10}$$

Зважаючи на те, що розподіли ρ_0 і $\mathbf{j}_0$ не є мікроскопічно неоднорідними, відповідні середні збігаються з самими величинами:

$$\langle \rho_0(\mathbf{r},t)\rangle = \rho_0(\mathbf{r},t), \qquad \langle \mathbf{j}_0(\mathbf{r},t)\rangle = \mathbf{j}_0(\mathbf{r},t). \tag{13.11}$$

Усереднення системи рівнянь Максвелла–Лоренца дасть нову систему:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 4\pi\big(\rho_0(\mathbf{r},t) + \rho'(\mathbf{r},t)\big), \tag{13.12}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0, \tag{13.13}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \tag{13.14}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\big(\mathbf{j}_0(\mathbf{r},t) + \mathbf{j}'(\mathbf{r},t)\big). \tag{13.15}$$

Виявляється, що розподіли ρ' і $\mathbf{j}'$, які визначаються особливостями середовища, можна пов'язати з певними вимірюваними величинами.

Введемо ***вектор поляризації*** $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$:

$$\operatorname{div}\mathbf{P} = -\rho' \tag{13.16}$$

і ***вектор намагніченості*** $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$:

$$c\operatorname{rot}\mathbf{M} = \mathbf{j}' + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}. \tag{13.17}$$

Рівняння Максвелла перепишемо так:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho_0,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) = \frac{1}{c}\frac{\partial(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0.$$

Нові вектори $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ і $\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ позначимо як

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}. \tag{13.18}$$

Величину $\mathbf{D}$ називають вектором ***електричного зміщення***, а $\mathbf{H}$ — вектором ***напруженості магнітного поля***.

У результаті система рівнянь Максвелла в середовищі матиме вигляд:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_0, \tag{13.19a}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{13.19b}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{13.19c}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0. \tag{13.19d}$$

Порівняно з рівняннями у вакуумі, два зберігають свою форму, а у двох зроблено заміну векторів $\mathbf{E}$ на $\mathbf{D}$ і $\mathbf{B}$ на $\mathbf{H}$. Потрібно, однак, пам'ятати, що вектори $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$ тут мають дещо інший зміст — макроскопічно усереднені напруженості полів.

Як і раніше, ця система містить 8 рівнянь (два скалярних і два векторних), однак кількість невідомих тепер становить 12 — чотири вектори: $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$. Тут на допомогу приходить те, що в багатьох задачах існує досить простий зв'язок між векторами, які описують електричне й магнітне поля. Відповідні рівняння називають ***матеріальними***, вони будуть предметом розгляду в наступних розділах.

13.2. Узагальнена індукція

Розділення індукованого струму $\mathbf{j}'$ на струм поляризації і струм намагнічення не завжди виявляється можливим. Так, у швидкозмінних полях такий поділ не вдається зробити однозначно. Тому для таких задач зручніше ввести лише один новий вектор

$$\mathscr{D}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+4\pi\int\limits_{-\infty}^{t}\mathbf{j}'(\mathbf{r},t')\,dt',\tag{13.20}$$

який називають ***вектором узагальненої індукції***. Вважають, що в момент часу $t=-\infty$ електромагнітне було відсутнє, а отже й індукований струм дорівнює нулеві.

Із закону збереження заряду (який справджується окремо для індукованих і окремо для вільних зарядів)

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}'=0\tag{13.21}$$

випливає, що

$$\rho'(\mathbf{r},t)=-\int\limits_{-\infty}^{t}\operatorname{div}\mathbf{j}'(\mathbf{r},t')\,dt'.\tag{13.22}$$

Тому з рівняння $\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi(\rho_0+\rho')$ отримаємо:

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{E}+4\pi\int\limits_{-\infty}^{t}\mathbf{j}'\,dt'\right)=4\pi\rho_0$$

