ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

Григорчак Орест Іванович

УДК 538.94

Мікроскопічна теорія бозе-рідини з урахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій

01.04.02 — Теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук,
професор
Вакарчук Іван Олександрович

ЛЬВІВ — 2016

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми. Роботи [1–3], в яких двадцять років тому була продемонстрована експериментальна можливість отримання бозе-конденсату в системі, що складається з макроскопічно невеликої кількості атомів (йдеться про атоми таких лужних металів як ^{87}Rb, ^{7}Li і Na), значно оживили зацікавленість наукового світу вивченням бозе-систем. Тут доречним буде сказати, що в 2001 році саме за дослідження в цій галузі була присвоєна Нобелівська премія з фізики за "досягнення у вивченні процесів конденсації Бозе-Айнштайна в середовищі вироджених газів і за початкові фундаментальні дослідження характеристик конденсатів". Отримавши новий поштовх для розвитку, ця тематика і сьогодні не втрачає своєї актуальності, а спектр досліджуваних проблем стає щораз ширшим. Найбільш інтенсивно сьогодні вивчаються суміші ^{3}He і ^{4}He, твердий ^{4}He, бозе-системи у різних середовищах і вимірностях простору.

Незважаючи на велику різноманітність досліджуваних систем, своєрідну інтригу продовжує зберігати історично перший об'єкт вивчення в цій галузі: рідкий гелій ^{4}He. Попри більш, ніж 80-літню історію наукових пошуків, належного мікроскопічного теоретичного опису, який би добре працював в усій області температур, створити ще не вдалося.

Особливу увагу привертає область λ-переходу, де і сьогодні активно проводяться теоретичні та експериментальні дослідження [4–9].

Для теоретичного вивчення багаточастинкових систем, зокрема тих, які описуються статистикою Бозе-Айнштайна, досить ефективною виявилася ідея колективних змінних [10]. З її допомогою вдалося побудувати мікроскопічну теорію рідкого ^{4}He в широкотемпературній області через розрахунок матриці густини багатобозонної системи [11]. В результаті було знайдено термодинамічні і структурні функції рідкого ^{4}He, температурну залежність частки бозе-конденсату тощо. Однак більшість цих результатів отримані виключно в наближенні хаотичних фаз (RPA), яке враховує лише парні міжчастинкові кореляції. Відомо, однак, що врахування три- та чотиричастинкових кореляцій може мати доволі суттєвий вплив на теоретичні висновки щодо досліджуваної системи. В границі низьких температур це питання було вивчене значно раніше [12–16]. Натомість відкритою і актуальною залишається проблема якісного і кількісного аналізу температурної поведінки внесків прямих три- та чотиричастинкових кореляцій в теоретичний опис фізичних процесів в бозе-рідині.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та згідно держбюджетних тем Фф-55Ф "Теоретичні дослідження нових квантових систем" (2006-2008 рр., номер державної реєстрації №0106U001294), Фф-14Ф "Нові методи дослідження квантових систем декількох і багатьох частинок" (2009-2011 рр., номер державної реєстрації №0109U002096) та Фф-110Ф "Нові ефекти у квантових рідинах і газах та системах з деформованою алгеброю Гайзенберґа" (2012-2014 рр., номер державної реєстрації №0112U001275).

Мета і задачі дослідження. Основною метою дисертаційної роботи є побудова мікроскопічної теорії бозе-рідини в post-RPA наближенні (RPA – наближення хаотичних фаз), яке враховує внесок не тільки парних, але й прямих три- та чотиричастинкових (ту частину з них, яка зображується у вигляді двох сум за хвильовим вектором) кореляцій, а також її апробація при описі такої багатобозонної системи, як рідкий ^{4}He. Завдання полягає в тому, щоб стартуючи з ермітизованого гамільтоніана, записаного через колективні змінні в так званому наближенні «двох сум за хвильовим вектором», отримати коректні аналітичні вирази для повної матриці густини, а також для термодинамічних та структурних функцій, для яких вхідна інформація про міжчастинкову взаємодію може бути взята з експериментально добре вимірюваних величин. Крім того, ці вирази повинні відтворювати відомі результати в границі високих і низьких температур, а також в границі вимкнення взаємодії. На шляху вирішення поставленого завдання важливе значення має виділення матриці густини ідеального бозе-газу з виразу для повної матриці густини з подальшим розрахунком відповідних величин. Це, фактично, означає, що ми моделюємо нашу бозе-систему ідеальним бозе-газом, дещо здеформованим міжчастинковою взаємодією.

Серед поставлених у роботі задач варто виокремити пошук виразу для ефективної маси атома ^{4}He, який вимагає відходу від чисто мікроскопічного опису і застосування феноменологічного підходу.

Однак такий крок є необхідним і виправданим, оскільки дає можливість ефективно врахувати багаточастинкові кореляції і в такий спосіб усунути інфрачервоні розбіжності, отримати правильне значення для критичної температури та належну температурну поведінку термодинамічних і структурних величин.

Отже, *об'єктом дослідження* виступають явища, які мають місце в бозе-рідині, зокрема такій, як рідкий ^{4}He. *Предметом дослідження* є матриця густини, термодинамічні і структурні функції, швидкість звуку як в нормальній, так і надплинній фазах бозе-рідини. *Методом дослідження* виступає метод колективних змінних, теорії збурень, кумулянтних розкладів, вторинного квантування і функціонального інтегрування.

У першому розділі проведений короткий аналіз історії досліджень ^{4}He і сучасного стану проблем, пов'язаних з його вивченням.

У другому розділі, використовуючи квантово-статистичний підхід, на основі ермітизованого гамільтоніана багатобозонної системи в представленні колективних змінних з перших принципів була знайдена повна матриця густини в широкій області температур в post-RPA наближенні. Кінцевий результат представлений у вигляді добутку матриці густини ідеального бозе-газу на фактор, який враховує взаємодію через прямі дво-, три- і чотиричастинкові кореляції в наближенні "двох сум за хвильовим вектором". Знайдений вираз для матриці густини в границі низьких і високих температур відтворює вже відомі результати.

У третьому розділі, використовуючи діагональні елементи повної матриці густини і застосовуючи функціональне інтегрування та метод кумулянтних розкладів, було отримано вираз для статистичної суми багатобозонної системи в наближенні “двох сум за хвильовим вектором” у вигляді добутку статистичної суми в наближенні хаотичних фаз на фактор, що враховує прямі три- та чотиричастинкові кореляції. В процесі розрахунку було знайдено вираз для якобіана переходу від декартових до колективних змінних в широкій області температур, який виникає в результаті усереднення функції переходу Зубарєва з діагональними елементами матриці густини ідеального бозе-газу. Вся його температурна залежність міститься виключно у виразах для структурних факторів ідеального бозе-газу. В границі низьких температур отриманий вираз для якобіана переходу збігається з виразом для звичайної вагової функції, яка виникає з умови ермітовості гамільтоніану багатобозонної системи в представленні колективних змінних.

У четвертому розділі запропоновано метод знаходження виразу для ефективної маси атома ^{4}He, який дає коректну температурну поведінку цієї величини в широкій області температур, за винятком флуктуаційної області, де не працює пертурбативний метод розрахунку. Отримані чисельні оцінки показують, що ця область є вузькою: $0.97 \lesssim T/T_c \leq 1$. У границі низьких температур величина ефективної маси є близькою до значень, знайдених різними методами раніше. Введення ефективної маси дозволяє усунути інфрачервоні розбіжності, які присутні в чотиричастинковому структурному факторі ідеального бозе-газу, “поправити” хід кривої теплоємності, зокрема в околі λ-переходу, а також змістити температуру бозе-конденсації від

$T_c \approx 3.14$K для ідеального бозе-газу до $T_c = 2.18$K, що є дуже близьким до експериментального значення критичної температури для рідкого ^{4}He ($T_c = 2.168$K). В процесі розрахунку вдалося показати, що в критичній точці вигляд одночастинкового спектру колективних збуджень є пропорційним до степеня хвильового вектора, меншого за двійку на величину $\eta = 0.135$, яка називається малим критичним індексом. Отримане значення критичного індексу відрізняється від результату Монте Карло симуляцій, оскільки воно було знайдене лише в наближенні хаотичних фаз, яке відтворює тільки перший член розкладу за оберненими степенями вимірності параметра порядку.

У п'ятому розділі на основі повної матриці густини розраховано дво-, три- і чотиричастинковий структурні фактори в наближенні "однієї суми за хвильовим вектором". При високих температурах вони редукуються до виразів для структурних факторів ідеального бозе-газу. В границі низьких температур вираз для парного структурного фактора відтворює вже відомі результати, а в квазікласичній межі ($\hbar \to 0$) ми отримаємо добре знані вирази з теорії класичних рідин (в post-RPA наближенні).

Проведено чисельний розрахунок двочастинкового структурного фактора при різних температурах і з використанням отриманого виразу для ефективної маси атома ^{4}He. Зроблено також порівняння з експериментальними даними.

У шостому розділі, користуючись точним співвідношенням, яке пов'язує довгохвильову асимптотику двочастинкового структурного фактора і швидкість звуку в бозе-системі, вдалося знайти температурну поведінку останньої як в докритичній, так і післякритичній області в наближенні "однієї суми за хвильовим вектором", що відповідає post-RPA наближенню. У границі високих і низьких температур отриманий вираз дає відомі результати. Спостерігається також добре узгодження з експериментальними даними в широкій області температур. Це є важливим результатом post-RPA наближення, оскільки швидкість звуку, розрахована лише в наближенні хаотичних фаз, веде до сталості значення в докритичній області і дає повільний ріст в надкритичній, що навіть якісно погано узгоджується з експериментом. Натомість post-RPA наближення дає якісно правильну температурну поведінку швидкості першого звуку в рідкому ^{4}He.

