Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Гнатенко

Христина Павлівна

УДК 530.145 + 531.1

ОДНО- І БАГАТОЧАСТИНКОВІ ЗАДАЧІ У НЕКОМУТАТИВНОМУ ПРОСТОРІ

01.04.02 — теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Ткачук Володимир Михайлович,
професор кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Ситенко Юрій Олексійович,
завідувач відділу теорії ядра та квантової теорії поля Інституту теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова НАН України

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Пляцко Роман Михайлович,
провідний науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь та теорій функцій Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України

Захист відбудеться “   ” жовтня 2016 р. о ___ год. ___ хв. на засіданні спеціалізованої Вченої ради Д 35.051.09 при Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79005, м. Львів, вул. Кирила і Мефодія, 8, фізичний факультет, Велика фізична аудиторія.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: 79005, м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розіслано “   ” вересня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор фіз.-мат. наук, професор Павлик Б. В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У останні роки некомутативність координат привернула велику увагу. Таке зацікавлення зумовлене розвитком теорії струн та квантової гравітації, які передбачають існування мінімальної ненульової невизначеності координат, квантованість простору на планківських масштабах. Зважаючи на це, багато робіт присвячено вивченню класичних та квантових систем у некомутативному просторі (квантованому просторі). Дослідження фізичних задач у просторі з некомутативними координатами є актуальними, оскільки дозволяють визначити вплив квантованості простору на властивості фізичних систем у ньому, оцінити величину кванта простору.

Поряд із дослідженням одночастинкових задач у просторі з некомутативністю координат важливим є також розширення області дослідження на багаточастинкові системи. У загальному випадку різним частинкам можуть відповідати різні параметри некомутативності. Тому важливим є опис та вивчення руху системи частинок у некомутативному просторі, знаходження параметра некомутативності, який відповідає центру мас системи.

Некомутативність координат дозволяє вирішити проблему квантування простору, проте вона водночас зумовлює ряд важливих проблем, серед яких проблема порушення принципу еквівалентності. Тому важливим і актуальним є вивчення цієї проблеми та знаходження умов, що дозволяють відновити принцип еквівалентності у некомутативному просторі.

Звернімо увагу на те, що у тривимірному просторі з канонічною некомутативністю координат існує проблема порушення сферичної симетрії. Зважаючи на це, актуальними є побудова некомутативної алгебри, яка є еквівалентна алгебрі канонічного типу та є сферично-симетричною, дослідження властивостей фізичних систем у некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та згідно держбюджетної теми Фф-110Ф “Нові ефекти у квантових рідинах і газах та системах з деформованою алгеброю Гайзенберґа” (2012-2014 рр., номер держреєстрації 0112U001275), проекту ДФФД Ф64 “Класичні та квантові системи за межами стандартних підходів” (2015-16 р., номери держреєстрації 0115U004838, 0116U005055).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є встановлення впливу некомутативності координат на властивості одно- та багаточастинкових систем у некомутативному просторі, знаходження верхньої межі для параметра некомутативності, побудова сферично-симетричної некомутативної алгебри, еквівалентної алгебрі канонічного типу, знаходження умов для відновлення принципу еквівалентності у некомутативному просторі.

Для досягнення мети дослідження поставлено такі задачі: дослідити системи багатьох частинок у двовимірному просторі з некомутативністю координат канонічного типу; проаналізувати комутаційні співвідношення, які задовольняють координати та імпульси центра мас системи, координати та імпульси відносного руху; розглянути рух системи частинок (макроскопічного тіла) у гравітаційному полі у некомутативному просторі та дослідити принцип еквівалентності. Також завданнями дисертаційної роботи є побудова некомутативної алгебри, яка є еквівалентна алгебрі канонічного типу та є сферично-симетричною; дослідження енергетичних рівнів атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі та знаходження поправок до енергетичних рівнів цього атома, зумовлених некомутативністю координат; вивчення руху частинки у однорідному полі та дослідження принципу еквівалентності у некомутативному просторі з відновленою сферичною симетрією.

Об'єктом дослідження є одно- та багаточастинкові фізичні системи у просторі з некомутативними координатами. *Предметом дослідження* є властивості одно- та багаточастинкових фізичних систем у некомутативному просторі. *Методами дослідження* є методи теорії збурень, метод представлення некомутативної алгебри за допомогою координат та імпульсів, що задовольняють звичні комутаційні співвідношення.

Наукова новизна отриманих результатів. Вперше запропоновано умову для відновлення принципу еквівалентності у просторі з канонічною некомутативністю координат. Вперше з незалежності кінетичної енергії системи частинок від її композиції отримано вираз для ефективного параметра некомутативності, який описує рух центра мас системи частинок (макроскопічного тіла) у некомутативному просторі. Вперше знайдено умову, яка дозволяє отримати щонайменше чотири важливі результати у некомутативному просторі канонічного типу, а саме показано, що у випадку, коли параметр некомутативності, який відповідає частинці, є обернено пропорційним до її маси, кінетична енергія системи частинок не залежить від її композиції; координати центра мас системи частинок та координати відносного руху є незалежними; ефективний параметр некомутативності, який описує рух центра мас системи, не залежить від її композиції; виконується принцип еквівалентності у некомутативному просторі.

Вперше побудовано некомутативну алгебру, яка є еквівалентною некомутативій алгебрі канонічного типу та є сферично-симетричною. У запропонованому сферично-симетричному некомутативному просторі вперше досліджено атом водню та знайдено поправки до енергетичних рівнів цього атома, зумовлені некомутативністю координат. На основі порівняння отриманих результатів із експериментальними даними знайдено верхню межу для параметра некомутативності, яка покращує результати, представлені у літературі. Вперше точно розв'язано задачу про рух частинки у однорідному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу та виявлено вплив некомутативності на масу частинки. Вперше запропоновано умови, які дозволяють відновити принцип еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі.

Практичне значення отриманих результатів. Результати, отримані у роботі, можуть бути використаними для покращення оцінки кванта довжини на основі порівняння їх з експериментальними даними. Опис систем багатьох частинок дозволяє розширити область досліджень на дослідження макроскопічних тіл у просторі з некомутативними координатами. Запропонована у роботі умова, яка пов'язує параметр некомутативності з масою частинки, дозволяє вирішити щонайменше чотири важливі проблеми у некомутативному просторі, серед них проблему порушення принципу еквівалентності, що обгрунтовує її використання авторами у подальших дослідженнях. Побудована у роботі сферично-симетрична некомутативна алгебра канонічного типу дозволяє вирішити проблему порушення сферичної симетрії у некомутативному просторі та може бути використаною для дослідження систем у сферично-симетричному просторі з некомутативними координатами. Результати досліджень впливу некомутативності на властивості фізичних систем у некомутативному просторі можуть бути використаними для пояснення високоточних експериментальних даних.