або

$$\operatorname{div}\mathscr{D}=4\pi\rho_0.$$

Величину

$$\mathscr{P}(\mathbf{r},t)=-\int\limits_{-\infty}^{t}\mathbf{j}'(\mathbf{r},t')\,dt'\tag{13.23}$$

називають ***узагальненою поляризацією***. Отже, подібно до зв'язку між векторами $\mathbf{D}$ і $\mathbf{P}$, у цьому випадку:

$$\mathscr{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathscr{P}.\tag{13.24}$$

Аналогічно з рівняння $\operatorname{rot}\mathbf{B} = 4\pi(\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}') + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$ матимемо:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E} + 4\pi\int\limits_{-\infty}^{t}\mathbf{j}'\,dt'\right)$$

або

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathscr{D}}{\partial t}.$$

У результаті система рівнянь Максвелла набуде вигляду:

$$\operatorname{div}\mathscr{D} = 4\pi\rho_0, \tag{13.25a}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{13.25b}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{13.25c}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathscr{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0. \tag{13.25d}$$

При восьми рівняннях маємо дев'ять невідомих (вектори $\mathbf{E}, \mathscr{D}, \mathbf{B}$).

13.3. Фізичний зміст вектора поляризації

Для з'ясування фізичного змісту вектора $\mathbf{P}$ скористаємося таким математичним прийомом: рівняння $\operatorname{div}\mathbf{P} = -\rho'$, яке пов'язує вектор поляризації з густиною зв'язаних зарядів, домножимо зліва і справа на скалярний добуток $(\mathbf{a}, \mathbf{r})$, де $\mathbf{a}$ — довільний сталий вектор, і проінтеґруємо по об'єму V:

$$\int\limits_V (\mathbf{a}, \mathbf{r})\operatorname{div}\mathbf{P}\,dV = -\int\limits_V (\mathbf{a}, \mathbf{r})\rho'\,dV. \tag{13.26}$$

Далі зробимо очевидне перетворення:

$$(\mathbf{P}, \boldsymbol{\nabla})(\mathbf{a}, \mathbf{r}) = (\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{P}(\mathbf{a}, \mathbf{r})) - (\mathbf{a}, \mathbf{r})(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{P})$$

Тому

$$\int\limits_V (\mathbf{a},\mathbf{r})\rho'\,dV = \int\limits_V (\mathbf{P},\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{a},\mathbf{r})\,dV - \underbrace{\int\limits_V (\boldsymbol{\nabla},\mathbf{P}(\mathbf{a},\mathbf{r}))\,dV}_{=\oint\limits_S (\mathbf{P}(\mathbf{a},\mathbf{r}),d\mathbf{S})=0}.$$

Останній інтеґрал можна за теоремою Ґаусса переписати через поверхневий, який дорівнює нулю, якщо поверхня S охоплює тіло ззовні, де немає зв'язаних зарядів,а отже $\mathbf{P}=0$.

За допомогою тотожності $(\mathbf{a},\mathbf{P}) = (\mathbf{P},\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{a},\mathbf{r})$, у справедливості якої легко переконатися безпосередніми розрахунками, отримаємо:

$$\int\limits_V (\mathbf{a},\mathbf{r})\rho'\,dV = \int\limits_V (\mathbf{P},\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{a},\mathbf{r})\,dV = \int\limits_V (\mathbf{a},\mathbf{P})\,dV,$$

звідки, зважаючи на довільність вектора $\mathbf{a}$, маємо

$$\int\limits_V \mathbf{r}\rho'\,dV = \int\limits_V \mathbf{P}\,dV, \tag{13.27}$$

тобто вектор поляризації $\mathbf{P}$ має зміст дипольного моменту одиниці об'єму середовища (йдеться про момент зв'язаних зарядів).