У сьомому розділі, виходячи з виразів для повної матриці густини, а також для дво-, три- та чотиричастинкового структурних факторів багатобозонної системи, знайдено температурну поведінку середніх значень кінетичної, потенціальної і повної внутрішньої енергії в наближенні "двох сум за хвильовим вектором", яке враховує три- та чотиричастинкові кореляції. В границі як низьких, так і високих температур, отримані вирази відтворюють вже відомі результати. Для чисельного розрахунку вхідною інформацією про потенціал міжчастинкової взаємодії послужили екстрапольовані до нуля температур експериментальні дані для структурного фактора і швидкості першого звуку в рідкому ^{4}He. З їх допомогою вдалося ефективно визначити фур'є-компоненту потенціалу парної міжчастинкової взаємодії в рідкому ^{4}He. Чисельний розрахунок, як і у випадку двочастинкового структурного фактора, проводився з ефективною масою.

Дисертаційна робота завершується **Висновками** та **Списком використаних джерел**.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі вперше запропоновано мікроскопічний опис багатобозонної системи на основі методу колективних змінних в широкій області температур, який враховує внесок прямих три- і чотиричастинкових кореляцій.

Вперше знайдено вираз для матриці густини і статистичної суми багатобозонної системи в post-RPA наближенні, а також показано, як з допомогою функціонального інтегрування та кумулянтних розкладів побудувати якобіан переходу від декартових до колективних змінних, в який «заховані» внески від матриці густини ідеального бозе-газу.

Вперше методом теорії збурень отримано коректний вираз для температурної поведінки ефективної маси атома ^{4}He, який усуває інфрачервоні розбіжності. Знайдено також вузьку флуктуаційну область температур ($0.97 \lesssim T/T_c \leq 1$), в якій запропонований пертурбативний метод розрахунку ефективної маси не працює.

Вперше проаналізовано вплив прямих три- та чотиричастинкових кореляцій на температурну поведінку термодинамічних і структурних функцій рідкого ^{4}He, а також проведено кількісну оцінку величини внеску цих кореляцій в широкій області температур.

Вперше на основі довгохвильової асимптотики двочастинкового структурного фактора в наближенні «однієї суми за хвильовим вектором» отримано температурну залежність швидкості першого звуку в рідкому ^{4}He в post-RPA наближенні. Знайдений вираз, на відміну від виразу в наближенні хаотичних фаз, правильно відтворює температурну поведінку цієї величини.

Практичне значення отриманих результатів. Результати, отримані в роботі, можуть бути використані для глибшого осмислення і розуміння фізичних явищ та процесів, які мають місце в такій багатобозонній системі, як рідкий ^{4}He, зокрема в ділянці λ -переходу. Розроблену методику врахування три- та чотиричастинкових кореляцій можна поширити і на кореляції комплексів з більшого числа частинок. Отримані в роботі аналітичні вирази відкривають шлях для знаходження інших важливих фізичних величин бозе-рідини в post-RPA наближенні в широкотемпературній області, зокрема теплоємності і бозе-конденсатної фракції. Розроблені теоретичні підходи після відповідної модифікації можна використати для опису як багатобозонних, так і багатоферміонних систем; йдеться, зокрема, про заряджений бозе-газ, атомарний водень, суміші ^{3}He і ^{4}He тощо.

Особистий внесок здобувача. Постановку завдань дослідження здійснив науковий керівник роботи проф. І. О. Вакарчук. Усі викладені в дисертації результати автор отримав самостійно або при своїй безпосередній участі. У роботах, виконаних зі співавторами, здобувачеві належить:

- розрахунок повної матриці густини і статистичної суми багатобозонної системи в широкотемпературній області в так званому наближенні “двох сум за хвильовим вектором”, яке враховує прямі три- і чотиричастинкові кореляції, а також детальний аналіз їхніх виразів в границі низьких і високих температур та при “вимкненні” взаємодії; побудова методу знаходження якобіана переходу від декартових до колективних змінних, в який “заховані” внески від матриці густини ідеального бозе-газу;

- отримання температурної поведінки ефективної маси атома ^{4}He в рідині; проведення чисельного аналізу здобутих результатів; знаходження так званого малого критичного індексу і ширини флуктуаційної області для рідкого ^{4}He, де є незастосовний пертурбативний метод розрахунку ефективної маси;

- знаходження виразів для дво-, три- і чотиричастинкового структурних факторів багатобозонної системи в post-RPA наближенні, яке враховує прямі три- і чотиричастинкові кореляції; чисельний розрахунок двочастинкового структурного фактора при різних температурах;

- отримання аналітичних виразів для середніх значень кінетичної, потенціальної і повної внутрішньої енергії багатобозонної системи в наближенні “двох сум за хвильовим вектором” в широкій області температур, їх чисельний розрахунок; аналіз отриманих результатів і їх порівняння з експериментальними даними.

Результати статей, їхню інтерпретацію та застосовність використаних підходів співавтори обговорювали на паритетних засадах.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включені до дисертації, здобувач представляв особисто на таких конференціях та семінарах: Міжнародна конференція “Еврика-2007” (Львів, 2007); Міжнародна конференція “Еврика-2008” (Львів, 2008); Міжнародна конференція ІЕФ-2009 (Ужгород, 2009); X Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених (Львів, 2010); Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2010 рік (Львів, 2011); XII Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених (Львів, 2012); Різдвяні дискусії 2013 (Львів, 2013), Різдвяні дискусії 2014 (Львів, 2014), Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv (Zielona Góra, 2015).

Подані в роботі результати неодноразово обговорювали на наукових семінарах кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка.

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані в шести журнальних статтях [17–22] та десятьох тезах доповідей на конференціях [23–32].

Розділ 1

Огляд літератури

Пройшло вже майже 150 років з того часу, коли вперше в історії науки була виявлена жовта лінія гелію в спектрі сонячного світла. Це сталося у 1868 році під час затемнення Сонця. Одночасно декілька дослідників: Жансен і Теннат [33], Райє [34], Хейг [35], Гершель [36] і Погсон [37] спостерігали її в різних точках Землі. Саме завдяки цьому історичному факту гелій і отримав свою назву: з грецької “$\mathrm{H}\varepsilon\lambda\iota o\varsigma$” — “Сонце”. В 1895 році гелій був виявлений і на Землі [38–42].

Та лише в 1908 році після багатьох невдалих спроб різних дослідників Камерлінг Оннесу [43] в лабораторних умовах вдалося отримати рідку фазу цієї речовини. В Україні зрідження гелію вперше було здійснено в 1934 році експансійним методом [44] завдяки створенню відповідного зріджувача в Українському фізико-технічному інституті в Харкові.

Ще майже 20 років після першого вдалого зрідження гелію було потрібно, щоб разом з відкриттям Капіцею [45] і незалежно Алленом і Майснером [46] надплинності, науковий світ усвідомив його унікальність. Річ у тім, що це єдина квантова рідина, яка існує в природі; всі інші стають твердими значно швидше, ніж квантові ефекти в них починають бути достатньо помітними. В газоподібному стані гелій дає можливість здійснити найнижчий температурний цикл, а в рідкій фазі він виявляє суттєво квантові властивості в усій області температур свого існування. Однією з таких властивостей є те, що при нормальному тиску гелій залишається рідиною при як завгодно низьких температурах. Іншими проявами його квантових властивостей є вже згадана надплинність, велетенська теплопровідність, яку називають ще надтеплопровідністю, а також явище бозе-айнштайнівської конденсації. Суть цього явища полягає у нагромадженні частинок в стані з нульовим імпульсом, а назва походить від прізвищ двох вчених, які вперше його описали. А. Айнштайн, опираючись на роботу С. Бозе, присвячену темі світлових квантів [47], показав існування конденсації в імпульсному просторі для ідеального газу частинок з ненульовою масою спокою [48].

У 1938 році Лондон [49,50] висловив ідею про зв'язок надплинності в рідкому ^{4}He з явищем бозе-айнштайнівської конденсації в ідеальному бозе-газі. На цю думку його наштовхнула близькість критичної температури в ідеальному бозе-газі, частинки якого мали параметри атома гелію, з температурою λ-переходу в рідкому ^{4}He. Однак цей зв'язок і по сьогоднішній день не є строго встановленим: при нулі температур весь ^{4}He є надплинним, однак лише незначна кількість частинок знаходяться в конденсаті (за різними оцінками на основі експериментальних даних [51–58] частка бозе-конденсату становить від 2% до 14%), натомість ідеальний бозе-газ при нулі температур весь є в стані з нульовим імпульсом і в той же час надплинним він не є. І хоча висловлене Лондоном розуміння фазового переходу не позбавлене труднощів [59], однак загалом воно приводить до коректного опису сучасних експериментальних результатів з холодними газами [60, 61].