Особистий внесок здобувача. Постановку завдань дослідження здійснив науковий керівник роботи проф. В. М. Ткачук. Усі викладені в дисертації результати автор отримала самостійно або при своїй безпосередній участі. Роботи [1,2,6] є одноосібними. У роботах, виконаних зі співавторами, здобувачеві належить:

- обчислення поправок до енергетичних рівнів атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі, оцінка верхньої межі для параметра некомутативності [3];
- отримання виразу для обчислення поправок до ns-енергетичних рівнів атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі [4];
- дослідження руху частинки у однорідному полі у сферично-симетричному просторі з некомутативністю координат, встановлення впливу некомутативності на масу частинки, дослідження проблеми порушення принципу еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі [5].

Результати статей, їхню інтерпретацію та застосовність використаних підходів співавтори обговорювали на паритетних засадах.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включені до дисертації, здобувач представляла особисто на таких конференціях та семінарах: Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2013" (Львів, 2013) [8]; International Conference "Quantum Groups and Quantum Integrable Systems" (Київ, 2013) [9]; Week of Doctoral Students 2013 (Prague, 2013); V Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics" (Київ, 2013) [10]; Різдвяні дискусії 2014 (Львів, 2014) [11]; 14-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2014) [12]; XXXIII Max Born Symposium "Noncommutative geometry, quantum symmetries and quantum gravity" (Wroclaw, 2014) [13]; Workshop on Current Problems in Physics (Львів, 2014) [14]; Trans-European School of High Energy Physics (Басівка, обл. Львівська, 2014) [7]; Різдвяні дискусії 2015 (Львів, 2015) [16]; Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2014 рік (Львів, 2015); Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2015" (Львів, 2015) [17]; 15-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2015) [18]; The XXIIIth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (ISQS-23) (Prague, 2015) [19]; XXXV Max Born Symposium "The Planck Scale II" (Wroclaw, 2015) [20]; Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv (Zielona Góra, 2015) [21], Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2015 рік (Львів, 2016).

Результати роботи були представлені на наукових семінарах у Вроцлавському університеті, Інституті фізики конденсованих систем, неодноразово обговорювалися на наукових семінарах кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка, а також були апробовані під час наукових стажувань за кордоном.

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано в шести журнальних статтях [1–6], матеріалах конференції [7] та чотирнадцяти тезах доповідей на конференціях [8–21].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, шести розділів, висновків та списку використаних джерел. Обсяг дисертації становить 129 сторінок включно зі списком використаних джерел, що містить 110 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** висвітлено та обґрунтовано актуальність теми досліджень, зазначено зв’язок роботи з науковими темами, висвітлено мету та задачі дослідження, представлено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів.

У **першому розділі** представлено короткий опис історії виникнення ідеї про некомутативність координат, зроблено огляд робіт, у яких розглядалися фізичні системи у некомутативному просторі.

У **другому розділі** розглянуто систему частинок у двовимірному некомутативному просторі канонічного типу, який характеризується такими співвідношеннями для координат та імпульсів

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \qquad [X_\mu, P_\nu] = i\hbar\delta_{\mu\nu}, \qquad [P_\mu, P_\nu] = 0, \tag{1}$$

де θ – параметр некомутативності ($\theta = const$), $\mu = (1,2)$, ν= $(1,2)$. У загальному випадку координати різних частинок можуть задовольняти некомутативну алгебру з різними параметрами некомутативності

$$\left[X_1^{(i)}, X_2^{(j)}\right] = i\hbar\delta_{ij}\,\theta_i, \qquad \left[X_\mu^{(i)}, P_\nu^{(j)}\right] = i\hbar\delta_{ij}\,\delta_{\mu\nu}, \qquad \left[P_\mu^{(i)}, P_\nu^{(j)}\right] = 0, \tag{2}$$

тут θ_i – параметр некомутативності, що відповідає частинці з масою m_i, індекси i, j позначають частинки. Отже, існує проблема опису руху центра мас системи частинок у некомутативному просторі. Зауважимо, що у класичній границі $(\hbar \to 0)$ комутатори (2) переходять у деформовані дужки Пуассона

$$\left\{X_1^{(i)}, X_2^{(j)}\right\} = \delta_{ij}\,\theta_i, \qquad \left\{X_\mu^{(i)}, P_\nu^{(j)}\right\} = \delta_{ij}\,\delta_{\mu\nu}, \qquad \left\{P_\mu^{(i)}, P_\nu^{(j)}\right\} = 0. \tag{3}$$

У другому розділі дисертаційної роботи знайдено імпульс центра мас системи частинок, як інтеграл руху, та координати центра мас у некомутативному просторі (2). Обчислено та проаналізовано дужки Пуассона для координат центра мас системи та координат відносного руху. Ми прийшли до висновку, що координати центра мас $\tilde{X}_\mu$ задовольняють некомутативну алгебру з ефективним параметром некомутативності $\tilde{\theta}$

$$\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\} = \tilde{\theta}, \tag{4}$$

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i^2 \theta_i}{\left(\sum_{j=1}^{N} m_j\right)^2}, \tag{5}$$

де N – кількість частинок у системі, m_i – маса і-тої частинки системи. Отже, для опису руху центра мас системи частинок у некомутативному просторі необхідно вводити ефективний параметр некомутативності $\tilde{\theta}$, який визначається параметрами некомутативності частинок, з яких складається система, та їхніми масами, а отже, залежить від композиції системи. У випадку, коли система складається з N однакових частинок з однаковими масами та параметрами некомутативності θ, із (5) отримаємо:

$$\tilde{\theta} = \frac{\theta}{N}. \tag{6}$$

Отже, величина ефективного параметра некомутативності $\tilde{\theta}$ є меншою від величини параметра некомутативності частинок θ та зменшується з збільшенням кількості частинок у системі як $1/N$.

