Обласна олімпіада з фізики
11 клас
Львів — 2008 рік

1. У вертикальній циліндричній посудині під невагомим поршнем із площею поперечного перерізу S міститься ідеальний газ. У скільки разів зміниться температура газу після того, як на поршень покладуть вантаж маси m, якщо об'єм газу при цьому зменшиться в n разів? Атмосферний тиск становить P_0. (3 бали)

2. У колі, яке складається з конденсатора ємності $C = 10$ мкФ та соленоїда з індуктивністю L. Знайдіть значення індуктивністі соленоїда L, якщо заряд на конденсаторі змінюється за законом $q(t) = 10^{-4}\cos(1000t)$ Кл, де час t вимірюється в секундах. (4 бали)

3. У плоскому квадратному конденсаторі зі стороною обкладки a та віддаллю між ними d міститься такого ж розміру діелектрична пластина (діелектрична проникність — ε, маса — m), яка може вільно ковзати всередині конденсатора. Між обкладками конденсатора підтримується постійна напруга U. Яку мінімальну швидкість, напрямлену вздовж однієї зі сторін, слід надати пластині, щоб вона вилетіла з конденсатора? Крайовими ефектами, силами тяжіння та тертя знехтувати. (6 балів)

4. Джгут з початковою довжиною L_0 розтягують зі сталою швидкістю u. На одному з його кінців сидить вперта і наполеглива бактерія, яка прагне долізти до іншого кінця. З якою мінімальною швидкістю v їй треба повзти, щоб її бажання збулося? Джгут розтягують рівномірно. (6 балів)

5. На гладку непровідну нитку довжиною ℓ нанизано 3 намистинки з додатними зарядами $q_1 \geq q_2 \geq q_3$, які можуть вільно ковзати по ній. Кінці нитки з'єднані. Знайдіть силу натягу нитки, якщо система перебуває у стійкій рівновазі. (6 балів)

Розв'язки задач для 11 класу

Задача 1. До початку процесу тиск газу всередині посудини становить P_0, а його температура та об'єм T_0 та V_0, відповідно. Після завершення процесу: $P = P_0 + \dfrac{mg}{S}$, T та $V = V_0/n$. Згідно закону Мєндєлєєва–Клапейрона, ці величини пов'язані так:

$$\nu RT_0 = P_0V_0, \qquad \nu RT = PV = \left(P_0 + \frac{mg}{S}\right)\frac{V_0}{n}.$$

Поділивши другу рівність на першу, отримаємо: $\dfrac{T}{T_0} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{mg}{P_0S}\right)$

Задача 2. Час задається в секундах, тому частота власних коливань $\omega = 1000$ Гц. Частота власних коливань пов'язана з параметрами схеми так: $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$. Отже, $L = \dfrac{1}{\omega^2 C} = 0.1$ Гн.

Задача 3. Ємність конденсатора без пластини — $C = \varepsilon_0 \dfrac{a^2}{d}$, з пластиною — $C_0 = \varepsilon C$. Початкова енерґія конденсатора та пластини становить $E_0 = \dfrac{C_0 U^2}{2} + \dfrac{mv^2}{2}$ (v — шукана швидкість), кінцева — $E_2 = \dfrac{CU^2}{2}$ (пластина після вильоту має нульову швидкість). Після вильоту пластини заряд на конденсаторі зменшився від $q_0 = C_0 U$ до $q = CU$. Для виконання цієї роботи слід витратити $A = (q_0 - q)U$ енерґії. Остаточно запишемо

$$\frac{C_0 U^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{CU^2}{2} + (q_0 - q)U \qquad \Longrightarrow \qquad v = aU\sqrt{\frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{md}}.$$

Задача 4. З аналізу розмірностей зрозуміло, що мінімальна швидкість бактерії (метри за секунду, м/с), при якій вона досягне іншого кінця джгута, пропорційна до u (м/с) і не залежить від L_0 (м). Нехай вона рівна $v = \alpha u$. За час t зі швидкістю v вона відповзе на від першого кінця на відстань $\ell > vt$ (їй повзти допомагає розтяг джгута). Зафіксуємо цю точку. Оскільки джгут розтягують рівномірно, то швидкість розтягу шматка джгута від зафіксованої точки до другого кінця $\dfrac{L_0 + ut - \ell}{L_0 + ut} u$. Тепер, щоб бактерії долізти до другого кінця, їй потрібно мати швидість $\alpha \dfrac{L_0 + ut - \ell}{L_0 + ut} u \leq \alpha u = v$. Отже, бактерія долізе до іншого кінця при будь-якій швидкості, відмінній від нуля.

До цього ж висновку можна дійти, записавши відповідні диференціальні рівняння і безпосередньо розв'язавши їх.

Задача 5. Можливі дві конфіґурації зарядів: заряди розташовані у вершинах трикутника або всі заряди розташовані на одній прямій.

Розглянемо спочатку трикутну конфіґурацію. Позначимо ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 відстань між q_2 та q_3, q_1 та q_3, q_1 та q_2 відповідно. При рівновазі всі сили зрівноважені. Тобто, сила взаємодії між сусудніми зарядами, яка діє вздовж нитки, рівна силі натягу нитки T, яка стала по всій довжині нитки:

$$k\frac{q_1 q_2}{\ell_3^2} = k\frac{q_1 q_3}{\ell_2^2} = k\frac{q_2 q_3}{\ell_1^2} = T.$$

Взявши квадратний корінь і використовуючи умову $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = \ell$, легко отримуємо

$$\ell_1 = \frac{\sqrt{q_2 q_3}}{Q}\ell, \qquad \ell_2 = \frac{\sqrt{q_1 q_3}}{Q}\ell, \qquad \ell_3 = \frac{\sqrt{q_1 q_2}}{Q}\ell, \qquad \text{де } Q = \sqrt{q_1 q_2} + \sqrt{q_1 q_3} + \sqrt{q_2 q_3}.$$

У трикутнику сума двох сторін є більшою за третю. Ця умова порушиться, якщо $\sqrt{q_1 q_3} + \sqrt{q_2 q_3} \leq \sqrt{q_1 q_2}$. В цьому випадку заряди будуть розташовані на прямій: по краях заряди q_1 та q_2 (відстань між ними $\ell/2$), і заряд q_3 між ними, на відстані x від заряду q_1. Нитка на заряд q_3 не діє, тому умова рівноваги для нього $k\dfrac{q_1 q_3}{x^2} = k\dfrac{q_2 q_3}{(\ell/2 - x)^2}$. З умови рівноваги першого заряду можна знайти силу натягу нитки $2T = 4k\dfrac{q_1 q_2}{\ell^2} + k\dfrac{q_1 q_3}{x^2}$.

Отже, сила натягу рівна

$$k\left(\frac{\sqrt{q_1 q_2} + \sqrt{q_1 q_3} + \sqrt{q_2 q_3}}{\ell}\right)^2 \text{ при } \sqrt{q_1 q_3} + \sqrt{q_2 q_3} > \sqrt{q_1 q_2}, \text{ інакше:}$$

$$\frac{2k}{\ell^2}\left(q_1 q_2 + q_3(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2\right).$$