ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

Гнатенко Христина Павлівна

УДК 530.145 + 531.1

Одно- і багаточастинкові задачі у некомутативному просторі

01.04.02 — Теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук,
професор
Ткачук Володимир Михайлович

ЛЬВІВ — 2016

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми. У останні роки некомутативність координат привернула велику увагу. Таке зацікавлення зумовлене розвитком теорії струн та квантової гравітації (див., для прикладу, [1, 2]), які передбачають існування мінімальної ненульової невизначеності координат, квантованість простору на планківських масштабах. Зважаючи на це, багато робіт присвячено вивченню класичних та квантових систем у некомутативному просторі (квантованому просторі), серед них [3–18] та багато інших. Дослідження фізичних задач у просторі з некомутативними координатами є актуальними, оскільки дозволяють визначити вплив квантованості простору на властивості фізичних систем у ньому, оцінити величину кванта простору.

Поряд із дослідженням одночастинкових задач у просторі з некомутативністю координат важливим є також розширення області дослідження на багаточастинкові системи. У загальному випадку різним частинкам можуть відповідати різні параметри некомутативності. Тому важливим є опис та вивчення руху системи частинок у некомутативному просторі, знаходження параметра некомутативності, який відповідає центру мас системи.

Некомутативність координат дозволяє вирішити проблему квантування простору, проте вона водночас зумовлює ряд важливих проблем, серед яких проблема порушення принципу еквівалентності. Тому важливим і актуальним є вивчення цієї проблеми та знаходження умов, що дозволяють відновити принцип еквівалентності у некомутативному просторі.

Звернімо увагу на те, що у тривимірному просторі з канонічною некомутативністю координат існує проблема порушення сферичної симетрії [13, 19]. Зважаючи на це, актуальними є побудова некомутативної алгебри, яка є еквівалентна алгебрі канонічного типу та є сферично-симетричною, дослідження властивостей фізичних систем у некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та згідно держбюджетної теми Фф-110Ф "Нові ефекти у квантових рідинах і газах та системах з деформованою алгеброю Гайзенберґа" (2012-2014 рр., номер держреєстрації 0112U001275), проекту ДФФД Ф64 "Класичні та квантові системи за межами стандартних підходів" (2015-16 р., номери держреєстрації 0115U004838, 0116U005055).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є встановлення впливу некомутативності координат на властивості одно-та багаточастинкових систем у некомутативному просторі, знаходження верхньої межі для параметра некомутативності, побудова сферично-симетричної некомутативної алгебри, еквівалентної алгебрі канонічного типу, знаходження умов для відновлення принципу еквівалентності у некомутативному просторі.

Для досягнення мети дослідження поставлено такі задачі: дослідити системи багатьох частинок у двовимірному просторі з некомутативністю координат канонічного типу; проаналізувати комутаційні співвідношення, які задовольняють координати та імпульси центра мас системи, координати та імпульси відносного руху; розглянути рух системи частинок (макроскопічного тіла) у гравітаційному полі у некомутативному просторі та дослідити принцип еквівалентності. Також завданнями дисертаційної роботи є побудувати некомутативну алгебру, яка є еквівалентна алгебрі канонічного типу та є сферичносиметричною; дослідити енергетичні рівні атома водню у сферичносиметричному некомутативному просторі та знайти поправки до енергетичних рівнів цього атома, зумовлених некомутативністю координат; вивчити рух частинки у однорідному полі та дослідити принцип еквівалентності у некомутативному просторі з відновленою сферичною симетрією.

Об'єктом дослідження є одно- та багаточастинкові фізичні системи у просторі з некомутативними координатами. *Предметом дослідження* є властивості одно- та багаточастинкових фізичних систем у некомутативному просторі. *Методами дослідження* є методи теорії збурень, метод представлення некомутативної алгебри за допомогою координат та імпульсів, що задовольняють звичні комутаційні співвідношення.

У першому розділі висвітлюється історія ідеї про те, що координати можуть некомутувати, представляється огляд задач та проблем у некомутативному просторі, які розглядалися у літературі.

У другому розділі вивчається система частинок у двовимірному некомутативному просторі канонічного типу у загальному випадку, коли різним частинкам відповідають різні параметри некомутативності. Аналізується вираз для ефективного параметра некомутативності, що відповідає центру мас системи. Показано, що ефективний параметр некомутативності зменшується зі збільшенням кількості частинок у системі. На основі виразу для ефективного параметра некомутативності оцінюються верхні межі для параметра некомутативності. Знаходиться умова, при якій координати центра мас та координати відносного руху комутують, а отже, є незалежними у некомутативному просторі, а також ефективний параметр некомутативності, що відповідає системі, не залежить від її композиції.

У третьому розділі досліджується рух системи частинок (макроскопічного тіла) у двовимірному просторі з канонічною некомутативністю координат та вивчається принцип еквівалентності. Оцінюється верхня межа для параметра некомутативності на основі принципу еквівалентності. На основі аналізу рівнянь руху системи частинок у гравітаційному полі у некомутативному просторі пропонується умова, що дозволяє відновити принцип еквівалентності у некомутативному просторі канонічного типу. А саме, показується, що у випадку, коли параметр некомутативності є обернено пропорційним до маси частинки, принцип еквівалентності виконується у некомутативному просторі. Така сама умова (обернено пропорційна залежність параметра некомутативності від маси частинки) отримується з незалежності кінетичної енергії системи частинок від її композиції.

У четвертому розділі розглядається тривимірний некомутативний простір канонічного типу та вивчається проблема порушення сферичної симетрії у такому просторі. З метою вирішення цієї проблеми розглядається ідея про узагальнення параметра некомутативності. Запропоновано будувати тензор некомутативності за допомогою додаткових координат, що визначаються сферично-симетричною системою. Як наслідок, побудовано некомутативну алгебру, яка є еквівалентною некомутативній алгебрі канонічного типу та є сферично-симетричною. У запропонованому некомутативному просторі з відновленою сферичною симетрією розглядається оператор повороту.

У п'ятому розділі вивчається атом водню у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу, запропонованому у четвертому розділі. З точністю до другого порядку за параметром некомутативності знаходяться поправки до енергетичних рівнів атома водню, зумовлені некомутативністю координат. На основі порівняння отриманих результатів із експериментальними даними для частоти переходу $1s - 2s$, оцінюється верхня межа для параметра некомутативності, яка покращує результати, представлені у літературі.

У шостому розділі аналізується рух частинки у однорідному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі, запропонованому у четвертому розділі. На основі точних розрахунків показується, що некомутативність координат впливає на масу частинки та зумовлює її анізотропію. Розглядається рух частинки у однорідному полі у некомутативному просторі з відновленою сферичною симетрією та досліджується принцип еквівалентності. Знаходяться умови для відновлення принципу еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі.

Дисертаційна робота завершується **Висновками** та **Списком використаних джерел**.

Наукова новизна отриманих результатів. Вперше запропоновано умову для відновлення принципу еквівалентності у просторі з канонічною некомутативністю координат. Вперше з незалежності кінетичної енергії системи частинок від її композиції отримано вираз для ефективного параметра некомутативності, який описує рух центра мас системи частинок (макроскопічного тіла) у некомутативному просторі. Вперше знайдено умову, яка дозволяє отримати щонайменше чотири важливі результати у некомутативному просторі канонічного типу, а саме показано, що у випадку, коли параметр некомутативності, який відповідає частинці, є обернено пропорційним до її маси, кінетична енергія системи частинок не залежить від її композиції; координати центра мас системи частинок та координати відносного руху є незалежними; ефективний параметр некомутативності, який описує рух центра мас системи, не залежить від її композиції; виконується принцип еквівалентності у некомутативному просторі.

Вперше побудовано некомутативну алгебру, яка є еквівалентною некомутативій алгебрі канонічного типу та є сферично-симетричною. У запропонованому сферично-симетричному некомутативному просторі вперше досліджено атом водню та знайдено поправки до енергетичних рівнів цього атома, зумовлені некомутативністю координат. На основі порівняння отриманих результатів із експериментальними даними знайдено верхню межу для параметра некомутативності, яка покращує результати, представлені у літературі. Вперше точно розв'язано задачу про рух частинки у однорідному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу та виявлено вплив некомутативності на масу частинки. Вперше запропоновано умови, які дозволяють відновити принцип еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі.

Практичне значення отриманих результатів. Результати, отримані у роботі, можуть бути використаними для покращення оцінки кванта довжини на основі порівняння їх з експериментальними даними. Опис систем багатьх частинок дозволяє розширити область досліджень на дослідження макроскопічних тіл у просторі з некомутативними координатами. Запропонована у роботі умова, яка пов'язує параметр некомутативності з масою частинки, дозволяє вирішити щонайменше чотири важливі проблеми у некомутативному просторі, серед них проблему порушення принципу еквівалентності, що обгрунтовує її використання авторами у подальших дослідженнях. Побудована у роботі сферично-симетрична некомутативна алгебра канонічного типу дозволяє вирішити проблему порушення сферичної симетрії у некомутативному просторі та може бути використана для дослідження систем у сферично-симетричному просторі з некомутативними координатами. Результати досліджень впливу некомутативності на властивості фізичних систем у некомутативному просторі можуть бути використаними для пояснення високоточних експериментальних даних.

Особистий внесок здобувача. Постановку завдань дослідження здійснив науковий керівник роботи проф. В. М. Ткачук. Усі викладені в дисертації результати автор отримала самостійно або при своїй безпосередній участі. Роботи [20–22] є одноосібними. У роботах, виконаних зі співавторами, здобувачеві належить:

- знаходження поправок до енергетичних рівнів атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі, оцінка верхньої межі для параметра некомутативності [23];
- отримання виразу для обчислення поправок до ns-енергетичних рівнів атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі [24];
- дослідження руху частинки у однорідному полі у сферично-симетричному просторі з некомутативністю координат, встановлення впливу некомутативності на масу частинки у однорідному полі, дослідження проблеми порушення принципу еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі [25].

Результати статей, їхню інтерпретацію та застосовність використаних підходів співавтори обговорювали на паритетних засадах.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включені до дисертації, здобувач представляв особисто на таких конференціях та семінарах: Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2013"(Львів, 2013) [26]; International Conference "Quantum Groups and Quantum Integrable Systems"(Київ, 2013) [27]; Week of Doctoral Students 2013 (Prague, 2013); V Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics"(Київ, 2013) [28]; Різдвяні дискусії 2014 (Львів, 2014) [29]; 14-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2014) [30]; XXXIII Max Born Symposium "Noncommutative geometry, quantum symmetries and quantum gravity"(Wroclaw, 2014) [31]; Workshop on Current Problems in Physics (Львів, 2014) [32]; Trans-European School of High Energy Physics (Басівка, обл. Львівська, 2014) [33]; Різдвяні дискусії 2015 (Львів, 2015) [34]; Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2014 рік (Львів, 2015); Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2015"(Львів, 2015) [35]; 15-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2015) [36]; The XXIIIth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (ISQS-23) (Prague, 2015) [37]; XXXV Max Born Symposium "The Planck Scale II"(Wroclaw, 2015) [38]; Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv (Zielona Góra, 2015) [39], Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2015 рік (Львів, 2016).

Результати роботи були представлені на наукових семінарах у Вроцлавському університеті, Інституті фізики конденсованих систем, неодноразово обговорювалися на наукових семінарах кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка, а також були апробовані під час наукових стажувань за кордоном.

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані в шести журнальних статтях [20–25], матеріалах конференції [33] та чотирнадцяти тезах доповідей на конференціях [26–32, 34–40].

Розділ 1

Огляд літератури

Ідея про те, що координати можуть некомутувати має довгу історію [41]. Вперше вона була запропонована В. Гайзенберґом [42, 43]. Згодом Пайєрлс (R. Peierls), почувши ідею некомутативності від Гайзенберґа, використав її при аналізі електричних систем у сильному магнітному полі. Пайерлс розповів про цю ідею Паулі, який повідомив її Оппенгеймеру (J. R. Oppenheimer). Перша публікація, у якій ідея некомутативності оформлена математично, написана Снайдером (H. S. Snyder), аспірантом Оппенгеймера, у 1947 році [44].

Останніми роками дослідження фізичних систем у некомутативному просторі привернули велику увагу, що пов'язано з передбаченнями теорії струн та квантової гравітації про існування мінімальної ненульової невизначеності координат (див., для прикладу, [1, 2]).

У некомутативному просторі оператори координат та імпульсів задовольняють такі комутаційні співвідношення

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \tag{1.1}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.2}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{1.3}$$

де θ_{ij} – параметр некомутативності. У випадку канонічної некомутативності координат θ_{ij} є елементами сталої антисиметричної матриці.

У двовимірному випадку співвідношення (1.1)-(1.3) мають вигляд

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \tag{1.4}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.5}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{1.6}$$

де θ – параметр некомутативності, $\theta = const$. Звернімо увагу, що величини $\hbar\theta$, $\hbar\theta_{ij}$ мають розмірність площі, м^2. Зазначимо, що у некомутативному просторі власні значення оператора площі

$$A = \pi(X_1^2 + X_2^2) \tag{1.7}$$

є квантованими. У статті [45] отримано

$$A_n = 2\pi\hbar\theta\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{1.8}$$

Автори роботи [45] прийшли до висновку, що некомутативність координат зумовлює дискретність власних значень оператора площі. Звернімо увагу, що квант площі у некомутативному просторі пропорційний до параметра некомутативності та має вигляд $2\pi\hbar\theta$, мінімальна площа визначається як $\pi\hbar\theta$.

У класичній границі $\hbar \to 0$ комутатор (1.1) переходить у деформовану дужку Пуассона

$$\frac{1}{i\hbar}[X_i, X_j] \to \{X_i, X_j\}, \tag{1.9}$$

$$\{X_i, X_j\} = \theta_{ij}. \tag{1.10}$$

Деформовані дужки Пуассона відрізняються від канонічних наявністю додаткового доданку, зумовленого некомутативністю координат. Для прикладу, у двовимірному випадку маємо

$$\{X_1, X_2\} = \theta, \tag{1.11}$$

де $\theta = const$ та дужки Пуассона означені як

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{X_i} \frac{\partial g}{P_i} - \frac{\partial g}{X_i} \frac{\partial f}{P_i} \right) + \theta \left(\frac{\partial f}{X_1} \frac{\partial g}{X_2} - \frac{\partial g}{X_1} \frac{\partial f}{X_2} \right), \qquad (1.12)$$

тут $i = (1, 2)$ [7].

У квантовій механіці прикладом із некомутативними координатами є рух електричного заряду в сильному зовнішньому магнітному полі [41, 43, 46–49]. Опишемо цей приклад детальніше. Розгляньмо частинку з зарядом e та масою m, яка рухається на площині (x, y) за наявності сильного однорідного магнітного поля $\mathbf{B}$, яке напрямлене вздовж осі z. Запишемо лагранжіан частинки у зовнішньому магнітному полі

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{e}{c}\dot{x}A_x + \frac{e}{c}\dot{y}A_y - V(x, y), \qquad (1.13)$$

де A_x, A_y – компоненти векторного потенціалу, доданок $V(x, y)$ описує додаткові взаємодії, c – швидкість світла. Випадок сильного магнітного поля $\mathbf{B}$ відповідає малій масі m [41, 43]. У границі $m \to 0$, вибравши калібрування $\mathbf{A} = (0, xB)$, лагранжіан (1.13) запишеться як

$$L = \frac{e}{c}Bx\dot{y} - V(x, y). \qquad (1.14)$$

Зауважимо, що

$$L = p_y\dot{y} - H, \qquad (1.15)$$

$$p_y = \frac{e}{c}Bx, \qquad (1.16)$$

тут H – гамільтоніан. Врахувавши, що координата y є спряженою до умпульсу p_y, із (1.16) отримаємо таке комутаційне співвідношення

$$[x, y] = -i\hbar\frac{c}{eB}. \qquad (1.17)$$

Отже, координати частинки з зарядом e та масою m, яка рухається на площині (x, y) за наявності сильного однорідного магнітного поля $\mathbf{B}$, що напрямлене вздовж осі z, не комутують [41,43]. Більш загальний випадок вивчено у статті [50]. Авторами розглянуто задачу руху зарядженої частинки у сильному неоднорідному магнітному полі $\mathbf{B}(\mathbf{x})$. Показано, що координати частинки задовольняють таке співвідношення:

$$[x^i, x^j] = -i\hbar\frac{c}{e}\varepsilon^{ijk}\frac{B_k(\mathbf{x})}{B^2(\mathbf{x})}, \tag{1.18}$$

де індекси i, j, k, набувають значень $(1,2,3)$, e – заряд частинки. Зауважимо, що у випадку неоднорідного магнітного поля некомутативність є функцією координат.

Багато робіт присвячено вивченню фізичних систем у некомутативному просторі. Серед переших робіт, у яких розглядалася квантова механіка у випадку некомутативності координат канонічного типу є [3–7]. У статтях [3,4] авторами розглянуто частинку у центрально-симетричному полі у двовимірному некомутативному просторі (1.4)-(1.6). Авторами статті [5] досліджено задачу руху частинки у магнітному полі та за наявності квадратичного за координатами потенціалу в двовимірному некомутативному просторі (1.4)-(1.6). Робота [6] присвячена аналізу співвідношень невизначеностей у квантовій механіці на некомутативній площині (1.4)-(1.6). У статті [9] досліджено водневоподібні атоми, ізотропний гармонічний осцилятор у двовимірному просторі з некомутативністю координат канонічного типу.

Робота [11] присвячена аналізу другого закону Ньютона у некомутативному просторі. Автором встановлено, що у некомутативному просторі другий закон Ньютона має такий вигляд

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + m\theta_{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_k}\dot{x}_k, \tag{1.19}$$

де $V(x)$ – потенціальна енергія. Звернімо увагу на те, що рівняння (1.19) у порівнянні зі звичайним простором ($\theta_{ij} = 0$) містить додатковий доданок, пропорційний до параметра некомутативності. У статті зауважено, що поправки до другого закону Ньютона порушують сферичну симетрію. Показано, що у випадку центрально-симетричного поля доданок у рівнянні (1.19), зумовлений некомутативністю координат, можна трактувати як аналог до сили Коріоліса [11].

Багато уваги приділялося дослідженню гармонічного осцилятора у некомутативному просторі [5, 8–12]. Ізотропний гармонічний осцилятор у двовимірному просторі з канонічною некомутативністю координат розглянуто у статтях [8, 9]. У роботі [8] знайдено точно спектр двовимірного ізотропного гармонічного осцилятора з масою m та частотою ω у випадку некомутативності координат (1.4)-(1.6). Отримано

$$E_{n_+,n_-} = \hbar\Omega_+\left(n_+ + \frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega_-\left(n_- + \frac{1}{2}\right), \qquad (1.20)$$

де $\Omega_+ = \Omega - M\Omega^2\theta^2/(2\hbar)$, $\Omega_- = \Omega + M\Omega^2\theta^2/(2\hbar)$, тут $M = m/(1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2})$, $\Omega = \omega\sqrt{1 + m^2\omega^2\theta^2/(4\hbar^2)}$. Авторами проаналізовано залежність виродженості енергетичних рівнів гармонічного осцилятора від параметра некомутативності [8]. Також досліджено спектр зарядженого гармонічного осцилятора у магнітному полі у некомутативному просторі [10]. Рівняння руху тривимірного гармонічного осцилятора у некомутативному просторі проаналізовано у статті [11]. Автором звернено увагу на те, що отримані рівняння руху у некомутативному просторі можна розглядати як рівняння руху осцилятора у магнітному полі, пропорційному до параметра некомутативності. У статті [51] вивчено двовимірний ангармонічний осцилятор

$$H_{HO} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \alpha\left(x^2 + y^2\right)^2 \qquad (1.21)$$

у некомутативному просторі канонічного типу (1.4)-(1.6). Авторами знайдено спектр такого осцилятора з точністю до першого порядку за параметром некомутативності θ. Також у статті [51] розглянуто перехід до звичного простору, у якому координати комутують, а саме досліджено границю $\theta \to 0$.

Серед задач, які розглядалися у некомутативному просторі, вивчено також задачу Ландау [52–55]. Автори статтей [54, 55] дослідили рух зарядженої частинки на площині у однорідному магнітному полі, яке напрямлене перепендикулярно до площини руху частинки, у некомутативному просторі канонічного типу. Знайдено поправки до рівнів Ландау, зумовлені некомутативністю координат. Також розглянуто задачу Ландау у випадку некомутативності координат та некомутативності імпульсів [54,55]. У статті [53] знайдено функції Вігнера (Wigner functions) для задачі Ландау у просторі з канонічною некомутативністю координат, а також у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів.

Авторами роботи [56] звернено увагу на аналогію гамільтоніана, що відповідає задачі Ландау в звичному просторі ($\theta = 0$), та гамільтоніана частинки у полі $\Omega(x^2 + y^2)$ ($\Omega = const$) у двовимірному некомутативному просторі (координати x, y задовольняють комутаційне співвідношення (1.4)). Досліджено умови при яких вище згадувані задачі є еквівалентними.

Багато статей присвячено дослідженню атома водню у некомутативному просторі. У випадку канонічної некомутативності координат (1.1) задачу розглянуто у роботах [9,13–18,57,58]. У статті [13] знайдено поправки до енергетичних рівнів атома водню з точністю до першого порядку за параметром некомутативності. Авторами розглянуто ефекти Штарка та Зеемана у некомутативному просторі. Також отримано поправки до зсуву Лемба, зумовлені некомутативністю координат, та на основі отриманих результатів оцінено верхню межу для параметра некомутативності [13]. У статті [15] представлено аналіз впливу некомутативності координат на спектр атома водню. У роботі [16] знайдено зміщення енергії основного стану атома водню в електричному полі з точністю до другого порядку за параметром некомутативності. Вплив некомутативності координат на енергетичні рівні атома водню досліджено у роботі [17]. У статті [18] розглянуто рівняння Клейна-Гордона для атома водню, досліджено енергетичні рівні атома у некомутативному просторі з точністю до другого порядку за параметром некомутативності. Також розглянуто рівняння Дірака у випадку кулонівського поля у некомутативному просторі [57, 58]. Авторами статті [57] встановлено, що некомутативність координат знімає виродження $2S_{1/2}$, $2P_{1/2}$ та $2P_{3/2}$ енергетичних рівнів атома водню, як наслідок у випадку некомутативності координат є дозволеними нові переходи. У статті [9] представлено дослідження воднево-подібних атомів у двовимірному просторі з некомутативністю координат канонічного типу.

Зауважимо, що з метою визначення впливу некомутативності на властивості фізичних систем, поряд із одночастинковими задачами важливо дослідити багаточастинкові задачі. У роботі [59] розглянуто систему двох частинок з осциляторною взаємодією у двовимірному некомутативному просторі. Автори дослідили випадок, коли дужки Пуассона для координат різних частинок дорівнюють нулеві, а саме розглянуто такі співвідношення:

$$\{x_i^A, x_j^B\} = \theta^{ij}\delta^{AB}, \tag{1.22}$$

$$\{p_i^A, p_j^B\} = \delta_{ij}, \tag{1.23}$$

$$\{x_i^A, p_j^B\} = \delta_{ij}\delta^{AB}, \tag{1.24}$$

де індекси A, B позначають частинки $A = (1,2)$, $B = (1,2)$, $i = (1,2)$,

$j = (1, 2)$, θ^{ij} – параметр некомутативності, одинаковий для різних частинок, p_i^A – імпульси частинок системи.

У статті [60] досліджено систему N частинок у тривимірному просторі з канонічною некомутативністю координат. Авторами розглянуто випадок, коли координати x_a^i та імпульси p_a^i частинок системи задовольняють такі співвідношення

$$\{x_a^i, x_b^j\} = \theta^{ij}, \tag{1.25}$$

$$\{p_a^i, p_b^j\} = \delta^{ij}, \tag{1.26}$$

$$\{x_a^i, p_b^j\} = \delta^{ij}\delta_{ab}, \tag{1.27}$$

де індекси a та b позначають частинки, $i = (1, 2, 3)$, $j = (1, 2, 3)$, θ^{ij} – параметр некомутативності, який є одинаковий для різних частинок системи. Розглянуто два приклади, а саме: систему взаємодіючих осциляторів та систему частинок, яка знаходиться у гравітаційному полі у некомутативному просторі. У двох випадках для кожної частинки системи записано рівняння руху.

Частковий випадок, коли частинкам з різними зарядами відповідають параметри некомутативності з різними знаками, розглянуто у роботах [14, 61]. Автори дослідили систему двох частинок у некомутативному просторі з параметром некомутативності, який залежить від заряду частинки. Запропоновано таку некомутативну алгебру

$$[\tilde{x}_k^i, \tilde{x}_l^j] = i\hbar\theta^{ij} Z_k \delta^{kl}, \tag{1.28}$$

$$[\tilde{x}_k^i, \tilde{p}_{j(l)}] = i\hbar\delta_j^i \delta_{kl}, \tag{1.29}$$

де $Z_k = e_k/e$, тут e_k – заряд частинки, e – заряд електрона, індекси k, l позначають частинки, $i = (1, 2)$, $j = (1, 2)$, θ^{ij} – параметр некомутативності. Як приклад двочастинкової системи, розглянуто атом водню [14].

Система двох зв'язаних осциляторів із гамільтоніаном

$$H = \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}\left(C_1X_1^2 + C_2X_2^2 + C_3X_1X_2\right) \tag{1.30}$$

розглядалася у статті [62], тут C_1, C_2, C_3 – сталі параметри, координати X_1, X_2 задовольняють співвідношення (1.4). Авторами знайдено власні функції та енергетичні рівні такої системи.

Поряд із вищезгадуваними задачами досліджувалися ефект Ааронова-Бома [63–67], ефект Холла [68, 69], стани кота Шредінгера у некомутативному просторі [70], інтеграли за траекторіями [71] та багато інших.