13.4. Фізичний зміст вектора намагніченості

Для початку розглянемо стаціонарний випадок. тоді співвідношення між зв'язаними струмами $\mathbf{j}'$ і вектором намагніченості $\mathbf{M}$ має вигляд:

$$\mathbf{j}' = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}. \tag{13.28}$$

Домножимо цю рівність зліва векторно на радіус-вектор $\mathbf{r}$, потім скалярно на довільний сталий вектор $\mathbf{a}$ і проінтеґруємо по об'єму середовища V:

$$\frac{1}{c}\int\limits_V (\mathbf{a},[\mathbf{r},\mathbf{j}'])\,dV = \int\limits_V (\mathbf{a},[\mathbf{r},\mathrm{rot}\,\mathbf{M}])\,dV.$$

Із підінтеґральним виразом праворуч виконаємо перетворення з мішаними добутками:

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{r}, \operatorname{rot}\mathbf{M}]) = ([\mathbf{a}, \mathbf{r}], \operatorname{rot}\mathbf{M}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{r}], [\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{M}]) =$$
$$= -(\boldsymbol{\nabla}, [[\mathbf{a}, \mathbf{r}], \underset{\cdot}{\mathbf{M}}]) = (\boldsymbol{\nabla}, [\mathbf{M}, [\mathbf{a}, \mathbf{r}]]) - (\boldsymbol{\nabla}, [\mathbf{M}, [\mathbf{a}, \underset{\cdot}{\mathbf{r}}]]) =$$
$$= (\boldsymbol{\nabla}, [\mathbf{M}, [\mathbf{a}, \mathbf{r}]]) + (\mathbf{M}, [\boldsymbol{\nabla}, [\mathbf{a}, \underset{\cdot}{\mathbf{r}}]]) =$$
$$= \operatorname{div}[\mathbf{M}, [\mathbf{a}, \mathbf{r}]] + 2(\mathbf{a}, \mathbf{M}).$$

При інтеґруванні за об'ємом першого доданка можемо перейти за теоремою Ґаусса до поверхневого інтеґрала, який дорівнює нулеві, якщо поверхня повністю охоплює середовище. Тому маємо:

$$\frac{1}{c}\int\limits_V (\mathbf{a}, [\mathbf{r}, \mathbf{j}']) \, dV = 2\int\limits_V (\mathbf{a}, \mathbf{M}) \, dV,$$

або, зважаючи на довільність вектора $\mathbf{a}$,

$$\frac{1}{2c}\int\limits_V [\mathbf{r}, \mathbf{j}'] \, dV = \int\limits_V \mathbf{M} \, dV, \tag{13.29}$$

тобто вектор намагніченості $\mathbf{M}$ має зміст магнітного дипольного моменту одиниці об'єму середовища.

У нестаціонарному випадку, коли

$$\mathbf{j}' = \operatorname{rot}\mathbf{M} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

така проста інтерпретація вектора намагніченості вже неможлива.

13.5. Умови на межі двох середовищ

Розглянемо межу розділу двох середовищ, (1) і (2). Нехай $\mathbf{n}$ — одиничний вектор нормалі до поверхні розділу, який для визначеності спрямуємо з середовища (1) у (2). Виділимо достатньо малий об'єм циліндричної форми, нижня основа якого S_1 знаходиться в середовищі (1), а верхня S_2 — відповідно в середовищі (2). Поверхню

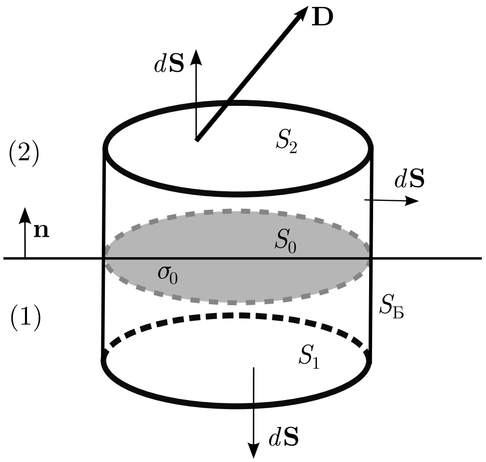

Рис. 13.2. Малий об'єм на межі розділу двох середовищ для розрахунку граничних умов на вектор **D**.