Поняття λ-переходу, яке згадувалося вище, походить від форми кривої теплоємності рідкого ^{4}He, яка нагадує грецьку букву λ. Перші експерименти по вимірюванню теплоємності рідкого ^{4}He при тиску насиченої пари були здійснені Камерлінг Оннесом і Даном [62, 63]. Але до роботи Кеєзома і Клаузіуса [64] фазовий перехід в гелію при температурі T= 2.168K вважався переходом першого роду. Натомість автори цієї роботи експериментально показали відсутність схованої теплоти переходу. Пізніше Кеєзом разом з міс Кеєзом [65], провівши більш прецизійні вимірювання, прийшли до висновку, що падіння величини теплоємності в точці фазового переходу відбувається стрибкоподібно. Вони також підтримали ідею Еренфеста назвати точку, в якій відбувається стрибок теплоємності, λ-точкою. Отож λ-перехід — це назва щойно описаної аномалії в температурній поведінці теплоємності. Кеєзом мав цікаве припущення, яке полягало в тому, що розрив в точці фазового переходу міг бути зумовлений флуктуаціями, а стрибка в строгому значенні слова не існує. Згодом почали вважати, що λ-подібний хід теплоємності рідкого ^{4}He в околі точки λ-переходу при переході в надплинний стан має характер логарифмічної розбіжності [66–69]. Понад півстоліття це подавалося як експериментально доведений факт, який увійшов у всі підручники і монографії. Однак експерименти [70–72] виявили відсутність вказаної розбіжності. Теорія, заснована на методі ренормалізаційної групи [73, 74], давала не логарифмічну поведінку теплоємності в околі λ-точки, а степеневу $\sim (|T - T_\lambda|/T_\lambda)^{-\alpha}$, де T_λ — критична температура, α — критичний показник теплоємності

C_p, причому $\alpha < 0$. Числове значення α визначалося як в теоретичних роботах [75, 76], так і в експериментальних [71], а також за допомогою Монте-Карло симуляцій [77]. В роботі [71] отримано значення критичного показника теплоємності $\alpha = -0,01285 \pm 0,00038$, а в наступній [72] ці ж автори вказують, що результат має бути дещо іншим, а саме: $\alpha = -0,01056$. Пізніші теоретичні дослідження, базуючись на процедурі пересумовування розбіжних рядів теорії збурень, показали, що в точці λ-переходу теплоємність має скінченне значення. Останній факт підтверджує висловлене в 1938 році Лондоном припущення [49, 50] про те, що явище "λ-переходу" пов'язане із бозе-айнштайнівською конденсацією, яка здеформована міжатомною взаємодією.

Побудувати теорію надплинності ^{4}He намагався Тіса [78, 79], розвиваючи ідею Лондона [49, 50]. Він запропонував дворідинну модель, в межах якої розглядав рідкий ^{4}He як суміш надплинної і нормальної компонент, причому надплинну компоненту він ототожнював з ідеальним бозе-айнштайнівським газом. В пізніших роботах, зокрема в [80], він дещо модифікував свою теорію. Однак на думку Кеєзома, припущення, зроблені Тісою, були, м'яко кажучи, фізично некоректними. В своїй книзі про гелій [81] він присвятив цілий параграф критиці підходу Тіси, але водночас зазначив його заслугу у висловленні ідеї макроскопічного опису рідкого ^{4}He з допомогою розділення його густини на дві частини і введення двох полів швидкостей.

Інший тип дворідинної моделі запропонував Ландау [82–84]. Ключовим моментом цієї теорії є постулювання вигляду енергетичного спектру колективних збуджень, який у цьому випадку являв собою накладання фононного і ротонного спектрів квазічастинок. Аналізуючи роботу Ландау, Фейнман вказав [69], що в даному підході не використовується той факт, якою статистикою, Бозе чи Фермі, описується досліджувана система багатьох частинок, а тому запропонована теорія не може бути коректною для опису бозе-рідини. Можливо тому Фейнман разом з Коуеном [85] намагалися отримати спостульований Ландау спектр колективних збуджень з перших принципів, уводячи у вираз для хвильової функції величини, що відповідали фононним і ротонним збудженням. В результаті їм вдалося знайти вигляд спектру, який відрізнявся від введеного Ландау завищеним майже на 2K ротонним мінімумом. Цей результат був набагато кращим, ніж попередній [86], який давав вдвічі вищий, в порівнянні з теорією Ландау, ротонний мінімум.

Дещо раніше, Фейнман, скориставшись вже розробленим методом інтегралів за траєкторіями, записав повну матрицю густини взаємодіючих бозонів як добуток матриці густини ідеального бозе-газу на фактор, який враховував неідеальність системи [87]. Таке представлення приводило до фазового переходу, механізм якого він прямо пов'язував з явищем бозе-конденсації. Важливим нюансом у цих розрахунках було введення поняття ефективної маси атома гелію, яка замість реальної маси стояла у виразі для матриці густини ідеального бозе-газу. З її допомогою Фейнман намагався врахувати взаємодію частинки з оточуючим середовищем, оскільки фактор, який описував неідеальність системи у матриці густини, брав до уваги лише факт непроникності частинок. Це була досить продуктивна ідея, оскільки з її допомогою вдалося пояснити зниження температури бозе-конденсації у взаємодіючій бозе-системі порівняно з ідеальною. Інтуїтивно зрозуміло, що внаслідок міжчастинкової взаємодії ефективна маса має бути більшою, ніж маса атома, тому і температура бозе-конденсації стає нижчою. Це справедливо також і для систем у двох вимірах [88]. Однак варто пам'ятати, що відштовхування на малих відстанях, навпаки, зменшує густину системи, а отже веде до збільшення температури. Цей факт потрібно враховувати, проводячи теоретичний аналіз деяких систем, наприклад ^{4}He на вайкорі [89]. Вплив відштовхування на температуру бозе-конденсації в моделі слабонеідеального бозе-газу підтверджують як теоретичні обчислення [90–94], так і Монте-Карло симуляції [95,96].

Говорячи про ефективну масу, варто зауважити, що немає єдиної думки про її значення навіть в нулі температур, не кажучи вже про широкотемпературну область, оскільки саме введення цієї величини є феноменологічним моментом і великою мірою залежить від застосованих підходів для її розрахунку [97–101]. В широкотемпературній області розрахунок ефективної маси був проведений в роботах [102, 103] з використанням варіаційного методу, а також в [104, 105] на основі пертурбативного підходу.

Основу нового витка у вивченні квантових рідин заклали дві ідеї: оригінальний метод наближеного вторинного квантування Боголюбова [106], а також ідея колективних змінних Боголюбова і Зубарєва [10]. Боголюбов вперше з перших принципів розрахував спектр елементарних збуджень слабонеідеального газу [106], скориставшись припущенням, що слабка взаємодія не сильно впливає на загальні риси бозе-айнштайнівської конденсації в ідеальному бозе-газі, а тому кількість частинок у конденсаті при низьких температурах можна вважати макроскопічною. Таке припущення дало змогу значно спростити гамільтоніан системи і після його діагоналізації у першому наближенні отримати енергетичний спектр квазічастинок, що описуються статистикою Бозе-Айнштайна. Знайдений взаємозв'язок між енергетичним спектром і структурним фактором бозе-рідини співпадав в головному наближенні з пізнішими результатами Фейнмана [86].

Зубарєв [107], користуючись виразом для хвильової функції основного стану бозе-системи, зумів показати виникнення бозе-конденсату в системі, при цьому не вносячи додаткових припущень зовні. Хоча в моделі Боголюбова міжатомна взаємодія повинна бути слабкою, однак отримані результати виявилися коректними і для рідкого ^{4}He в границі низьких температур. Теоретичний розрахунок бозе-конденсату для рідкого ^{4}He одними з перших провели також Пенроуз і Онзагер [108], використовуючи модель твердих сфер. Вони отримали значення величини бозе-конденсату на рівні 8% при $T = 0$K. Інші розрахунки [109–114], які брали до уваги лише короткодіючі потенціали, давали близькі результати. Однак коректний розрахунок бозе-конденсатної фракції вимагає врахування не тільки короткодіючих, але й далекодіючих кореляцій. Одним з підходів, який дає можливість це здійснити, є розрахунок через одночастинкову матрицю густини [13, 16, 115, 116].

Подальший розвиток ідея Боголюбова знайшла в роботі Гугенгольца і Пайнса [117]. В свою чергу Бєляєв застосував для опису багатобозонної системи розвинутий в теорії поля формалізм [118], що дозволило йому в наступній роботі [119] із отриманого виразу функції Гріна для бозе-системи багатьох частинок знайти енергетичний спектр збуджень в неідеальному бозе-газі, а також енергію основного стану і розподіл частинок за імпульсами.

Ідея колективних змінних, окрім згаданих вище робіт, паралельно розроблялася також у працях Абе [120], Сунакави та ін. [121, 122], а також в роботах Юхновського [123, 124], Вакарчука і Юхновського [125, 126], Вакарчука і Глушака [14, 15]. Зокрема у названих щойно роботах Абе, Сунакави та ін. вивчається питання про фізичну інтерпретацію оператора похідної за колективною змінною і його зв'язок з оператором швидкості у квантовій гідродинаміці, а у пізнішій роботі [127] вперше знайдено самоспряжений гамільтоніан багатобозонної системи в представленні колективних змінних.

Підхід колективних змінних виявився досить ефективним інструментом у теоретичному вивченні багаточастинкових систем. Він також продемонстрував свою доцільність при знаходженні повної матриці густини [11, 99], яка несе повну і детальну інформацію про сукупність N частинок. Для того, щоб розглядати поведінку s частинок з сукупності N частинок, нам потрібно використовувати s-частинкові матриці густини [128], які отримуються інтегруванням повної матриці густини за координатами $N - s$ частинок. Вперше в явному вигляді s-частинкові матриці густини були знайдені в роботі [129], а в широкотемпературній області вирази для одно- і двочастинкових матриць густини були запропоновані у [100]. Матриця густини, заінтегрована по всіх координатах частинок дає нам статистичну суму. Одні з перших робіт, де для її розрахунку були використані колективні змінні, є праці Юхновського [130, 131]. Він також показав, як її розрахувати для систем, які містять не тільки бозони, але й ферміони. Річ у тім, що в цьому випадку статистичну суму неможливо зобразити лише в колективних змінних, оскільки антисиметрична функція не може бути виражена лише з їх допомогою. Вихід з цієї ситуації був знайдений в роботах [123, 124], які є початком ряду робіт, де для обчислення статистичної суми застосовуються як колективні змінні, так і методи вторинного квантування. В роботі [132] статистична сума N атомів з далекосяжною і близькосяжною взаємодією приведена до вигляду функціональних інтегралів. В результаті з'явилася можливість розрахунку статистичної суми рідина–газ за допомогою методів, розвинених для моделі Ізінга. Трохи згодом на основі термодинамічних співвідношень, використовуючи метод колективних змінних із виділеною системою відліку, була отримана явна форма функціонала великої статистичної суми, яка дає можливість описувати фазові переходи [133].