Важливо зауважити, що некомутативність координат дозволяє вирішити фундаментальну проблему квантування простору, проте водночас зумовлює ряд важливих проблем. У статті [72] показано, що у просторі з канонічною некомутативністю координат слабкий принцип еквівалентності є порушеним. Зауважимо, що ця проблема виникає при припущенні про те, що параметр некомутативності є однаковим для всіх частинок. У даній роботі ми досліджуємо загальний випадок, коли різним частинкам відповідають різні параметри некомутативності та знаходимо шлях для відновлення принципу еквівалентності у некомутативному просторі канонічного типу.

У тривимірному просторі з канонічною некомутативністю координат (1.1)-(1.3) зустрічаємося з проблемою порушення сферичної симетрії. Зауважимо, що у двовимірному некомутативному просторі

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \tag{1.31}$$

де θ – параметр некомутативності, симетрія відносно поворотів є збереженою. З метою збереження сферичної симетрії у тривимірному просторі запропоновано різні класи некомутативних алгебр (див., для прикладу, [73–75]). Шлях для відновлення сферичної симетрії у некомутативному просторі N вимірності запропоновано у [76].

У літературі представлено сферично-симетричні некомутативні алгебри, для яких комутатор координат дорівнює деякій функції цих координат. Для прикладу, у статтях [77–80] розглянуто таку некомутативну алгебру:

$$[x_i, x_j] = 2i\lambda\varepsilon_{ijk}x_k, \tag{1.32}$$

де λ – деякий масштабний множник. У статті [73] вивчено сферично-симетричну некомутативну алгебру, яка характеризується такими комутаційними співвідношеннями для операторів координат:

$$[x_i, x_j] = i\theta\varepsilon_{ijk}rx_k, \tag{1.33}$$

де $r^2 = x_i x_i$, $\theta = const$. У роботі [75] розглянуто некомутативний простір, у якому координати задовольняють співвідношення, яке має вигляд

$$[x_i, x_j] = i\theta\varepsilon^{ijk}x_k f(x_i x^i), \tag{1.34}$$

де $f(x_i x^i)$ – задана функція. У сферично-симетричному просторі (1.34) досліджено енергетичні рівні атома водню [75].

Зауважимо, що сферично-симетричні некомутативні алгебри (1.32), (1.33), (1.34) не є трансляційно-інваріантними. Відзначимо також відмінність некомутативних алгебр (1.32), (1.33), (1.34) від алгебри канонічного типу (1.1)-(1.3). Звернімо увагу, що у випадку алгебри (1.1)-(1.3), зважаючи на те, що θ_{ij} є елементами сталої матриці, справедливими є такі співвідношення:

$$[X_i, \theta_{jk}] = 0, \tag{1.35}$$

$$[P_i, \theta_{jk}] = 0. \tag{1.36}$$

Алгебри (1.32), (1.33), (1.34) характеризуються залежністю θ_{ij} від координат. Маємо $\theta_{ij} = 2\lambda\varepsilon_{ijk}x_k$ для алгебри (1.32), $\theta_{ij} = \theta\varepsilon_{ijk}rx_k$ у випадку алгебри (1.33) та $\theta_{ij} = \theta\varepsilon^{ijk}x_k f(x_i x^i)$ для алгебри (1.34). Як наслідок, комутатор координат та імпульсів із θ_{ij} не дорівнює нулеві. Тому алгебри (1.32), (1.33), (1.34) принципово відрізняються від алгебри канонічного типу (1.1)-(1.3).

Також для побудови сферично-симетричної некомутативної алгебри у статті [74, 81] представлено ідею розглядати θ^{ij}, як оператор некомутативності, який комутує з оператором координати x^i та оператором імпульсу p_i

$$[x^i, \theta^{jk}] = [p^i, \theta^{jk}] = 0, \tag{1.37}$$

та запропоновано таку сферично-симетричну алгебру:

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij}, \tag{1.38}$$

$$[x^i, p_j] = i\delta^i_j, \tag{1.39}$$

$$[\theta^{lm}, \theta^{jk}] = 0, \tag{1.40}$$

$$[\theta^{lm}, \pi^{jk}] = i\delta^{lm}_{jk}, \tag{1.41}$$

де π^{ij} спряжений до оператора θ^{ij} імпульс, $\delta^{lm}_{jk} = \delta^l_j\delta^m_k - \delta^l_k\delta^m_j$. У просторі (1.38)-(1.41) розглянуто гармонічний осцилятор [74].

Підсумовуючи, варто зазначити, що багато задач досліджувалися та є розв'язаними у некомутативному просторі, проте залишається ряд важливих невирішених проблем, зумовлених некомутативністю координат. Серед них проблема порушення принципу еквівалентності, порушення сферичної симетрії у тривимірному просторі з канонічною некомутативністю координат. Ці проблеми будуть розглядатися у наступних розділах даної роботи.

Розділ 2

Система багатьох частинок у некомутативному просторі канонічного типу

2.1 Вступ

У загальному випадку різним частинкам у некомутативному просторі можуть відповідати різні параметри некомутативності. Отже, існує проблема опису руху системи частинок у просторі з некомутативністю координат.

Система частинок у некомутативному просторі вивчалася у статтях [14, 59–61]. Авторами розглянуто систему двох частинок з осциляторною взаємодією у двовимірному некомутативному просторі [59], систему двох заряджених частинок [61]. У статті [60] вивчено класичну задачу багатьох частинок у випадку некомутативності координат. Авторами статті [60] отримано рівняння руху для кожної частинки системи. Також досліджено квантову задачу багатьох частинок у некомутативному просторі [14]. Авторами розглянуто частковий випадок, коли частинкам з протилежними зарядами відповідають параметри некомутативності з протилежними знаками. Детальний огляд вищезгаданих статей подано у першому розділі даної роботи.

Зауважимо, що система частинок також вивчалася у просторі з некомутативними координатами та некомутативними імпульсами

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \tag{2.1}$$

$$[P_i, P_j] = i\hbar\beta_{ij}, \tag{2.2}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \sigma_{ij}), \tag{2.3}$$

де θ_{ij} та β_{ij} – елементи антисиметричних матриць, σ_{ij} – елементи симетричної матриці [82], у деформованому просторі з мінімальною довжиною, який характеризується таким співвідношенням для оператора координати X та оператора імпульсу P

$$[X, P] = i\hbar(1 + \beta P^2), \tag{2.4}$$

де β – параметр деформації [83]. Авторами статті [83] знайдено імпульс центра мас системи N частинок, як інтеграл руху, та введено координати центра мас у деформованому просторі. Показано, що координати та імпульси центра мас системи задовольняють деформовану алгебру з ефективним параметром деформації. Авторами досліджено вираз для цього параметра. Встановлено, що у випадку, коли система складається з частинок з однаковою масою та однаковими параметрами деформації, ефективний параметр деформації зменшується з збільшенням кількості частинок N у системі як $1/N^2$. Також у статті [83] розглянуто рух системи частинок у зовнішньому полі, знайдено ефективний гамільтоніан, який описує рух центра мас системи у зовнішньому полі у деформованому просторі.

У цьому розділі ми розглядаємо систему N частинок у двовимірному просторі з канонічною некомутативністю координат

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \tag{2.5}$$

$$[X_\mu, P_\nu] = i\hbar\delta_{\mu\nu}, \tag{2.6}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \tag{2.7}$$

тут θ – параметр некомутативності, $\theta = const$. Досліджується загальний випадок, коли різним частинкам відповідають різні парметри некомутативності. Аналізуються співвідношення, які задовольняють координати центра мас та координати відносного руху у некомутативному просторі.

2.2 Система двох частинок у некомутативному просторі. Ефективний параметр некомутативності

Розгляньмо дві частинки з масами m_1 та m_2 у двовимірному просторі з канонічною некомутативністю координат (2.5)-(2.7). У загальному випадку координати різних частинок можуть задовольняти некомутативну алгебру з різними параметрами некомутативності. Припустимо, що координати різних частинок комутують. Отже, для координат $X_\mu^{(i)}$ та імпульсів $P_\mu^{(i)}$ частинок виконуються такі співвідношення:

$$[X_1^{(i)}, X_2^{(j)}] = -[X_2^{(i)}, X_1^{(j)}] = i\hbar\delta^{ij}\theta_i, \tag{2.8}$$

$$[X_\mu^{(i)}, P_\nu^{(j)}] = i\hbar\delta_{\mu\nu}\delta^{ij}, \tag{2.9}$$

$$[P_\mu^{(i)}, P_\nu^{(j)}] = 0, \tag{2.10}$$

де $\mu = (1, 2)$, $\nu = (1, 2)$, індекси i, j позначають частинки $i = (1, 2)$ та $j = (1, 2)$, θ_i – параметр некомутативності, що відповідає частинці з масою m_i. У класичному випадку співвідношенням (2.8)-(2.10) відповідають такі дужки Пуассона:

$$\{X_1^{(i)}, X_2^{(j)}\} = \delta^{ij}\theta_i, , \tag{2.11}$$

$$\{X_\mu^{(i)}, P_\nu^{(j)}\} = \delta_{\mu\nu}\delta^{ij}, \tag{2.12}$$

$$\{P_\mu^{(i)}, P_\nu^{(j)}\} = 0. \tag{2.13}$$

Будемо вважати, що гамільтоніан у некомутативному просторі має такий самий вигляд, як у звичайному просторі ($\theta_i = 0$). Отже, можемо записати гамільтоніан системи двох частинок у такому вигляді

$$H = \frac{(\mathbf{P}^{(1)})^2}{2m_1} + \frac{(\mathbf{P}^{(2)})^2}{2m_2} + V(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|), \tag{2.14}$$

де координати $\mathbf{X}^{(i)}$ та імпульси $\mathbf{P}^{(i)}$ задовольняють співвідношення (2.11)-(2.13), $V(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|)$ – потенціальна енергія взаємодії частинок.

Знайдемо імпульс центра мас, як інтеграл руху у некомутативному просторі (2.11)-(2.13). Зауважимо, що для імпульсу центра мас, визначеного як

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)}, \tag{2.15}$$

виконується таке співвідношення:

$$\{\tilde{\mathbf{P}}, H\} = 0. \tag{2.16}$$

Отже, імпульс центра мас (2.15), визначений традиційним чином як сума імпульсів частинок системи, є інтегралом руху у некомутативному просторі. Спряжені до імпульсу (2.15) координати центра мас мають вигляд

$$\tilde{\mathbf{X}} = \frac{m_1\mathbf{X}^{(1)} + m_2\mathbf{X}^{(2)}}{m_1 + m_2}, \tag{2.17}$$

де координати $\mathbf{X}^{(1)} = (X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_3^{(1)})$, $\mathbf{X}^{(2)} = (X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, X_3^{(2)})$ задовольняють (2.11).

Зауважимо, що для координат та імпульсів центра мас справедливими є такі співвідношення:

$$\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\} = \frac{m_1^2\theta_1 + m_2^2\theta_2}{(m_1+m_2)^2}, \tag{2.18}$$

$$\{\tilde{X}_\mu, \tilde{P}_\nu\} = \delta_{\mu\nu}, \tag{2.19}$$

$$\{\tilde{P}_\mu, \tilde{P}_\nu\} = 0. \tag{2.20}$$

Отже, координати центра мас задовольняють дужки Пуассона з ефективним параметром некомутативності

$$\tilde{\theta} = \frac{m_1^2\theta_1 + m_2^2\theta_2}{(m_1+m_2)^2}, \tag{2.21}$$

який визначається параметрами некомутативності частинок системи та їхніми масами.

Розгляньмо координати та імпульси відносного руху у некомутативному просторі

$$\Delta\mathbf{P} = \mu_1\mathbf{P}^{(2)} - \mu_2\mathbf{P}^{(1)}, \tag{2.22}$$

$$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(2)} - \mathbf{X}^{(1)}, \tag{2.23}$$

де $\mu_i = m_i/M$, $M = m_1 + m_2$. Обчислимо дужки Пуассона для координат та імпульсів $\Delta\mathbf{X}$, $\Delta\mathbf{P}$, врахувавши співвідношення (2.11)-(2.13). Маємо:

$$\{\Delta X_1, \Delta X_2\} = \theta_1 + \theta_2, \tag{2.24}$$

$$\{\Delta X_\mu, \Delta P_\nu\} = \delta_{\mu\nu}, \tag{2.25}$$

$$\{\Delta P_\mu, \Delta P_\nu\} = 0. \tag{2.26}$$

Отже, координати відносного руху також задовольняють некомутативну алгебру з ефективним параметром некомутативності, визначеним як $\theta_1 + \theta_2$.

Важливо зауважити, що координати центра мас та координати відносного руху не є незалежними у некомутативному просторі. Обчисливши дужки Пуассона для цих координат, отримаємо:

$$\{\tilde{X}_1, \Delta X_2\} = \frac{m_2\theta_2 - m_1\theta_1}{m_2 + m_1}, \tag{2.27}$$

$$\{\Delta X_1, \tilde{X}_2\} = \frac{m_2\theta_2 - m_1\theta_1}{m_2 + m_1}. \tag{2.28}$$

Звернімо увагу на те, що дужки Пуассона для координат $\tilde{X}_\mu$, ΔX_ν дорівнюють нулеві у випадку, коли для параметра некомутативності виконується таке співвідношення:

$$m_i\theta_i = \gamma = const, \tag{2.29}$$

де γ – константа, яка є однаковою для частинок з різними масами. Отже, при виконанні умови (2.29), координати центра мас та координати відносного руху є незалежними у некомутативному просторі. Крім цього, при умові, що параметр некомутативності, який відповідає частинці, є обернено пропорційним до її маси (2.29), ефективний параметр некомутативності (2.18) не залежить від композиції системи. Із (2.18) та (2.29) маємо:

$$\tilde{\theta} = \frac{\gamma}{M} = const. \tag{2.30}$$

Отже, умова (2.29) виконується і для ефективного параметра некомутативності, із (2.30) отримаємо:

$$m_i\theta_i = M\tilde{\theta} = \gamma = const. \tag{2.31}$$

Врахувавши (2.15), (2.17), (2.22), (2.23), можемо записати Гамільтоніан системи двох частинок у такому вигляді

$$H = \frac{(\tilde{\mathbf{P}})^2}{2M} + \frac{(\Delta\mathbf{P})^2}{2\mu} + V(|\Delta\mathbf{X}|), \tag{2.32}$$

де $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$. Дужки Пуассона для $(\tilde{\mathbf{P}})^2/2M$ та $(\Delta\mathbf{P})^2/2\mu + V(|\Delta\mathbf{X}|)$ мають вигляд

$$\left\{\frac{(\tilde{\mathbf{P}})^2}{2M}, \frac{(\Delta\mathbf{P})^2}{2\mu} + V(|\Delta\mathbf{X}|)\right\} = 0. \tag{2.33}$$

Отже, задача руху двох взаємодіючих частинок у некомутативному просторі може бути зведена до задачі руху центра мас та відносного руху.

Важливо зауважити, що отримані результати можна легко узагальнити на квантовий випадок, ввівши відповідні оператори фізичних величин та замінивши дужки Пуассона на комутатори.

У наступному підрозділі задача двох частинок у просторі з канонічною некомутативністю координат буде узагальнена на випадок N частинок.

2.3 Система N частинок у некомутативному просторі

Розгляньмо систему N частинок з масами m_i, яким відповідають параметри некомутативності θ_i. Запишемо гамільтоніан системи

$$H = \sum_i \frac{(\mathbf{P}^{(i)})^2}{2m_i} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} V(|\mathbf{X}^{(i)} - \mathbf{X}^{(j)}|), \tag{2.34}$$

де індекси i та j $(i \neq j)$ набувають значення $1, 2, ..., N$. Координати $X_\mu^{(i)}$ та імпульси $P_\mu^{(i)}$ частинок задовольняють такі співвідношення:

$$\{X_1^{(i)}, X_2^{(j)}\} = -\{X_2^{(i)}, X_1^{(j)}\} = \delta^{ij}\theta_i, \tag{2.35}$$

$$\{X_\mu^{(i)}, P_\nu^{(j)}\} = \delta_{\mu\nu}\delta^{ij}, \tag{2.36}$$

$$\{P_\mu^{(i)}, P_\nu^{(j)}\} = 0, \tag{2.37}$$

де $\mu = (1,2)$, $\nu = (1,2)$. Легко переконатися, що імпульс центра мас системи, визначений як сума імпульсів частинок

$$\tilde{\mathbf{P}} = \sum_i \mathbf{P}^{(i)}, \tag{2.38}$$

є інтегралом руху у некомутативному просторі,

$$\left\{ \sum_i \mathbf{P}^{(i)}, H \right\} = 0, \tag{2.39}$$

де H має вигляд (2.34). Отже, у просторі з дужками Пуассона (2.35)-(2.37) можемо записати координати центра мас, координати та імпульси відносного руху у звичному вигляді:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \sum_i \mathbf{P}^{(i)}, \tag{2.40}$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_i \mu_i \mathbf{X}^{(i)}, \tag{2.41}$$

$$\Delta\mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{X}^{(i)} - \tilde{\mathbf{X}}, \tag{2.42}$$

$$\Delta\mathbf{P}^{(i)} = \mathbf{P}^{(i)} - \mu_i \tilde{\mathbf{P}}, \tag{2.43}$$

де

$$\mu_i = \frac{m_i}{\sum_j m_j}. \tag{2.44}$$

Для координат та імпульсів центра мас виконуються такі співвідношення

$$\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\} = \frac{\sum_i m_i^2 \theta_i}{(\sum_j m_j)^2}, \tag{2.45}$$

$$\{\tilde{X}_\mu, \tilde{P}_\nu\} = \delta_{\mu\nu}, \tag{2.46}$$

$$\{\tilde{P}_\mu, \tilde{P}_\nu\} = 0. \tag{2.47}$$

Отже, для опису руху центра мас системи N частинок у просторі з некомутативними координатами необхідно вводити ефективний параметр некомутативності:

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum_i m_i^2 \theta_i}{(\sum_j m_j)^2}. \tag{2.48}$$

Розгляньмо частковий випадок. Нехай система складається з N однакових елементарних частинок з одинаковими масами $m_1 = m_2 = ... = m_N = m$ та параметрами некомутативності $\theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_N = \theta$. Тоді відповідно до (2.48) отримаємо:

$$\tilde{\theta} = \frac{\theta}{N}. \tag{2.49}$$

Звернімо увагу на те, що величина ефективного параметра некомутативності $\tilde{\theta}$ є меншою від величини параметра некомутативності частинок θ та зменшується з збільшенням кількості частинок у системі як $1/N$.

Зауважимо, що відповідно до (2.48) ефективний параметр некомутативності системи частинок залежить від її композиції. У випадку виконання умови (2.29) із (2.48) отримаємо

$$\tilde{\theta} = \frac{\gamma}{M}. \tag{2.50}$$

Отже, умова (2.29) також є справедливою для ефективного параметра некомутативності (2.48) та дозволяє уникнути залежності $\tilde{\theta}$ від композиції системи.

Координати та імпульси відносного руху задовольняють такі співвідношення:

$$\{\Delta X_1^{(i)}, \Delta X_2^{(j)}\} = \delta^{ij}\theta_i - \mu_i\theta_i - \mu_j\theta_j + \tilde{\theta}, \tag{2.51}$$

$$\{\Delta X_\mu, \Delta P_\nu\} = \delta_{\mu\nu}, \tag{2.52}$$

$$\{\Delta P_\mu, \Delta P_\nu\} = 0. \tag{2.53}$$

Запишемо також дужки Пуассона для координат центра мас та відносного руху

$$\{\tilde{X}_1, \Delta X_2^{(i)}\} = \mu_i\theta_i - \tilde{\theta}, \tag{2.54}$$

$$\{\Delta X_1^{(i)}, \tilde{X}_2\} = \mu_i\theta_i - \tilde{\theta}. \tag{2.55}$$

Дужки Пуассона для координат центра мас та координат відносного руху не дорівнюють нулеві. Центр мас "відчуває" відносний рух у системі. Зауважимо, що у випадку виконання умови (2.29) дужки Пуассона для координат центра мас та відносного руху дорівнюють нулеві, координати центра мас та відносного руху є незалежними у некомутативному просторі.

У наступному підрозділі на основі отриманого виразу для ефективного параметра некомутативності буде отримано оцінку для верхньої межі параметра некомутативності, що відповідає елементарним частинкам.

2.4 Оцінка верхньої межі параметра некомутативності з врахуванням виразу для ефективного параметра некомутативності

У статтях [84–86] розглянуто рух частинки у гравітаційному полі у некомутативному просторі та досліджено зсув перигелію, зумовлений некомутативністю координат. У випадку планети Меркурій, порівнявши отриманий зсув перигелію з експериментальними даними, авторами статей [84–86] отримано такі результати для верхньої межі для параметра некомутативності:

$$\hbar\theta \leq 21 \cdot 10^{-64}\text{м}^2, \tag{2.56}$$

$$\hbar\theta \leq 10^{-62}\text{м}^2, \tag{2.57}$$

$$\hbar\theta \leq 40 \cdot 10^{-62}\text{м}^2. \tag{2.58}$$

Результат (2.56) представлено у [84], (2.57) отримано у [85] та (2.58) у [86].

Звернімо увагу на те, що оцінки (2.56)-(2.58) є близькими до планківських масштабів. Важливо зауважити, що автори статей [84–86] не врахували те, що рух макроскопічного тіла у некомутативному просторі описується ефективним параметром некомутативності. Як було показано в попередньому підрозділі рух центра мас системи частинок (макроскопічного тіла) описується за допомогою ефективного параметра некомутативності (2.48), який є меншим за параметри некомутативності, що відповідають частинкам системи, та зменшується з збільшеннням кількості частинок у системі. Тому при дослідженні руху макроскопічного тіла, у даному випадку планети Меркурій, необхідно враховувати вираз для ефективного параметра некомутативності (2.48). Як наслідок, оцінки (2.56)-(2.58), отримані авторами, мають бути переписаними у такому вигляді

$$\hbar\tilde{\theta} \leq 21 \cdot 10^{-64}\text{м}^2, \tag{2.59}$$

$$\hbar\tilde{\theta} \leq 10^{-62}\text{м}^2, \tag{2.60}$$

$$\hbar\tilde{\theta} \leq 40 \cdot 10^{-62}\text{м}^2, \tag{2.61}$$

де $\tilde{\theta}$ – ефективний параметр некомутативності планети Меркурій.

Знайдемо вираз для ефективного параметра некомутативності планети Меркурій. Із цією метою оцінимо кількість елементарних частинок у планеті. Оскільки основний внесок у масу Меркурію дають нуклони, їхню кількість можемо наближено визначити зі співвідношення:

$$N_{nuc} \simeq \frac{M}{m_{nuc}} = 1.98 \cdot 10^{50}, \tag{2.62}$$

де $M = 3.3 \cdot 10^{23}$кг – маса Меркурію, $m_{nuc} = 1.67 \cdot 10^{-27}$кг – маса нуклона. Кількість протонів наближено дорівнює $N_{nuc}/2$ та відповідає кількості електронів N_e. Врахувавши (2.48), можемо записати вираз для ефективного параметра некомутативності, що відповідає планеті Меркурій, у такому вигляді

$$\tilde{\theta} = N_{nuc}\theta_{nuc}\left(\frac{m_{nuc}}{M}\right)^2 + N_e\theta_e\left(\frac{m_e}{M}\right)^2, \tag{2.63}$$

де m_e – маса електрона, θ_e, θ_{nuc} – параметри некомутативності, що відповідають електронам та нуклонам. Крім того, оскільки нуклони складаються з кварків, то для них відповідно до (2.48) маємо:

$$\tilde{\theta}_{nuc} = \frac{\theta_q}{3}, \tag{2.64}$$

де θ_q – параметр некомутативності, що відповідає кваркам.

Зауважимо, що

$$\frac{m_e}{M} \simeq \frac{m_e}{N_{nuc}m_{nuc}} \simeq \frac{1}{1840N_{nuc}}. \tag{2.65}$$

Припустивши, що для елементарних частинок, таких як електрони та кварки, параметри некомутативності однакові, тобто $\theta_q = \theta_e$ та врахувавши (2.65), останнім доданком у (2.63) можемо знехтувати. Отже, ефективний параметр некомутативності визначатимемо як

$$\tilde{\theta} = \frac{\theta_{nuc}}{N_{nuc}}. \tag{2.66}$$

Врахувавши отриманий вираз для ефективного параметра некомутативності (2.66) та (2.59)-(2.61), можемо оцінити верхню межу для параметра некомутативності, що відповідає нуклонам. Отримаємо

$$\hbar\theta_{nuc} \leq 4.2 \cdot 10^{-13}\text{м}^2, \tag{2.67}$$

$$\hbar\theta_{nuc} \leq 2 \cdot 10^{-12}\text{м}^2, \tag{2.68}$$

$$\hbar\theta_{nuc} \leq 7.9 \cdot 10^{-11}\text{м}^2, \tag{2.69}$$

відповідно. Отже, неврахування авторами попередніх робіт того, що рух макроскопічних тіл описується ефективним параметром некомутативності привело до суттєвого заниження результатів для верхньої межі параметра некомутативності.

2.5 Висновки

У розділі розглянуто систему двох частинок у двовимірному некомутативному просторі канонічного типу у загальному випадку, коли різним частинкам відповідають різні параметри некомутативності. Знайдено імпульс центра мас, як інтеграл руху у некомутативному просторі, та спряжені до нього координати центра мас. Також введено координати та імпульси відносного руху. Задачу двох частинок зведено до задачі руху центра мас та задачі відносного руху у просторі з некомутативністю координат.

Знайдено та проаналізовано дужки Пуассона для координат центра мас системи частинок та координат відносного руху у некомутативному просторі. Ми прийшли до висновку, що координати центра мас та координати відносного руху задовольняють некомутативну алгебру з відповідними ефективними параметрами некомутативності (2.18), (2.24). Також ми встановили, що координати центра мас та координати відносного руху не комутують, отже, не є незалежними у некомутативному просторі.