Координати центра мас $\tilde{X}_\mu$ та координати відносного руху $\Delta X_\mu^{(i)}$ не є незалежними у некомутативному просторі. Дужки Пуассона для цих координат мають вигляд

$$\left\{\tilde{X}_1, \Delta X_2^{(i)}\right\} = \left\{\Delta X_1^{(i)}, \tilde{X}_2\right\} = m_i\theta_i - \tilde{\theta}. \tag{7}$$

Ми знайшли умову, при якій дужки Пуассона для координат центра мас та відносного руху дорівнюють нулеві

$$m_i\theta_i = \gamma = const. \tag{8}$$

Важливо зауважити, що при виконанні умови (8), ефективний параметр некомутативності не залежить від композиції системи

$$\tilde{\theta} = \frac{\gamma}{M}, \tag{9}$$

де $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – маса системи.

Отже, при дослідженні макроскопічних тіл у некомутативному просторі та оцінці верхньої межі для параметра некомутативності важливо враховувати те, що центр мас макроскопічного тіла (системи частинок) описується ефективним параметром некомутативності. Цього не було враховано авторами статей [J. M. Romero, J. D. Vergara, Mod. Phys. Lett. A. 18, 1673 (2003); B. Mirza, M. Dehghani, Commun. Theor. Phys. 42, 183 (2004); A. E. F. Djemai, Int. J. Theor. Phys. 43, 299 (2004)], як наслідок були знайдені суттєво занижені оцінки верхньої межі для параметра некомутативності, а саме: $\hbar\theta \leq 21 \cdot 10^{-64}\text{м}^2$, $\hbar\theta \leq 10^{-62}\text{м}^2$, $\hbar\theta \leq 40 \cdot 10^{-62}\text{м}^2$, відповідно. У другому розділі, на основі результатів, представлених у вище згаданих статтях, врахувавши вираз для ефективного параметра некомутативності (5), ми отримали такі оцінки:

$$\hbar\theta_{nuc} \leq 4.2 \cdot 10^{-13}\text{м}^2, \hbar\theta_{nuc} \leq 2 \cdot 10^{-12}\text{м}^2, \hbar\theta_{nuc} \leq 7.9 \cdot 10^{-11}\text{м}^2. \tag{10}$$

Зауважимо, що отримані у розділі висновки можна легко узагальнити на квантовий випадок, ввівши відповідні оператори фізичних величин та замінивши дужки Пуассона на комутатори.

У **третьому розділі** досліджено рух системи частинок (макроскопічного тіла) у двовимірному просторі з канонічною некомутативністю координат (2) та розглянуто принцип еквівалентності.

Гамільтоніан макроскопічного тіла масою m у неоднорідному гравітаційному полі $V(X,Y)$ у некомутативному просторі має такий вигляд

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + V(X,Y), \tag{11}$$

де координати X, Y та імпульси P_x, P_y задовольняють такі співвідношення:

$$\{X,Y\} = \tilde{\theta}, \quad \{X_\mu, P_\nu\} = \delta_{\mu\nu}, \quad \{P_x, P_y\} = 0, \tag{12}$$

тут $\tilde{\theta} -$ ефективний параметр некомутативності. Знайшовши рівняння руху

$$\dot{X} = \frac{P_x}{m} + m\tilde{\theta}\frac{\partial V(X,Y)}{\partial Y}, \quad \dot{Y} = \frac{P_y}{m} - m\tilde{\theta}\frac{\partial V(X,Y)}{\partial X}, \tag{13}$$

$$\dot{P}_x = -m\frac{\partial V(X,Y)}{\partial X}, \qquad \dot{P}_y = -m\frac{\partial V(X,Y)}{\partial Y}, \tag{14}$$

бачимо, що швидкість тіла у неоднорідному гравітаційному полі залежить від його маси та ефективного параметра некомутативності. Згідно з слабким принципом еквівалентності в гравітаційному полі всі тіла, незалежно від їхньої маси, рухаються однаково. Отже, у некомутативному просторі існує проблема порушення принципу еквівалентності.

За даними LLR (Lunar Laser Ranging, лазерна далекометрія Місяця) експерименту принцип еквівалентності виконується з точністю $\eta = \Delta a/a = (-0.8 \pm 1.3) \cdot 10^{-13}$ [J. G. Williams, S. G. Turyshev, D. H. Boggs, Class. Quantum Grav. 29, 184004 (2012)]. Припустивши, що порушення принципу еквівалентності, зумовлене некомутативністю координат, знаходиться в межах точності η, ми знайшли верхню межу для ефективного параметра некомутативності. Отримано:

$$\hbar\theta_{nuc} \leq 4.5 \cdot 10^{-15}\text{м}^2. \tag{15}$$

Знайдена нерівність (15) накладає сильніше обмеження на величину параметра некомутативності ніж результати для верхньої межі, отримані на основі даних GRANIT експерименту у статті [K. H. C. Castello-Branco, A. G. Martins, J. Math. Phys. 51, 102106 (2010)], та результати (10).

Проаналізувавши рівняння руху (13), (14), ми прийшли до висновку, що принцип еквівалентності виконується у випадку, коли параметр некомутативності, який відповідає частинці, повністю визначається її масою. А саме, умова (8) дозволяє відновити принцип еквівалентності у некомутативному просторі канонічного типу. Важливо зауважити, що умова (8) також виводиться з вимоги незалежності кінетичної енергії системи частинок від її композиції. У роботі досліджено властивість адитивності кінетичної енергії у некомутативному просторі. Показано, що кінетична енергія є адитивною у випадку, коли рух центра мас системи частинок описується ефективним параметром некомутативності. Підсумовуючи, можемо зробити такий висновок: у випадку, коли параметр некомутативності частинки θ обернено пропорційний до її маси

$$\theta = \frac{\gamma}{m}, \tag{16}$$

кінетична енергія системи частинок не залежить від її композиції, координати центра мас та координати відносного руху системи частинок є незалежними, ефективний параметр некомутативності, що відповідає системі частинок, не залежить від її композиції, принцип еквівалентності виконується у некомутативному просторі.

Отже, знайдено одну умову (8), яка дозволяє вирішити щонайменше чотири проблеми у некомутативному просторі.

У **четвертому розділі** розглянуто тривимірний некомутативний простір канонічного типу

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \qquad [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [P_i, P_j] = 0, \tag{17}$$

де θ_{ij} $-$елементи сталої антисиметричної матриці, $i = (1,2,3)$, j= (1,2,3).