розділу цей об'єм перетинатиме на ділянці S_0, яку при достатньо малій величині об'єму можна вважати плоскою. Описану конфіґурацію проілюстровано на рис. 13.2

Рівняння

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_0 \tag{13.30}$$

тут потрібно розглядати в інтеґральній формі, оскільки при переході через границю розділу фізичні величини можуть змінюватися стрибкоподібно, що спричинятиме труднощі опису за допомогою диференціальних рівнянь. Тому запишемо

$$\oint\limits_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = 4\pi \int\limits_V \rho_0\, dV = 4\pi q_0, \tag{13.31}$$

де S і V — відповідно поверхня й об'єм циліндра, а q_0 — заряд всередині цього об'єму.

Інтеґрал по поверхні S розіб'ємо на три частини, розглянувши окремо верхню S_2 й нижню S_1 основи й бічну поверхню $S_Б$:

$$\oint\limits_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = \int\limits_{S_2} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) + \int\limits_{S_1} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) + \int\limits_{S_Б} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = 4\pi q_0. \tag{13.32}$$

На поверхні S_2 вектори $d\mathbf{S}$ і $\mathbf{n}$ співнапрямлені, а на поверхні S_1 — напрямлені протилежно. Оскільки розміри циліндра малі, то можна вважати, що значення вектора $\mathbf{D}$ стале на основах циліндра. Скалярний добуток $(\mathbf{D}, d\mathbf{S})$ при цьому буде визначати нормальна складова вектора $\mathbf{D}$ з відповідним знаком:

$$\int_{S_2} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = D_{2n} S_2, \qquad \int_{S_1} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = -D_{1n} S_1.$$

Далі спрямуємо основи циліндра до границі розділу

$$S_1 \to S_0, \qquad S_2 \to S_0,$$

водночас бічна поверхня прямуватиме до нуля, а разом із нею й відповідний інтеґрал. Тому отримаємо:

$$(D_{2n} - D_{1n}) S_0 = 4\pi q_0 = 4\pi \sigma_0 S_0,$$

де σ_0 — поверхнева густина вільних зарядів на границі розділу. Остаточно отримаємо умову:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi \sigma_0. \tag{13.33}$$

Легко бачити, що з рівняння

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

яке в інтеґральній формі має вигляд

$$\oint_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0,$$

випливає внаслідок такого самого розгляду умова на нормальні складові вектора $\mathbf{B}$:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0. \tag{13.34}$$

Відразу зазначимо ще одну умову, яку можна отримати з означення вектора поляризації через індуковані заряди

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho'.$$

Вона матиме вигляд:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma', \tag{13.35}$$

де σ' — поверхнева густина індукованих зарядів.

Ще одну трійку граничних умов отримаємо за допомогою рівняння

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{13.36}$$

і подібних до нього.

Замкнений контур L виберемо у вигляди малого прямокутника, нижня сторона якого L_1 перебуває у середовищі (1), а верхня L_2 — у середовищі (2). Бічні сторони позначимо $L'_{\text{Б}}$ і $L''_{\text{Б}}$. Танґенціальний (дотичний до поверхні розділу) одиничний вектор у площині S контура позначимо $\boldsymbol{\tau}$, а перпендикулярний до площини — $\boldsymbol{\nu}$. У результаті вектори $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}$ будуть трійкою взаємноперпендикулярних ортів, див. рис. 13.3.