Матриця густини і, зокрема, розрахована на її основі статистична сума, дає можливість отримати вичерпну інформацію про термодинамічні та структурні функції досліджуваної системи. Перші ж кроки на шляху теоретичного вивчення термодинаміки рідкого ^{4}He були зроблені в напрямі наближеного обчислення енергії основного стану цієї бозе-системи ще Боголюбовим [106]. Пізніше він разом із Зубаревим [10] знайшли хвильову функцію основного стану, а також хвильові функції нижніх збуджених рівнів для слабонеідеального бозе-газу з допомогою методу колективних змінних. В границі зникаюче малої взаємодії енергія основного стану бозе-системи була вперше коректно знайдена в роботі [134], де розрахунок проводився з використанням псевдопотенціалу, а також в праці [135] за допомогою метода Бракнера. Дослідження термодинамічних функцій основного стану рідкого ^{4}He, зокрема внутрішньої енергії, в наближенні вищому, ніж наближення Боголюбова, було проведено в ряді робіт [13, 14, 16, 125, 136–139]. Трохи згодом [140, 141] з допомогою двочасових температурних функцій Гріна були отримані вирази для термодинамічних функцій рідкого ^{4}He в широкотемпературному діапазоні. В підході колективних змінних термодинамічні функції багатобозонної системи для широкої області температур були знайдені в роботі [142]. Варто зауважити, що вивчення термодинамічних властивостей ^{4}He сьогодні проводиться не тільки для рідкого [103, 143, 144] чи газоподібного стану [145], багато робіт присвячені і твердому стану [146–151]. Активно вивчається термодинаміка плівок [152–154] та сумішей [155–157], а також поведінка ^{4}He в різних середовищах [158–160].

У структурних дослідженнях багаточастинкових систем центральну роль відіграє повний переріз розсіяння, який називається динамічним структурним фактором. Його також можна отримати на основі повної матриці густини. Він дає можливість визначити просторову структуру речовини, а також структуру її енергетичного спектра [161, 162]. З його допомогою, а також з допомогою похідних від нього величин, сьогодні вивчають багато різних систем, наприклад: бозе-газ в пастці [163], рідкий ^{4}He [164] і ^{3}He [165] у двох вимірах, твердий

^{3}He [166], тонкі плівки [167], розріджений газ Ленарда-Джонса [168], надплинний гелій [169], парагідроген [170], моделі з турбулентністю [171] тощо. Окрім динамічного структурного фактора не менш вагоме значення має його нульовий момент або статичний структурний фактор, для якого в різний час було проведено чимало вимірювань в широкій області температур. Дослідження проводилися при тиску насиченої пари як методом нейтронної дифракції [172], так і з допомогою дифракції рентгенівських променів [173]. Аналіз експериментальних робіт по вимірюванню структурного фактора було проведено, наприклад, у роботі [174]; у ній також були запропоновані поправки, які допомагають узгодити результати різних авторів. Серед структурних функцій варто згадати також парну кореляційну функцію, яка є однією з базових величин, що характеризують когерентні властивості бозе-конденсату [175]. В підході колективних змінних структурні властивості рідкого ^{4}He при низьких температурах обговорюються вже здавна [13,14,16,125,126,136,139]. Однак теоретичний розрахунок парного структурного фактора в широкотемпературній області був здійснений щойно в роботі [142] за допомогою усереднення з матрицею густини взаємодіючих бозе-частинок. Згодом з'явилися інші роботи, які описували структурні функції в широкій області температур [104,176].

Незважаючи на всі успіхи, які були досягнуті, у мікроскопічній теорії рідкого ^{4}He залишається ще ряд важливих і не до кінця розв'язаних проблем; йдеться, наприклад, про кількісний опис структурних і термодинамічних функцій, а також бозе-айнштайнівської конденсації, зокрема, в околі λ-точки, що яскраво видно із порівняння теоретичних результатів з експериментальними даними для середніх значень кінетичної, потенціальної і повної внутрішньої енергії [55, 109, 110], структурного фактора [173, 177], теплоємності [70, 178, 179]. Значною мірою це пов'язано з тим, що матриця густини багатобозонної системи, на основі якої розраховуються вищевказані величини, взята з урахуванням лише парних кореляцій. Відомо, що внески багаточастинкових кореляцій у термодинамічні функції рідини можуть бути значними [180, 181]. Врахування тричастинкових кореляцій при розрахунках енергії основного стану, структурного фактора і парної функції розподілу рідкого ^{4}He проведено, зокрема, в роботах [182–184], а в [12, 13] на основі врахування три- і чотиричастинкових кореляцій зроблена оцінка заповнення бозе-конденсату в рідкому ^{4}He. В роботах [14–16] показано, що внесок від три- та чотиричастинкових кореляцій при низьких температурах покращує результати для основного стану, а в [185] знайдено вклад тричастинкових кореляцій у значення структурного фактора рідкого ^{4}He. В роботі [104] були знайдені структурні функції і статистична сума рідкого ^{4}He з урахуванням непрямих три- і чотиричастинкових кореляцій в широкому інтервалі температур. Це привело до кращого узгодження теоретичних розрахунків і експериментальних даних, зокрема, для парного структурного фактора [173], однак розбіжності все ж таки залишаються.

Для кращого узгодження теоретичних і експериментальних висновків відповідні величини мають бути знайдені з урахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій, що, у свою чергу, пов'язане із використанням наближення "двох сум за хвильовим вектором" [14, 186].

Це також означає, що всі розрахунки потрібно проводити із матрицею густини в post-RPA наближенні. Користуючись результатами роботи [125], можемо знайти вигляд цієї матриці, однак тільки при температурі T= 0 K. Для всього діапазону температур обчислення матриці густини багатобозонної системи із врахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій являє собою більш математичну, аніж фізичну проблему, у зв'язку із громіздкістю виразів, які виникають при розрахунках. Однак, використовуючи відповідні "математичні трюки", стає можливим значно спростити обчислення і знайти її явний вигляд.

Ще одним важливим напрямком теоретичних досліджень властивостей рідкого ^{4}He і вивчення поведінки його термодинамічних та структурних функцій є чисельні методи розрахунку, зокрема такі як: дифузійний метод Монте Карло (дослідження основного стану) [187–189], метод Монте-Карло з використанням інтегралів за траєкторіями [70, 190, 191] чи функцій Гріна [192], "незміщений" метод Монте-Карло (unbiased Monte Carlo) [193] тощо. З допомогою деяких з цих методів, наприклад, було проведене дослідження області піку структурного фактора бозе-конденсату і показано, що він знаходиться вище, ніж отримане теоретичне значення у наближенні малої густини [194], а в [195] запропоновано процедуру розрахунку ефективного парного потенціалу на основі експериментальних даних для структурного фактора. При застосуванні згаданих чисельних методів постає проблема задання міжатомного потенціалу взаємодії в гелії. Для її вирішення в різний час використовували потенціал Слетера-Кірквуда [196], Ленарда-Джонса [168, 197], Азіза-Сламана [198, 198]. Застосовують також потенціали, які враховують багаточастинкові кореляції, зокрема тричастинкові [199]. Корисним також є потенціал Аксильрода-Теллера [200], який враховує дипольні взаємодії, та аналітичний потенціал Паріша-Дикстри [201]. Інший підхід до цієї проблеми запропонований у роботах [140, 202], де міжатомний потенціал взаємодії був відновлений за експериментальними даними для структурного фактора.

Актуальним сьогодні залишається вивчення явищ першого та другого звуку. Йдеться не тільки про рідкий ^{4}He, але також про такі багаточастинкові системи як: двокомпонентні суміші (зокрема ^{3}He і ^{4}He) [203–205], твердий ^{3}He [206], плазму [207], ^{4}He в аерогелі [208,209], бозе-газ в пастці [210]. Історія експериментального вивчення швидкості першого звуку в рідкому ^{4}He розпочинається з Бартона [211], який провів її вимірювання з допомогою ультразвукового методу. Роком пізніше це зробив Фіндлей з колегами [212, 213]. Крива температурної поведінки, яка була тоді отримана, прекрасно узгоджується з сучасними даними [214]. Питанням інтерпретації експерименту займався Гроневолд [215], якому вдалося довести, що ультразвукові хвилі в гелії II є адіабатичними, незважаючи на високу теплопровідність гелію і значну частоту хвиль. В роботі [212, 213] було зроблено спробу пояснити значно менший розрив швидкості звуку в точці λ-переходу в порівнянні зі значенням, яке випливало зі співвідношення Еренфеста і пов'язувало його зі стрибком ізотермічної стисливості.

Трохи згодом увагу дослідників привернуло питання загасання звуку в рідкому ^{4}He. Пеллам і Скваєр [216] дослідили його експериментально і показали, що їх дані добре узгоджуються з теоретичними результатами, отриманими на основі класичних формул, для області температур від 3.2K до 4.2K. При цьому вважалося, що загасання було зумовлене лише звичайною в'язкістю і тепловими втратами. Пізніше швидкість звуку і його загасання в рідкому ^{4}He були розраховані на основі кінетичних рівнянь Ландау-Халатникова і рівняння Больцмана [217]. В роботі [218] автори порівнюють отримані з допомогою теоретико-польового формалізму ренорм-групи результати критичної поведінки поширення звуку в рідкому ^{4}He (а також в інших рідинах) в околі критичної точки переходу газ-рідина. Сьогодні, окрім поширення і загасання, вивчається також і питання відбивання першого та другого звуку в надплинній рідині [219].