Відомою проблемою у некомутативному просторі (17) є проблема порушення сферичної симетрії. Зауважимо, що у двовимірному просторі з некомутативністю координат канонічного типу, який розглядався у попередніх розділах, сферична симетрія зберігається.

З метою відновлення сферичної симетрії у некомутативному просторі запропоновано будувати тензор некомутативності у такому вигляді

$$\theta_{ij} = \frac{\alpha}{\hbar}\left(a_i b_j - a_j b_i\right), \tag{18}$$

де a_i, b_i, $-$ додаткові координати, що визначаються сферично-симетричною системою, α $-$ безрозмірна константа. У результаті, побудовано таку сферично-симетричну некомутативну алгебру

$$\left[X_i, X_j\right] = i\alpha\left(a_i b_j - a_j b_i\right), \qquad \left[X_i, P_j\right] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad \left[P_i, P_j\right] = 0. \tag{19}$$

З міркувань простоти розглянуто випадок, коли координати a_i, b_i визначаються гармонічним осцилятором

$$H_{osc} = \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{(p^b)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2 a^2}{2} + \frac{m_{osc}\omega^2 b^2}{2}. \tag{20}$$

Вважається, що величина параметра некомутативності має порядок планківських масштабів. Зважаючи на це, ми розглянули таку рівність $\sqrt{\hbar/m_{osc}\omega^2} = l_P$, де l_P- довжина Планка. Ми також вивчили випадок, коли частота осцилятора є великою, тому також є великою відстань між енергетичними рівнями. Отже, осцилятор, який знаходиться у основному стані, залишатиметься у ньому.

Зауважимо, що координати a_i, b_i та імпульси p_i^a, p_i^b задовольняють звичні комутаційні співвідношення $\left[a_i, a_j\right] = \left[b_i, b_j\right] = \left[a_i, b_j\right] = 0$, $\left[a_i, p_j^a\right] = i\hbar\delta_{ij}$, $\left[b_i, p_j^b\right] = i\hbar\delta_{ij}$ та комутують з X_i, та P_i. Зважаючи на це, тензор некомутативності θ_{ij}, визначений як (18), також комутує з X_i, та P_i. Отже, X_i, P_i, та θ_{ij} задовольняють такі самі комутаційні співвідношенння як і у випадку некомутативної алгебри канонічного типу (17). В цьому сенсі алгебра (19) є еквівалентною алгебрі канонічного типу та є сферично-симетричною.

Некомутативні координати X_i та імпульси P_i можна представити як

$$X_i = x_i + \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{p}]_i, \quad P_i = p_i, \tag{21}$$

де координати x_i та імпульси p_i, задовольняють звичні комутаційні співвідношення

$$\left[x_i, x_j\right] = 0, \quad \left[x_i, p_j\right] = i\hbar\delta_{ij}, \quad \left[p_i, p_j\right] = 0, \tag{22}$$

та

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\alpha}{\hbar}[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]. \tag{23}$$

Комутаційні співвідношення (19) залишаються такими самими після повороту $X_i' = U(\varphi)X_i U^+(\varphi)$, $a_i' = U(\varphi)a_i U^+(\varphi)$, $b_i' = U(\varphi)b_i U^+(\varphi)$. Маємо:

$$\left[X_i', X_j'\right] = i\alpha\left(a_i' b_j' - a_j' \, b_i'\right), \tag{24}$$

де $U(\varphi)$ − оператор повороту, визначений як $U(\varphi) = \exp(i\varphi(\boldsymbol{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{L}})/\hbar)$, тут

$$\begin{gathered}\tilde{\boldsymbol{L}} = [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}] + [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{p_a}] + [\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{p_b}] = \\ = [\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}] + \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{P} \times [\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{P}] + [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{p_a}] + [\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{p_b}],\end{gathered} \tag{25}$$

де $\boldsymbol{R} = (X_1, X_2, X_3), \boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$.

Зауважимо, що тензор некомутативності може бути побудованим також у такому вигляді

$$\theta_{ij} = \frac{l_0}{\hbar}\varepsilon_{ijk}\, a_k, \tag{26}$$

де l_0 − константа з розмірністю довжини, a_k – додаткові координати, що відповідають гармонічному осцилятору

$$H_{osc} = \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\,\omega^2 a^2}{2}. \tag{27}$$

У результаті отримаємо таку сферично-симетричну некомутативну алгебру

$$\left[X_i, X_j\right] = i l_0 \varepsilon_{ijk}\, a_k, \qquad \left[X_i, P_j\right] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad \left[P_i, P_j\right] = 0. \tag{28}$$

У **п'ятому розділі** дисертаційної роботи розглянуто атом водню у сферично-симетричному некомутативному просторі у двох випадках побудови тензора некомутативності (18) та (26).

Зауважимо, що у сферично-симетричному некомутативному просторі при записі гамільтоніану необхідно брати до уваги також додаткові доданки, що відповідають гармонічному осцилятору та розглядати повний гамільтоніан

$$H = \frac{P^2}{2m} - \frac{e^2}{R} + \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{(p^b)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\,\omega^2 a^2}{2} + \frac{m_{osc}\,\omega^2 b^2}{2}, \tag{29}$$

де R=$\sqrt{\sum_i X_i^2}$. Використавши представлення (21), маємо:

$$\mathrm{R} = \sqrt{\textstyle\sum_i X_i^2} = \sqrt{r^2 - (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{L}) + \tfrac{1}{4}[\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{p}]^2}, \tag{30}$$

де **L**=$[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}]$.

У роботі гамільтоніан (29) переписано, як суму гамільтоніана, що відповідає атому водню у звичайному просторі ($\theta_{ij} = 0$) та оператора збурення, зумовленого некомутативністю координат. Зауважимо, що під коренем квадратним маємо оператори, які не комутують. Тому, розклад для оператора R у ряд за $\boldsymbol{\theta}$ з точністю до другого порядку може бути записаний у такому вигляді

$$R = r - \frac{1}{2r}(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{L}) - \frac{1}{8r^3}(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{L})^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{r}[\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{p}]^2 + [\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{p}]^2\frac{1}{r} + \theta^2 f(\boldsymbol{r})\right), \tag{31}$$

де $f(\boldsymbol{r})$ – невідома функція. Піднісши ліву та праву частини рівності (31) до квадрату, отримано:

$$\theta^2 f(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar^2}{r^5}[\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r}]^2. \tag{32}$$