Задачу двох частинок узагальнено на випадок N частинок. Показано, що для опису руху центра мас системи необхідно вводити ефективний параметр некомутативності, який визначається параметрами некомутативності частинок, з яких складається система, та їхніми масами (2.48), отже, залежить від композиції системи. Ми запропонували умову (2.29), при виконанні якої ефективний параметр некомутативності не залежить від композиції системи та визначається масою системи. Важливо зауважити, що при виконанні цієї умови також вирішується проблема залежності координат центра мас та координат відносного руху у некомутативному просторі (2.54), (2.55). Встановлено, що у випадку, коли параметр некомутативності, що відповідає частинці, є обернено пропорційним до її маси (2.29), дужки Пуассона для координат центра мас та координат відносного руху дорівнюють нулеві, координати центра мас та відносного руху є незалежні.

Проаналізовано вираз для ефективного параметра некомутативності (2.48). Ми прийшли до висновку, що величина цього параметра зменшується зі збільшенням кількості частинок у системі. У випадку, коли система складається з N частинок з однаковими масами ефективний параметр некомутативності залежить від кількості частинок у системі як $1/N$ (2.49). Отже, при дослідженні макроскопічних тіл у некомутативному просторі та оцінці верхньої межі для параметра некомутативності важливо враховувати те, що центр мас макроскопічного тіла (системи частинок) описується ефективним параметром некомутативності. Цього не було враховано авторами статей [84–86], як наслідок у роботах були знайдені занижені оцінки верхньої межі для параметра некомутативності. У цьому розділі на основі результатів, представлених у [84–86], врахувавши вираз (2.48), ми знайшли оцінки для верхньої межі параметра некомутативності, що відповідає нуклонам (2.67)-(2.69).

Зазначимо, що отримані у розділі результати та сформульовані висновки сприяють розширенню області досліджень у некомутативному просторі на дослідження систем багатьох частинок (макроскопічних тіл).

Розділ 3

Принцип еквівалентності у просторі з канонічною некомутативністю координат

3.1 Вступ

Некомутативність координат дозволяє вирішити фундаментальну проблему квантування простору, проте водночас вона зумовлює ряд важливих проблем, серед яких порушення принципу еквівалентності [72]. Зауважимо, що ця проблема виникає при припущенні про те, що параметр некомутативності є однаковим для всіх частинок. У цьому випадку траєкторія частинки у гравітаційному полі у просторі з некомутативністю координат залежить від її маси. Отже, слабкий принцип еквівалентності, відповідно до якого траєкторія частинки (макроскопічного тіла) у гравітаційному полі залежить тільки від її початкових координат та швидкості та не залежить від композиції та маси, порушується у некомутативному просторі. Рух частинки у центральному потенціалі у некомутативному просторі досліджено у [82, 84, 85]. У цих статтях знайдено зміщення перигелію, зумовлене некомутативністю. Стійкість колової орбіти частинки у просторі з некомутативнісю координат досліджували у [87].

Зазначимо, що з проблемою порушення принципу еквівалентності зустрічаємося також у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів [88], деформованому просторі з мінімальною довжиною [89].

У даному розділі ми розглядаємо загальний випадок, коли різним частинкам відповідають різні параметри некомутативності. У цьому випадку ми досліджуємо рух макроскопічного тіла (системи частинок) у гравітаційному полі у просторі з канонічною некомутативністю координат. Як приклад, розглядаємо рух Місяця. Ми знаходимо умову, яка дозволяє відновити принцип еквівалентності у некомутативному просторі.

3.2 Рух тіла у гравітаційному полі у некомутативному просторі. Принцип еквівалентності

Розгляньмо задачу вільного падіння тіла масою m у просторі з канонічною некомутативністю координат. Виберемо осі координат так, щоб напрям прискорення вільного падіння $\mathbf{g}$ збігався з віссю X. Тоді класична функція Гамільтона буде мати вигляд

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} - mgX. \tag{3.1}$$

При цьому ми вважаємо, що вплив відносного руху на рух центра мас не є суттєвим. Таке припущення є справедливим, наприклад, для системи жорстко зв'язаних частинок. Координати та імпульси задовольняють такі співвідношення:

$$\{X, Y\} = \tilde{\theta}, \tag{3.2}$$

$$\{X, P_x\} = 1, \tag{3.3}$$

$$\{Y, P_y\} = 1, \tag{3.4}$$

$$\{P_x, P_y\} = 0, \tag{3.5}$$

тут $\tilde{\theta}$ – ефективний параметр некомутативності. Врахувавши (3.2)-(3.5), запишемо рівняння руху частинки з гамільтоніаном H (3.1)

$$\dot{X} = \{X, H\} = \frac{P_x}{m}, \tag{3.6}$$

$$\dot{Y} = \{Y, H\} = \frac{P_y}{m} + mg\tilde{\theta}, \tag{3.7}$$

$$\dot{P}_x = \{P_x, H\} = mg, \tag{3.8}$$

$$\dot{P}_y = \{P_y, H\} = 0. \tag{3.9}$$

Знайдемо розв'язок системи рівнянь (3.6)-(3.9) з початковими умовами

$$X(0) = X_0, \tag{3.10}$$

$$Y(0) = Y_0, \tag{3.11}$$

$$\dot{X}(0) = \upsilon_{ox}, \tag{3.12}$$

$$\dot{Y}(0) = \upsilon_{oy}, \tag{3.13}$$

де υ_{ox}, υ_{oy} – початкові швидкості. Маємо

$$X(t) = \frac{gt^2}{2} + \upsilon_{ox}t + X_0, \tag{3.14}$$

$$Y(t) = \upsilon_{oy}t + Y_0, \tag{3.15}$$

$$P_x(t) = mgt + m\upsilon_{ox}, \tag{3.16}$$

$$P_y(t) = -m^2 g\tilde{\theta} + m\upsilon_{oy}. \tag{3.17}$$

Як бачимо з (3.14) та (3.15) швидкість падіння не залежить від його маси. Згідно з слабким принципом еквівалентності в гравітаційному полі всі тіла незалежно від їхньої маси рухаються однаково. Цей принцип можна також сформулювати як принцип рівності інерційної та гравітаційної мас. Отже, принцип еквівалентності виконується у випадку руху тіла у однорідному гравітаційному полі у некомутативному просторі.

Узагальнимо задачу. Нехай тіло з масою m знаходиться у неоднорідному гравітаційному полі $V(X, Y)$. Тоді класична функція Гамільтона буде мати вигляд:

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + mV(X, Y), \tag{3.18}$$

Знайдемо рівняння руху тіла з гамільтоніаном H, враховуючи при розкритті дужок Пуассона співвідношення (3.2)-(3.5). Отримаємо:

$$\dot{X} = \frac{P_x}{m} + m\tilde{\theta}\frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y}, \tag{3.19}$$

$$\dot{Y} = \frac{P_y}{m} - m\tilde{\theta}\frac{\partial V(X, Y)}{\partial X}, \tag{3.20}$$

$$\dot{P}_x = -m\frac{\partial V(X, Y)}{\partial X}, \tag{3.21}$$

$$\dot{P}_y = -m\frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y}. \tag{3.22}$$

Бачимо, що швидкість тіла (3.19), (3.20) у неоднорідному гравітаційному полі залежить від його маси та ефективного параметра некомутативності. У рівняннях (3.19), (3.20) маємо доданки, зумовлені некомутативністю координат

$$m\tilde{\theta}\frac{\partial V(X,Y)}{\partial Y}, \tag{3.23}$$

$$m\tilde{\theta}\frac{\partial V(X,Y)}{\partial X}. \tag{3.24}$$

Зауважимо, що ці доданки пропорційні до маси тіла та до ефективного параметра некомутативності.

Отже, з (3.19), (3.20) можемо зробити висновок, що принцип еквівалентності порушується у некомутативному просторі.

3.3 Оцінка верхньої межі параметра некомутативності на основі принципу еквівалентності

Як приклад руху тіла у гравітаційному полі розгляньмо рух Місяця. Запишемо функцію Гамільтона

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} - G\frac{mM}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \tag{3.25}$$

де m – маса Місяця, M – маса Землі та G – гравітаційна стала.

Знайдемо рівняння руху

$$\dot{X} = \frac{P_x}{m} + G\frac{Mm\tilde{\theta}Y}{R^3}, \tag{3.26}$$

$$\dot{Y} = \frac{P_y}{m} - G\frac{Mm\tilde{\theta}X}{R^3}, \tag{3.27}$$

$$\dot{P}_x = -G\frac{MmX}{R^3}, \tag{3.28}$$

$$\dot{P}_y = -G\frac{MmY}{R^3}, \tag{3.29}$$

де

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}. \tag{3.30}$$

Із (3.26), (3.27) бачимо, що принцип еквівалентності порушується.

За даними LLR (Lunar Laser Ranging, лазерна далекометрія Місяця) експерименту принцип еквівалентності виконується з точністю [90]

$$\eta = \frac{\Delta a}{a} = (-0.8 \pm 1.3) \cdot 10^{-13}. \tag{3.31}$$

Припустивши, що порушення цього принципу, зумовлене некомутативністю координат, знаходиться в межах точності η, знайдемо верхню межу для ефективного параметра некомутативності.

Із (3.26), (3.27) маємо:

$$\ddot{X} = \frac{\dot{P}_x}{m} + G\frac{Mm\tilde{\theta}\dot{Y}}{R^3} - G\frac{3mM\tilde{\theta}Y}{R^5}(X\dot{X} + Y\dot{Y}), \tag{3.32}$$

$$\ddot{Y} = \frac{\dot{P}_y}{m} - G\frac{Mm\tilde{\theta}\dot{X}}{R^3} + G\frac{3mM\tilde{\theta}X}{R^5}(X\dot{X} + Y\dot{Y}). \tag{3.33}$$

Підставивши (3.26), (3.27), (3.28) у (3.32) та обмежившись членами першого порядку за $\tilde{\theta}$, отримаємо:

$$\ddot{X} = -G\frac{MX}{R^3} + G\frac{M\tilde{\theta}P_y}{R^3} - G\frac{3M\tilde{\theta}Y}{R^5}(XP_x + YP_y). \tag{3.34}$$

Аналогічно, врахувавши (3.26), (3.27), (3.29) та (3.33), можемо записати

$$\ddot{Y} = -G\frac{MY}{R^3} - G\frac{M\tilde{\theta}P_x}{R^3} + G\frac{3M\tilde{\theta}X}{R^5}(XP_x + YP_y). \tag{3.35}$$

Оцінимо відхилення від виконання принципу еквівалентності у перигеї $X = r_p$, $Y = 0$, $P_x = 0$, $P_y = m\upsilon_p$, де r_p — перигейна відстань, υ_p — максимальна орбітальна швидкість Місяця. Тоді

$$\ddot{X} = -G\frac{M}{r_p^2} + G\frac{M\tilde{\theta}m\upsilon_p}{r_p^3}, \tag{3.36}$$

$$\ddot{Y} = 0. \tag{3.37}$$

Позначимо Δa_x^{nc} поправку до прискорення, зумовлену некомутативністю координат

$$\Delta a_x^{nc} = G\frac{M\tilde{\theta}m\upsilon_p}{r_p^3}, \tag{3.38}$$

тоді можемо переписати (3.36) у такому вигляді

$$\ddot{X} = a_x + \Delta a_x^{nc}, \tag{3.39}$$

де

$$a_x = -G\frac{M}{r_p^2}. \tag{3.40}$$

Отже, припустивши, що порушення принципу еквівалентності знаходиться в межах точності η, можемо оцінити верхню межу для параметра $\tilde{\theta}$

$$\frac{|\Delta a_x^{nc}|}{|a_x|} = \frac{\tilde{\theta}m\upsilon_p}{r_p} \leq |\eta|, \tag{3.41}$$

$$\tilde{\theta} \leq \frac{|\eta|r_p}{m\upsilon_p}. \tag{3.42}$$

Підставивши у (3.42) найбільше за модулем значення η, $|\eta| = 2.1 \cdot 10^{-13}$ та $m = 7.3477 \cdot 10^{22}$кг, $\upsilon_p = 1076$м/с, $r_p = 3.631 \cdot 10^8$м, знайдемо:

$$\hbar\tilde{\theta} \leq 1 \cdot 10^{-64}\text{м}^2. \tag{3.43}$$

Переобчислимо отриманий результат (3.43) для параметра некомутативності, що відповідає елементарним частинкам. Для цього знайдемо ефективний параметр некомутативності для Місяця. Оскільки основний вклад в масу Місяця дають нуклони, їхню кількість можемо наближено визначити із співвідношення:

$$N_{nuc} \simeq \frac{m}{m_{nuc}} = 4.4 \cdot 10^{49}, \tag{3.44}$$

де $m_{nuc} = 1.67 \cdot 10^{-27}$кг – маса нуклона. На основі аналогічних міркувань, які були висвітлені у підрозділі 2.4 для знаходження виразу для ефективного параметра некомутативності, що відповідає планеті Меркурій, можемо записати

$$\tilde{\theta} = \frac{\theta_{nuc}}{N_{nuc}}. \tag{3.45}$$

Врахувавши (3.45), маємо:

$$\hbar\theta_{nuc} \leq 4.5 \cdot 10^{-15}\text{м}^2. \tag{3.46}$$

Аналогічно оцінимо відхилення від виконання принципу еквівалентності в апогеї $X = -r_a = -4.051 \cdot 10^8$м, $Y = 0$, $P_x = 0$, $P_y = -mv_a$, де $v_a = 964$м/c — мінімальна орбітальна швидкість Місяця

$$\frac{\tilde{\theta} m v_a}{r_a} \leq |\eta|, \tag{3.47}$$

$$\tilde{\theta} \leq \frac{|\eta| r_a}{m v_a}. \tag{3.48}$$

Підставивши числові дані у (3.48) та врахувавши (3.45), знайдемо:

$$\hbar\theta_{nuc} \leq 5.6 \cdot 10^{-15}\text{м}^2. \tag{3.49}$$

Зауважимо, що отримані результати (3.46), (3.49) накладають сильніше обмеження на параметр некомутативності ніж верхні межі, знайдені на основі даних GRANIT експерименту $\hbar\theta \leq 0.771 \cdot 10^{-13}\text{м}^2, (n = 1)$, $\hbar\theta \leq 1.021 \cdot 10^{-13}\text{м}^2, (n = 2)$ [91], та оцінки, які були отримані у підрозділі 2.4 (2.67)-(2.69).

3.4 Некомутативний простір канонічного типу з збереженим принципом еквівалентності

Як було показано у попередніх підрозділах, у просторі з канонічною некомутативністю координат існує проблема порушення принципу еквівалентності. Знайдемо умову, яка дозволить відновити принцип еквівалентності у некомутативному просторі.

Порушення принципу еквівалентності зумовлене залежністю від маси доданків (3.23), (3.24) у рівняннях руху (3.19), (3.20). Зауважимо, що доданки (3.23), (3.24) є пропорційними до маси частинки та до ефективного параметра некомутативності.

Розгляньмо випадок, коли тіло з масою M складається з N елементарних частинок з однаковими масами $m_1 = m_2 = ... = m_N = m$ та параметрами некомутативності $\theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_N = \theta$. Тоді відповідно до (2.48) можемо записати

$$M\tilde{\theta} = \frac{M\theta}{N} = m\theta. \tag{3.50}$$

Зауважимо, що у цьому випадку добуток $M\tilde{\theta}$ визначається лише параметрами елементарної частинки, а саме її масою m та параметром некомутативності θ. Як наслідок рівняння руху залежать від добутку $m\theta$, який є однаковим для тіл різної маси

$$\dot{X} = \frac{P_x}{M} + m\theta\frac{\partial V(X,Y)}{\partial Y}, \tag{3.51}$$

$$\dot{Y} = \frac{P_y}{M} - m\theta\frac{\partial V(X,Y)}{\partial X}, \tag{3.52}$$

$$\dot{P}_x = -M\frac{\partial V(X,Y)}{\partial X}, \tag{3.53}$$

$$\dot{P}_y = -M\frac{\partial V(X,Y)}{\partial Y}. \tag{3.54}$$

Отже, принцип еквівалентності у цьому випадку виконується.

Розгляньмо загальний випадок, коли система складається з N елементарних частинок з різними масами m_i та різними параметрами некомутативності θ_i. Врахувавши вираз для ефективного параметра некомутативності (2.48) маємо:

$$\dot{X} = \frac{P_x}{M} + \frac{\sum_i m_i^2\theta_i}{M}\frac{\partial V(X,Y)}{\partial Y}, \tag{3.55}$$

$$\dot{Y} = \frac{P_y}{M} - \frac{\sum_i m_i^2\theta_i}{M}\frac{\partial V(X,Y)}{\partial X}, \tag{3.56}$$

$$\dot{P}_x = -M\frac{\partial V(X,Y)}{\partial X}, \tag{3.57}$$

$$\dot{P}_y = -M\frac{\partial V(X,Y)}{\partial Y}. \tag{3.58}$$

Зауважимо, що при виконанні умови

$$m_i\theta_i = \gamma = const, \tag{3.59}$$

де γ – константа, одинакова для тіл різної маси, рівняння руху не залежать від маси системи та від її композиції. Маємо

$$\dot{X} = \frac{P_x}{m} + \gamma\frac{\partial V(X,Y)}{\partial Y}, \tag{3.60}$$

$$\dot{Y} = \frac{P_y}{m} - \gamma\frac{\partial V(X,Y)}{\partial X}, \tag{3.61}$$

$$\dot{P}_x = -m\frac{\partial V(X,Y)}{\partial X}, \tag{3.62}$$

$$\dot{P}_y = -m\frac{\partial V(X,Y)}{\partial Y}. \tag{3.63}$$

Отже, умова (3.59) дозволяє відновити принцип еквівалентності у просторі з канонічною некомутативністю координат.

Звернімо увагу на те, що із (3.59) випливає, що параметр некомутативності, що відповідає частинці, є обернено пропорційний до її маси

$$\theta_i = \frac{\gamma}{m_i}. \tag{3.64}$$

Зауважимо, що константа γ має розмірність часу. Для оцінки її величини припустимо, що виконується така рівність:

$$\sqrt{\hbar\theta_e} = L_p, \tag{3.65}$$

де L_p – довжина Планка, θ_e – параметр некомутативності, що відповідає електрону. Врахувавши рівність (3.65), можемо записати

$$\gamma = m_e\theta_e = \frac{m_e L_p^2}{\hbar}. \tag{3.66}$$

Зважаючи на розмірність константи γ виразимо (3.66) через час Планка

$$\gamma = 2\pi\frac{L_p}{\lambda_e}T_p = 4.2 \cdot 10^{-23}T_p = 2.3 \cdot 10^{-66}c, \tag{3.67}$$

де $\lambda_e = h/m_e c = 2.43 \cdot 10^{-12}$м – комптонівська довжина хвилі електрона $T_p = 5.4 \cdot 10^{-44}c$ – час Планка. Зафіксувавши параметр некомутативності, що відповідає електрону як (3.65), можемо знайти парараметр некомутативності θ_i, що відповідає частинці з масою m_i. Із (3.59) та (3.65) отримаємо:

$$\hbar\theta_i = \hbar\theta_e\frac{m_e}{m_i} = L_p^2\frac{m_e}{m_i}. \tag{3.68}$$

Отже, у випадку виконання рівності (3.65), величина параметра некомутативності θ_i, що відповідає частинці з масою m_i, визначається відношенням маси електрона до маси частинки m_e/m_i. Зауважимо, що для нуклона $m_i = m_{nuc}$ отримаємо

$$\hbar\theta_{nuc} = \frac{L_p^2}{1840}. \tag{3.69}$$

На завершення цього підрозділу звернімо увагу на те, що умова (3.59), яка дозволяє відновити принцип еквівалентності у некомутативному просторі, співпадає із умовою (2.29), при якій координати центра мас системи частинок та координати відносного руху є незалежними у некомутативному просторі, а також ефективний параметр некомутативності, що відповідає системі частинок (макроскопічному тілу), не залежить від її композиції.

У наступному підрозділі умову (3.59) буде виведено з незалежності кінетичної енергії системи частинок (макроскопічного тіла) від її композиції.

3.5 Властивості кінетичної енергії у некомутативному просторі та принцип еквівалентності

Розгляньмо властивості кінетичної енергії системи частинок (макроскопічного тіла) у двовимірному просторі з некомутативністю координат канонічного типу. Для початку дослідимо властивість адитивності кінетичної енергії.

Розгяньмо систему, яка складається з N частинок з масами m_i та параметрами некомутативності θ_i $(i = 1, 2, ..., N)$, чи, еквівалентно, розгляньмо тіло, яке складається з N частин, які можемо трактувати як точкові частинки з відповідними масами m_i та параметрами некомутативності θ_i. Запишемо кінетичну енергію системи частинок (макроскопічного тіла) з масою M у двовимірному просторі

$$T = \frac{P_x^2}{2M} + \frac{P_y^2}{2M}. \tag{3.70}$$

Врахувавши (3.6), (3.7), перепишемо кінетичну енергію (3.70) як функцію $\dot{X}$ та $\dot{Y}$:

$$T = \frac{M\dot{X}^2}{2} + \frac{M\dot{Y}^2}{2} - M^2\tilde{\theta}g\dot{Y}, \tag{3.71}$$

де $M = \sum_i m_i$ – маса системи (макроскопічного тіла). За властивістю адитивності кінетична енергія системи частинок є сумою кінетичних енергій частинок T_i, з яких складається система

$$T = \sum_i T_i. \tag{3.72}$$

Кінетична енергія частинки з масою m_i та параметром некомутативності θ_i має вигляд

$$T_i = \frac{(P_x^{(i)})^2}{2m_i} + \frac{(P_y^{(i)})^2}{2m_i} = \frac{m_i(\dot{X}^{(i)})^2}{2} + \frac{m_i(\dot{Y}^{(i)})^2}{2} - m_i^2\theta_i g\dot{Y}^{(i)}. \tag{3.73}$$

Розгляньмо випадок, коли швидкості руху частинок, з яких складається система (макроскопічне тіло), є такими самими як швидкість руху всієї системи (макроскопічного тіла), тобто коли справедливими є рівності:

$$\dot{X}^{(i)} = \dot{X}, \tag{3.74}$$

$$\dot{Y}^{(i)} = \dot{Y}. \tag{3.75}$$

Тоді за властивістю адитивності кінетичної енергії (3.72) маємо

$$T = \frac{M\dot{X}^2}{2} + \frac{M\dot{Y}^2}{2} - \sum_i m_i^2\theta_i g\dot{Y}. \tag{3.76}$$

Порівнявши (3.71) та (3.76), отримаємо

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum_i m_i^2\theta_i}{(\sum_j m_j)^2}. \tag{3.77}$$

Отже, вираз для ефективного параметра некомутативності (2.48), який було знайдено на основі аналізу комутаційних співвідношень у підрозділі 2.3, також виведено із властивості адитивності кінетичної енергії у некомутативному просторі.

Важливо звернути увагу на те, що кінетична енергія системи (3.71) залежить від ефективного параметра некомутативності $\tilde{\theta}$, отже, згідно з (2.48), залежить від її композиції. Знайдемо умову при якій кінетична енергія системи (макроскопічного тіла) не залежить від її композиції. З цією метою достатньо розглянути простий випадок. Нехай тіло складається з двох частин (частинок) з масами m_1 та m_2 та параметрами некомутативності θ_1, θ_2, відповідно. Тоді ефективний параметр некомутативності $\tilde{\theta}$ відповідно до (2.48) буде мати вигляд:

$$\tilde{\theta} = \frac{m_1^2\theta_1 + m_2^2\theta_2}{(m_1 + m_2)^2}. \tag{3.78}$$

Використавши позначення $\mu = m_1/M$, та врахувавши, що

$$1 - \mu = \frac{m_2}{M}, \tag{3.79}$$

вираз (3.78) можемо переписати як

$$\tilde{\theta} = \theta_\mu \mu^2 + \theta_{1-\mu}(1-\mu)^2, \tag{3.80}$$

де $\theta_\mu = \theta_1$, $\theta_{1-\mu} = \theta_2$. Відповідно до (3.71) кінетична енергія не залежить від композиції у випадку, коли ефективний параметр некомутативності $\tilde{\theta}$ є одинаковим для тіл однакової маси, проте різної композиції, тобто для різних μ. Отже, виходячи з цих міркувань, із рівняння (3.80) можемо знайти θ_μ як функцію μ для деякого фіксованого $\tilde{\theta}$. Отримаємо:

$$\theta_\mu = \frac{\tilde{\theta}}{\mu} \tag{3.81}$$

Врахувавши те, що $\mu = m_1/M$ рівність (3.81) можемо переписати у вже знайомому вигляді

$$m_1\theta_1 = m_2\theta_2 = M\tilde{\theta}. \tag{3.82}$$

Отже, умову (3.59), яка дозволяє відновити принцип еквівалентності у некомутативному просторі, виведено з незалежності кінетичної енергії системи частинок від її композиції.

3.6 Висновки

У розділі досліджено рух системи частинок (макроскопічного тіла) у ґравітаційному полі у випадку некомутативності кооординат канонiчного типу та розглянуто принцип еквівалентності. Показано, що у некомутативному просторі існує проблема порушення принципу еквівалентності. Для прикладу розглянуто рух Місяця. Порівнявши відхилення від виконання принципу еквівалентності для Місяця в перигеї та апогеї з даними експерименту LLR (Lunar Laser Ranging, лазерна далекометрія Місяця), ми знайшли верхні межі для параметра некомутативності. При цьому було зроблено припущення, що відхилення від виконання принципу еквівалентності, зумовлене некомутативністю координат, є в межах точності виконання цього принципу за даними експерименту LLR. Отримані у розділі результати накладають сильніше обмеження на параметр некомутативності, у порівнянні з результатами, поданими у статті [91] та нерівностями(2.67)-(2.69), які були знайдені у попередньому розділі.

На основі аналізу рівнянь руху макроскопічного тіла у гравітаційному полі у некомутативному просторі знайдено умову, яка дозволяє відновити принцип еквівалентності у просторі з канонічною некомутативністю координат. Показано, що принцип еквівалентності виконується у випадку, коли параметр некомутативності, що відповідає частинці, є обернено пропорційним до її маси (3.59). Таку залежність (3.59) також було отримано при аналізі властивостей кінетичної енергії системи частинок у некомутативному просторі, а саме із вимоги незалежності кінетичної енергії системи від її композиції.