Ще в 1938 році Тіса на основі своєї дворідинної моделі передбачив існування другого типу звукових хвиль в гелії II (названих ним температурними хвилями). Це саме передбачення зробив і Ландау у 1941 році [82]. На відміну від першого звуку, який виникає під впливом коливання тиску, причиною другого звуку є коливання температури. Поштовхом для висловлення ідеї другого звуку послужили результати експериментів Капіци, який виявив інерційність поширення тепла в гелії. Теоретичний опис другого звуку провів Ліфшиц [220], а перші експерименти з вимірювання його температурної поведінки поставив Пєшков [221–223]. Здобуті тоді результати добре узгоджуються із сучасними даними [214, 224, 225].

Чи можуть взаємодіяти між собою явища першого і другого звуку? Позитивну відповідь на це питання вперше дав Онзагер, який припустив можливість взаємного перетворення другого звуку в перший і навпаки. Перші спроби перевірити цю гіпотезу зробив Пєшков [221–223], а також Лейн з колегами [226–228]. В результаті було отримано оцінку відношення коефіцієнтів трансформації першого в другий звук. Виявилося, що це відношення близьке до одиниці. Параметричне генерування другого звуку з допомогою першого описано в роботах [229, 230].

Варто зауважити, що перший і другий звук не є єдиними звуковими модами у багаточастинкових системах. Є також третій, четвертий, п'ятий звук [231–235], однак вони не є незалежними акустичними модами; це фактично хвильові процеси, в які переходять перший і другий звук, коли крайові ефекти стають домінуючими [236, 237]. В роботі [238] була також описана поперечна звукова мода. Вона отримала свою назву через те, що в ній швидкість нормальної складової осцилює в напрямку, перпендикулярному до хвильового вектора.

Розділ 2

Матриця густини в post-RPA наближенні

2.1 Вступ

Повна матриця густини багатобозонної системи містить вичерпну інформацію про її фізичні властивості. Це випливає безпосередньо з означення матриці густини, яка для N безспінових частинок із координатами $x \equiv (\mathbf{r}_1, \dots \mathbf{r}_N)$, що рухаються в об'ємі V, має такий вигляд:

$$R(x|x') = \sum_n \psi_n^*(x') e^{-\beta H} \psi_n(x), \tag{2.1}$$

де $\psi_n(x)$ — повна система функцій, симетричних стосовно перестановок частинок; індекс n нумерує квантові стани; H — гамільтоніан системи частинок; $\beta = 1/T$ — обернена температура. Тому розрахунок повної матриці густини є ключовим моментом на шляху побудови мікроскопічної теорії бозе-рідини, зокрема рідкого ^{4}He.

У свій час, ідея Фейнмана, яку він запропонував, виходячи з феноменологічних міркувань, про виділення з повної матриці густини в координатному представленні матриці густини ідеального бозе-газу, не набула належного розвитку, хоча і приводила до фазового переходу. Сама ідея походила із розуміння реальної бозе-системи як ідеального бозе-газу, злегка здеформованого взаємодією. Пізніше в роботах Вакарчука з колегами, зокрема [11, 104, 142], вона не тільки довела своє право на існування, але й виявилася досить ефективною для опису фізичних явищ у бозе-системі в широкотемпературній області. Щоправда, в цих роботах матриця густини була записана лише в наближенні парних кореляцій (RPA-наближення).

У цьому розділі буде проведено розрахунок повної матриці густини в представленні колективних змінних в post-RPA наближенні, яке містить прямі три- і чотиричастинкові кореляції. Отриманий результат буде поданий у вигляді добутку матриці густини ідеального бозе-газу на фактор, який враховує міжчастинкову взаємодію. Для матриці густини, так само як і для статистичної суми та термодинамічних функцій, post-RPA наближення відповідає наближенню “двох сум за хвильовим вектором”, натомість для структурних функцій та швидкості звуку — наближенню “однієї суми за хвильовим вектором”. В наступних розділах буде також показано, що обчислення термодинамічних і структурних величин на основі матриці густини в post-RPA наближенні приводять до кращого узгодження теоретичних результатів з експериментальними даними, ніж у випадку матриці густини в наближенні парних кореляцій.

2.2 Вихідні рівняння

З означення матриці густини (2.1) випливає, що вона задовольняє рівняння Блоха:

$$-\frac{\partial R(x|x')}{\partial \beta} = H(x)R(x|x'), \tag{2.2}$$

а при $\beta = 0$ може бути записана в такий спосіб:

$$R(x|x') = \sum_n \psi_n^*(x')\psi_n(x) = \delta(x - x'). \tag{2.3}$$

Тут для багатобозонної системи ми ввели символьне позначення

$$\delta(x - x') = \frac{1}{N!} \sum_Q \prod_{j=1}^{N} \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r'}_{Qj}). \tag{2.4}$$

В наведеному вище виразі Q — це оператор перестановки індексів $(1, \ldots, N)$; $\sum\limits_Q$ — сума за всіма $N!$ перестановками.

На основі рівностей (2.1) — (2.3) вираз для матриці густини можна зобразити ще й так:

$$R(x|x') = e^{-\beta H}\delta(x - x'), \tag{2.5}$$

тут $H = H(x)$. Оскільки матриця густини є дійсною, то, очевидно, що вона є і симетричною стосовно заміни штрихованих змінних на нештриховані і навпаки: $R(x|x') = R(x'|x)$. Тому вираз для неї можна записати в такий спосіб:

$$R(x|x') = e^{-\beta H'}\delta(x - x'), \tag{2.6}$$

де $H' = H(x')$, а в явносиметричному вигляді її можна подати так:

$$R(x|x') = e^{-\beta(H+H')/2}\delta(x - x'). \tag{2.7}$$

2.3 Колективні координати

Конкретизуємо гамільтоніан нашої системи:

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + \Phi(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N), \tag{2.8}$$

де $\hat{\mathbf{p}}_j = -i\hbar\nabla_j$ — оператор імпульсу j-ої частинки, а потенціальна енергія складається із суми попарних взаємодій між частинками:

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = \sum_{1 \le i < j \le N} \Phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \tag{2.9}$$

Для багатобозонної системи, коли хвильові функції $\psi_n(x)$ є симетричними щодо перестановок частинок, замість N змінних $\mathbf{r}$ можна використати нескінченну сукупність величин $\rho_{\mathbf{q}}$, які є коефіцієнтами Фур'є флуктуації густини частинок системи:

$$\rho_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j}. \tag{2.10}$$

Вектор $\mathbf{q} = (2\pi n_1/L, 2\pi n_2/L, \ldots, 2\pi n_D/L)$ — хвильовий вектор з компонентами кратними до $2\pi/L$, де $n_1, n_2, \ldots, n_D = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, L — ребро D-вимірного куба, об'єм якого $V = L^D$. Підсумовування за хвильовим вектором $\mathbf{q}$ означає таке:

$$\sum_{\mathbf{q}} \equiv \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_D=-\infty}^{\infty},$$

а в термодинамічній межі ця сума переходить в інтеграл за правилом:

$$\sum_{\mathbf{q}} = \int_{-\infty}^{\infty} dn_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dn_D = \frac{V}{(2\pi)^D} \int d\mathbf{q}. \tag{2.11}$$

Гамільтоніан в цих змінних, які називаються колективними змінними, має вигляд:

$$\begin{aligned} H\left(\rho_{\mathbf{q}}; \frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}}}\right) &= \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\hbar^2 q^2}{2m}\left(\rho_{\mathbf{q}}\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}}} - \frac{\partial}{\partial\rho_{-\mathbf{q}}}\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}}}\right) + \\ &+ \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 + \frac{N}{2V}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\nu_q(\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}} - 1) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0 \\ \mathbf{q}+\mathbf{q}'\neq 0}}\sum_{\mathbf{q}'\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{q}\mathbf{q}')\rho_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}}}\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}'}}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

а потенціальна енергія

$$\Phi = \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 + \frac{N}{2V}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\nu_q(\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}} - 1), \tag{2.13}$$

де $\nu_q = \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\Phi(r)d\mathbf{r}$ — коефіцієнт Фур'є енергії парної взаємодії між частинками.

Зауважимо, що написаний вище гамільтоніан у представленні колективних змінних (2.12) є неермітовим. Хоча для розрахунку фізичних величин в рамках методу колективних змінних достатньо провести ермітизацію лише головного адитивного доданку, що вперше було запропоновано і зроблено Боголюбовим і Зубарєвим [10], а після цього розвивати теорію збурень для неермітової частини гамільтоніану, в нашому випадку, для практичних розрахунків зручно використовувати повністю ермітизований гамільтоніан.

Рівняння Блоха для матриці густини у представленні колективних змінних запишеться наступним чином:

$$-\frac{\partial R(\rho|\rho')}{\partial\beta} = H\left(\rho_{\mathbf{q}}; \frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}}}\right)R(\rho|\rho'), \tag{2.14}$$

де ρ і ρ' позначають всю сукупність змінних $\rho_{\mathbf{q}}$ і $\rho_{\mathbf{q}}{}'$ відповідно.