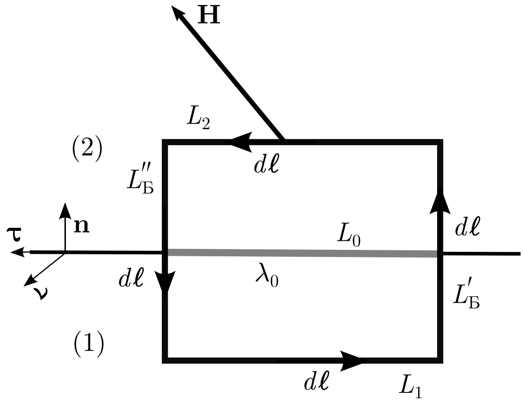

Рис. 13.3. Контур на межі розділу двох середовищ для розрахунку граничних умов на вектор **H**.

Як і раніше, рівняння (13.36) потрібно записати в інтеґральній формі:

$$\oint\limits_L (\mathbf{H}, d\boldsymbol{\ell}) = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S (\mathbf{j}_0, d\mathbf{S}) + \frac{1}{c}\int\limits_S \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, d\mathbf{S}\right). \tag{13.37}$$

Контурний інтеґрал розіб'ємо на частини:

$$\oint\limits_L (\mathbf{H}, d\boldsymbol{\ell}) = \int\limits_{L_1} (\mathbf{H}, d\boldsymbol{\ell}) + \int\limits_{L_2} (\mathbf{H}, d\boldsymbol{\ell}) + \int\limits_{L'_{\text{Б}}} (\mathbf{H}, d\boldsymbol{\ell}) + \int\limits_{L''_{\text{Б}}} (\mathbf{H}, d\boldsymbol{\ell}).$$

Далі стискатимемо прямокутник до границі розділу (позначимо цю лінію L_0), так що бічні сторони прямуватимуть до нуля, а разом із ними й відповідні інтеґрали, оскільки поле $\mathbf{H}$ скінченне. Також при такому переході прямуватиме до нуля й інтеґрал $\int_S \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, d\mathbf{S}\right)$.

Ще один поверхневий інтеґрал $\int_S (\mathbf{j}_0, d\mathbf{S})$ перепишемо через лінійну густину вільних поверхневих струмів λ_0:

$$\int\limits_S (\mathbf{j}_0, d\mathbf{S}) = \lambda_{0\nu} L_0,$$

де $\lambda_{0\nu}$ означає проєкцію струму на напрямок $\boldsymbol{\nu}$.

Значення інтеґралів на контурах L_1 і L_2 виражаються через танґенціальні складові вектора $\mathbf{H}$ (пригадаймо, що розміри контурів малі), при цьому потрібно враховувати взаємну орієнтацію контура й вектора $\boldsymbol{\tau}$.

Після всіх цих операцій отримаємо:

$$H_{2\tau} L_2 - H_\tau L_1 \to (H_{2\tau} - H_\tau) L_0 = \frac{4\pi}{c} \lambda_{0\nu} L_0.$$

Звідси отримуємо граничну умову:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} \lambda_{0\nu}. \tag{13.38}$$

З рівняння

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{13.39}$$

яке в інтеґральній формі має вигляд

$$\oint\limits_L (\mathbf{E}, d\boldsymbol{\ell}) = \frac{1}{c} \int\limits_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, d\mathbf{S} \right),$$

повторюючи такі самі міркування, можна отримати граничну умову:

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0. \tag{13.40}$$

Нарешті, з означення вектора намагніченості

$$\operatorname{rot}\mathbf{M} = \frac{1}{c}\mathbf{j}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

матимемо ще одну умову:

$$M_{2\tau} - M_{1\tau} = \frac{1}{c}\lambda'_{\nu}, \tag{13.41}$$

де λ'_{ν} — проєкція лінійної густини індукованих поверхневих струмів на напрямок ν.

Підсумуємо отримані шість граничних умов:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma_0, \tag{13.42a}$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \tag{13.42b}$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma', \tag{13.42c}$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c}\lambda_{0\nu}, \tag{13.42d}$$

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0, \tag{13.42e}$$

$$M_{2\tau} - M_{1\tau} = \frac{1}{c}\lambda'_{\nu}. \tag{13.42f}$$