У розділі отримано вираз для ефективного параметра некомутативності (2.48), що описує рух центра мас системи частинок у просторі з некомутативністю координат, із властивості адитивності кінетичної енергії у некомутативному просторі.

Важливо зауважити, що умова (3.59), яка дозволяє відновити принцип еквівалентності, збігається із умовою (2.29), при якій координати центра мас системи та координати відносного руху є незалежними, а також, ефективний параметр некомутативності, що відповідає системі частинок, не залежить від її композиції. Отже, знайдено одну умову на параметр некомутативності (3.59), яка дозволяє отримати щонайменше чотири важливі результати у некомутативному просторі, а саме: відновити принцип еквівалентності, забезпечити незалежність кінетичної енергії системи частинок від її композиції, незалежність координат центра мас системи частинок та координат відносного руху, незалежність ефективного параметра некомутативності, що відповідає координатам центра мас системи частинок, від композиції.

Звернімо також увагу на те, що подібна до (3.59) умова була запропонована у деформованому просторі з мінімальною довжиною у якому координати та імпульси задовольняють таке співвідношення

$$[X, P] = i\hbar(1 + \beta P^2), \tag{3.83}$$

де β – параметр деформації. У роботі [89] показано, що у випадку, коли параметр деформації β, що відповідає частинці, є обернено пропорційним до m^2, або, еквівалентно, виконується така умова

$$\sqrt{\beta}m = const, \tag{3.84}$$

принцип еквівалентності зберігається у деформованому просторі, також кінетична енергія системи частинок є незалежною від її композиції.

Розділ 4

Сферична симетрія у некомутативному просторі

4.1 Вступ

У попередніх розділах ми розглядали двовимірний простір з канонічною некомутативністю координат (2.5)-(2.7), у якому симетрія відносно поворотів зберігається. Розгляньмо тривимірний некомутативний простір канонічного типу, який характеризується такими комутаційними співвідношеннями

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \tag{4.1}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{4.2}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{4.3}$$

де θ_{ij} є елементами сталої матриці. Зауважимо, що у такому просторі існує проблема порушення сферичної симетрії [13,19]. Для збереження сферичної симетрії у некомутативному просторі запропоновано різні класи некомутативних алгебр (див., для прикладу, [73–75]). Серед них сферично-симетричні некомутативні алгебри, для яких комутатор координат дорівнює деякій функції цих координат, представлені у статтях [73,75,77–80]. Як вже було зазначено у першому розділі роботи, ці алгебри суттєво відрізняються від алгебри канонічного типу (4.1)-(4.3) та не є трансляційно-інваріантними.

У цьому розділі ми пропонуємо некомутативну алгебру, яка є сферично-симетричною, трансляційно-інваріантною та еквівалентною до некомутативної алгебри канонічного типу. Із цією метою розглядається ідея узагальнення параметра некомутативності. Ми пропонуємо будувати тензор некомутативності за допомогою додаткових координат, які описуються сферично-симетричною системою та комутують із операторами координати та імпульсу.

4.2 Некомутативний простір канонічного типу з відновленою сферичною симетрією

З метою вирішення проблеми порушення сферичної симетрії у некомутативному просторі розгляньмо ідею узагальнення сталої матриці некомутативності θ_{ij}. Розгляньмо тензор некомутативності, визначений за допомогою додаткових координат, які описуються сферично-симетричною системою. Один із простих варіантів побудови тензора некомутативності має такий вигляд:

$$\theta_{ij} = \frac{\alpha}{\hbar}(a_i b_j - a_j b_i), \tag{4.4}$$

де α – безрозмірна константа, a_i, b_i – додаткові координати, які відповідають сферично-симетричній системі. Для простоти розгляньмо випадок, коли координати a_i, b_i визначаються гармонічним осцилятором із гамільтоніаном

$$H_{osc} = \frac{(p^a)^2}{2m} + \frac{(p^b)^2}{2m} + \frac{m\omega^2 a^2}{2} + \frac{m\omega^2 b^2}{2}. \tag{4.5}$$

Вважається, що величина параметра некомутативності має порядок планківських масштабів. Зважаючи на це, покладемо

$$\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = l_P, \tag{4.6}$$

де l_P – довжина Планка. Незалежно від (4.6) ми також розглядаємо випадок, коли частота осцилятора ω є великою, тому також є великою відстань між енергетичними рівнями осцилятора. Зважаючи на це, осцилятор, який знаходиться у основному стані, залишатиметься у ньому.

Отже, ми пропонуємо таку сферично-симетричну некомутативну алгебру:

$$[X_i, X_j] = i\alpha(a_i b_j - a_j b_i), \tag{4.7}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{4.8}$$

$$[P_i, P_j] = 0. \tag{4.9}$$

Зауважимо, що координати a_i, b_i та імпульси p_i^a, p_i^b задовольняють звичні комутаційні співвідношення

$$[a_i, a_j] = 0, \tag{4.10}$$

$$[a_i, p_j^a] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{4.11}$$

$$[b_i, b_j] = 0, \tag{4.12}$$

$$[b_i, p_j^b] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{4.13}$$

також

$$[a_i, b_j] = [a_i, p_j^b] = [b_i, p_j^a] = [p_i^a, p_j^b] = 0. \tag{4.14}$$

Важливо, що додаткові координати a_i, b_i комутують з X_i та P_i

$$[a_i, X_j] = [a_i, P_j] = [b_i, X_j] = [p_i^a, P_j] = 0. \tag{4.15}$$

Зажаючи на (4.10)-(4.15), тензор некомутативності θ_{ij}, визначений як (4.4), також комутує з X_i та P_i

$$[\theta_{ij}, X_k] = [\theta_{ij}, P_k] = 0. \tag{4.16}$$

Отже, X_i, P_i та θ_{ij} задовольняють такі самі комутаційні співвідношення як і у випадку некомутативної алгебри канонічного типу (4.1)-(4.3). В цьому сенсі сферично-симетрична алгебра (4.7)-(4.9) є еквівалентною алгебрі (4.1)-(4.3).

Зауважимо, що координати X_i, які не комутують, та імпульси P_i можна представити через координати x_i та імпульси p_i, які задовольняють звичні комутаційні співвідношення,

$$[x_i, x_j] = 0, \tag{4.17}$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{4.18}$$

$$[p_i, p_j] = 0. \tag{4.19}$$

Легко переконатися, що координати та імпульси, які задовольняють співвідношення (4.7)-(4.9) можна представити як

$$X_i = x_i - \theta_{ij}p_j, \tag{4.20}$$

$$P_i = p_i, \tag{4.21}$$

де θ_{ij} визначається як (4.4). Зручно використати таке позначення

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\alpha}{\hbar}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}], \tag{4.22}$$

та переписати рівність (4.20) у вигляді

$$X_i = x_i + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]_i. \tag{4.23}$$

Зауважимо, що x_i та p_i комутують з a_i, b_i, p_i^a та p_i^b

$$[x_i, a_j] = [x_i, b_j] = [x_i, p_j^a] = [x_i, p_j^b] = 0, \tag{4.24}$$

$$[p_i, a_j] = [p_i, b_j] = [p_i, p_j^a] = [p_i, p_j^b] = 0. \tag{4.25}$$

Звернімо увагу, що використавши представлення (4.21), (4.23), отримаємо такі співвідношення

$$[X_i, p_j^a] = \frac{i\alpha}{2}\left(b_i p_j - \delta_{ij}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{p})\right), \tag{4.26}$$

$$[X_i, p_j^b] = -\frac{i\alpha}{2}\left(a_i p_j - \delta_{ij}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p})\right), \tag{4.27}$$

$$[P_i, p_j^a] = [P_i, p_j^b] = 0. \tag{4.28}$$

Отже, координати та імпульси, які задовольняють некомутативну алгебру (4.7)-(4.9) можуть бути переписані через координати та імпульси, що задовольняють звичні комутаційні співвідношення (4.17), (4.19). Це гарантує виконання тотожності Якобі та може бути легко перевірено для всіх можливих трійок операторів.

Зауважимо, що тензор некомутативності можна також будувати тільки за допомогою додаткових координат a_k, ввівши при цьому з розмірних міркувань константу l_0 з розмірністю довжини

$$\theta_{ij} = \frac{l_0}{\hbar}\varepsilon_{ijk}a_k, \tag{4.29}$$

тут a_k – додаткові координати, які визначаються сферично-симетричною системою, для прикладу, гармонічним осцилятором

$$H_{osc} = \frac{(p^a)^2}{2m} + \frac{m\omega^2 a^2}{2}. \tag{4.30}$$

У цьому випадку сферично-симетрична некомутативна алгебра буде мати вигляд

$$[X_i, X_j] = il_0\varepsilon_{ijk}a_k, \tag{4.31}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{4.32}$$

$$[P_i, P_j] = 0. \tag{4.33}$$

Зазначимо, що у двох випадках (4.4), (4.29) у границі $\alpha \to 0$ ми отримаємо звичні комутаційні співвідношення:

$$[X_i, X_j] = 0, \tag{4.34}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{4.35}$$

$$[P_i, P_j] = 0. \tag{4.36}$$

4.3 Оператор повороту у сферично-симетричному некомутативному просторі

Алгебри (4.7)-(4.9), (4.31)-(4.33) є сферично-симетричними. Комутаційні співвідношення (4.7)-(4.9) залишаються такими самими після повороту

$$X_i' = U(\varphi) X_i U^+(\varphi), \tag{4.37}$$

$$P_i' = U(\varphi) P_i U^+(\varphi), \tag{4.38}$$

$$a_i' = U(\varphi) a_i U^+(\varphi), \tag{4.39}$$

$$b_i' = U(\varphi) b_i U^+(\varphi), \tag{4.40}$$

де оператор повороту має такий вигляд

$$U(\varphi) = e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(\mathbf{n}\cdot\tilde{\mathbf{L}})}, \tag{4.41}$$

тут $\tilde{\mathbf{L}}$ – оператор моменту кількості руху, визначений як

$$\tilde{\mathbf{L}} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] + [\mathbf{a} \times \mathbf{p}^a] + [\mathbf{b} \times \mathbf{p}^b], \tag{4.42}$$

де $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Повернувшись до некомутативних координат (4.21), (4.23), можемо також записати $\tilde{\mathbf{L}}$ у такому вигляді

$$\tilde{\mathbf{L}} = [\mathbf{R} \times \mathbf{P}] + \frac{1}{2}[\mathbf{P} \times [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{P}]] + [\mathbf{a} \times \mathbf{p}^a] + [\mathbf{b} \times \mathbf{p}^b], \tag{4.43}$$

тут $\mathbf{R} = (X_1, X_2, X_3)$.

Після повороту (4.37)-(4.40) маємо

$$[X_i', X_j'] = i\alpha(a_i' b_j' - a_j' b_i'), \tag{4.44}$$

$$[X_i', P_j'] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{4.45}$$

$$[P_i', P_j'] = 0. \tag{4.46}$$

Важливо зауважити, що $\tilde{\mathbf{L}}$ задовольняє звичні комутаційні співвідношення

$$[X_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}X_k, \tag{4.47}$$

$$[P_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}P_k, \tag{4.48}$$

$$[a_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}a_k, \tag{4.49}$$

$$[p_i^a, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}p_k^a, \tag{4.50}$$

$$[b_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}b_k, \tag{4.51}$$

$$[p_i^b, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}p_k^b. \tag{4.52}$$

Також оператор моменту кількості руху $\tilde{\mathbf{L}}$ комутує з r^2, a^2 та b^2 та із скалярними добутками

$$[\tilde{L}_i, (\mathbf{a}\cdot\mathbf{p})] = [\tilde{L}_i, (\mathbf{b}\cdot\mathbf{p})] =$$

$$= [\tilde{L}_i, (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})] = [\tilde{L}_i, (\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})] = [\tilde{L}_i, (\mathbf{r}\cdot\mathbf{b})] = 0. \tag{4.53}$$

Зважаючи на це, очевидно, що $\tilde{\mathbf{L}}$ комутує із оператором довжини R, який може бути записаний у такій формі

$$R = \sqrt{\sum_i X_i^2} = \sqrt{\left(\mathbf{r} - \frac{\alpha}{2\hbar}\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{p}) + \frac{\alpha}{2\hbar}\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p})\right)^2}. \tag{4.54}$$

Отже, довжина залишається незмінною після повороту

$$R' = U(\varphi) R U^{+}(\varphi) = R. \tag{4.55}$$

Розгляньмо сферично-симетричний некомутативний простір (4.31)-(4.33). Комутаційні співвідношення (4.31) залишаються такими самими після повороту

$$X_i' = U(\varphi) X_i U^{+}(\varphi), \tag{4.56}$$

$$a_i' = U(\varphi) a_i U^{+}(\varphi), \tag{4.57}$$

де

$$U(\varphi) = e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(\mathbf{n}\cdot\tilde{\mathbf{L}})}, \tag{4.58}$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] + [\mathbf{a} \times \mathbf{p}^a] =$$

$$= [\mathbf{R} \times \mathbf{P}] + \frac{l_0}{2\hbar}[\mathbf{P} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{P}]] + [\mathbf{a} \times \mathbf{p}^a]. \tag{4.59}$$

Маємо

$$[X_i', X_j'] = i\varepsilon_{ijk} l_0 a_k'. \tag{4.60}$$

Зверні́мо увагу, що оператор $\tilde{\mathbf{L}}$ (4.59) задовольняє звичні комутаційні співвідношення

$$[X_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} X_k, \tag{4.61}$$

$$[P_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} P_k, \tag{4.62}$$

$$[a_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} a_k, \tag{4.63}$$

$$[p_i^a, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k^a, \tag{4.64}$$

та комутує з оператором відстані

$$R = \sqrt{\sum_i X_i^2} = \sqrt{r^2 - \frac{l_0}{\hbar}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}) + \frac{l_0^2}{4\hbar^2}[\mathbf{a} \times \mathbf{p}]^2}. \tag{4.65}$$

Тут ми використали представлення (4.20), (4.21) та врахували (4.29).

4.4 Висновки

У розділі вивчено проблему порушення сферичної симетрії у тривимірному некомутативному просторі канонічного типу. Запропоновано некомутативну алгебру, яка є сферично-симетричною та еквівалентною алгебрі канонічного типу.

Для побудови сферично-симетричної некомутативної алгебри ми розглянули ідею узагальнення параметра некомутативності. Запропоновано будувати тензор некомутативності за допомогою додаткових координат, які визначаються сферично-симетричною системою та комутують з операторами координат та імпульсів. Ми розглянули два варіанти побудови тензора некомутативності (4.4), (4.29). У результаті побудовано некомутативні алгебри (4.7)-(4.9), (4.31)-(4.33), які є сферично-симетричними. Важливо, що алгебри (4.7)-(4.9), (4.31)-(4.33) є еквівалентними алгебрі канонічного типу, оскільки оператори координат та імпульсів, а також тензор некомутативності, визначений за допомогою додаткових координат, комутують. Також у розділі розглянуто оператор повороту у сферично-симетричному некомутативному просторі.

На завершення розділу зазаначимо можливий фізичний зміст додаткових координат, які формують тензор некомутативності. Координати a_i, b_i можна трактувати як внутрішні координати частинки, квантові флуктуації яких зумовлюють її нелокальність.

Розділ 5

Атом водню у сферично-симетричному некомутативному просторі

5.1 Вступ

Дослідженню атома водню у некомутативному просторі приділялося багато уваги. У випадку канонічної некомутативності кооординат атом водню вивчено у роботах [13–18,57,58]. Авторами досліджено вплив некомутативності координат на енергетичні рівні цього атома [13–15,17]. Розглянуто енергетичні рівні атома водню у електричному полі у просторі з некомутативністю координат [13,16]. Вивчено задачу атома водню у магнітному полі у некомутативному просторі [13]. Отримано поправки до зсуву Лемба, зумовлені некомутативністю координат [13]. Розглянуто рівняння Клейна-Гордона [18] та рівніння Дірака [57, 58] для атома водню у некомутативному просторі канонічного типу. Більш детальний огляд вище згадуваних робіт представлено у першому розділі дисертаційної роботи.

Також атом водню досліджено у некомутативному просторі, що характеризується такими співвідношеннями для координат

$$[x_i, x_j] = i\theta\varepsilon^{ijk}x_k f(x_i x^i), \tag{5.1}$$

де $f(x_i x^i)$ – задана функція [75]. Автором статті [75] знайдено поправки до енергетичних рівнів атома, зумовлені некомутативністю координат (5.1).

Зазначимо, що атом водню також розглядався у випадку некомутативності простору-часу [92–96], некомутативності імпульсів [97], некомутативності координат та некомутативності імпульсів [82, 98, 99]. Багато уваги приділялося дослідженню атома водню у деформованому просторі з мінімальною довжиною [83, 100–106].

У цьому розділі атом водню досліджується у сферично-симетричному некомутативному просторі, запропонованому у розділі 4. Ми знаходимо поправки до енергетичних рівнів атома, зумовлені некомутативністю координат з точністю до другого порядку за параметром некомутативності. На основі порівняння результатів для поправок до ns енергетичних рівнів атома водню з експериментальними даними знаходиться верхня межа для параметра некомутативності.

5.2 Гамільтоніан атома водню у некомутативному просторі з відновленою сферичною симетрією

Розгляньмо атом водню у сферично-симетричному некомутативному просторі (4.7)-(4.9). Припустимо, що гамільтоніан у некомутативному просторі має таку саму форму як і в звичайному просторі ($\theta_{ij} = 0$) із заміною координат, які комутують, на координати, що задовольняють співвідношення некомутативної алгебри. Отже, гамільтоніан атома водню у некомутативному просторі має вигляд

$$H_h = \frac{P^2}{2M} - \frac{e^2}{R}, \tag{5.2}$$

де

$$R = \sqrt{\sum_i X_i^2}, \tag{5.3}$$

координати X_i та імпульси P_i задовольняють некомутативну алгебру (4.7)-(4.9).

Оскільки тензор некомутативності побудовано за допомогою додаткових координат (4.4), у сферично-симетричному некомутативному просторі при записі гамільтоніану необхідно брати до уваги також додаткові доданки, що відповідають гармонічному осцилятору, та розглядати повний гамільтоніан

$$H = H_h + H_{osc}, \tag{5.4}$$

де H_{osc} має вигляд (4.5).

Знайдемо збурення, зумовлене некомутативністю координат. З цією метою розкладемо гамільтоніан (5.4) в ряд за $\boldsymbol{\theta}$, визначеним як (4.22). Для початку знайдемо розклад для R (5.3) з точністю до другого порядку за $\boldsymbol{\theta}$. Використавши представлення (4.23), можемо записати

$$R = \sqrt{(\mathbf{r} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}])^2} = \sqrt{r^2 - (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2}, \tag{5.5}$$

де $r = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ та $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$. Зауважимо, що оператори під коренем квадратним не комутують між собою, оператор r^2 не комутує з оператором $[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2/4$. Отже, необхідно знайти розклад для кореня квадратного від суми некомутативних операторів. Запишемо розклад для R у звичному вигляді (як у випадку, коли оператори під коренем квадратним комутують), проте із невідомою функцією $f(\mathbf{r})$, а саме:

$$R = r - \frac{1}{2r}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) - \frac{1}{8r^3}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L})^2 +$$

$$+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{r}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 + [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2\frac{1}{r} + \theta^2 f(\mathbf{r})\right). \tag{5.6}$$

Для знаходження невідомої функції $f(\mathbf{r})$ піднесемо до квадрату ліву і праву частину рівності (5.6). З точністю до другого порядку за параметром некомутативності отримаємо:

$$r^2 - (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 = r^2 - (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) +$$

$$+\frac{1}{16}\left(2[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 + r[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 r + 2r\theta^2 f(\mathbf{r})\right). \tag{5.7}$$

Рівняння (5.7) можемо записати у більш простому вигляді:

$$\frac{\hbar^2}{r^4}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}]^2 - r\theta^2 f(\mathbf{r}) = 0. \tag{5.8}$$

Остаточно, з (5.8) знаходимо:

$$\theta^2 f(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{r^5}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}]^2. \tag{5.9}$$

Врахувавши результат для функції $f(\mathbf{r})$ (5.9), можемо записати:

$$R = r - \frac{1}{2r}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) - \frac{1}{8r^3}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L})^2 +$$

$$+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{r}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2 + [\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2\frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{r^5}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}]^2\right). \tag{5.10}$$

Знаючи розклад для оператора R (5.10), можна знайти розклад в ряд за $\boldsymbol{\theta}$ для оператора R^{-1}

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r^3}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) + \frac{3}{8r^5}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L})^2 -$$

$$-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{r^2}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}]^2\frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^7}[\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}]^2\right). \tag{5.11}$$

Отже, врахувавши (5.11), перепишемо гамільтоніан (5.4) у такому вигляді:

$$H = H_0 + V, \tag{5.12}$$

де

$$H_0 = \frac{p^2}{2M} - \frac{e^2}{r} + H_{osc}, \tag{5.13}$$

та V – збурення, зумовлене некомутативністю координат

$$V = -\frac{e^2}{2r^3}(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L}) - \frac{3e^2}{8r^5}(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L})^2 +$$

$$+\frac{e^2}{16}\left(\frac{1}{r^2}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^7}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{r}]^2\right). \tag{5.14}$$

У наступному підрозділі, використовуючи отриманий вираз для гамільтоніана (5.12), будуть знайдені поправки до енергетичних рівнів атома водню, зумовлені некомутативністю координат.

5.3 Енергетичні рівні атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі

Розгляньмо енергетичні рівні атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі (4.7)-(4.9). Знайдемо поправки до енергетичних рівнів атома з точністю до другого порядку за параметром некомутативності. Із цією метою застосуємо теорію збурень.

Зауважимо, що гамільтоніан H_0 (5.13) є сумою гамільтоніана атома водню у звичному просторі ($\theta_{ij} = 0$)

$$\tilde{H}_h = \frac{p^2}{2M} - \frac{e^2}{r}, \tag{5.15}$$

та гамільтоніана тривимірного гармонічного осцилятора H_{osc} (4.5), записаного також у звичному просторі. Оператори $\tilde{H}_h$ та H_{osc} комутують

$$\left[\frac{p^2}{2M} - \frac{e^2}{r}, \frac{(p^a)^2}{2m} + \frac{(p^b)^2}{2m} + \frac{m\omega^2 a^2}{2} + \frac{m\omega^2 b^2}{2}\right] = 0. \tag{5.16}$$

Отже, можемо записати власні значення та власні функції гамільтоніана H_0 (5.13) у такому вигляді

$$E^{(0)}_{n,\{n^a\},\{n^b\}} = -\frac{e^2}{2a_B n^2} + \hbar\omega(n_1^a + n_2^a + n_3^a + n_1^b + n_2^b + n_3^b + 3), \tag{5.17}$$

$$\psi^{(0)}_{n,l,m,\{n^a\},\{n^b\}} = \psi_{n,l,m}\psi^a_{n_1^a,n_2^a,n_3^a}\psi^b_{n_1^b,n_2^b,n_3^b}, \tag{5.18}$$

де a_B – радіус Бора, $\psi_{n,l,m}$ – добре відомі власні функції атома водню. $\psi^a_{n^a_1,n^a_2,n^a_3}$, $\psi^b_{n^b_1,n^b_2,n^b_3}$ – власні функції тривимірного гармонічного осцилятора.

Відповідно до теорії збурень у першому порядку за V маємо:

$$\Delta E^{(1)}_{n,l} = \langle\psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}}|V|\psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}}\rangle =$$
$$= \left\langle \psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}} \left| -\frac{e^2}{2r^3}(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L}) - \frac{3e^2}{8r^5}(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L})^2 \right| \psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}} \right\rangle +$$
$$+\frac{e^2}{16}\left\langle \psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}} \left| \frac{1}{r^2}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. +\frac{\hbar^2}{r^7}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{r}]^2 \right| \psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}} \right\rangle, \quad (5.19)$$

де ми врахували те, що осцилятор H_{osc} знаходиться у основному стані ($\{n^a\} = \{0\}$, $\{n^b\} = \{0\}$). Для знаходження поправок (5.19) обчислимо відповідні інтеграли.