Щодо граничної умови при $\beta = 0$, то очевидно, що повинно виконуватися співвідношення:

$$\frac{1}{N!}\sum_{Q}\prod_{j=1}^{N}\delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_{Qj}) \sim {\prod_{\mathbf{q}\neq 0}}' \delta(\rho_{\mathbf{q}} - \rho'_{\mathbf{q}}). \tag{2.15}$$

Штрих біля добутку за $\mathbf{q}$ означає, що беремо до уваги лише півпростір можливих значень хвильового вектора $\mathbf{q}$, оскільки існує залежність $\rho^*_{\mathbf{q}} = \rho_{-\mathbf{q}}$. Штрих біля $\rho'_{\mathbf{q}}$ позначає штриховані індивідуальні координати частинок:

$$\rho'_q = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}'_j}.$$

Точна рівність для граничної умови при $\beta = 0$ є такою [125, 186, 239]:

$$R(\rho|\rho') = \frac{1}{\sqrt{J(\rho)J(\rho')}}{\prod_{\mathbf{q}\neq 0}}' \delta(\rho_{\mathbf{q}} - \rho'_{\mathbf{q}}), \tag{2.16}$$

де вагова функція $J(\rho)$ відіграє роль якобіана переходу від скінченної кількості змінних $\mathbf{r}$ до безмежної сукупності змінних $\rho_{\mathbf{q}}$:

$$\int dx \equiv \int d\mathbf{r}_j \ldots \int d\mathbf{r}_N = \int (d\rho) J(\rho). \tag{2.17}$$

Ще раз зауважимо, що при такому переході виникає питання ермітовості гамільтоніана в представленні колективних змінних, відповідь на яке не є тривіальною.

Явний вигляд вагової функції $J(\rho)$ поданий у книзі [239]:

$$J(\rho) = \ C_J \exp\left[\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-1)(\sqrt{N})^{n-2}}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\ldots\sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\ldots+\mathbf{q}_n=0}}\rho_{\mathbf{q}_1}\ldots\rho_{\mathbf{q}_n}\right]. \tag{2.18}$$

Сталу C знаходимо з умови нормування:

$$\int J(\rho)(d\rho) = V^N. \tag{2.19}$$

В термодинамічній межі

$$\int (d\rho) = \prod_{\mathbf{q}\neq 0}{}' \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho^c_{\mathbf{q}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho^s_{\mathbf{q}}, \tag{2.20}$$

де

$$\rho_{\mathbf{q}} = \rho^c_{\mathbf{q}} - i\rho^s_{\mathbf{q}}, \tag{2.21}$$

$$\rho^c_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \cos(\mathbf{q}\mathbf{r}_j), \quad \rho^s_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \sin(\mathbf{q}\mathbf{r}_j). \tag{2.22}$$

Введемо нову матрицю густини $\overline{R}(\rho|\rho')$ наступним чином:

$$\overline{R}(\rho|\rho') = \sqrt{J(\rho)J(\rho')}R(\rho|\rho'). \tag{2.23}$$

Ця матриця також задовольняє рівняння Блоха (2.14) з тією лише відмінністю, що замість гамільтоніана $H(\rho_{\mathbf{q}}; \partial/\partial\rho_{\mathbf{q}})$ в правій частині рівняння стоїть вираз $J^{\frac{1}{2}}(\rho)H(\rho_{\mathbf{q}}; \partial/\partial\rho_{\mathbf{q}})J^{-\frac{1}{2}}(\rho)$, який в подальших наших розрахунках ми знову позначатимемо через H. Цей новий гамільтоніан є ермітовим і може бути записаний в наступний спосіб [14, 15, 116, 127]:

$$H = H_0 + \Delta H, \tag{2.24}$$

де

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \left[-\frac{\partial^2}{\partial\rho_{\mathbf{q}}\partial\rho_{-\mathbf{q}}} + \frac{1}{4}\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \right] + \\ &+ \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 + \frac{N}{2V} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \nu_q (\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}} - 1), \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\Delta H = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0 \\ \mathbf{q}+\mathbf{q}'\neq 0}} \sum_{\mathbf{q}'\neq 0} \frac{\hbar^2(\mathbf{q}\mathbf{q}')}{2m} \rho_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'} \frac{\partial^2}{\partial\rho_{\mathbf{q}}\partial\rho_{-\mathbf{q}'}} +$$

$$+ \sum_{n\geq 3} \frac{(-1)^n}{4n(n-1)N^{n/2-1}} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\ldots+\mathbf{q}_n=0}} \ldots \sum_{\mathbf{q}_n\neq 0} \frac{\hbar^2}{2m}(q_1^2+\ldots+q_n^2)\rho_{\mathbf{q}_1}\ldots\rho_{\mathbf{q}_n}. \tag{2.26}$$

При $\beta = 0$

$$\overline{R}(\rho|\rho') = {\prod_{\mathbf{q}\neq 0}}' \delta(\rho_{\mathbf{q}} - \rho'_{\mathbf{q}}). \tag{2.27}$$

Вперше самоспряжений гамільтоніан в представленні колективних змінних був отриманий в [127], де в якості незалежних змінних використовуються величини $\rho_{\mathbf{q}}$ і оператор швидкості $\mathbf{v}_{\mathbf{q}}$, канонічно спряжений до $\rho_{\mathbf{q}}$. Варто зауважити, що цей підхід є еквівалентним до описаного раніше і приводить до тих самих результатів.

2.4 Формальний розв'язок рівняння Блоха

Таким чином, вираз для матриці густини може бути записаний в наступний спосіб:

$$\overline{R}(\rho|\rho') = e^{-\beta(H+H')/2} {\prod_{\mathbf{q}\neq 0}}' \delta(\rho_{\mathbf{q}} - \rho'_{\mathbf{q}}), \tag{2.28}$$

де

$$H' = H'_0 + \Delta H'. \tag{2.29}$$

Оператори H'_0 і $\Delta H'$ — це ті ж самі оператори, що й H_0 і ΔH, з тією лише відмінністю, що в них нештриховані колективні змінні замінені на штриховані (і навпаки).

Використовуючи вирази (2.24) і (2.29), зробимо таке перетворення статистичного оператора:

$$e^{-\beta(H+H')/2} = \widehat{\sigma} e^{-\beta(H_0+H_0')/2}, \tag{2.30}$$

де $\widehat{\sigma}$ — невідомий оператор, який необхідно знайти. Таке перетворення споріднене із зображенням взаємодії, однак відрізняється від нього порядком розміщення операторів $\widehat{\sigma}$ і $e^{-\beta(H_0+H_0')/2}$ у правій частині написаного вище рівняння.

Диференціюючи останню рівність (2.30) по β і помноживши все рівняння на $e^{\beta(H_0+H_0')/2}$, отримаємо:

$$-\frac{\partial\widehat{\sigma}}{\partial\beta} = \frac{1}{2}\widehat{\sigma}\left[\Delta H\left(\frac{\beta}{2}\right) + \Delta H'\left(\frac{\beta}{2}\right)\right], \tag{2.31}$$

де

$$\Delta H\left(\frac{\beta}{2}\right) = e^{-\beta H_0/2}\Delta H e^{\beta H_0/2}; \quad \Delta H'\left(\frac{\beta}{2}\right) = e^{-\beta H_0'/2}\Delta H' e^{\beta H_0'/2}.$$

При $\beta = 0$ оператор $\widehat{\sigma} = 1$. Проітеруємо рівняння (2.31):

$$\widehat{\sigma} = 1 + \widehat{\sigma}^{(1)} + \widehat{\sigma}^{(2)} + \ldots. \tag{2.32}$$

Перша ітерація:

$$-\frac{\partial\widehat{\sigma}^{(1)}}{\partial\beta} = \frac{1}{2}\left[\Delta H\left(\frac{\beta}{2}\right) + \Delta H'\left(\frac{\beta}{2}\right)\right],$$

$$\widehat{\sigma}^{(1)} = 0 \qquad \textit{при} \qquad \beta = 0,$$

$$\widehat{\sigma}^{(1)} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\beta d\beta_1\left[\Delta H\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + \Delta H'\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\right]. \tag{2.33}$$

Друга ітерація:

$$-\frac{\partial\widehat{\sigma}^{(2)}}{\partial\beta}=\widehat{\sigma}^{(1)}\frac{1}{2}\left[\Delta H\left(\frac{\beta}{2}\right)+\Delta H'\left(\frac{\beta}{2}\right)\right],$$

$$\widehat{\sigma}^{(2)}=0 \qquad при \qquad \beta=0,$$

$$\widehat{\sigma}^{(2)}=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\beta}d\beta_1\int\limits_0^{\beta_1}d\beta_2\left[\Delta H\left(\frac{\beta_2}{2}\right)+\Delta H'\left(\frac{\beta_2}{2}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\Delta H\left(\frac{\beta_1}{2}\right)+\Delta H'\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\right], \tag{2.34}$$

. . . .

$$\widehat{\sigma}^{(n)}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\int\limits_0^{\beta}d\beta_1\int\limits_0^{\beta_1}d\beta_2\ldots\int\limits_0^{\beta_{n-1}}d\beta_n\left[\Delta H\left(\frac{\beta_n}{2}\right)+\Delta H'\left(\frac{\beta_n}{2}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\Delta H\left(\frac{\beta_{n-1}}{2}\right)+\Delta H'\left(\frac{\beta_{n-1}}{2}\right)\right]\ldots\left[\Delta H\left(\frac{\beta_1}{2}\right)+\Delta H'\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\right]. \tag{2.35}$$

Це впорядкування операторів за зростаючим значенням параметра β є протилежним до стандартного впорядкування, яке маємо в "зображенні взаємодії". Формально ряд для оператора $\widehat{\sigma}$ можна зібрати і записати його через оператор упорядкування "часів" β, який ми позначаємо через $\widehat{T}_1$ (щоб відрізнити його від стандартного $\widehat{T}$-впорядкування):

$$\widehat{\sigma}=\widehat{T}_1\exp\left\{-\int\limits_0^{\beta}d\beta_1\left[\Delta H\left(\frac{\beta_1}{2}\right)+\Delta H'\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\right]\right\}. \tag{2.36}$$