Знаючи розклад для R, можемо знайти розклад для оператора $1/R$ та записати гамільтоніан (29) як

$$H = H_0 + V, \tag{33}$$

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + H_{osc} \tag{34}$$

$$V = -\frac{e^2}{2r^3}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{L}) - \frac{3}{8r^5} + \frac{e^2}{16}\left(\frac{1}{r^2}[\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{p}]^2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{p}]^2\frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^7}[\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r}]^2\right) \tag{35}$$

Використовуючи теорію збурень, у роботі отримано поправки до енергетичних рівнів атома водню, зумовлені некомутативністю координат

$$\begin{aligned}\Delta E_{n,l} = -\frac{\hbar^2 e^2\langle\theta^2\rangle}{a_B^2 n^5}\Bigg(&\frac{5n^2 - 3l(l+1)+1}{2(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} \\ &- \frac{6n^2 - 2l(l+1)}{3l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)} + \frac{1}{6l(l+1)(2l+1)} \\ &- \frac{5}{6}\frac{5n^2 - 3l(l+1)+1}{l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)}\Bigg),\end{aligned} \tag{36}$$

де

$$\langle\theta^2\rangle = \langle\psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0}|\theta^2|\psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0}\rangle = \frac{3}{2}\left(\frac{\alpha}{m\omega}\right)^2 = \frac{3\alpha^2 l_p^4}{2\hbar^2} \tag{37}$$

тут $\psi^a_{0,0,0}$, $\psi^b_{0,0,0}$ – хвильові функції тривимірного гармонічного осцилятора у основному стані.

Зауважимо, що для *ns* (*l=0*) та *np* (*l=1*) енергетичних рівнів поправки (36) є розбіжними. Це означає, що для обчислень цих поправок ми не можемо використовувати розклад в ряд за параметром некомутативності. Для знаходження поправок до *ns* енергетичних рівнів збурення *V*, зумовлене некомутативністю координат, записано у такому вигляді:

$$\mathrm{V} = -\frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{\sqrt{r^2 - (\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{L}) + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{p}]^2}} + \frac{e^2}{r} \tag{38}$$

Зауважимо, що у (38) ми не використовуємо розклад у ряд за $\boldsymbol{\theta}$. Врахувавши (38), поправки до *ns* енергетичних рівнів визначаються як

$$\Delta E_{ns} = \langle\psi^{(0)}_{n,0,0,\{0\},\{0\}}\left|-\frac{e^2}{\sqrt{r^2 - (\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{L}) + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{p}]^2}} + \frac{e^2}{r}\right|\psi^{(0)}_{n,0,0,\{0\},\{0\}}\rangle, \tag{39}$$

де $\psi^{(0)}_{n,l,m,\{n_a\},\{n_b\}}$ – власні функції гамільтоніану (34)

$$\psi^{(0)}_{n,l,m,\{n_a\},\{n_b\}} = \psi_{n,l,m}\psi^a_{n_1^a,n_2^a,n_3^a}\psi^b_{n_1^b,n_2^b,n_3^b} \tag{40}$$

тут $\psi_{n,l,m}$ – добре відомі власні функції атома водню у звичайному просторі, коли $\theta_{ij} = 0$. Зауваживши, що для ns енергетичних рівнів виконується така рівність: $(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{L})\psi^{(0)}_{n,0,0,\{0\},\{0\}} = 0$. Інтеграл (39) можемо записати як

$$\Delta E_{ns} = \langle \psi^{(0)}_{n,0,0,\{0\},\{0\}} \left| -\frac{e^2}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{p}]^2}} + \frac{e^2}{r} \right| \psi^{(0)}_{n,0,0,\{0\},\{0\}} \rangle. \quad (41)$$

Важливо звернути увагу, що у підінтегральному виразі під коренем квадратним маємо оператори, які не комутують. Для знаходження інтегралу ми перейшли до імпульсного представлення. Зважаючи на те, що (41) не залежить від напрямку $\boldsymbol{\theta}$, інтеграл було усереднено по всіх напрямках $\boldsymbol{\theta}$. У результаті головний член асимптотичного розкладу поправок ΔE_{ns} за параметром некомутативності записано у такому вигляді

$$\Delta E_{ns} = \frac{\hbar \langle \theta \rangle \pi e^2}{8 a_B^3 n^3} S_{1s}(0), \quad (42)$$

де

$$\langle \theta \rangle = \langle \psi^a_{0,0,0} \psi^b_{0,0,0} \left| \sqrt{\sum\nolimits_{\mathrm{i}} \theta_{\mathrm{i}}^2} \right| \psi^a_{0,0,0} \psi^b_{0,0,0} \rangle, \quad (43)$$

$$S_{1s}(0) = 4 \int_0^\infty d\tilde{r} \tilde{r}^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}^2 + p_{\tilde{r}}^2}} \right), \quad (44)$$

тут $\tilde{r}$ – безрозмірна координата,

$$p_{\tilde{r}} = -i \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \tilde{r}. \quad (45)$$

Інтеграл (44) обчислено, розкладаючи одиницю в ряд за власними функціями оператора $\tilde{r}^2 + p_{\tilde{r}}^2$. Отримано:

$$S_{1s}(0) = 16 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)}{k!} \left({}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right) - \sqrt{\frac{\pi}{8k+6}} \right) = 1.72006 \ldots \quad (46)$$

Остаточно поправки до ns рівнів атома водню, зумовлені некомутативністю координат, мають вигляд:

$$\Delta E_{ns} \cong 1{,}72 \frac{\hbar \langle \theta \rangle \pi e^2}{8 a_B^3 n^3}. \quad (47)$$

Відзначимо, що отримані поправки до ns рівнів є пропорційними до $\langle \theta \rangle = \sqrt{2\langle \theta^2 \rangle}/\sqrt{3}$, в той час як проправки до енергетичних рівнів з $l > 1$ пропорційні до $\langle \theta^2 \rangle$. Отже, ns енергетичні рівні є більш чутливими до некомутативності координат.

Порівнявши отриманий результат для поправок до ns енергетичних рівнів із експериментальними даними, знайдено верхню межу для параметра некомутативності. У статті [A. Matveev, C.G. Parthey, K. Predehl et al., Phys. Rev. Lett. 110, 230801 (2013)] представлено такий результат для частоти переходу $f_{1s-2s} = 2466061413187018(11)$Гц, точність якого $4.5 \cdot 10^{-15}$. Припустивши, що поправки до енергії переходу 1s-2s, зумовлені некомутативністю координат, не перевищують точності $4.5 \cdot 10^{-15}$, отримано:

$$\hbar\sqrt{\langle\theta^2\rangle} \leq 7{,}7 \cdot 10^{-36}\text{м}^2. \tag{48}$$

Важливо зауважити, що отримана нерівність (48) накладає сильніше обмеження на величину параметра некомутативності ніж верхня межа, знайдена на основі даних для зсуву Лемба у статті [M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Phys. Rev. Lett., 86, 2716, (2001)].