Зауважимо, що

$$\langle\psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0}|\theta_i|\psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0}\rangle = 0. \quad (5.20)$$

Отже, поправки до енергетичних рівнів атома водню у першому порядку за $\boldsymbol{\theta}$ дорівнюють нулеві. Маємо

$$\langle\psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}}|\frac{e^2}{2r^3}(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L})|\psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}}\rangle = 0. \quad (5.21)$$

Щоб знайти поправки, зумовлені доданком $3e^2(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L})^2/8r^5$ у гамільтоніані (5.12), використаємо відомі результати для середніх, представлені, наприклад, у [107], а саме:

$$\left\langle \psi_{n,l,m} \left| \frac{1}{r^5} \right| \psi_{n,l,m} \right\rangle =$$
$$= \frac{4(5n^2 - 3l(l+1)+1)}{a_B^5 n^5 l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)}. \quad (5.22)$$

Зауважимо, що

$$\langle\psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0}|\theta_i\theta_j|\psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0}\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{m\omega}\right)^2\delta_{ij} = \frac{1}{3}\langle\theta^2\rangle\delta_{ij}. \tag{5.23}$$

Також

$$\langle\psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0}|\theta_i\theta_j|\psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0}\rangle = \frac{1}{3}\langle\theta^2\rangle\delta_{ij}, \tag{5.24}$$

тут

$$\theta^2 = \sum_i \theta_i^2 = \frac{\alpha^2}{\hbar^2}\sum_i [\mathbf{a}\times\mathbf{b}]_i^2, \tag{5.25}$$

$$\langle\theta^2\rangle = \langle\psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0}|\theta^2|\psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0}\rangle = \frac{3}{2}\left(\frac{\alpha}{m\omega}\right)^2 = \frac{3\alpha^2 l_p^4}{2\hbar^2}. \tag{5.26}$$

Отже, врахувавши (5.22) та (5.24), отримаємо:

$$\left\langle \psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}} \left| \frac{3e^2}{8r^5}(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L})^2 \right| \psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}} \right\rangle =$$

$$= \frac{\hbar^2 e^2(5n^2 - 3l(l+1)+1)\langle\theta^2\rangle}{2a_B^5 n^5 (l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)}. \tag{5.27}$$

Останні три доданки у (5.14) зручно переписати у такому вигляді:

$$\frac{1}{r^2}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^7}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{r}]^2 = \theta^2\frac{1}{r^2}p^2\frac{1}{r} +$$

$$+\theta^2\frac{1}{r}p^2\frac{1}{r^2} + \theta^2\frac{\hbar^2}{r^5} - \frac{1}{r^2}(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{p})^2\frac{1}{r} - \frac{1}{r}(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{p})^2\frac{1}{r^2} - \frac{\hbar^2}{r^7}(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{r})^2. \tag{5.28}$$

Тоді, використавши (5.24), знайдемо

$$\left\langle \psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0} \left| \frac{1}{r^2}(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{p})^2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{p})^2\frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^7}(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{r})^2 \right| \psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{r^2}p^2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}p^2\frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^5}\right)\langle\theta^2\rangle. \tag{5.29}$$

У результаті можемо спростити три останні інтеграли у (5.19) та записати як

$$\left\langle\psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}}\left|\frac{1}{r^2}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r}+\frac{1}{r}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\hbar^2}{r^7}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{r}]^2\right|\psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}}\right\rangle=\frac{2}{3}\left\langle\psi_{n,l,m}\left|\frac{1}{r^2}p^2\frac{1}{r}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{r}p^2\frac{1}{r^2}+\frac{\hbar^2}{r^5}\right|\psi_{n,l,m}\right\rangle\langle\theta^2\rangle. \quad (5.30)$$

Оператор $\frac{1}{r^2}p^2\frac{1}{r}+\frac{1}{r}p^2\frac{1}{r^2}+\frac{\hbar^2}{r^5}$ можемо переписати як

$$\frac{1}{r^2}p^2\frac{1}{r}+\frac{1}{r}p^2\frac{1}{r^2}+\frac{\hbar^2}{r^5}=\frac{1}{r^3}p^2+p^2\frac{1}{r^3}+\frac{5\hbar^2}{r^5}. \quad (5.31)$$

Отже, маємо

$$\left\langle\psi_{n,l,m}\left|\frac{1}{r^2}p^2\frac{1}{r}+\frac{1}{r}p^2\frac{1}{r^2}+\frac{\hbar^2}{r^5}\right|\psi_{n,l,m}\right\rangle=$$

$$=-\frac{2\hbar^2}{a_B^2n^2}\left\langle\psi_{n,l,m}\left|\frac{1}{r^3}\right|\psi_{n,l,m}\right\rangle+\frac{4\hbar^2}{a_B}\left\langle\psi_{n,l,m}\left|\frac{1}{r^4}\right|\psi_{n,l,m}\right\rangle+$$

$$+5\hbar^2\left\langle\psi_{n,l,m}\left|\frac{1}{r^5}\right|\psi_{n,l,m}\right\rangle. \quad (5.32)$$

Використовуючи відомі результати для середніх, представлені, для прикладу, у [107]

$$\left\langle\psi_{n,l,m}\left|\frac{1}{r^3}\right|\psi_{n,l,m}\right\rangle=\frac{2}{a_B^3n^3l(l+1)(2l+1)}, \quad (5.33)$$

$$\left\langle\psi_{n,l,m}\left|\frac{1}{r^4}\right|\psi_{n,l,m}\right\rangle=\frac{4(3n^2-l(l+1))}{a_B^4n^5l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)}, \quad (5.34)$$

знайдемо явний вигляд для поправок, зумовлених останніми трьома доданками у (5.14), а саме:

$$\left\langle \psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}} \left| \frac{1}{r^2}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\hbar^2}{r^7}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{r}]^2 \right| \psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}} \right\rangle = -\frac{\hbar^2 e^2\langle\theta^2\rangle}{a_B^5 n^5}\left(\frac{1}{6l(l+1)(2l+1)} - \right.$$

$$-\frac{6n^2-2l(l+1)}{3l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)} -$$

$$\left. -\frac{5}{6}\frac{5n^2-3l(l+1)+1}{l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)}\right). \quad (5.35)$$

Остаточно, врахувавши отримані результати, можемо записати поправки до енергетичних рівнів атома водню, зумовлені некомутативністю координат, у першому порядку теорії збурень

$$\Delta E^{(1)}_{n,l} = -\frac{\hbar^2 e^2\langle\theta^2\rangle}{a_B^5 n^5}\left(\frac{5n^2-3l(l+1)+1}{2(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} - \right.$$

$$-\frac{6n^2-2l(l+1)}{3l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)} + \frac{1}{6l(l+1)(2l+1)} -$$

$$\left. -\frac{5}{6}\frac{5n^2-3l(l+1)+1}{l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)}\right). \quad (5.36)$$

У другому порядку теорії збурень маємо

$$\Delta E^{(2)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}} =$$

$$= \sum_{n',l',m',\{n^a\},\{n^b\}} \frac{\left|\left\langle \psi^{(0)}_{n',l',m',\{n^a\},\{n^b\}} \left| V \right| \psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}} \right\rangle\right|^2}{E^{(0)}_n - E^{(0)}_{n'} - \hbar\omega(n^a_1+n^a_2+n^a_3+n^b_1+n^b_2+n^b_3)}, \quad (5.37)$$

де набір чисел n', l', m', $\{n^a\}$, $\{n^b\}$ не співпадає із набором n, l, m, $\{0\}$, $\{0\}$, та $E^{(0)}_n$ – енергетичні рівні атома водню у звичайному просторі

$$E^{(0)}_n = -\frac{e^2}{2a_B n^2}. \quad (5.38)$$

Зауважимо, що матричні елементи

$$\left\langle \psi^{(0)}_{n',l',m',\{n^a\},\{n^b\}} \left| V \right| \psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}} \right\rangle \tag{5.39}$$

не залежать від частоти осцилятора ω, оскільки виконується рівність (4.6). Отже, у границі $\omega \to \infty$ отримаємо

$$\underset{\omega\to\infty}{lim} \Delta E^{(2)}_{n,l,m,\{0\},\{0\}} = 0. \tag{5.40}$$

Як наслідок, врахувавши (5.36), (5.40), запишемо поправки до енергетичних рівнів атома водню з точністю до другого порядку за параметром некомутативності

$$\Delta E_{n,l} = -\frac{\hbar^2 e^2 \langle\theta^2\rangle}{a_B^5 n^5}\left(\frac{5n^2-3l(l+1)+1}{2(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)}-\right.$$
$$-\frac{6n^2-2l(l+1)}{3l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)}+\frac{1}{6l(l+1)(2l+1)}-$$
$$\left.-\frac{5}{6}\frac{5n^2-3l(l+1)+1}{l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)}\right). \tag{5.41}$$

Зазначимо, що результат (5.41) може бути отриманим, розглядаючи ефективний гамільтоніан, побудований у такому вигляді

$$H^{eff} = \langle \psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0}|H|\psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0}\rangle. \tag{5.42}$$

Із (5.2), (5.11), (5.20), маємо

$$H^{eff}_h = \langle \psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0}|H_h|\psi^a_{0,0,0}\psi^b_{0,0,0}\rangle = \frac{p^2}{2M} - \frac{e^2}{r} - \frac{e^2L^2}{8r^5}\langle\theta^2\rangle +$$
$$+\frac{e^2}{24}\left(\frac{1}{r^2}p^2\frac{1}{r}+\frac{1}{r}p^2\frac{1}{r^2}+\frac{\hbar^2}{r^5}\right)\langle\theta^2\rangle. \tag{5.43}$$

Звернімо увагу на те, що ефективний гамільтоніан (5.43) є сферичносиметричним. Використавши теорію збурень, отримаємо поправки до енергетичних рівнів атома водню у такому вигляді

$$\Delta E_{n,l}^{eff} = -\frac{\hbar^2 e^2 \langle\theta^2\rangle}{a_B^5 n^5}\left(\frac{5n^2 - 3l(l+1)+1}{2(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} - \right.$$

$$-\frac{6n^2 - 2l(l+1)}{3l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)} + \frac{1}{6l(l+1)(2l+1)} -$$

$$\left. -\frac{5}{6}\frac{5n^2 - 3l(l+1)+1}{l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)}\right). \quad (5.44)$$

Зазначимо, що результат (5.44) збігається з (5.41).

Важливо зауважити, що у випадках, коли $l = 0$ чи $l = 1$ поправки (5.41) є розбіжні. Це означає, що для обчислень поправок до ns та np енергетичних рівнів ми не можемо використовувати розклад для $1/R$ (5.11). Щоб оцінити верхню межу для параметра некомутативності ми зацікавлені в обчисленні поправок до ns енергетичних рівнів. Зважаючи на це, розгляньмо задачу знаходження поправок до енергетичних рівнів атома водню у випадку, коли $l = 0$.

Для знаходження поправок до ns енергетичних рівнів перепишемо збурення, зумовлене некомутативністю координат, у такому вигляді:

$$V = -\frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{\sqrt{r^2 - (\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L}) + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2}} + \frac{e^2}{r}. \quad (5.45)$$

Зауважимо, що у (5.45) ми не використовували розклад за параметром некомутативності (5.11). Відповідно до теорії збурень можемо записати

$$\Delta E_{ns} =$$

$$= \left\langle \psi^{(0)}_{n,0,0,\{0\},\{0\}} \left| \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\sqrt{r^2 - (\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L}) + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2}} \right| \psi^{(0)}_{n,0,0,\{0\},\{0\}} \right\rangle. \quad (5.46)$$

Звернімо увагу на те, що

$$[(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L}), [\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2] = 0, \quad (5.47)$$

$$[(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L}), r^2] = 0. \quad (5.48)$$

Також важливо зауважити, що

$$(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L})\psi^{(0)}_{n,0,0,\{0\},\{0\}}=0, \tag{5.49}$$

оскільки хвильова функція $\psi^{(0)}_{n,0,0,\{0\},\{0\}}$ не залежить від кутів. Отже, перепишемо (5.46) у такому вигляді

$$\Delta E_{ns}=\left\langle\psi^{(0)}_{n,0,0,\{0\},\{0\}}\left|\frac{e^2}{r}-\frac{e^2}{\sqrt{r^2+\frac{1}{4}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2}}\right|\psi^{(0)}_{n,0,0,\{0\},\{0\}}\right\rangle. \tag{5.50}$$

З точністю до лінійних флуктуацій $[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2$ можемо записати

$$\Delta E_{ns}=\left\langle\psi_{n,0,0}\left|\frac{e^2}{r}-\frac{e^2}{\sqrt{r^2+\frac{1}{6}\langle\theta^2\rangle p^2}}\right|\psi_{n,0,0}\right\rangle. \tag{5.51}$$

Зауважимо, що для ns енергетичних рівнів виконується така рівність:

$$\Delta E_{ns}=\left\langle\psi_{n,0,0}\left|\frac{e^2}{r}-\frac{e^2}{\sqrt{r^2+\frac{1}{6}\langle\theta^2\rangle p^2}}\right|\psi_{n,0,0}\right\rangle=$$

$$=\left\langle R_{n,0}\left|\frac{e^2}{r}-\frac{e^2}{\sqrt{r^2+\frac{1}{6}\langle\theta^2\rangle p_r^2}}\right|R_{n,0}\right\rangle, \tag{5.52}$$

де

$$p_r=-i\hbar\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r, \tag{5.53}$$

$R_{n,0}$ – радіальні хвильові функції атома водню

$$R_{n,0}=\sqrt{\frac{4}{a_B^3n^5}}e^{-\frac{r}{na_B}}L^1_{n-1}\left(\frac{2r}{a_Bn}\right) \tag{5.54}$$

тут $L^1_{n-1}\left(\frac{2r}{a_Bn}\right)$ – узагальнені поліноми Лаґера

$$L^{\alpha}_n(x)=\frac{1}{n!}e^xx^{-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^nx^{n+\alpha}e^{-x}. \tag{5.55}$$

Для початку знайдемо поправки до $1s$ енергетичних рівнів. Зручно ввести безрозмірні координати

$$\rho = r\left(\frac{6}{\hbar^2\langle\theta^2\rangle}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{5.56}$$

Отже, можемо записати поправки до $1s$ енергетичних рівнів у такому вигляді

$$\Delta E_{1s} = \left\langle R_{1,0}\left|\frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{6}\langle\theta^2\rangle p_r^2}}\right|R_{1,0}\right\rangle =$$

$$= \frac{4e^2\beta^2}{a_B}\int_0^\infty d\rho\rho^2 e^{-\beta\rho}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + p_\rho^2}}\right)e^{-\beta\rho}, \tag{5.57}$$

де

$$p_\rho = -i\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho, \tag{5.58}$$

$$\beta = \left(\frac{\hbar^2\langle\theta^2\rangle}{6a_B^4}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{5.59}$$

Для обчислення інтеграла у (5.57) розкладемо $e^{-\beta\rho}$ в ряд за власними функціями оператора $\rho^2 + p_\rho^2$, які позначимо як ϕ_k. А саме, можемо записати

$$e^{-\beta\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\phi_k, \tag{5.60}$$

де C_k – коефіцієнти розкладу. Власні функції та власні значення оператора $\rho^2 + p_\rho^2$ мають такий вигляд (див., для прикладу, [108])

$$\phi_k = \sqrt{\frac{2k!}{\Gamma(k+\frac{3}{2})}}e^{-\frac{\rho^2}{2}}L_k^{\frac{1}{2}}(\rho^2), \tag{5.61}$$

$$\lambda_k = 2\left(2k + \frac{3}{2}\right). \tag{5.62}$$

У результаті, взявши до уваги (5.61) та (5.60), можемо знайти коефіцієнти розкладу

$$C_k = \sqrt{\frac{2k!}{\Gamma(k+\frac{3}{2})}} \int_0^\infty d\rho \rho^2 e^{-\frac{\rho^2}{2}-\beta\rho} L_k^{\frac{1}{2}}\left(\rho^2\right). \tag{5.63}$$

Отже, другий доданок у (5.57) перепишеться так

$$\int_0^\infty d\rho \rho^2 e^{-\beta\rho} \frac{1}{\sqrt{\rho^2+p_\rho^2}} e^{-\beta\rho} = \sum_{k=0}^\infty \frac{C_k^2}{\sqrt{\lambda_k}}. \tag{5.64}$$

Аналогічно можемо записати перший доданок у (5.57) у такому вигляді

$$\int_0^\infty d\rho \rho e^{-2\beta\rho} = \sum_{k=0}^\infty C_k \int_0^\infty d\rho \rho e^{-\beta\rho}\phi_k = \sum_{k=0}^\infty C_k I_k, \tag{5.65}$$

де

$$I_k = \sqrt{\frac{2k!}{\Gamma(k+\frac{3}{2})}} \int_0^\infty d\rho \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}-\beta\rho} L_k^{\frac{1}{2}}\left(\rho^2\right). \tag{5.66}$$

Врахувавши (5.64) та (5.65), поправки до $1s$ енергетичних рівнів можуть бути записаними у вигляді такого ряду

$$\Delta E_{1s} = \frac{4e^2\beta^2}{a_B} \sum_{k=0}^\infty \left(C_k I_k - \frac{C_k^2}{\sqrt{\lambda_k}}\right) = \frac{e^2\beta^2}{a_B} S_{1s}(\beta), \tag{5.67}$$

де ми використали позначення

$$S_{1s}(\beta) = 4\int_0^\infty d\rho \rho^2 e^{-\beta\rho} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+p_\rho^2}}\right) e^{-\beta\rho} =$$

$$= 4\sum_{k=0}^\infty \left(C_k I_k - \frac{C_k^2}{\sqrt{\lambda_k}}\right). \tag{5.68}$$

Важливо зауважити, що ряд $S_{1s}(\beta)$ має скінченне значення при $\beta = 0$

$$S_{1s}(0) = 16\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{k!} \left({}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\pi}{8k+6}}\right) = 1.72006, \tag{5.69}$$

де ${}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right)$ – гіпергеометрична функція.

Результат $S_{1s}(0) = 1.72006$ отримано за допомогою таких міркувань. Два ряди у $S_{1s}(0)$, а саме:

$$16\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{k!}{}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right), \tag{5.70}$$

$$16\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{k!}\sqrt{\frac{\pi}{8k+6}}, \tag{5.71}$$

є розбіжними. Незважаючи на це, їх сума $S_{1s}(0)$ має скінченне значення. Щоб розглядати ряди (5.70) та (5.71) окремо, використаємо додатковий множник η^k $(\eta < 1)$

$$16\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{k!}{}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right)\eta^k, \tag{5.72}$$

$$16\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{k!}\sqrt{\frac{\pi}{8k+6}}\eta^k. \tag{5.73}$$

Поклавши $\eta = 1$ у (5.72) та (5.73) ми отримаємо (5.70), (5.71), відповідно.

Спершу розглянемо ряд (5.73). Зауважимо, що

$$\sqrt{\frac{\pi}{k+\frac{3}{4}}} = 2\int_0^{\infty} dz e^{-(k+\frac{3}{4})z^2}. \tag{5.74}$$

Також справедливою є така рівність

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{k!}t^k = \frac{\sqrt{\pi}}{2(1-t)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5.75}$$

В результаті, врахувавши (5.74) та (5.75), отримаємо

$$16\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{k!\sqrt{8k+6}}\eta^k = 16\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{k!\sqrt{\pi}}\eta^k\int_0^{\infty} dz e^{-(k+\frac{3}{4})z^2} =$$

$$= 8\int_0^{\infty} dz \frac{e^{-\frac{3}{4}z^2}}{(1-\eta e^{-z^2})^{\frac{3}{2}}}. \tag{5.76}$$

Розглянимо ряд (5.72). Гіпергеометрична функція ${}_2F_1(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2)$ може бути представлена у такому вигляді

$$ {}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right) = \sum_{q=0}^{k} \frac{(-1)^q C_k^q 2^q}{2q+1}, \tag{5.77} $$

де C_k^q – біноміальні коефіцієнти. Очевидно, що виконується рівність

$$ \frac{1}{2q+1} = \int_0^1 dz z^{2q}. \tag{5.78} $$

Отже, використавши (5.77) та (5.78), отримаємо

$$ {}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right) = \sum_{q=0}^{k} \int_0^1 dz C_k^q (-2)^q z^{2q}. \tag{5.79} $$

Зауважимо, що

$$ \sum_{q=0}^{k} C_k^q (-2)^q z^{2q} = (1-2z^2)^k. \tag{5.80} $$

Отже, маємо:

$$ {}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right) = \int_0^1 dz (1-2z^2)^k. \tag{5.81} $$

Остаточно, врахувавши (5.75) та (5.81), можемо переписати (5.72) у такому вигляді

$$ 16\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{k!} {}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right) \eta^k = $$

$$ = 16\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{k!} \eta^k \int_0^1 dz (1-2z^2)^k = $$

$$ = 8\sqrt{2} \int_0^1 \frac{dz}{(1-\eta(1-2z^2))^{\frac{3}{2}}}. \tag{5.82} $$

Розіб'ємо інтеграл (5.82) на два інтеграли

$$ \int_0^1 \frac{dz}{(1-\eta(1-2z^2))^{\frac{3}{2}}} = I_1(\eta) + I_2(\eta), \tag{5.83} $$

де

$$I_1(\eta)=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dz}{(1-\eta(1-2z^2))^{\frac{3}{2}}},\tag{5.84}$$

$$I_2(\eta)=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{dz}{(1-\eta(1-2z^2))^{\frac{3}{2}}}.\tag{5.85}$$

Звернімо увагу, що інтеграл $I_2(\eta)$ при $\eta=1$ має скінченне значення. Поклавши $\eta=1$ у (5.85), отримаємо

$$I_2(1)=\frac{\sqrt{2}}{8}.\tag{5.86}$$

Перепишемо (5.84) у формі, яка є близькою до (5.76). Використавши підстановку $e^{-t^2}=1-2z^2$, маємо:

$$I_1(\eta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\infty}dt\frac{te^{-t^2}}{(1-e^{-t^2})^{\frac{1}{2}}(1-\eta e^{-t^2})^{\frac{3}{2}}}.\tag{5.87}$$

Отже, врахувавши (5.76), (5.82), (5.83), (5.86) та (5.87), знайдемо

$$16\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{k!}{}_2F_1\left(-k,\frac{1}{2};\frac{3}{2};2\right)\eta^k-\tag{5.88}$$

$$-16\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{k!}\sqrt{\frac{\pi}{8k+6}}\eta^k=$$

$$=8\sqrt{2}I_2(\eta)+8\int_0^{\infty}dt\frac{te^{-t^2}-e^{-\frac{3}{4}t^2}(1-e^{-t^2})^{\frac{1}{2}}}{(1-e^{-t^2})^{\frac{1}{2}}(1-\eta e^{-t^2})^{\frac{3}{2}}}.\tag{5.89}$$

Зазначимо, що інтеграл (5.89) має скінченне значення при $\eta=1$. Як наслідок, поклавши $\eta=1$ у (5.89), та врахувавши (5.86), знайдемо

$$S_{1s}(0)=2+8\int_0^{\infty}dt\frac{te^{-t^2}-e^{-\frac{3}{4}t^2}\sqrt{1-e^{-t^2}}}{(1-e^{-t^2})^2}=1.72006\ldots\tag{5.90}$$

Отже, маємо таку асимптотику для ΔE_{1s} у випадку, коли $\beta\to 0$ ($\theta\to 0$)

$$\Delta E_{1s}=\frac{e^2\beta^2}{a_B}S_{1s}(0).\tag{5.91}$$

Використавши (5.59), отримаємо

$$\Delta E_{1s} = \frac{e^2}{a_B^3}\sqrt{\frac{\hbar^2\langle\theta^2\rangle}{6}}S_{1s}(0). \tag{5.92}$$

Подібним способом можемо знайти поправки до збуджених s рівнів атома водню

$$\Delta E_{ns} = \frac{e^2\beta^2}{a_B n^5}S_{ns}(\beta), \tag{5.93}$$

де

$$S_{ns}(\beta) = 4\int_0^\infty d\rho\rho^2 e^{-\frac{\beta\rho}{n}}L^1_{n-1}\left(\frac{2\beta\rho}{n}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+p_\rho^2}}\right)e^{-\frac{\beta\rho}{n}}L^1_{n-1}\left(\frac{2\beta\rho}{n}\right). \tag{5.94}$$

Зауважимо, що

$$S_{ns}(0) = S_{1s}(0)n^2 \simeq 1.72n^2. \tag{5.95}$$

Отже, отримаємо такі поправки до ns енергетичних рівнів атома водню

$$\Delta E_{ns} = \frac{e^2}{a_B^3 n^3}\sqrt{\frac{\hbar^2\langle\theta^2\rangle}{6}}S_{1s}(0). \tag{5.96}$$

Результат (5.96) знайдено з точністю до лінійних флуктуацій $[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2$. У інтегралі (5.51) було зроблено заміну $\langle f(A)\rangle \longrightarrow f(\langle A\rangle)$. А саме така заміна була розглянута

$$\left\langle\frac{1}{\sqrt{r^2+[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2}}\right\rangle_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{r^2+\langle[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2\rangle_{\mathbf{a},\mathbf{b}}}}, \tag{5.97}$$

де використано позначення

$$\langle...\rangle_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \langle\psi^a_{0,0,0}(\mathbf{a})\psi^b_{0,0,0}(\mathbf{b})|...|\psi^a_{0,0,0}(\mathbf{a})\psi^b_{0,0,0}(\mathbf{b})\rangle_{\mathbf{a},\mathbf{b}}. \tag{5.98}$$

Знайдемо поправки до ns енергетичних рівнів атома водню точно. Повернемося до інтегралу (5.50). Для зручності введемо безрозмірні координати

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{a}}{l_P}, \tag{5.99}$$

$$\mathbf{b}' = \frac{\mathbf{b}}{l_P}. \tag{5.100}$$

Отже, можемо записати $\boldsymbol{\theta}$ у такому вигляді

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\alpha l_p^2}{\hbar}\boldsymbol{\theta}', \tag{5.101}$$

де

$$\boldsymbol{\theta}' = [\mathbf{a}' \times \mathbf{b}']. \tag{5.102}$$

Також використаємо позначення

$$\mathbf{r}' = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\frac{\mathbf{r}}{l_p}. \tag{5.103}$$

Як наслідок, перепишемо поправки до ns рівнів атома водню ΔE_{ns} як

$$\Delta E_{ns} = \frac{\chi^2 e^2}{a_B} I_{ns}(\chi), \tag{5.104}$$

де

$$I_{ns}(\chi) = \int d\mathbf{a}'\tilde{\psi}^a_{0,0,0}(\mathbf{a}')\int d\mathbf{b}'\tilde{\psi}^b_{0,0,0}(\mathbf{b}')\int d\mathbf{r}'\tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi\mathbf{r}')\left(\frac{1}{r'} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + [\boldsymbol{\theta}' \times \mathbf{p}']^2}}\right)\tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi\mathbf{r}')\tilde{\psi}^a_{0,0,0}(\mathbf{a}')\tilde{\psi}^b_{0,0,0}(\mathbf{b}'), \tag{5.105}$$

тут параметр χ визначається як

$$\chi = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\frac{l_p}{a_B}. \tag{5.106}$$

Функції $\tilde{\psi}^a_{0,0,0}(\mathbf{a}')$, $\tilde{\psi}^b_{0,0,0}(\mathbf{b}')$ – безрозмірні власні функції гармонічного осцилятора

$$\tilde{\psi}^a_{0,0,0}(\mathbf{a}') = \pi^{-\frac{3}{4}}e^{-\frac{(a')^2}{2}}, \tag{5.107}$$

$$\tilde{\psi}^b_{0,0,0}(\mathbf{b}') = \pi^{-\frac{3}{4}}e^{-\frac{(b')^2}{2}}. \tag{5.108}$$

Функції $\tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi\mathbf{r'})$ – безрозмірні власні функції атома водню

$$\tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi\mathbf{r'}) = \sqrt{\frac{1}{\pi n^5}} e^{-\frac{\chi r'}{n}} L^1_{n-1}\left(\frac{2\chi r'}{n}\right), \tag{5.109}$$

де $L^1_{n-1}\left(\frac{2\chi r'}{n}\right)$ – поліноми Лагера.