Будемо вважати оператор $\Delta H + \Delta H'$ збуренням. Отже в головному наближенні покладемо $\Delta H + \Delta H' = 0$, $\widehat{\sigma} = 1$, і матриця густини (2.28) набуде вигляду:

$$\overline{R}_0(\rho|\rho') = e^{-\beta(H_0+H_0')/2} {\prod_{\mathbf{q}\neq 0}}' \delta(\rho_{\mathbf{q}} - \rho'_{\mathbf{q}}). \tag{2.37}$$

Тоді повну матрицю густини можна подати наступним чином:

$$\overline{R}(\rho|\rho') = \widehat{\sigma}\overline{R_0}(\rho|\rho'). \tag{2.38}$$

Ця формула є головною для подальших розрахунків. Явний вигляд матриці густини в наближенні парних кореляцій $\overline{R}_0(\rho|\rho')$ відомий [11, 129, 240]:

$$\overline{R}_0(\rho|\rho') = e^{-\beta F_0} {\prod_{\mathbf{q}\neq 0}}' \frac{\alpha_q}{\pi} \mathrm{th}\left[\frac{\beta E_q}{2}\right] \exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\alpha_q}{\mathrm{th}[\beta E_q]}(\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}} + \rho'_{\mathbf{q}}\rho'_{-\mathbf{q}}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\alpha_q}{\mathrm{sh}[\beta E_q]}(\rho_{\mathbf{q}}\rho'_{-\mathbf{q}} + \rho'_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}})\right), \tag{2.39}$$

де вільна енергія

$$F_0 = E_0^B + \frac{1}{\beta}\sum_{\mathbf{q}\neq 0} \ln\left(1 - e^{-\beta E_q}\right),$$

а E_0^B — це енергія основного стану багатобозонної системи в наближенні Боголюбова:

$$E_0^B = \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 - \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\hbar^2 q^2}{8m}(\alpha_q - 1)^2. \tag{2.40}$$

Вираз (2.39) — це так зване наближення хаотичних фаз для матриці густини або RPA-наближення.

Наша задача полягає в тому, щоб знайти явний вигляд матриці густини в post-RPA-наближенні. Тому наступним кроком у наших розрахунках має бути дослідження дії оператора $\widehat{\sigma}$ на матрицю густини в наближенні парних кореляцій $\overline{R}_0(\rho|\rho')$. З цією метою спочатку необхідно знайти явну залежність операторів $\Delta H\,(\beta_1/2)$ і $\Delta H'\,(\beta_1/2)$ від β_1, оскільки вони безпосередньо входять у вираз для $\widehat{\sigma}$ (2.36).

2.5 Оператори збурення у новому представленні

Розглянемо спочатку оператор $\Delta H\,(\beta_1/2)$, знайдемо його явну залежність від β_1, а потім всі отримані результати узагальнимо і на оператор $\Delta H'\,(\beta_1/2)$. Введемо оператори породження і знищення [10]:

$$\hat{b}^{+}_{\mathbf{q}} = -\frac{\partial}{\partial \xi_{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2}\xi_{-\mathbf{q}}, \quad \hat{b}_{\mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \xi_{-\mathbf{q}}} + \frac{1}{2}\xi_{\mathbf{q}}, \tag{2.41}$$

де

$$\xi_{\mathbf{q}} = \sqrt{\alpha_q}\rho_{\mathbf{q}}, \quad \alpha_q = \sqrt{1 + \frac{2N}{V}\nu_q \Big/ \frac{\hbar^2 q^2}{2m}}. \tag{2.42}$$

Звідси

$$\rho_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_q}}(\hat{b}^{+}_{-\mathbf{q}} + \hat{b}_{\mathbf{q}}), \quad \frac{\partial}{\partial \rho_{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_q}(\hat{b}_{-\mathbf{q}} - \hat{b}^{+}_{\mathbf{q}}). \tag{2.43}$$

Використовуючи введені вище оператори $\hat{b}^{+}_{\mathbf{q}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}$, знайдемо наступні співвідношення:

$$\Delta H = \Delta H\left(\rho_{\mathbf{q}}; \frac{\partial}{\partial \rho_{\mathbf{q}}}\right) = \Delta H\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_q}}\left[\hat{b}^{+}_{-\mathbf{q}} + \hat{b}_{\mathbf{q}}\right]; \frac{\sqrt{\alpha_q}}{2}\left[\hat{b}_{-\mathbf{q}} - \hat{b}^{+}_{\mathbf{q}}\right]\right), \tag{2.44}$$

$$\Delta H\left(\frac{\beta_1}{2}\right)=\Delta H\left(\frac{\hat{b}^+_{-\mathbf{q}}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)+\hat{b}_{\mathbf{q}}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)}{\sqrt{\alpha_q}};\frac{\sqrt{\alpha_q}}{2}\left[\hat{b}_{-\mathbf{q}}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)-\hat{b}^+_{\mathbf{q}}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\right]\right), \tag{2.45}$$

де

$$\hat{b}^+_{\mathbf{q}}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)=e^{-\beta_1 H_0/2}\hat{b}^+_{\mathbf{q}}e^{\beta_1 H_0/2},\quad \hat{b}_{\mathbf{q}}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)=e^{-\beta_1 H_0/2}\hat{b}_{\mathbf{q}}e^{\beta_1 H_0/2}. \tag{2.46}$$

Враховуючи, що гамільтоніан H_0 можна записати з допомогою введених нами операторів породження і знищення наступним чином:

$$H_0=E_0^B+\sum_{\mathbf{q}\neq 0}E_q\hat{b}^+_{\mathbf{q}}\hat{b}_{\mathbf{q}}, \tag{2.47}$$

де E_q – спектр елементарних збуджень в наближенні Боголюбова:

$$E_q=\alpha_q\varepsilon_q=\alpha_q\frac{\hbar^2q^2}{2m}, \tag{2.48}$$

на основі рівностей (2.46) отримаємо:

$$\hat{b}^+_{\mathbf{q}}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)=\hat{b}^+_{\mathbf{q}}e^{-\beta_1 E_q/2},\quad \hat{b}_{\mathbf{q}}\left(\frac{\beta_1}{2}\right)=\hat{b}_{\mathbf{q}}e^{\beta_1 E_q/2}. \tag{2.49}$$

Таким чином, беручи до уваги вирази (2.41), (2.42) і (2.49), знайдемо, що

$$\hat{b}^+_{-\mathbf{q}}e^{-\beta_1 E_q/2}+\hat{b}_{\mathbf{q}}e^{\beta_1 E_q/2}=\frac{2}{\sqrt{\alpha_q}}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]\frac{\partial}{\partial\rho_{-\mathbf{q}}}+\sqrt{\alpha_q}\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]\rho_{\mathbf{q}},$$

$$\hat{b}_{-\mathbf{q}}e^{-\beta_1 E_q/2}-\hat{b}^+_{\mathbf{q}}e^{\beta_1 E_q/2}=\frac{2}{\sqrt{\alpha_q}}\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}}}+\sqrt{\alpha_q}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]\rho_{-\mathbf{q}}.$$

Отримані щойно співвідношення дають нам можливість записати вираз (2.45) наступним чином:

$$\Delta H\left(\frac{\beta_1}{2}\right)=\Delta H\left(\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]\rho_{\mathbf{q}}+\frac{1}{\alpha_q}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]\frac{\partial}{\partial\rho_{-\mathbf{q}}}\,;\right.$$

$$\left.\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}}}+\frac{\alpha_q}{2}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]\rho_{-\mathbf{q}}\right). \tag{2.50}$$

Очевидно, що при $\beta_1 = 0$

$$\Delta H\left(\frac{\beta_1}{2} = 0\right) = \Delta H\left(\rho_{\mathbf{q}}; \frac{\partial}{\partial \rho_{-\mathbf{q}}}\right).$$

Таким чином, $\Delta H\,(\beta_1/2)$ отримується з вихідного гамільтоніану $\Delta H\,(\rho_{\mathbf{q}}; \partial/\partial\rho_{-\mathbf{q}})$ при заміні

$$\rho_{\mathbf{q}} \;\to\; \mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]\rho_{\mathbf{q}} + \frac{1}{\alpha_q}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]\frac{\partial}{\partial\rho_{-\mathbf{q}}},$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}}} \;\to\; \mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}}} + \frac{\alpha_q}{2}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]\rho_{-\mathbf{q}}.$$

Отримані результати для оператора $\Delta H\,(\beta_1/2)$ очевидно поширюються і на оператор $\Delta H'\,(\beta_1/2)$ з тією лише відмінністю, що роль нештрихованих змінних у другому випадку виконують штриховані (і навпаки).