У роботі також знайдено поправки до енергетичних рівнів атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі, який характеризується тензором некомутативності (26). У цьому випадку поправки мають вигляд (36) та (47), де

$$\langle\theta^2\rangle = \frac{l_0^2}{\hbar^2}\langle\psi^a_{0,0,0}|a^2|\psi^a_{0,0,0}\rangle = \frac{3l_0^2}{2\hbar}\left(\frac{1}{m\omega}\right) \;= \frac{3}{2}\left(\frac{l_0 l_P}{\hbar}\right)^2, \tag{49}$$

$$\langle\theta\rangle = \frac{l_0}{\hbar}\langle\psi^a_{0,0,0}\left|\sum_i a_i^2\right|\psi^a_{0,0,0}\rangle = \frac{2l_0 l_P}{\sqrt{\pi}\hbar}. \tag{50}$$

У **шостому розділі** досліджено рух частинки в однорідному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі (28).

Гамільтоніан частинки з масою m у однорідному полі має вигляд

$$H_p = \frac{P^2}{2m} + \kappa X_3, \tag{51}$$

де множник κ характеризує поле. Повний гамільтоніан із врахуванням доданків, що відповідають гармонічному осцилятору, є таким

$$H = H_p + H_{osc} = \frac{P^2}{2m} + \kappa X_3 + \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2 a^2}{2}. \tag{52}$$

У роботі знайдено точно власні значення гамільтоніану (52). Для цього ми використали представлення

$$X_i = x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij}p_j, \quad P_i = p_i, \tag{53}$$

де θ_{ij} визначається як (26), координати x_i та імпульси p_i задовольняють звичні комутаційні співвідношення (22). У результаті гамільтоніан (52) переписано у такому вигляді

$$H = \widetilde{H}_p + \widetilde{H}_{osc}, \tag{54}$$

де

$$\widetilde{H}_p = \frac{p_1^2}{2m_{eff}} + \frac{p_2^2}{2m_{eff}} + \frac{p_3^2}{2m} + \kappa x_3, \tag{55}$$

$$\widetilde{H}_{osc} = \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2 q^2}{2}, \tag{56}$$

тут m_{eff} – ефективна маса, визначена як

$$m_{eff} = m\left(1 - \frac{\kappa^2 l_0^2 m}{4\hbar^2\omega^2 m_{osc}}\right)^{-1}. \tag{57}$$

Компоненти вектора $\boldsymbol{q}$ мають вигляд

$$q_1 = a_1 + \frac{\kappa l_0}{2\hbar\omega^2 m_{osc}} p_2, \qquad q_2 = a_2 - \frac{\kappa l_0}{2\hbar\omega^2 m_{osc}} p_1, \qquad q_3 = a_3. \tag{58}$$

Зауважимо, що виконуються такі співвідношення: $[q_i, q_j] = 0$, $[q_i, p_j^a] = i\hbar\delta_{ij}$, $[p_i^a, p_j^a] = 0$. Отже, гамільтоніан $\widetilde{H}_{osc}$ відповідає гамільтоніану тривимірного осцилятора у звичайному просторі ($\theta_{ij} = 0$).

Важливо, що оператори $\widetilde{H}_1 = p_1^2/2m_{eff}$, $\widetilde{H}_2 = p_2^2/2m_{eff}$, $\widetilde{H}_3 = p_3^2/2m + \kappa x_3$ та $\widetilde{H}_{osc}$ комутують. Отже, врахувавши те, що частота осцилятора $\widetilde{H}_{osc}$ є великою та осцилятор знаходиться у основному стані, маємо такі власні значення гамільтоніана (54)

$$E = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m_{eff}} + \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m_{eff}} + E_3 + \frac{1}{2}\hbar\omega, \tag{59}$$

тут k_1, k_2 – компоненти хвильового вектора, E_3 відповідає $\widetilde{H}_3$. Отже, некомутативність координат впливає на масу частинки у однорідному полі. Зауважимо, що некомутативність змінює по відношенню до звичного випадку ($\theta_{ij} = 0$) рух частинки у напрямках, що є перпендикулярними до напрямку поля. Рух частинки у напрямку поля визначається гамільтоніаном $\widetilde{H}_3$ та є таким самим як у звичайному просторі. Отже, некомутативність координат зумовлює анізотропію маси.

У розділі досліджено рух частинки у однорідному гравітаційному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі, розглянуто принцип еквівалентності. Ми запропонували умови для відновлення цього принципу у просторі зі збереженою сферичною симетрією, які мають вигляд

$$\frac{l_0^2 m^3}{\omega^2 m_{osc}} = A = const, \tag{60}$$

$$\frac{l_0 l_{osc}}{l_P^2} = \frac{\widetilde{\gamma}\, m_P}{m}, \tag{61}$$

де A, $\tilde{\gamma}$ – константи, які одинакові для частинок різної маси, m_P – маса Планка. Зауважимо, що умова (61) є подібною до умови (8), яка дозволяє відновити принцип еквівалентності у двовимірному просторі з канонічною некомутативністю координат.

На завершення дисертаційної роботи представлено **Висновки** та **Список використаних джерел**.