Звернімо увагу на те, що при $\chi = 0$ інтеграл (5.105) має скінченне значення. Зважаючи на це, головний член асимптотичного розкладу ΔE_{ns} при $\chi \to 0$ ($\alpha \to 0$) можемо записати як

$$\Delta E_{ns} = \frac{\chi^2 e^2}{a_B} I_{ns}(0). \tag{5.110}$$

Знайдемо $I_{ns}(0)$ точно. Із цією метою, для початку розглянемо такий інтеграл

$$I_{ns}(\chi, \boldsymbol{\theta'}) = \int d\mathbf{r'} \tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi\mathbf{r'}) \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + [\boldsymbol{\theta'} \times \mathbf{p'}]^2}}\right) \tilde{\psi}_{n,0,0}(\chi\mathbf{r'}). \tag{5.111}$$

Зазначимо, що

$$I_{ns}(0) = \\ = \int d\mathbf{a'} \tilde{\psi}^a_{0,0,0}(\mathbf{a'}) \int d\mathbf{b'} \tilde{\psi}^b_{0,0,0}(\mathbf{b'}) I_{ns}(0, \theta') \tilde{\psi}^a_{0,0,0}(\mathbf{a'}) \tilde{\psi}^b_{0,0,0}(\mathbf{b'}) = \\ = \langle I_{ns}(0, \theta') \rangle_{\mathbf{a'},\mathbf{b'}}. \tag{5.112}$$

Для розрахунку (5.111) зручно перейти до імпульсного представлення

$$I_{ns}(\chi, \boldsymbol{\theta'}) = \frac{1}{\chi^6} \int d\mathbf{p'} \tilde{\psi}_{n,0,0}\left(\frac{\mathbf{p'}}{\chi}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2_{p'}}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{-\nabla^2_{p'} + [\boldsymbol{\theta'} \times \mathbf{p'}]^2}}\right) \tilde{\psi}_{n,0,0}\left(\frac{\mathbf{p'}}{\chi}\right), \tag{5.113}$$

тут

$$\nabla^2_{p'} = \sum_i \frac{\partial^2}{(\partial p'_i)^2}. \tag{5.114}$$

Важливо звернути увагу, що інтеграл $I_{ns}(\chi, \boldsymbol{\theta}')$ не залежить від напрямку $\boldsymbol{\theta}'$. Тому справедливою є така рівність

$$I_{ns}(\chi, \boldsymbol{\theta}') = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega I_{ns}(\chi, \boldsymbol{\theta}') = I_{ns}(\chi, \theta'). \tag{5.115}$$

де

$$\theta' = |\boldsymbol{\theta}'|, \tag{5.116}$$

$$d\Omega = \sin\Theta d\Theta d\Phi, \tag{5.117}$$

тут Θ – кут між векторами $\boldsymbol{\theta}'$ та $\mathbf{p}'$. Інтеграл $I_{ns}(\chi, \theta')$ має такий вигляд

$$I_{ns}(\chi, \boldsymbol{\theta}') = I_{ns}(\chi, \theta'). \frac{1}{4\pi\chi^6}\int d\Omega \int d\mathbf{p}' \tilde{\psi}_{n,0,0}\left(\frac{\mathbf{p}'}{\chi}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2_{p'}}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{-\nabla^2_{p'} + [\boldsymbol{\theta}' \times \mathbf{p}']^2}}\right)\tilde{\psi}_{n,0,0}\left(\frac{\mathbf{p}'}{\chi}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\chi^6}\int d\Omega \int d\mathbf{p}' \tilde{\psi}_{n,0,0}\left(\frac{\mathbf{p}'}{\chi}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2_{p'}}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{-\nabla^2_{p'} + (\theta')^2 (p')^2 \sin^2\Theta}}\right)\tilde{\psi}_{n,0,0}\left(\frac{\mathbf{p}'}{\chi}\right) \tag{5.118}$$

Використавши заміну

$$\tilde{\mathbf{p}} = \kappa \mathbf{p}', \tag{5.119}$$

де

$$\kappa = \sqrt{\theta' \sin\Theta}, \tag{5.120}$$

та повернувшись до координатного представлення, можемо записати

$$I_{ns}(\chi,\theta') =$$

$$= \frac{\theta'}{2}\int_0^{\pi} d\Theta \sin^2\Theta \int d\tilde{\mathbf{r}}\tilde{\psi}_{n,0,0}(\kappa\chi\tilde{\mathbf{r}}) \left(\frac{1}{\tilde{r}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}^2+\tilde{p}^2}}\right) \tilde{\psi}_{n,0,0}(\kappa\chi\tilde{\mathbf{r}}) \tag{5.121}$$

Зауважимо, що для ns рівнів інтеграл (5.121) можемо спростити та записати як

$$I_{ns}(\chi,\theta') =$$

$$= \frac{\theta'}{2}\int_0^{\pi} d\Theta \sin^2\Theta \int_0^{\infty} d\tilde{r}\tilde{r}^2\tilde{R}_{n,0}(\kappa\chi\tilde{r}) \left(\frac{1}{\tilde{r}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}^2+p_{\tilde{r}}^2}}\right) \tilde{R}_{n,0}(\kappa\chi\tilde{r}), \tag{5.122}$$

де

$$\tilde{R}_{n,0}(\kappa\chi\tilde{r}) = \sqrt{\frac{4}{n^5}} e^{-\frac{\kappa\chi\tilde{r}}{n}} L_{n-1}^1\left(\frac{2\kappa\chi\tilde{r}}{n}\right) \tag{5.123}$$

радіальні власні функції атома водню, $p_{\tilde{r}}$ визначається як

$$p_{\tilde{r}} = -i\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\tilde{r}. \tag{5.124}$$

Зручно використати таке позначення

$$S_{ns}(\kappa\chi) = 4\int_0^{\infty} d\tilde{r}\tilde{r}^2 e^{-\frac{\kappa\chi\tilde{r}}{n}} L_{n-1}^1\left(\frac{2\kappa\chi\tilde{r}}{n}\right)\left(\frac{1}{\tilde{r}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}^2+p_{\tilde{r}}^2}}\right) e^{-\frac{\kappa\chi\tilde{r}}{n}} L_{n-1}^1\left(\frac{2\kappa\chi\tilde{r}}{n}\right), \tag{5.125}$$

та переписати $I_{ns}(\chi,\theta')$ у вигляді

$$I_{ns}(\chi,\theta') = \frac{\theta'}{2n^5}\int_0^{\pi} d\Theta \sin^2\Theta S_{ns}(\kappa\chi). \tag{5.126}$$

Для $\chi = 0$ маємо:

$$I_{ns}(0, \theta') = \frac{\theta'}{2n^5} \int_0^\pi d\Theta \sin^2 \Theta S_{ns}(0) = \frac{\pi\theta'}{4n^5} S_{ns}(0). \tag{5.127}$$

Повертаючись до (5.110) та врахувавши (5.112), (5.127), отримаємо вираз для поправок до ns енергетичних рівнів у такому вигляді

$$\Delta E_{ns} = \frac{\pi\langle\theta'\rangle\chi^2 e^2}{4a_B n^5} S_{ns}(0), \tag{5.128}$$

де

$$\langle\theta'\rangle = \langle\tilde{\psi}^a_{0,0,0}(\mathbf{a}')\tilde{\psi}^b_{0,0,0}(\mathbf{b}')|\sqrt{\sum_i (\theta'_i)^2}|\tilde{\psi}^a_{0,0,0}(\mathbf{a}')\tilde{\psi}^b_{0,0,0}(\mathbf{b}')\rangle = 1. \tag{5.129}$$

Зауважимо, що результат $\langle\theta'\rangle = 1$ є очікуваним, зважаючи на вигляд безрозмірних координат $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$.

Звернімо увагу, що $S_{ns}(0)$ та $S_{1s}(0)$ пов'язані таким співвідношенням

$$S_{ns}(0) = S_{1s}(0)n^2. \tag{5.130}$$

Із (5.128), (5.129), (5.130), отримаємо вираз для головного члена асимтотичного розкладу поправок до ns рівнів атома водню

$$\Delta E_{ns} = \frac{\pi\chi^2 e^2}{4a_B n^3} S_{1s}(0). \tag{5.131}$$

Обчислимо $S_{1s}(0)$

$$S_{1s}(0) = 4\int_0^\infty d\tilde{r}\tilde{r}^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}^2 + p_{\tilde{r}}^2}}\right). \tag{5.132}$$

Із цією метою розкладемо одиницю в ряд за власними функціями оператора $\tilde{r}^2 + p_{\tilde{r}}^2$

$$1 = \sum_{k=0}^\infty C_k \phi_k, \tag{5.133}$$

де ϕ_k – власні функції $\tilde{r}^2 + p_{\tilde{r}}^2$, C_k – коефіцієнти розкладу

$$C_k = \sqrt{\frac{2k!}{\Gamma(k+\frac{3}{2})}} \int_0^\infty d\tilde{r}\tilde{r}^2 e^{-\frac{\tilde{r}^2}{2}} L_k^{\frac{1}{2}}\left(\tilde{r}^2\right) = (-1)^k \sqrt{\frac{4\Gamma(k+\frac{3}{2})}{k!}}. \quad (5.134)$$

Отже, використавши (5.133), можемо записати другий доданок у (5.132) як

$$\int_0^\infty d\tilde{r}\tilde{r}^2 \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}^2 + p_{\tilde{r}}^2}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{C_k^2}{\sqrt{\lambda_k}}, \quad (5.135)$$

де λ_k – власні значення оператора $\tilde{r}^2 + p_{\tilde{r}}^2$.

Перший доданок у (5.132) може бути представлений у такому вигляді

$$\int_0^\infty d\tilde{r}\tilde{r} = \sum_{k=0}^\infty C_k I_k, \quad (5.136)$$

де

$$I_k = \sqrt{\frac{2k!}{\Gamma(k+\frac{3}{2})}} \int_0^\infty d\tilde{r}\tilde{r} e^{-\frac{\tilde{r}^2}{2}} L_k^{\frac{1}{2}}\left(\tilde{r}^2\right) =$$

$$= (-1)^k \sqrt{\frac{8k!}{\pi\Gamma(k+\frac{3}{2})}} {}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right), \quad (5.137)$$

тут ${}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right)$ – гіпергеометрична функція.

Отже, врахувавши (5.135) та (5.136), маємо

$$S_{1s}(0) = 4\sum_{k=0}^\infty \left(C_k I_k - \frac{C_k^2}{\sqrt{\lambda_k}}\right) =$$

$$= 16\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{k!} \left({}_2F_1\left(-k, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right) - \sqrt{\frac{\pi}{8k+6}}\right) =$$

$$1.72006.... \quad (5.138)$$

де ми використали результат (5.90). Взявши до уваги (5.138), можемо записати

$$\Delta E_{ns} \simeq 1.72 \frac{\pi\chi^2 e^2}{4a_B n^3}. \quad (5.139)$$

Перепишемо поправки до ns рівнів через параметр некомутативності, а саме, із (5.101), (5.106), маємо:

$$\Delta E_{ns} \simeq 1.72 \frac{\hbar \langle \theta \rangle \pi e^2}{8 a_B^3 n^3}, \tag{5.140}$$

де

$$\langle \theta \rangle = \langle \psi^a_{0,0,0}(\mathbf{a}) \psi^b_{0,0,0}(\mathbf{b}) | \sqrt{\sum_i \theta_i^2} | \psi^a_{0,0,0}(\mathbf{a}) \psi^b_{0,0,0}(\mathbf{b}) \rangle = \frac{\alpha l_p^2}{\hbar}, \tag{5.141}$$

та вектор $\boldsymbol{\theta}$ заданий як (4.22).

Зауважимо, що

$$\langle \theta \rangle = \sqrt{\frac{2 \langle \theta^2 \rangle}{3}}. \tag{5.142}$$

Отже, точний та наближений результати для поправок до ns енергетичних рівнів атома водню (5.140), (5.96), відповідно, відрізняються множником $\pi/4$.

Цікаво порівняти результати для поправок до енергетичних рівнів атома водню у випадках різних виглядів для тензора некомутативності та, відповідно, різних сферично-симетричних алгебр (4.7)-(4.9), (4.31)-(4.33). Знайдемо поправки до енергетичних рівнів атома водню у випадку, коли сферично-симетрична некомутативна алгебра побудована як (4.31)-(4.33). Розгляньмо повний гамільтоніан

$$H^a = H_h + H^a_{osc}, \tag{5.143}$$

де

$$H_h = \frac{P^2}{2M} - \frac{e^2}{R}, \tag{5.144}$$

$$H^a_{osc} = \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc} \omega^2 a^2}{2}, \tag{5.145}$$

тут $R = \sqrt{\sum_i X_i^2}$ та координати X_i задовольняють (4.31).

Використаємо таке представлення

$$X_i = x_i - \frac{l_0}{2\hbar}\varepsilon_{ijk}a_k p_j, \tag{5.146}$$

$$P_i = p_i, \tag{5.147}$$

де θ_{ij} визначений як (4.29). Координати x_i та імпульси p_i задовольняють звичні комутаційні співвідношення (4.17)-(4.19) та комутують із a_i, p_i^a. Координати X_i (5.146) зручно переписати у такому вигляді

$$X_i = x_i + \frac{l_0}{2\hbar}[\mathbf{a}\times\mathbf{p}]_i. \tag{5.148}$$

Зауважимо, що для координат X_i та імпульсів p_j^a виконується співвідношення

$$[X_i, p_j^a] = i\varepsilon_{ijk}\frac{l_0}{2}p_k. \tag{5.149}$$

Знайдемо розклад для гамільтоніана H^a з точністю до другого порядку за $l_0\mathbf{a}/\hbar$. Використавши (5.148), маємо:

$$R = \sqrt{\sum_i X_i^2} = \sqrt{r^2 - \frac{l_0}{\hbar}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}) + \frac{l_0^2}{4\hbar^2}[\mathbf{a}\times\mathbf{p}]^2}, \tag{5.150}$$

де $r = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ та $\mathbf{L} = [\mathbf{r}\times\mathbf{p}]$. Оскільки оператори під квадратним коренем не комутують, запишемо розклад для R у такому вигляді:

$$R = r - \frac{l_0}{2\hbar r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}) - \frac{l_0^2}{8\hbar^2 r^3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{L})^2 +$$
$$+\frac{l_0^2}{16\hbar^2}\left(\frac{1}{r}[\mathbf{a}\times\mathbf{p}]^2 + [\mathbf{a}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r} + a^2 f(\mathbf{r})\right), \tag{5.151}$$

де $f(\mathbf{r})$ – невідома функція. Піднесемо до квадрату ліву та праву частини рівності (5.151)

$$\frac{\hbar^2}{r^4}[\mathbf{a}\times\mathbf{r}]^2 - ra^2 f(\mathbf{r}) = 0. \tag{5.152}$$

Із (5.152) легко отримати

$$a^2 f(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{r^5}[\mathbf{a}\times\mathbf{r}]^2. \tag{5.153}$$

Отже, врахувавши (5.151) та (5.153), знайдемо розклад для R^{-1}

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{l_0}{2\hbar r^3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}) + \frac{3l_0^2}{8\hbar^2 r^5}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{L})^2 -$$

$$-\frac{l_0^2}{16\hbar^2}\left(\frac{1}{r^2}[\mathbf{a}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\mathbf{a}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^7}[\mathbf{a}\times\mathbf{r}]^2\right). \tag{5.154}$$

В результаті, можемо записати гамільтоніан (5.143) у такому вигляді

$$H^a = H_0^a + V^a, \tag{5.155}$$

де

$$H_0^a = H_h^{(0)} + H_{osc}^a. \tag{5.156}$$

Тут V – збурення, зумовлене некомутативністю координат

$$V^a = -\frac{l_0 e^2}{2\hbar r^3}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}) - \frac{3l_0^2 e^2}{8\hbar^2 r^5}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{L})^2 +$$

$$+\frac{l_0^2 e^2}{16\hbar^2}\left(\frac{1}{r^2}[\mathbf{a}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\mathbf{a}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^7}[\mathbf{a}\times\mathbf{r}]^2\right), \tag{5.157}$$

та $H_h^{(0)}$– гамільтоніан атома водню у звичайному просторі.

Знайдемо поправки до енергетичних рівнів атома водню, зумовлені некомутативністю координат (4.31). Зауважимо, що $H_h^{(0)}$ комутує з H_{osc}^a

$$\left[\frac{p^2}{2M} - \frac{e^2}{r}, \frac{(p^a)^2}{2m} + \frac{m\omega^2 a^2}{2}\right] = 0. \tag{5.158}$$

Отже, власні функції та власні значення, що відповідають H_0^a, (5.156) мають такий вигляд

$$E^{(0)}_{n,\{n^a\}} = -\frac{e^2}{2a_B n^2} + \hbar\omega\left(n_1^a + n_2^a + n_3^a + \frac{3}{2}\right), \tag{5.159}$$

$$\psi^{(0)}_{n,l,m,\{n^a\}} = \psi_{n,l,m}\psi^a_{n_1^a,n_2^a,n_3^a}, \tag{5.160}$$

де $\psi_{n,l,m}$ – власні функції атома водню у звичайному просторі ($\theta_{ij} = 0$), $\psi^a_{n_1^a,n_2^a,n_3^a}$ – власні функції гармонічного осцилятора (5.145).

Відповідно до теорії збурень, у випадку, коли гармонічний осцилятор H^a_{osc} знаходиться в основному стані, маємо такі поправки до енергетичних рівнів атома водню, зумовлені некомутативністю координат (4.31)

$$\Delta E^{a,(1)}_{n,l} = \langle\psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\}}|V|\psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\}}\rangle =$$

$$= -\frac{l_0^2}{\hbar^2}\frac{\hbar^2 e^2\langle a^2\rangle}{a_B^5 n^5}\left(\frac{5n^2 - 3l(l+1)+1}{2(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} - \right.$$

$$-\frac{6n^2 - 2l(l+1)}{3l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)} + \frac{1}{6l(l+1)(2l+1)} -$$

$$\left. -\frac{5}{6}\frac{5n^2 - 3l(l+1)+1}{l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)}\right), \quad (5.161)$$

де $\langle a^2\rangle$ визначається як

$$\langle a^2\rangle = \langle\psi^a_{0,0,0}|a^2|\psi^a_{0,0,0}\rangle = \frac{3}{2}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right) = \frac{3}{2}l_P^2. \quad (5.162)$$

Тут ми використали результати обчислень відповідних інтегралів (5.27), (5.35).

У другому порядку теорії збурень можемо записати

$$\Delta E^{(2)}_{n,l,m,\{0\}} = \sum_{n',l',m',\{n^a\}} \frac{\left|\left\langle\psi^{(0)}_{n',l',m',\{n^a\}}\left|V\right|\psi^{(0)}_{n,l,m,\{0\}}\right\rangle\right|^2}{E^{(0)}_n - E^{(0)}_{n'} - \hbar\omega(n_1^a + n_2^a + n_3^a)}, \quad (5.163)$$

де набір чисел n', l', m', $\{n^a\}$ не співпадає із n, l, m, $\{0\}$, $E^{(0)}_n = -e^2/(2a_B n^2)$. У границі $\omega \to \infty$ отримаємо:

$$\lim_{\omega\to\infty} \Delta E^{(2)}_{n,l,m,\{0\}} = 0. \quad (5.164)$$

Отже, поправки до енергетичних рівнів атома водню у сферичносиметричному некомутативному просторі (4.31)-(4.33) мають такий вигляд

$$\Delta E_{n,l} = -\frac{l_0^2}{\hbar^2}\frac{\hbar^2 e^2 \langle a^2 \rangle}{a_B^5 n^5}\left(\frac{5n^2 - 3l(l+1) + 1}{2(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)} - \right.$$

$$-\frac{6n^2 - 2l(l+1)}{3l(l+1)(2l+1)(2l+3)(2l-1)} + \frac{1}{6l(l+1)(2l+1)} -$$

$$\left. -\frac{5}{6}\frac{5n^2 - 3l(l+1) + 1}{l(l+1)(l+2)(2l+1)(2l+3)(l-1)(2l-1)}\right). \tag{5.165}$$

Звернімо увагу, що у випадку, коли $l = 0$ чи $l = 1$ поправки (5.165) є розбіжними. Знайдемо поправки до ns енергетичних рівнів атома водню. Із цією метою перепишемо збурення, зумовлене некомутативністю координат (4.31), у такому вигляді

$$V = -\frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{\sqrt{r^2 - \frac{l_0}{\hbar}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}) + \frac{l_0^2}{4\hbar^2}[\mathbf{a}\times\mathbf{p}]^2}} + \frac{e^2}{r}. \tag{5.166}$$

Як наслідок, відповідно до теорії збурень можемо записати вираз для поправок до ns енергетичних рівнів

$$\Delta E_{ns} = \left\langle \psi^{(0)}_{n,0,0,\{0\}} \left| \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\sqrt{r^2 - \frac{l_0}{\hbar}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}) + \frac{l_0^2}{4\hbar^2}[\mathbf{a}\times\mathbf{p}]^2}} \right| \psi^{(0)}_{n,0,0,\{0\}} \right\rangle . \tag{5.167}$$

Зауважимо, що $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{L})$ комутує з $[\mathbf{a}\times\mathbf{p}]^2$ та r^2

$$[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}), [\mathbf{a}\times\mathbf{p}]^2] = 0, \tag{5.168}$$

$$[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}), r^2] = 0. \tag{5.169}$$

Також звернімо увагу на те, що

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{L})\psi^{(0)}_{n,0,0,\{0\}} = 0. \tag{5.170}$$

Отже, можемо переписати поправки (5.167) як

$$\Delta E_{ns} = \left\langle \psi^{(0)}_{n,0,0,\{0\}} \left| \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\sqrt{r^2 + \frac{l_0^2}{4\hbar^2}[\mathbf{a}\times\mathbf{p}]^2}} \right| \psi^{(0)}_{n,0,0,\{0\}} \right\rangle =$$

$$= \frac{\chi^2 e^2}{a_B} I^a_{ns}(\tilde\chi), \quad (5.171)$$

де ми використали таке позначення

$$I^a_{ns}(\tilde\chi) = \int d\mathbf{a}'\tilde\psi^a_{0,0,0}(\mathbf{a}') \int d\mathbf{r}'\tilde\psi_{n,0,0}(\tilde\chi\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r'} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + [\mathbf{a}'\times\mathbf{p}']^2}}\right) \tilde\psi_{n,0,0}(\tilde\chi\mathbf{r}')\tilde\psi^a_{0,0,0}(\mathbf{a}'), \quad (5.172)$$

тут

$$\tilde\chi = \sqrt{\frac{l_0 l_P}{2a_B^2}}, \quad (5.173)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}\sqrt{\frac{2}{l_0 l_P}}, \quad (5.174)$$

функції $\tilde\psi_{n,0,0}(\tilde\chi\mathbf{r}')$ та $\tilde\psi^a_{0,0,0}(\mathbf{a}')$ визначаються як (5.109), (5.107), відповідно.

Зазначимо, що у випадку $\tilde\chi = 0$ інтеграл (5.172) має скінченне значення. Отже, у границі $\tilde\chi \to 0$ головний член асимптотичного розкладу ΔE_{ns} має вигляд

$$\Delta E_{ns} = \frac{\tilde\chi^2 e^2}{a_B} I_{ns}(0). \quad (5.175)$$

Щоб знайти $I^a_{ns}(0)$, розглянемо для початку такий інтеграл

$$I_{ns}(\tilde\chi, \mathbf{a}') = \int d\mathbf{r}'\tilde\psi_{n,0,0}(\tilde\chi\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + [\mathbf{a}'\times\mathbf{p}']^2}}\right) \tilde\psi_{n,0,0}(\tilde\chi\mathbf{r}'). \quad (5.176)$$

У випадку, коли $\tilde{\chi} = 0$, на основі результатів попередніх обчислень інтеграла (5.127) маємо

$$I^a_{ns}(0, \mathbf{a}') \simeq 1.72 \frac{\pi a'}{4n^3}, \tag{5.177}$$

тут $a' = |\mathbf{a}'|$. Зауважимо, що

$$I^a_{ns}(0) = \langle I^a_{ns}(0, \mathbf{a}') \rangle_{\mathbf{a}'}, \tag{5.178}$$

де $\langle ... \rangle_{\mathbf{a}'}$ позначає $\langle \tilde{\psi}^a_{0,0,0}(\mathbf{a}')|...|\tilde{\psi}^a_{0,0,0}(\mathbf{a}')\rangle$. Отже, врахувавши (5.173), (5.175), (5.177), (5.178) та повернувшись до $\mathbf{a} = l_P\mathbf{a}'$, запишемо головний член асимптотичного розкладу поправок до ns енергетичних рівнів

$$\Delta E_{ns} \simeq 1.72 \frac{\hbar \langle \theta \rangle \pi e^2}{8 a_B^3 n^3}, \tag{5.179}$$

де

$$\langle \theta \rangle = \frac{l_0}{\hbar} \langle \psi^a_{0,0,0} | \sqrt{\sum_i a_i^2} | \psi^a_{0,0,0} \rangle = \frac{2 l_0 l_P}{\sqrt{\pi} \hbar}. \tag{5.180}$$

Порівнявши результати для поправок до енергетичних рівнів атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі (4.31)-(4.33) та (4.7)-(4.9), можемо зробити висновок, що вирази для поправок у двох випадках є однаковими. Відрізняються тільки вирази для середніх тензора некомутативності, що пов'язано з різними способами його побудови.

Звернімо увагу на те, що у двох випадках побудови сферично-симетричної некомутативної алгебри (4.31)-(4.33) та (4.7)-(4.9) поправки до ns енергетичних рівнів є пропорційними до $\langle \theta \rangle = \sqrt{2\langle \theta^2 \rangle}/\sqrt{3}$. Для енергетичних рівнів із $l > 1$ поправки пропорційні до $\langle \theta^2 \rangle$. Отже, можемо зробити висновок, що ns енергетичні рівні є більш чутливими до некомутативності координат.

5.4 Оцінка верхньої межі параметра некомутативності на основі поправок до ns рівнів атома водню

Знайдемо оцінку для верхньої межі параметра некомутативності, порівнявши результати для поправок до енергетичних рівнів атома водню, отримані у попередньому підрозділі, із експериментальними даними.

У статті [109] представлено такий результат для частоти переходу

$$f_{1s-2s} = 2466061413187018(11)\text{Гц}, \tag{5.181}$$

точність якого 4.5×10^{-15}.

Використавши (5.140) та (5.142) можемо записати поправки до енергії переходу $1s - 2s$, зумовлені некомутативністю координат

$$\Delta_{1,2} = \Delta E_{2s} - \Delta E_{1s} = -\frac{7}{32\sqrt{6}a_B^3}\sqrt{\langle\theta^2\rangle}\hbar\pi e^2 S_{1s}(0). \tag{5.182}$$

Тут $S_{1s}(0) = 1.72006...$ (5.90). Знайдемо відношення $\Delta_{1,2}/(E_2^{(0)} - E_1^{(0)})$ де $E_n^{(0)}$ – енергетичні рівні атома водню у звичному випадку ($\theta_{ij} = 0$)

$$E_n^{(0)} = -\frac{e^2}{2a_B n^2}. \tag{5.183}$$

Із (5.182), (5.183) маємо

$$\frac{\Delta_{1,2}}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} = -\frac{7}{12\sqrt{6}a_B^2}\pi\hbar S_{1s}(0)\sqrt{\langle\theta^2\rangle}. \tag{5.184}$$

З метою оцінки верхньої межі для параметра некомутативності припустимо, що поправки, зумовлені некомутативністю координат, знаходяться в межах точності експериментальних даних. Припустивши, що $|\Delta_{1,2}|/(E_2^{(0)} - E_1^{(0)})$ не первищує 4.5×10^{-15}

$$\frac{|\Delta_{1,2}|}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} \leq 4.5 \times 10^{-15}, \tag{5.185}$$

маємо:

$$\frac{7}{12\sqrt{6}a_B^2}\pi\hbar S_{1s}(0)\sqrt{\langle\theta^2\rangle} \leq 4.5 \times 10^{-15}. \tag{5.186}$$

Отже, із (5.186) отримаємо верхню межу для параметра некомутативності

$$\hbar\sqrt{\langle\theta^2\rangle} \leq 7.7 \times 10^{-36}\,\text{м}^2. \tag{5.187}$$

Важливо зауважити, що отриманий результат для верхньої межі (5.187) покращує результати, представлені у літературі, оскільки отримана нерівність (5.187) накладає сильніші обмеження на величину параметра некомутативності ніж результат, знайдений у [13] на основі даних про зсув Лемба.

Використовуючи (5.187) та врахувавши (5.26), ми також можемо оцінити величину константи α

$$\alpha \leq 2.4 \times 10^{34}, \tag{5.188}$$

де константа α означена в (4.4)

5.5 Висновки

У розділі досліджено атом водню у некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією. Ми знайшли поправки (5.41), (5.165) до енергетичних рівнів атома водню, зумовлені некомутативністю координат у двох випадках побудови сферично-симетричної некомутативної алгебри (4.7)-(4.9) та (4.31)-(4.33). Варто зауважити, що розклавши в ряд за малим параметром некомутативності гамільтоніан атома водню та знайшовши поправки до енергетичних рівнів атома на основі теорії збурень, ми зустрілися з проблемою розбіжності поправок до ns та np енергетичних рівнів. Результат для поправок до ns рівнів атома водню є важливим для знаходження верхньої межі для параметра некомутативності. Зважаючи на це, детально розглянуто задачу знаходження поправок до ns енергетичних рівнів у двох випадках побудови сферично-симетричної некомутативної алгебри (4.7)-(4.9) та (4.31)-(4.33). Запропоновано метод обчислення поправок до ns енергетичних рівнів атома водню, який дозволяє отримати збіжний результат. Ми отримали поправки до ns рівнів атома водню (5.140), (5.179) у сферично-симетричному некомутативному просторі (4.7)-(4.9) та у просторі з комутаційними співвідношеннями (4.31)-(4.33), відповідно.

Встановлено, що вирази для поправок до енергетичних рівнів атома водню мають одинаковий вигляд у двох випадках побудови сферично-симетричної некомутативної алгебри (4.7)-(4.9) та (4.31)-(4.33). Відмінність результатів (5.41), (5.140) та (5.165), (5.179) присутня тільки у виразах для середніх від тензора некомутативності, що пов'язано із різними способами його побудови.

Проаналізувавши результати для поправок до енергетичних рівнів атома водню, ми прийшли до висновку, що ns енергетичні рівні є більш чутливими до некомутативності координат. Поправки до ns рівнів є пропорційними до $\langle\theta\rangle = \sqrt{2\langle\theta^2\rangle}/\sqrt{3}$, в той час як проправки до енергетичних рівнів з $l > 1$ пропорційні до $\langle\theta^2\rangle$.

На основі порівняння знайдених у розділі поправок до ns рівнів атома водню із експериментальними результатами для частоти переходу $1s - 2s$ оцінено верхню межу для параметра некомутативності. Зауважимо, що отримана у розділі верхня межа (5.187) покращує результати, представлені в літературі. Нерівність (5.187) накладає сильніше обмеження на величину параметра некомутативності ніж верхня межа, знайдена на основі даних для зсуву Лемба у [13].

Також у розділі запропоновано вигляд для ефективного сферичносиметричного гамільтоніана у некомутативному просторі. Ми побудували ефективний гамільтоніан атома водню та знайшли поправки до енергетичних рівнів атома, зумовлені некомутативністю координат. Зазначимо, що отримані результати для поправок узгоджуються з поправками (5.41), отриманими, розглядаючи повний гамільтоніан (5.4).

Розділ 6

Частинка у однорідному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі

6.1 Вступ

У розділі ми розглядаємо частинку у однорідному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі (4.31)-(4.33). Як приклад, досліджується рух частинки у гравітаційному полі у некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією. Також розглядається принцип еквівалентності. Ми знаходимо умови для відновлення цього принципу у сферично-симетричному некомутативному просторі та в результаті пропонуємо некомутативний простір зі збереженою сферичною симетрією та відновленим принципом еквівалентності. Зауважимо, що у цьому розділі ми не робимо наближення, пов'язане із тим, що параметр некомутативності є малою величиною. Задача руху частинки у однорідному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі (4.31)-(4.33) розв'язується точно.

Задача про рух частинки у гравітаціному полі досліджувалася у просторі з канонічною некомутативністю координат [84, 85]. Авторами статей [84, 85] знайдено зсув перигелію, зумовлений некомутативністю координат та на основі порівняння отриманих результатів із експериментальними даними для планети Меркурій оцінено верхню межу для параметра некомутативності. Також розглянуто систему частинок у гравітаційному полі у некомутативному просторі канонічного типу та описано рух кожної частинки системи [60]. Досліджувалася задача про рух частинки у центральному полі у некомутативному просторі з канонічною некомутативністю координат [3]. Частинка у гравітаційній квантовій ямі розглядалася у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів у статтях [49, 110].

6.2 Вплив некомутативності на масу частинки у однорідному полі

Розглянемо рух частинки з масою m у однорідному полі у сферичносиметричному некомутативному просторі (4.31)-(4.33). Для простоти виберемо систему координат так, щоб напрям поля збігався із напрямом осі X_3. Отже, можемо записати гамільтоніан частинки

$$H_p = \frac{P^2}{2m} + \kappa X_3, \tag{6.1}$$

де оператори координат та імпульсів задовольняють співвідношення (4.31)-(4.33), множник κ характеризує поле. Для прикладу, у випадку руху зарядженої частинки q в однорідному електричному полі E, напрямленому вздовж осі X_3, множник κ має вигляд $\kappa = -qE$. У випадку руху частинки з масою m в однорідному гравітаційному полі g, напрямленому вздовж осі X_3, маємо $\kappa = -mg$.

Як вже було зазначено у попередніх розділах, у сферично-симетричному просторі (4.31)-(4.33) при записі гамільтоніана необхідно брати до уваги додаткові доданки, що відповідають гармонічному осцилятору (4.5), та розглядати повний гамільтоніан у такому вигляді

$$H = H_p + H^a_{osc} = \frac{P^2}{2m} + \kappa X_3 + \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2 a^2}{2}. \tag{6.2}$$

Зауважимо, що координата X_3 не комутує з імпульсами p^a_i. Справедливим є таке співвідношення

$$[X_3, p^a_i] = i\varepsilon_{3ij}\frac{l_0}{2}p_j. \tag{6.3}$$

Перепишемо гамільтоніан через оператори координат та імпульсів, що задовольняють звичні комутаційні співвідношення (4.17)-(4.19). Використавши представлення (5.146)-(5.147), можемо записати

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa x_3 + \frac{\kappa l_0}{2\hbar}\left(a_1 p_2 - a_2 p_1\right) + \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2 a^2}{2}. \tag{6.4}$$

Після алгебраїчних перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} H = \left(1 - \frac{\kappa^2 l_0^2 m}{4\hbar^2\omega^2 m_{osc}}\right)\frac{p_1^2}{2m} + \left(1 - \frac{\kappa^2 l_0^2 m}{4\hbar^2\omega^2 m_{osc}}\right)\frac{p_2^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m} + \kappa x_3 + \\ + \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2}{2}\left(a_1 + \frac{\kappa l_0}{2\hbar\omega^2 m_{osc}}p_2\right)^2 + \\ + \frac{m_{osc}\omega^2}{2}\left(a_2 - \frac{\kappa l_0}{2\hbar\omega^2 m_{osc}}p_1\right)^2 + \frac{m_{osc}\omega^2 a_3^2}{2}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Зауважимо, що гамільтоніан (6.5) можна переписати як

$$H = \tilde{H}_p + \tilde{H}_{osc}, \tag{6.6}$$

де

$$\tilde{H}_p = \frac{p_1^2}{2m_{eff}} + \frac{p_2^2}{2m_{eff}} + \frac{p_3^2}{2m} + \kappa x_3, \tag{6.7}$$

тут m_{eff} – ефективна маса

$$m_{eff} = m\left(1 - \frac{\kappa^2 l_0^2 m}{4\hbar^2\omega^2 m_{osc}}\right)^{-1}, \tag{6.8}$$

та

$$\tilde{H}_{osc} = \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2}{2}\left(a_1 + \frac{\kappa l_0}{2\hbar\omega^2 m_{osc}} p_2\right)^2 +$$

$$+\frac{m_{osc}\omega^2}{2}\left(a_2 - \frac{\kappa l_0}{2\hbar\omega^2 m_{osc}} p_1\right)^2 + \frac{m_{osc}\omega^2 a_3^2}{2}. \tag{6.9}$$

Звернімо увагу на те, що оператори

$$q_1 = a_1 + \frac{\kappa l_0}{2\hbar\omega^2 m_{osc}} p_2, \tag{6.10}$$

$$q_2 = a_2 - \frac{\kappa l_0}{2\hbar\omega^2 m_{osc}} p_1, \tag{6.11}$$

$$q_3 = a_3, \tag{6.12}$$

задовольняють такі комутаційні співвідношення

$$[q_i, q_j] = 0, \tag{6.13}$$

$$[q_i, p_j^a] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{6.14}$$

$$[q_i, p_j] = 0. \tag{6.15}$$

Отже, гамільтоніан $\tilde{H}_{osc}$ відповідає гамільтоніану тривимірного гармонічного осцилятора у звичайному просторі ($\theta_{ij} = 0$)

$$\tilde{H}_{osc} = \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2 q^2}{2}. \tag{6.16}$$

де $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Також зауважимо, що

$$[q_i, x_j] = -i\varepsilon_{ij3}\frac{\kappa l_0}{2m_{osc}\omega^2}. \tag{6.17}$$

Знайдемо власні значення гамільтоніана (6.6). Оператори

$$\tilde{H}_1 = \frac{p_1^2}{2m_{eff}}, \tag{6.18}$$

$$\tilde{H}_2 = \frac{p_2^2}{2m_{eff}}, \tag{6.19}$$

$$\tilde{H}_3 = \frac{p_3^2}{2m} + \kappa x_3, \tag{6.20}$$

та $\tilde{H}_{osc}$, визначений як (6.16), комутують між собою. Зважаючи на це, власні функції гамільтоніана (6.6)

$$H = \tilde{H}_1 + \tilde{H}_2 + \tilde{H}_3 + \tilde{H}_{osc} \tag{6.21}$$

можуть бути записані як

$$\psi(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{q}}) = Ce^{ik_1x_1}e^{ik_2x_2}\psi^{(3)}(x_3)\psi^{\tilde{q}}(\tilde{\mathbf{q}}), \tag{6.22}$$

де k_1 та k_2 – компоненти хвильового вектора, що відповідає вільному руху частинки в перпендикулярних напрямках до напрямку поля, $\psi^{(3)}(x_3)$ – добре відомі власні функції гамільтоніана $\tilde{H}_3$, що описує рух частинки у напрямку поля, $\psi^{\tilde{q}}(\tilde{\mathbf{q}})$ – власні функції тривимірного гармонічного осцилятора з параметрами m_{osc} та ω, C – константа. Компоненти вектора $\tilde{\mathbf{q}}$ мають такий вигляд

$$\tilde{q}_1 = a_1 + \frac{\kappa l_0 k_2}{2\omega^2 m_{osc}}, \tag{6.23}$$

$$\tilde{q}_2 = a_2 - \frac{\kappa l_0 k_1}{2\omega^2 m_{osc}}, \tag{6.24}$$

$$\tilde{q}_3 = a_3. \tag{6.25}$$

Запишемо власні значення гамільтоніана (6.6). Врахувавши те, що частота осцилятора є великою та гармонічний осцилятор знаходиться у основному стані маємо

$$E = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m_{eff}} + \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m_{eff}} + E_3 + \frac{1}{2}\hbar\omega, \tag{6.26}$$

де E_3 відповідає гамільтоніану $\tilde{H}_3$.

Аналізуючи перші два доданки у (6.26), можемо зробити висновок, що некомутативність координат впливає на масу частинки. Зауважимо, що некомутативність змінює по відношенню до звичного випадку ($\theta_{ij} = 0$) рух частинки у напрямках, що є перпендикулярними до напрямку поля. Рух частинки у напрямку поля визначається гамільтоніаном $\tilde{H}_3$ та є таким самим як у звичному просторі. Зважаючи на це, можемо зробити висновок, що некомутативність координат зумовлює анізотропію мас.

Звернімо увагу, що всі результати, отримані у даному підрозділі, є точними. Ми не робили наближень на основі міркувань про те, що параметр некомутативності є малим.

На завершення цього підрозділу важливо зауважити, що зважаючи на сферичну симетрію простору, знайдені результати можуть бути легко узагальнені на випадок довільного напрямку однорідного поля.

У наступному підрозділі, використовуючи отримані результати, буде розглянуто рух частинки в однорідному гравітаційному полі та досліджено принцип еквівалентності.

6.3 Принцип еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі

Розгляньмо рух частинки з масою m в однорідному гравітаційному полі у некомутативному просторі (4.31)-(4.33). Нехай напрям гравітаційного поля збігається з віссю X_3. У цьому випадку $\kappa = -mg$. На основі результатів, отриманих у попередньому підрозділі, із (6.6), (6.7), (6.8) маємо:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_{eff}} + \frac{p_2^2}{2m_{eff}} + \frac{p_3^2}{2m} - mgx_3 + \tilde{H}_{osc}, \tag{6.27}$$

де

$$m_{eff} = m\left(1 - \frac{l_0^2 g^2 m^3}{4\hbar^2\omega^2 m_{osc}}\right)^{-1}. \tag{6.28}$$

Проаналізувавши вираз (6.28) і також (6.26), можемо зробити висновок, що, зважаючи на доданок у (6.28), пропорційний до m^3, слабкий принцип еквівалентності є порушеним у некомутативному просторі (4.31)-(4.33).

Знайдемо умову для відновлення принципу еквілентності у сферично-симетричному некомутативному просторі (4.31)-(4.33). Із (6.26) та (6.28) випливає, що необхідною умовою для відновлення принципу еквівалентності є пропорційність ефективної маси (6.28) до маси частинки. Це може бути реалізовано, коли виконується така умова:

$$\frac{l_0^2 m^3}{\omega^2 m_{osc}} = A = const, \tag{6.29}$$

де A – константа, яка має однакові значення для частинок з різними масами. Зручно ввести безрозмірну константу

$$\tilde{A} = A\frac{\omega_P^2}{l_P^2 m_P^2}, \tag{6.30}$$

де l_P, m_P є довжиною Планка та масою Планка, відповідно, ω_P визначається як $\hbar\omega_P = E_P$, де E_P – енергія Планка.

Отже, можемо записати ефективну масу у такому вигляді

$$m_{eff} = m\left(1 - \frac{\tilde{A} l_P^2 m_P^2 g^2}{4\hbar^2\omega_P^2}\right)^{-1}. \tag{6.31}$$

Звернімо увагу, що оператори X_i залежать від імпульсів, а отже залежать від маси. А саме, для операторів, які задовольняють некомутативну алгебру (4.31)-(4.33) справедливим є таке представлення через координати та імпульси, які задовольняють звичні комутаційні співвідношення

$$X_i = x_i - \theta_{ij} p_j, \tag{6.32}$$

$$P_i = p_i, \tag{6.33}$$

де θ_{ij} визначається як (4.29). Цей факт також зумовлює порушення принципу еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі. Знайдемо умову, при якій оператори X_i не залежать від маси частинки. Із цією метою зручно переписати тензор некомутативності у такому вигляді

$$\theta_{ij} = \frac{l_0 l_{osc}}{\hbar}\varepsilon_{ijk}\tilde{a}_k, \tag{6.34}$$

де

$$l_{osc} = \sqrt{\frac{\hbar}{m_{osc}\omega}}, \tag{6.35}$$

та $\tilde{a}_k$ – безрозмірні координати $\tilde{a}_k = a_k/l_{osc}$. Проаналізувавши (6.32), (6.34), можемо зробити висновок, що оператори X_i не залежать від маси у випадку, коли

$$\frac{l_0 l_{osc}}{l_P^2} = \tilde{\gamma}\frac{m_P}{m}, \tag{6.36}$$

де $\tilde{\gamma}$ – безрозмірна константа, яка є одинаковою для частинок з різними масами. Для цієї константи ми використали позначення $\tilde{\gamma}$ для того, щоб відрізнити її від константи γ, яка використовувалася у випадку канонічної некомутативності координат у розділі 3. Беручи до уваги (6.34), очевидно, що умова (6.36) є подібною до умови (3.59), яка дозволяє відновити принцип еквівалентності у двовимірному просторі з канонічною некомутативністю координат.

Отже, умова (6.29) разом із умовою (6.36) дають можливість відновити принцип еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному прострі (4.31)-(4.33).

Зауважимо, що із (6.29), (6.36), використовуючи (6.30) та (6.35), ми отримаємо

$$\omega = \frac{\tilde{\gamma}^2}{\tilde{A}}\omega_P\frac{m}{m_P}. \tag{6.37}$$

Отже, обидві умови (6.29), (6.36) задовольняються у випадку, коли частота гармонічного осцилятора є пропорційною до маси частинки.

Врахувавши (6.35), (6.36) та (6.37), отримаємо, що l_{osc}, l_0 є обернено пропорційними до $\sqrt{m}$, а саме:

$$l_{osc} = l_P \sqrt{\frac{\tilde{A} m_P^2}{\tilde{\gamma}^2 m_{osc} m}}, \tag{6.38}$$

$$l_0 = l_P \sqrt{\frac{\tilde{\gamma}^4 m_{osc}}{\tilde{A} m}}. \tag{6.39}$$

Оцінимо можливі значення констант $\tilde{A}$ та $\tilde{\gamma}$. З цією метою припустим, що для електрона $l_0 = l_P$, $l_{osc} = l_P$ та $\omega = \omega_P$. У цьому випадку, беручи до уваги (6.35), маємо: $m_{osc} = m_P$. Як наслідок, із (6.29) та (6.30), можемо знайти

$$\tilde{A} = \frac{m_e^3}{m_P^3} = 7.3 \times 10^{-68}, \tag{6.40}$$

де m_e – маса електрона. Також із (6.36) отримаємо:

$$\tilde{\gamma} = \frac{m_e}{m_P} = 4.2 \times 10^{-23}. \tag{6.41}$$

Зауважимо, що вплив некомутативності координат на масу частинки спостерігається у випадку скінченної границі для ω, у границі $\omega \to \infty$ вплив некомутативності на масу частинки прямує до нуля.

Звернімо увагу на те, що, фіксуючи параметри $\omega = \omega_P$, $l_0 = l_P$, $l_{osc} = l_P$ для електрона, із (6.37), (6.38), (6.39) ми можемо обчислити ці параметри для частинки з масою m_i, а саме:

$$\omega^{(i)} = \frac{\omega_P m_i}{m_e}, \tag{6.42}$$

$$l_{osc}^{(i)} = l_P \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}, \tag{6.43}$$

$$l_0^{(i)} = l_P \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}. \tag{6.44}$$

6.4 Висновки

У розділі розглянуто рух частинки у однорідному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі (4.31)-(4.33). Зауважимо, що всі обчислення, представлені у розділі, є точними. Ми не робили наближення, пов'язане з тим, що параметр некомутативності є малим.

Встановлено, що некомутативність координат (4.31) впливає на кінетичну енергію частинки, що відповідає її руху у напрямках, перпендикулярних до напрямку однорідного поля. Рух частинки у напрямку поля у некомутативному просторі є таким самим, як і у звичайному випадку ($\theta_{ij} = 0$). Зважаючи на це, ми прийшли до висновку, що некомутативність координат впливає на масу частинки (6.31) та зумовлює її анізотропію.

Розглянуто рух частинки у однорідному гравітаційному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі. Показано, що у сферично-симетричному некомутативному просторі (4.31)-(4.33) існує проблема порушення принципу еквівалентності. Ми знайшли умови (6.29), (6.36), які дозволяють відновити цей принцип у сферично-симетричному некомутативному просторі. Як наслідок, запропоновано некомутативний простір із збереженою сферичною симетрією та збереженим принципом еквівалентності. Важливо зауважити, що знайдені умови (6.29), (6.36) узгоджуються з умовою (3.59), що дозволяє відновити принцип еквівалентності у некомутативному просторі з канонічною некомутативністю координат (2.8)-(2.10).

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено вплив некомутативності координат на властивості одно- та багаточастинкових систем у некомутативному просторі. На основі порівняння отриманих результатів із експериментальними даними знайдено оцінки для верхньої межі для параметра некомутативності. Досліджено проблему порушення сферичної симетрії у некомутативному просторі та побудовано сферично-симетричну некомутативну алгебру, еквівалентну алгебрі канонічного типу. Розглянуто проблему порушення принципу еквівалентності у некомутативному просторі та знайдено умову для відновлення цього принципу.

Для досягнення мети роботи розв'язано такі основні завдання:

1. Вперше на основі аналізу властивості адитивності кінетичної енергії системи частинок у некомутативному просторі канонічного типу отримано вираз для ефективного параметра некомутативності, що описує рух центра мас системи частинок у некомутативному просторі.

2. Вперше запропоновано умову, при якій ефективний параметр некомутативності не залежить від композиції системи.

3. Вперше знайдено умову на параметр некомутативності, при якій кінетична енергія системи є незалежною від її композиції у просторі з некомутативністю координат канонічного типу.

4. Вперше встановлено, що у випадку, коли параметр некомутатив-

ності, який відповідає частинці, є обернено пропорційний до її маси, координати центра мас системи частинок та координати відносного руху комутують та є незалежними у некомутативному просторі.

5. Вперше запропоновано умову для відновлення принципу еквівалентності у просторі з канонічною некомутативністю координат. Встановлено, що принцип еквівалентності виконується у випадку, коли параметр некомутативності, що відповідає частинці, є обернено пропорційний до її маси.

6. У результаті, вперше показано, що коли параметр некомутативності обернено пропорційний до маси частинки, розв'язуються щонайменше чотири проблеми у некомутативному просторі, а саме: відновлюється принцип еквівалентності, кінетична енергія системи частинок не залежить від її композиції, координати центра мас системи частинок та координати відносного руху є незалежними, ефективний параметр некомутативності, який описує рух центра мас системи частинок, не залежить від композиції системи.

7. Вперше за допомогою введення додаткових координат побудовано некомутативну алгебру, яка є еквівалентна алгебрі канонічного типу та є сферично-симетричною.

8. Вперше знайдено поправки до енергетичних рівнів атома водню у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу. На основі порівняння отриманих результатів із експериментальними даними отримано оцінки для параметра некомутативності, що покращують результати, представлені у літературі.

9. Вперше точно розв'язано задачу про рух частинки у однорідному

полі у сферично-симетричному просторі канонічного типу. Показано, що рух частинки у напрямках, перпендикулярних до напрямку поля описується за допомогою ефективної маси. Встановлено, що некомутативність координат впливає на масу частинки та зумовлює її анізотропію.

10. Вперше досліджено принцип еквівалентності у сферично-симетричному просторі канонічного типу. Запропоновано некомутативний простір з відновленою сферичною симетрією та збереженим принципом еквівалентності.

ПОДЯКИ

Автор висловлює велику вдячніть науковому керівнику, доктору фіз.-мат. наук професору В. М. Ткачуку за постановку цікавих та актуальних завдань, за численні консультації та за дуже корисні поради під час виконання цієї роботи. Також велика подяка старшому викладачу Ю. С. Криницькому за допомогу та дуже корисні поради щодо шляхів досягнення мети дослідження.