Основні результати та висновки дисертації можна викласти у вигляді таких тверджень:

- Вперше на основі аналізу властивості адитивності кінетичної енергії системи частинок у некомутативному просторі канонічного типу отримано вираз для ефективного параметра некомутативності, що описує рух центра мас системи частинок у некомутативному просторі.
- Вперше запропоновано умову, при якій ефективний параметр некомутативності не залежить від композиції системи.
- Вперше знайдено умову, при якій кінетична енергія системи є незалежною від її композиції у просторі з некомутативністю координат канонічного типу.
- Вперше встановлено, що у випадку, коли параметр некомутативності, який відповідає частинці, є обернено пропорційний до її маси, координати центра мас системи частинок та координати відносного руху комутують та є незалежними у некомутативному просторі.
- Вперше запропоновано умову для відновлення принципу еквівалентності у просторі з канонічною некомутативністю координат. Встановлено, що принцип еквівалентності виконується у випадку, коли параметр некомутативності, що відповідає частинці, є обернено пропорційний до її маси.
- У результаті, вперше показано, що коли параметр некомутативності обернено пропорційний до маси частинки, розв'язуються щонайменше чотири проблеми у некомутативному просторі, а саме: відновлюється принцип еквівалентності, кінетична енергія системи частинок не залежить від її композиції, координати центра мас системи частинок та координати відносного руху є незалежними, ефективний параметр некомутативності, який описує рух центра мас системи частинок, не залежить від композиції системи.
- Вперше за допомогою введення додаткових координат побудовано некомутативну алгебру, яка є еквівалентна алгебрі канонічного типу та є сферично-симетричною.
- Вперше знайдено поправки до енергетичних рівнів атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу. На основі порівняння отриманих результатів із експериментальними даними отримано оцінки для параметра некомутативності, що покращують результати, представлені у літературі.

- Вперше точно розв'язано задачу про рух частинки у однорідному полі у сферично-симетричному просторі канонічного типу. На основі точних розрахунків показано, що рух частинки у напрямках, перпендикулярних до напрямку поля, описується за допомогою ефективної маси. Встановлено, що некомутативність координат впливає на масу частинки та зумовлює її анізотропію.
- Вперше досліджено принцип еквівалентності у сферично-симетричному просторі канонічного типу. Запропоновано некомутативний простір з відновленою сферичною симетрією та збереженим принципом еквівалентності.

Основні результати дисертації опубліковано в таких роботах:

[1] Gnatenko Kh. P. Composite system in noncommutative space and the equivalence principle / Kh. P. Gnatenko // Phys. Lett. A. — 2013. — Vol. 377, No. 43. — P. 3061-3066.

[2] Гнатенко Х. П. Оцінка верхньої межі для параметра некомутативності на основі принципу еквівалентності / Х. П. Гнатенко // Журн. фіз. дослідж. — 2013. — Т. 17. — Ст. 4001. — 5 с.

[3] Gnatenko Kh. P. Hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space / Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // Phys. Lett. A. — 2014. — Vol. 378, No. 47. — P. 3509-3515.

[4] Gnatenko Kh. P. Perturbation of the ns levels of the hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space / Kh. P. Gnatenko, Yu. S. Krynytskyi, V. M. Tkachuk // Mod. Phys. Lett. A. — 2015. — Vol. 30, No. 08. — Art. 1550033. — 12 p.

[5] Gnatenko Kh. P. Effect of coordinate noncommutativity on the mass of a particle in a uniform field and the equivalence principle / Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // Mod. Phys. Lett. A. — 2016. — Vol. 31, No. 5. — Art. 1650026. — 9 p

[6] Gnatenko Kh. P. Physical systems in a space with noncommutativity of coordinates / Kh. P. Gnatenko // J. Phys.: Conf. Ser. — 2016. — Vol. 670. — Art. 012023. — 9 p.

[7] Gnatenko Kh. Hydrogen atom in noncommutative space / Kh. Gnatenko // Trans-European School of High Energy Physics. — Basivka, Lviv Region, Ukraine, July 17-24, 2014: Proceedings. — P. 99-101.

[8] Гнатенко Х. П. Класична та квантова механіки у просторі з канонічною деформацією алгебри Гейзенберга / Х. П. Гнатенко // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та

експериментальної фізики ”Еврика-2013”. — Львів, 15-17 травня, 2013: Тези доповідей. — С. F3.

[9] Gnatenko K. P. Classical and quantum mechanics in a space with canonical deformed Heisenberg algebra / K. P. Gnatenko // International Conference ”Quantum Groups and Quantum Integrable Systems”. — Kiev, Ukraine, June 18 – 21, 2013: Program and Abstracts. — P. 22.

[10] Gnatenko Kh. P. Noncommutativity of coordinates and the equivalence principle / Kh. P. Gnatenko // V Young Scientists Conference ”Problems of Theoretical Physics”. — Kyiv, Ukraine, December 24-27, 2013: Program and Proceedings. — P. 28.

[11] Гнатенко Х. Макроскопічне тіло в некомутативному просторі / Х. Гнатенко, Ю. Криницький, В. Ткачук // Різдвяні дискусії 2014. — Львів, 9-10 січня, 2014.– Журн. фіз. дослідж.– 2014.– Т. 18, №1. — С. 1998-5.

[12] Гнатенко Х. П. Фізичні системи у некомутативному просторі / Х. П. Гнатенко // 14-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, 4-6 червня, 2014. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 29.

[13] Gnatenko Kh. Hydrogen atom spectrum in rotationally invariant noncommutative space / Kh. Gnatenko // XXXIII Max Born Symposium ”Noncommutative geometry, quantum symmetries and quantum gravity”. — Wroclaw, Poland, July 6-10, 2014: List of talks with abstracts. — P. 2.

[14] Gnatenko Kh. Rotational symmetry in noncommutative space and hydrogen atom / Kh. Gnatenko // Workshop on Current Problems in Physics. — Lviv, Ukraine, July 08-09, 2014.– J. Phys. Stud.– 2014.– Vol. 18, No. 2/3.– Art. 2998. — P. 8.

[15] Gnatenko Kh. P. Corrections to the energy levels of the hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space / Kh. P. Gnatenko // VI Young Scientists Conference ”Problems of Theoretical Physics” dedicated to the 105-th anniversary of M.M. Bogolyubov. — Kyiv, Ukraine, November 25-27, 2014: Program and Proceedings. — P. 29.

[16] Гнатенко Х. П. Енерґетичні рівні атома водню у сферично-симетричному просторі з некомутативністю координат / Х. П. Гнатенко // Різдвяні дискусії 2015. — Львів, 12-13 січня, 2015.– Журн. фіз. дослідж.– 2015.– Т. 19, №1/2. — С. 1998-8.

[17] Гнатенко Х. П. Сферична симетрія у некомутативному просторі / Х. П. Гнатенко // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики ”Еврика-2015”. — Львів, 13-15 травня, 2015: Тези доповідей. — С. E2.

[18] Гнатенко Х. П. Вплив некомутативності координат на властивості квантових систем / Х. П. Гнатенко // 15-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, 4-5 червня, 2015. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 29.