Автор щиро вдячний професору І. О. Вакарчуку, кандидату фіз.-мат. наук, доценту А. А. Ровенчаку, кандидату фіз.-мат. наук асистенту В. С. Пастухову, асистенту М. І. Самару, кандидату фіз.-мат. наук М. М. Стецку за участь у обговоренні та дуже корисні поради щодо методів отримання результатів.

Також велику подяку автор висловлює всьому колективу кафедри теоретичної фізики: доктору фіз.-мат. наук професору І. О. Вакарчуку, доктору фіз.-мат. наук професору В. М. Ткачуку, кандидату фіз.-мат. наук, старшому викладачу Ю. С. Криницькому, кандидату фіз.-мат. наук, доценту А. А. Ровенчаку, доценту В. М. Мигалю, кандидату фіз.-мат. наук, доценту С. С. Піх, кандидату фіз.-мат. наук, доценту М. М. Стецку, кандидату фіз.-мат. наук, доценту Р. О. Притулі, кандидату фіз.-мат. наук асистенту В. С. Пастухову, асистенту М. І. Самару, асистенту О. І. Григорчаку, викладачу А. Р. Кузьмаку, викладачу Г. І. Паночко, інженеру О. Ю. Кіктєвій, старшому лаборанту В. Яремі, аспіранту В. Васюті за цікаві та плідні дискусії під час семінарів та конференцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Doplicher S.* Spacetime quantization induced by classical gravity / S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts // Phys. Lett. B. — 1994. — Vol. 331, No. 1. — P. 39–44.

[2] *Seiberg N.* String theory and noncommutative geometry / N. Seiberg, E. Witten // J. High Energy Phys. — 1999. — Vol. 1999, No. 09. — Art. 032. — 92 p.

[3] *Gamboa J.* Noncommutative quantum mechanics / J. Gamboa, M. Loewe, J. C. Rojas // Phys. Rev. D. — 2001. — Vol. 64, No. 6. — Art. 067901. — 3 p.

[4] *Gamboa J.* Noncommutative quantum mechanics: The two-dimensional central field / J. Gamboa, F. Méndez // Int. J. of Mod. Phys. A. — 2002. — Vol. 17, No. 19. — P. 2555—2565.

[5] *Nair V. P.* Quantum mechanics on the noncommutative plane and sphere / V. P. Nair, A. P. Polychronakos // Phys. Lett. B. — 2001. — Vol. 505, No. 1-4. — P. 267–274.

[6] *Bolonek K.* On uncertainty relations in noncommutative quantum mechanics / K. Bolonek, P. Kosiński // Phys. Lett. B. — 2002. — Vol. 547, No. 1-2. — P. 51–54.

[7] *Duval C.* Exotic Galilean symmetry in the non-commutative plane and the Hall effect / C. Duval, P. A. Horvathy // J. Phys. A: Math. Gen. — 2001. — Vol. 34, No. 47. — P. 10097–10107.

[8] *Kijanka A.* Noncommutative isotropic harmonic oscillator / A. Kijanka, P. Kosiński // Phys. Rev. D. — 2004. — Vol. 70, No. 12. — Art. 127702. — 3 p.

[9] *Demetrian M.* Quantum mechanics on non-commutative plane / M. Demetrian, D. Kochan // Acta Physica Slovaca. — 2002. — Vol. 52, No. 1. — P. 1-9.

[10] *Jing Jian.* Non-commutative harmonic oscillator in magnetic field and continuous limit / Jian Jing, Jian-Feng Chen // Eur. Phys. J. C. — 2009. — Vol. 60, No. 4. — P. 669–674.

[11] *Romero J. M.* Newton's second law in a non-commutative space / J. M. Romero, J. A. Santiago, J. D. Vergara // Mod. Phys. Lett. A. — 2003. — Vol. 310, No. 1. — P. 9–12.

[12] *Hatzinikitas A.* The noncommutative harmonic oscillator in more than one dimension / A. Hatzinikitas, I. Smyrnakis // J. Math. Phys. — 2002. — Vol. 43, No. 1. — P. 113–125.

[13] *Chaichian M.* Hydrogen atom spectrum and the Lamb shift in noncommutative QED / M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 86, No. 13. — P. 2716–2719.

[14] *Ho Pei-Ming.* Noncommutative quantum mechanics from noncommutative quantum field theory / Pei-Ming Ho, Hsien-

Chung Kao // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 88, No. 15. — Art. 151602. — 4 p.

[15] *Chaichian M.* Non-commutativity of space-time and the hydrogen atom spectrum / M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu // Eur. Phys. J. C. — 2004. — Vol. 36, No. 2. — P. 251–252.

[16] *Chair N.* The noncommutative quadratic Stark effect for the H-atom / N. Chair, M. A. Dalabeeh // J. Phys. A. — 2005. — Vol. 38, No. 7. — P. 1553-1558.

[17] *Stern A.* Noncommutative point sources / A. Stern // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 100, No. 6. — Art. 061601. — 4 p.

[18] *Zaim S.* Second-order corrections to the non-commutative Klein-Gordon equation with a Coulomb potential / S. Zaim, L. Khodja, Y. Delenda // Int. J. Mod. Phys. A. — 2011. — Vol. 26, No. 23. — P. 4133–4144.

[19] *Balachandran A. P.* Non-Pauli effects from noncommutative spacetimes / A. P. Balachandran, P. Padmanabhan // J. High Energy Phys. — 2010. — Vol. 2010, No. 12. — Art. 001. — 16 p.

[20] *Gnatenko Kh. P.* Composite system in noncommutative space and the equivalence principle / Kh. P. Gnatenko // Phys. Lett. A. — 2013. — Vol. 377, No. 43. — P. 3061-3066.

[21] *Гнатенко Х. П.* Оцінка верхньої межі для параметра некомутативності на основі принципу еквівалентності / Х. П. Гнатенко // Журн. фіз. дослідж. — 2013. — Т. 17. — Ст. 4001. — 5 с.

[22] *Gnatenko Kh. P.* Physical systems in a space with noncommutativity of coordinates / Kh. P. Gnatenko // J. Phys.: Conf. Ser. — 2016. — Vol. 670. — Art. 012023. — 9 p.

[23] *Gnatenko Kh. P.* Hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space / Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // Phys. Lett. A. — 2014. — Vol. 378, No. 47. — P. 3509-3515.

[24] *Gnatenko Kh. P.* Perturbation of the ns levels of the hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space / Kh. P. Gnatenko, Yu. S. Krynytskyi, V. M. Tkachuk // Mod. Phys. Lett. A. — 2015. — Vol. 30, No. 08. — Art. 1550033. — 12 p.

[25] *Gnatenko Kh. P.* Effect of coordinate noncommutativity on the mass of a particle in a uniform field and the equivalence principle / Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // Mod. Phys. Lett. A. — 2016. — Vol. 31, No. 5. — Art. 1650026. — 9 p.

[26] *Гнатенко Х. П.* Класична та квантова механіки у просторі з канонічною деформацією алгебри Гейзенберга / Х. П. Гнатенко // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2013". — Львів, 15-17 травня, 2013: Тези доповідей. — С. F3.

[27] *Gnatenko K. P.* Classical and quantum mechanics in a space with canonical deformed Heisenberg algebra / K. P. Gnatenko // International Conference "Quantum Groups and Quantum Integrable Systems". — Kiev, Ukraine, June 18 – 21, 2013: Program and Abstracts. — P. 22.

[28] *Gnatenko Kh. P.* Noncommutativity of coordinates and the equivalence principle / Kh. P. Gnatenko // V Young Scientists Conference

”Problems of Theoretical Physics”. — Kyiv, Ukraine, December 24-27, 2013: Program and Proceedings. — P. 28.

[29] *Гнатенко Х.* Макроскопічне тіло в некомутативному просторі / Х. Гнатенко, Ю. Криницький, Ткачук В. // Різдвяні дискусії 2014. — Львів, 9-10 січня, 2014.– Журн. фіз. дослідж.– 2014.– Т. 18, №1. — С. 1998-5.

[30] *Гнатенко Х. П.* Фізичні системи у некомутативному просторі / Х. П. Гнатенко // 14-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, 4-6 червня, 2014. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 29.

[31] *Gnatenko Kh.* Hydrogen atom spectrum in rotationally invariant noncommutative space / Kh. Gnatenko // XXXIII Max Born Symposium ”Noncommutative geometry, quantum symmetries and quantum gravity”. — Wroclaw, Poland, July 6-10, 2014: List of talks with abstracts. — P. 2.

[32] *Gnatenko Kh.* Rotational symmetry in noncommutative space and hydrogen atom / Kh. Gnatenko // Workshop on Current Problems in Physics. — Lviv, Ukraine, July 08-09, 2014.– J. Phys. Stud.– 2014.– Vol. 18, No. 2/3.– Art. 2998. — P. 8.

[33] *Gnatenko Kh.* Hydrogen atom in noncommutative space / Kh. Gnatenko // Trans-European School of High Energy Physics. — Basivka, Lviv Region, Ukraine, July 17-24, 2014: Proceedings. — P. 99-101.

[34] *Гнатенко Х. П.* Енерґетичні рівні атома водню у сферично-симетричному просторі з некомутативністю координат /

Х. П. Гнатенко // Різдвяні дискусії 2015. — Львів, 12-13 січня, 2015.– Журн. фіз. досліДж.– 2015.– Т. 19, №1/2. — С. 1998-8.

[35] *Гнатенко Х. П.* Сферична симетрія у некомутативному просторі / Х. П. Гнатенко // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2015". — Львів, 13-15 травня, 2015: Тези доповідей. — С. Е2.

[36] *Гнатенко Х. П.* Вплив некомутативності координат на властивості квантових систем / Х. П. Гнатенко // 15-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, 4-5 червня, 2015. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 29.

[37] *Gnatenko Kh.* Physical systems in a space with noncommutativity of coordinates / Kh. Gnatenko // The XXIIIth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (ISQS-23). — Prague, Czech Republic, June 23-27, 2013: Book of Abstracts. — Available from: http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/burdices/ISQS23/abstrakty-pdf/Gnatenko.pdf.

[38] *Gnatenko Kh.* Rotational symmetry in a space with canonical noncommutativity of coordinates / Kh. Gnatenko // XXXV Max Born Symposium "The Planck Scale II". — Wroclaw, Poland, September 7-12, 2015: Book of Abstracts. — P. 3.

[39] *Gnatenko Kh.* Rotational symmetry in a space with canonical noncommutativity of coordinates / Kh. Gnatenko // Workshop on

Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv. — Zielona Góra, Poland, October 19-22, 2015: Book of Abstracts. — P. 9.

[40] *Gnatenko Kh. P.* Corrections to the energy levels of the hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space / Kh. P. Gnatenko // VI Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics" dedicated to the 105-th anniversary of M.M. Bogolyubov. — Kyiv, Ukraine, November 25-27, 2014: Program and Proceedings. — P. 29.

[41] *Jackiw R.* Noncommuting fields and non-Abelian fluids / R. Jackiw // Nuclear Physics B (Proc. Suppl.). — 2004. — Vol. 127. — P. 53–62.

[42] *Polchinski J.* M theory: Uncertainty and unification / J Polchinski // Fundamental Physics — Heisenberg and Beyond. — 2003. — P. 157–166.

[43] *Jackiw R.* Observations on noncommuting coordinates and on fields depending on them / R. Jackiw // Ann. Henri Poincarre. — 2003. — Vol. 4, No. 2. — P. 913-919.

[44] *Snyder H. S.* Quantized space-time / H. S. Snyder // Phys. Rev. — 1947. — Vol. 71, No. 1. — P. 38–41.

[45] *Romero J. M.* Note about the quantum of area in a noncommutative space / J. M. Romero, J. A. Santiago, J. D. Vergara // Phys. Rev. D. — 2003. — Vol. 68. — Art. 067503. — 2 p.

[46] *Dunne G.* Topological (Chern-Simons) quantum mechanics / G. Dunne, R. Jackiw, L. Trugenberger // Phys. Rev. D. — Vol. 41, No. 2. — P. 661–666.

[47] *Dunne G.* 'Peierls substitution' and Chern-Simons quantum mechanics / G. Dunne, R. Jackiw // Nuclear Physics B (Proc. Suppl.). — 1991. — Vol. 33, No. C. — P. 114–118.

[48] *Duval C.* The exotic Galilei group and the"Peierls substitution" / C. Duval, P. A. Horváthy // Phys. Lett. B. — Vol. 479, No. 1.

[49] *Banerjee R.* A novel approach to noncommutativity in planar quantum mechanics / R. Banerjee // Mod. Phys. Lett. A. — 2002. — Vol. 17, No. 11. — P. 631–645.

[50] *Frenkel J.* Coordinate noncommutativity in strong nonuniform magnetic fields / J. Frenkel, S. H. Pereira // Phys. Rev. D. — 2004. — Vol. 69. — Art. 127702. — 3 p.

[51] *Muthukumar B.* Noncommutative oscillators and the commutative limit / B. Muthukumar, P. Mitra // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol. 66. — Art. 027701. — 3 p.

[52] *Horvathy P. A.* The non-commutative Landau problem / P. A. Horvathy // Ann. Phys. — 2002. — Vol. 299. — P. 128–140.

[53] *Dayi O. F.* Wigner functions for the Landau problem in noncommutative spaces / O. F. Dayi, L. T. Kelleyane // Mod. Phys. Lett. A. — 2002. — Vol. 17, No. 29. — P. 1937–1944.

[54] *Li K.* Heisenberg algebra for noncommutative Landau problem / K. Li, Xiao-Hua Cao, Dong-Yan Wang // Chin. Phys. — 2006. — Vol. 15, No. 10. — P. 2236–2239.

[55] *Dulat S.* Landau problem in noncommutative quantum mechanics / S. Dulat, K. Li // Chin. Phys. C. — 2008. — Vol. 32, No. 2. — P. 92–95.

[56] *Gamboa J.* The Landau problem and noncommutative quantum mechanics / J. Gamboa, M. Loewe, J. C. Rojas // Mod. Phys. Lett. A. — 2001. — Vol. 16, No. 32. — P. 2075-2078.

[57] Dirac equation in noncommutative space for hydrogen atom / T. C. Adorno, M. C. Baldiotti, M. Chaichian [et al.] // Phys. Lett. B. — 2009. — Vol. 682, No. 2. — P. 235–239.

[58] *Khodja L.* New treatment of the noncommutative Dirac equation with a Coulomb potential / L. Khodja, S. Zaim // Int. J. Mod. Phys. A. — 2012. — Vol. 27, No. 19. — Art. 1250100. — 13 p.

[59] *Jabbari I.* Partition function of the harmonic oscillator on a noncommutative plane / I. Jabbari, A. Jahan, Z. Riazi // Turk. J. Phys. — 2009. — Vol. 33. — P. 149–154.

[60] *Daszkiewicz M. C.* Classical mechanics of many particles defined on canonically deformed nonrelativistic space-time / M. C. Daszkiewicz, J. Walczyk // Mod. Phys. Lett. A. — 2011. — Vol. 26, No. 11. — P. 819–832.

[61] *Belluccii S.* Noncommutative quantum scattering in a central field / S. Belluccii, A. Yeranyan // Phys. Lett. B. — 2005. — Vol. 609, No. 3-4. — P. 418–423.

[62] *Jellal A.* Two coupled harmonic oscillators on noncommutative plane / A. Jellal, El Hassan El Kinani, M. Schreiber // Int. J. Mod. Phys. A. — 2005. — Vol. 20, No. 7. — P. 1515—1529.

[63] Quantum theories on noncommutative spaces with nontrivial topology: Aharonov–Bohm and Casimir effects / M. Chaichian, A. ,

Demichev, P. Presnajder [et al.] // Nuc. Phys. B. — 2001. — Vol. 611, No. 1-3. — P. 383–402.

[64] Aharonov–Bohm effect in noncommutative spaces / M. Chaichian, P. Presnajder, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu // J. Math. Phys. — 2002. — Vol. 527, No. 1-2. — P. 149–154.

[65] Testing spatial noncommutativity via the Aharonov-Bohm effect / H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe [et al.] // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol. 66, No. 4. — Art. 045018. — 13 p.

[66] *Li K.* The Aharonov–Bohm effect in noncommutative quantum mechanics / K. Li, S. Dulat // Eur. Phys. J. C. — 2006. — Vol. 46. — P. 825—828.

[67] *Anacleto M. A.* Aharonov–Bohm effect on noncommutative plane: A coherent state approach / M. A. Anacleto, A. Yu. Nascimento, J. R. Petrov // Phys. Lett. B. — Vol. 637, No. 4-5. — P. 344.

[68] *Basu B.* Quantum Hall effect in bilayer systems and the noncommutative plane: A toy model approach / B. Basu, S. Ghosh // Phys. Lett. A. — 2005. — Vol. 346, No. 1-3. — P. 133–140.

[69] *Dayi O. F.* Hall effect in noncommutative coordinates / O. F. Dayi, Jellal A. // J. Math. Phys. — 2002. — Vol. 43, No. 10. — P. 4592—4601.

[70] *Wu Ying.* Preparation of Schrodinger cat states in noncommutative space / Ying Wu, Xiaoxue Yang // Phys. Rev. D. — 2006. — Vol. 73, No. 6. — Art. 067701. — 4 p.

[71] *Smailagic A.* Feynman path integral on the non-commutative plane / A. Smailagic, E. Spallucci // J. Phys. A: Math. Gen. — 2003. — Vol. 36. — P. L467—L471.

[72] *Saha A.* Colella-Overhauser-Werner test of the weak equivalence principle: A low-energy window to look into the noncommutative structure of space-time? / A. Saha // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Vol. 89, No. 2. — Art. 025010. — 5 p.

[73] *Moreno E. F.* Spherically symmetric monopoles in noncommutative space / E. F. Moreno // Int. J. Mod. Phys. A. — 2005. — Vol. 72, No. 4. — Art. 045001. — 9 p.

[74] *Amorim R.* Tensor operators in noncommutative quantum mechanics / R. Amorim // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101, No. 8. — Art. 081602. — 4 p.

[75] *Kupriyanov V. G.* A hydrogen atom on curved noncommutative space / V. G. Kupriyanov // J. Phys. A: Math. Theor. — 2013. — Vol. 46, No. 24. — Art. 1673. — 7 p.

[76] *Bander M.* Coherent states and N dimensional coordinate noncommutativity / M. Bander // J. High Energy Phys. — 2006. — Vol. 03, No. 2006. — Art. 040. — 14 p.

[77] *Galikova V.* Hydrogen atom in fuzzy spaces - exact solution / V. Galikova, P. Presnajder // J. Phys.: Conf. Ser. — 2012. — Vol. 343. — Art. 012096. — 9 p.

[78] *Galikova V.* Coulomb problem in non-commutative quantum mechanics / V. Galikova, P. Presnajder // J. Math. Phys. — 2013. — Vol. 54. — Art. 052102. — 20 p.

[79] *Kovacik S.* The velocity operator in quantum mechanics in noncommutative space / S. Kovacik, P. Presnajder // J. Math. Phys. — 2013. — Vol. 54. — Art. 102103. — 12 p.

[80] *Hammou A. B.* Coherent state induced star product on R^3_λ and the fuzzy sphere / A. B. Hammou, M. Lagraa, M. M. Sheikh-Jabbari // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol. 66, No. 2. — Art. 025025. — 11 p.

[81] *R. Amorim.* Tensor coordinates in noncommutative mechanics / Amorim R. // J. Math. Phys. — 2009. — Vol. 50. — Art. 052103. — 7 p.

[82] *Djemai A. E. F.* On quantum mechanics on noncommutative quantum phase space / A. E. F. Djemai, H. Smail // Commun. Theor. Phys. — 2004. — Vol. 41, No. 6. — P. 837–844.

[83] *Quesne C.* Composite system in deformed space with minimal length / C. Quesne, V. M. Tkachuk // Phys. Rev. A. — 2010. — Vol. 81, No. 1. — Art. 012106. — 8 p.

[84] *Romero J. M.* The Kepler problem and noncommutativity / J. M. Romero, J. D. Vergara // Mod. Phys. Lett. A. — 2003. — Vol. 18, No. 24. — P. 1673–1680.

[85] *Mirza B.* Noncommutative geometry and classical orbits of particles in a central force potential / B. Mirza, M. Dehghani // Commun. Theor. Phys. — 2004. — Vol. 42, No. 2. — P. 183–184.

[86] *Djemai A. E. F.* Noncommutative classical mechanics / A. E. F. Djemai // Int. J. Theor. Phys. — 2004. — Vol. 43, No. 2. — P. 299–314.

[87] *Nozari K.* Noncommutative geometry and the stability of circular orbits in a central force potential / K. Nozari, S. Akhshabi // Chaos, Solitons and Fractals. — 2008. — Vol. 37, No. 2. — P. 324–331.

[88] Entropic gravity, phase-space noncommutativity and the equivalence principle / C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, J. N. Prata // Class. Quantum Grav. — 2011. — Vol. 28. — Art. 125007. — 8 p.

[89] *Tkachuk V. M.* Deformed Heisenberg algebra with minimal length and the equivalence principle / V. M. Tkachuk // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 86, No. 6. — Art. 062112. — 4 p.

[90] *Williams J. G.* Lunar laser ranging tests of the equivalence principle / J. G. Williams, S. G. Turyshev, D. H. Boggs // Class. Quantum Grav. — 2012. — Vol. 29. — Art. 184004. — 11 p.

[91] *Castello-Branco K. H. C.* Free-fall in a uniform gravitational field in noncommutative quantum mechanics / K. H. C. Castello-Branco, A. G. Martins // Europhys. Lett. — 2010. — Vol. 51, No. 10. — Art. 102106. — 25 p.

[92] *Balachandran A. P.* On time-space noncommutativity for transition processes and noncommutative symmetries / A. P. Balachandran, A. Pinzul // Mod. Phys. Lett. A. — 2005. — Vol. 20, No. 27. — P. 2023-2034.

[93] *Stern A.* Particlelike solutions to classical noncommutative gauge theory / A Stern // Phys. Rev. D. — 2008. — Vol. 78, No. 6. — Art. 065006. — 11 p.

[94] *Moumni M.* A new limit for the noncommutative space–time parameter / M. Moumni, A. BenSlama, S. Zaim // J. Geom. Phys. — 2011. — Vol. 61, No. 1. — P. 151-156.

[95] *Moumni M.* Spectrum of hydrogen atom in space-time non-commutativity / M. Moumni, A. BenSlama, S. Zaim // The African Review of Physics. — 2012. — Vol. 7, No. 0010. — P. 83-94.

[96] *Zaim S.* Noncommutative of space-time and the relativistic hydrogen atom / S. Zaim, Y. Delenda // J. Phys.: Conf. Ser. — 2013. — Vol. 435. — Art. 012020. — 9 p.

[97] *Bertolami O.* Phase-space noncommutativity and the Dirac equation / O. Bertolami, R. Queiroz // Phys. Lett. A. — 2011. — Vol. 375, No. 2011. — P. 4116–4119.

[98] *Li K.* Hydrogen atom spectrum in noncommutative phase space / K. Li, N. Chamoun // Chin. Phys. Lett. — 2006. — Vol. 23, No. 5. — P. 1122-1123.

[99] *Alavi S. A.* Lamb shift and Stark effect in simultaneous space-space and momentum-momentum noncommutative quantum mechanics and θ-deformed $su(2)$ algebra / S. A. Alavi // Mod. Phys. Lett. A. — 2007. — Vol. 22, No. 5. — P. 377-383.

[100] *Brau F.* Minimal length uncertainty relation and the hydrogen atom / F. Brau // J. Phys. A: Math. Gen. — 1999. — Vol. 32, No. 44. — P. 7691–7696.

[101] *Nieto L. M.* Hydrogen atom as an eigenvalue problem in 3D spaces of constant curvature and minimal length / L. M. Nieto, M. Santander,

H. C. Rosu // Mod. Phys. Lett. A. — 1999. — Vol. 14, No. 35. — P. 2463–2469.

[102] *Akhoury R.* Minimal length uncertainty relation and the hydrogen atom spectrum / R. Akhoury, Y.-P. Yao // Phys. Lett. B. — 2003. — Vol. 572, No. 1-2. — P. 37–42.

[103] Hydrogen atom spectrum under a minimal length hypothesis / S. Benczik, L. N. Chang, D. Munic, T. Takeuchi // Phys. Rev. A. — 2005. — Vol. 72, No. 1. — Art. 012104. — 4 p.

[104] *Stetsko M. M.* Perturbation hydrogen-atom spectrum in deformed space with minimal length / M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 74, No. 1. — Art. 012101. — 5 p.

[105] *Stetsko M. M.* Corrections to the ns levels of the hydrogen atom in deformed space with minimal length / M. M. Stetsko // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 74, No. 6. — Art. 062105. — 5 p.

[106] *Stetsko M. M.* Orbital magnetic moment of the electron in the hydrogen atom in a deformed space with minimal length / M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk // Phys. Lett. A. — 2008. — Vol. 372, No. 31. — P. 5126-5130.

[107] *Qiang Wen-Chao.* An alternative approach to calculating the mean values r^k for hydrogen-like atoms / Wen-Chao Qiang, Shi-Hai Dong // Phys. Scripta. — 2004. — Vol. 70, No. 5. — P. 276-279.

[108] *Yáñez R. J.* Position and momentum information entropies of the D -dimensional harmonic oscillator and hydrogen atom / R. J. Yáñez, W. Van Assche, J. S. Dehesa // Phys. Rev. A. — 1994. — Vol. 50, No. 4. — P. 3065–3079.

[109] Precision measurement of the hydrogen 1s-2s frequency via a 920-km fiber link / A. Matveev, C. G. Parthey, K. Predehl [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Vol. 110, No. 23. — Art. 230801. — 5 p.

[110] Noncommutative gravitational quantum well / O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. Aragão [et al.] // Phys. Rev. D. — 2005. — Vol. 72, No. 2. — Art. 025010. — 9 p.