[19] Gnatenko Kh. Physical systems in a space with noncommutativity of coordinates // The XXIIIth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (ISQS-23), Prague, Czech Republic, June 23 – June 27, 2015: Book of Abstracts.— Available from: http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/~burdices/ISQS23/abstrakty-pdf/Gnatenko.pdf.

[20] Gnatenko Kh. Rotational symmetry in a space with canonical noncommutativity of coordinates / Kh. Gnatenko // XXXV Max Born Symposium ”The Planck Scale II”. — Wroclaw, Poland, September 7-12, 2015: Book of Abstracts. — P. 3.

[21] Gnatenko Kh. Rotational symmetry in a space with canonical noncommutativity of coordinates / Kh. Gnatenko // Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv. — Zielona Góra, Poland, October 19-22, 2015: Book of Abstracts. — P. 9.

Анотація

Гнатенко Х. П. Одно- і багаточастинкові задачі у некомутативному просторі. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2016.

Дисертацію присвячено дослідженню одно- та багаточастинкових систем у некомутативному просторі. Досліджено рух системи частинок у гравітаційному полі у двовимірному некомутативному просторі канонічного типу та розглянуто принцип еквівалентності. Знайдено умову на параметр некомутативності, яка дозволяє отримати щонайменше чотири важливі результати у некомутативному просторі, а саме: відновлення принципу еквівалентності, незалежність кінетичної енергії системи частинок від композиції, незалежність координат центра мас системи частинок та координат відносного руху у некомутативному просторі та незалежність ефективного параметра некомутативності, який описує рух центра мас системи частинок, від композиції системи.

Побудовано некомутативну алгебру, яка є еквівалентною некомутативній алгебрі канонічного типу та є сферично-симетричною. У запропонованому некомутативному просторі з відновленою сферичною симетрією досліджено атом водню. Ми знайшли поправки до енергетичних рівнів атома, зумовлені некомутативністю координат, та на основі порівняння отриманих результатів із

експериментальними даними оцінили верхню межу для параметра некомутативності. Точно розв'язано задачу про рух частинки у однорідному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі. Показано, що некомутативність координат приводить до анізотропії ефективної маси частинки. Запропоновано умови для відновлення принципу еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі.

Ключові слова: некомутативний простір, ефективний параметр некомутативності, принцип еквівалентності, сферично-симетрична некомутативна алгебра.

Аннотация

Гнатенко Х. П. Одно- и многочастичные задачи в некоммутативном пространстве. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика, Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2016.

Диссертация посвящена исследованию одно- и многочастичных систем в некоммутативном пространстве. Исследовано движение системы частиц в гравитационном поле в двумерном некоммутативном пространстве канонического типа и рассмотрен принцип эквивалентности. Найдено условие на параметр некоммутативности, которое позволяет получить как минимум четыре важных результата в некоммутативном пространстве, а именно: восстановление принципа эквивалентности, независимость кинетической энергии системы частиц от композиции, независимость координат центра масс системы частиц и координат относительного движения в некоммутативными пространстве, независимость эффективного параметра некоммутативности, который описывает движение центра масс системы частиц, от композиции системы.

Построена некоммутативная алгебра, которая эквивалентна некоммутативной алгебре канонического типа и является сферически-симметричной. В предложенном некоммутативном пространстве с восстановленной сферической симметрией исследован атом водорода. Мы нашли поправки к энергетическим уровням атома, обусловленные некоммутативностью координат и на основе сравнения полученных результатов с экспериментальными данными оценили верхний предел для параметра некоммутативности. Точно решена задача о движение частицы в однородном поле в сферически-симметричном некоммутативном пространстве, показано, что некоммутативнисть координат приводит к анизотропии эффективной массы частицы. Предложены условия для восстановления принципа эквивалентности в сферически-симметричном некоммутативными пространстве.

Ключевые слова: некоммутативное пространство, эффективный параметр

некоммутативности, принцип эквивалентности, сферически-симметричная некоммутативная алгебра.

Abstract

Gnatenko Kh. P. One- and many-particle problems in noncommutative space.

A thesis for a Candidate of Sciences degree on the speciality 01.04.02 – theoretical physics, Ivan Franko National University of Lviv, 2016.

The thesis is devoted to studying of one- and many-particle systems in noncommutative space. The motion of composite system in gravitational field is examined in two-dimensional noncommutative space. We studied the properties of the kinetic energy of composite system. The expression for the effective parameter of noncommutativity which corresponds to the motion of the center-of-mass of composite system is derived on the basis of additivity property of the kinetic energy. The equivalence principle is studied in noncommutative space with canonical noncommutativity of coordinates. The condition for the recovery of this principle is proposed. We show that in the case when the parameter of noncommutativity which corresponds to a particle is proportional to its mass the equivalence principle is not violated in noncommutative space. In adition, the same condition gives the possibility to solve at least three problems in noncommutative space. Namelly, in the case when the parameter of noncommutativity is determinated by the mass of a particle the kinetic energy of composite system does not depend on its composition, the coordinates of the center-of-mass and the coordinates of relative motion are independent in noncommutative space, effective parameter of noncommutativity which corresponds to the center-of-mass of a system does not depend on its composition

We study the problem of rotational symmetry breaking in noncommutative space. We propose to construct the tensor of noncommutativity with the help of additional coordinates governed by a rotationally invariant system. As a result noncommutative algebra which is rotationally invariant and is equivalent to the noncommutative algebra of canonical type is constructed.

The hydrogen atom is studied in rotationally invariant noncommutative space of canonical type. We find the corrections to the energy levels of the hydrogen atom up to the second order in the parameter of noncommutativity. Comparing obtained results with the experimental results for $1s - 2s$ transition frequency the upper bound of the parameter of noncommutativity is examined.

The motion of a particle in a uniform field in rotationally invariant noncommutative space of canonical type is examined. On the basis of exact calculations it is shown that there is an effect of coordinate noncommutativity on the mass of a particle. The motion of the particle in the perpendicular directions to the field direction can be described with the help of effective mass. The motion of the particle in the field direction is not changed in noncommutative space. A particular case of motion of a particle in a uniform gravitational field is considered and the equivalence principle is studied. We find the condition to solve the problem of violation of the equivalence principle in the rotationally invariant noncommutative space. As a result rotationally invariant noncommutative space of canonical type with preserved equivalence principle is proposed.

Key words: noncommutative space, system of particles, effective parameter of noncommutativity, equivalence principle, rotationally invariant noncommutative algebra.