2.6 Матриця густини в широкотемпературній області

Повернемося до рівняння (2.38) і запишемо його в такий спосіб:

$$\overline{R}(\rho|\rho') = \widehat{\sigma}\exp\left[\ln\overline{R_0}(\rho|\rho')\right]. \tag{2.51}$$

Використовуючи явний вигляд оператора $\widehat{\sigma}$ (2.36), пронесемо в останній формулі експоненту наліво через цей оператор. При цьому оператори похідної $\partial/\partial\rho_{\mathbf{q}}$ і $\partial/\partial\rho_{-\mathbf{q}}$ у виразі (2.50) зсуваються на величини $\partial\ln\overline{R_0}(\rho|\rho')/\partial\rho_{\mathbf{q}}$ і $\partial\ln\overline{R_0}(\rho|\rho')/\partial\rho_{-\mathbf{q}}$ відповідно. Це саме стосується і операторів похідної за штрихованими колективними змінними у виразі для $\Delta H'\left(\beta_1/2\right)$. Тоді, беручи до уваги вираз (2.39), знайдемо, що

$$\frac{\partial\ln\overline{R_0}(\rho|\rho')}{\partial\rho_{\mathbf{q}}} = -\frac{\alpha_q}{2\mathrm{th}[\beta E_q]}\rho_{-\mathbf{q}} \;+\; \frac{\alpha_q}{2\,\mathrm{sh}[\beta E_q]}\rho'_{-\mathbf{q}},$$

$$\frac{\partial\ln\overline{R_0}(\rho|\rho')}{\partial\rho'_{\mathbf{q}}} = -\frac{\alpha_q}{2\mathrm{th}[\beta E_q]}\rho'_{-\mathbf{q}} \;+\; \frac{\alpha_q}{2\,\mathrm{sh}[\beta E_q]}\rho_{-\mathbf{q}}. \tag{2.52}$$

Це дає нам змогу отримати таке співвідношення для матриці густини $\overline{R}(\rho|\rho')$:

$$\overline{R}(\rho|\rho') = \overline{R_0}(\rho|\rho')\sigma, \tag{2.53}$$

де величина

$$\sigma = \frac{1}{\overline{R_0}(\rho|\rho')}\widehat{\sigma}\overline{R_0}(\rho|\rho') =$$

$$= \widehat{T}_1\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^\beta d\beta_1\left[\Delta H\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + \Delta H'\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\right]\right\}. \tag{2.54}$$

В написаному вище виразі величина $\Delta H\left(\beta_1/2\right) = \Delta H\left(\rho_{\mathbf{q}};\partial/\partial\rho_{\mathbf{q}}\right)$ при заміні

$$\rho_{\mathbf{q}}\to\left(\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right] - \frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]}{\mathrm{th}[\beta E_q]}\right)\rho_{\mathbf{q}} + \frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]}{\mathrm{sh}[\beta E_q]}\rho'_{\mathbf{q}} + \frac{2}{\alpha_q}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]\frac{\partial}{\partial\rho_{-\mathbf{q}}}, \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}}}\to\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}}} + \frac{\alpha_q}{2}\frac{\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]}{\mathrm{sh}[\beta E_q]}\rho'_{-\mathbf{q}}$$

$$+\frac{\alpha_q}{2}\left(\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right] - \frac{\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_q\right]}{\mathrm{th}[\beta E_q]}\right)\rho_{-\mathbf{q}}. \tag{2.56}$$

Вищесказане щодо величини $\Delta H\left(\beta_1/2\right)$ тією ж мірою стосується і величини $\Delta H'\left(\beta_1/2\right)$, яка теж входить у вираз (2.54), з тією лише різницею, що роль штрихованих змінних у другому випадку відіграють нештриховані у першому і навпаки.

Величина σ вже не є оператором, оскільки ми пронесли матрицю густини в наближенні парних кореляцій $\overline{R_0}(\rho|\rho') = \exp[\ln \overline{R_0}(\rho|\rho')]$ крізь оператор $\widehat{\sigma}$ і тепер похідні $\partial/\partial\rho_{\mathbf{q}}$ і $\partial/\partial\rho'_{\mathbf{q}}$, які входять в означення $\Delta H\left(\beta_1/2\right)$ і $\Delta H'\left(\beta_1/2\right)$ відповідно, діють лише на величини $\rho_{\mathbf{q}}$ та $\rho'_{\mathbf{q}}$, які є в складі названих вище операторів.

Для подальших обчислень розписуємо величину σ рядом:

$$\sigma = 1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots,$$

де

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\beta} d\beta_1 \overline{\left[\Delta H\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + \Delta H'\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\right]}, \tag{2.57}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\beta} d\beta_1 \int\limits_0^{\beta_1} d\beta_2 \overline{\left[\Delta H\left(\frac{\beta_2}{2}\right) + \Delta H'\left(\frac{\beta_2}{2}\right)\right]\left[\Delta H\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + \Delta H'\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\right]}. \tag{2.58}$$

. . . .

$$\sigma_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \int\limits_0^{\beta} d\beta_1 \int\limits_0^{\beta_1} d\beta_2 \ldots \int\limits_0^{\beta_{n-1}} d\beta_n \times$$

$$\times \overline{\left[\Delta H\left(\frac{\beta_n}{2}\right) + \Delta H'\left(\frac{\beta_n}{2}\right)\right] \ldots \left[\Delta H\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + \Delta H'\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\right]}. \tag{2.59}$$

Риска над операторами позначає той факт, що похідні $\partial/\partial\rho_{\mathbf{q}}$, $\partial/\partial\rho'_{\mathbf{q}}$

діють лише всередині цих виразів.

Після того, як знайдемо величини σ_1, σ_2,… (їх кількість залежить від точності, якої хочемо досягнути), використаємо концепцію незвідних середніх і зобразимо величину σ так:

$$\sigma = \exp\left(\sigma_1 + \left[\sigma_2 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right] + \ldots\right). \tag{2.60}$$

В наближенні “двох сум за хвильовим вектором” із врахуванням лише прямих три- і чотиричастинкових кореляцій рівняння (2.53) набуде такого вигляду:

$$\overline{R}(\rho|\rho') = \overline{R_0}(\rho|\rho') \exp\left(\sigma_1 + \sigma_2\right). \tag{2.61}$$

Щоб знайти вираз для матриці густини $R(\rho|\rho')$ ми скористаємося формулою (2.23) і тим, що вагова функція (2.18) у наближенні “двох сум за хвильовим вектором” має вигляд:

$$J(\rho) = C_J \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}} + \frac{1}{6\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\right]. \tag{2.62}$$

Сталу C_J можна знайти з умови нормування (2.19), коли вагова функція $J(\rho)$ взята у прийнятому нами наближенні (2.62):

$$C_J = V^N\left(\prod_{\mathbf{q}\neq 0}{}'\frac{1}{\pi}\right)\tilde{C}_J, \tag{2.63}$$

де

$$\tilde{C}_J = \int \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right](d\rho) \times \left\{\int \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{6\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3} - \frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\right](d\rho)\right\}^{-1}. \tag{2.64}$$

Тепер залишається знайти величину $\sigma_1 + \sigma_2$ у прийнятому нами наближенні. Для цього потрібно розглянути перший і другий порядок теорії збурень. Спочатку займемося σ_1. Запишемо оператори ΔH і $\Delta H'$ (2.26) у вигляді трьох доданків відповідно до того, що ми працюємо в рамках наближення "двох сум за хвильовим вектором":

$$\Delta H = \Delta_1 H + \Delta_2 H + \Delta_3 H, \quad \Delta H' = \Delta_1 H' + \Delta_2 H' + \Delta_3 H', \tag{2.65}$$

де

$$\Delta_1 H = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)\rho_{-\mathbf{q}_3}\frac{\partial^2}{\partial\rho_{\mathbf{q}_1}\partial\rho_{\mathbf{q}_2}}, \tag{2.66}$$

$$\Delta_2 H = -\frac{1}{12\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}, \tag{2.67}$$

$$\Delta_3 H = \frac{1}{48N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\ldots+\mathbf{q}_4=0}}\ldots\sum_{\mathbf{q}_4\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2 + \mathbf{q}_3^2 + \mathbf{q}_4^2)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\rho_{\mathbf{q}_4}. \tag{2.68}$$

В наближенні "двох сум за хвильовим вектором", враховуючи, що в цьому наближенні умови $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = 0$ і $\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4 = 0$, $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3 = 0$ і $\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_4 = 0$, $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_4 = 0$ і $\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0$ є рівноцінними, вираз для $\Delta_3 H$ набуде наступного вигляду:

$$\Delta_3 H = \frac{1}{8N} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2) \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2}. \tag{2.69}$$

Для величин $\Delta_1 H'$, $\Delta_2 H'$, $\Delta_3 H'$ отримаємо ті ж вирази, що й для величин $\Delta_1 H$ (2.66), $\Delta_2 H$ (2.67), $\Delta_3 H$ (2.69), лише в них замість нештрихованих колективних змінних стоять штриховані (і навпаки).

Беручи до уваги співвідношення (2.65), вираз (2.57) можна переписати наступним чином:

$$\sigma_1 = \Delta_1 \sigma_1 + \Delta_2 \sigma_1 + \Delta_3 \sigma_1, \tag{2.70}$$

де

$$\Delta_1 \sigma_1 = -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\beta_1 \overline{\left[\Delta_1 H \left(\frac{\beta_1}{2} \right) + \Delta_1 H' \left(\frac{\beta_1}{2} \right) \right]}, \tag{2.71}$$

$$\Delta_2 \sigma_1 = -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\beta_1 \overline{\left[\Delta_2 H \left(\frac{\beta_1}{2} \right) + \Delta_2 H' \left(\frac{\beta_1}{2} \right) \right]}, \tag{2.72}$$

$$\Delta_3 \sigma_1 = -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\beta_1 \overline{\left[\Delta_3 H \left(\frac{\beta_1}{2} \right) + \Delta_3 H' \left(\frac{\beta_1}{2} \right) \right]}. \tag{2.73}$$

Перейдемо до величини σ_2 (2.58). Ми працюємо в наближенні "двох сум за хвильовим вектором", тому з операторів $\Delta H(\beta_2/2)$ і $\Delta H'(\beta_2/2)$ потрібно залишити лише внески, які породжують це наближення і не виводять за його межі. Як бачимо з виразів для $\Delta_1 H(\beta_2/2)$

(2.66), $\Delta_2 H(\beta_2/2)$ (2.67), $\Delta_3 H(\beta_2/2)$ (2.69), з яких складається оператор $\Delta H(\beta_2/2)$, і відповідних виразів для $\Delta_1 H'(\beta_2/2)$, $\Delta_2 H'(\beta_2/2)$, $\Delta_3 H'(\beta_2/2)$, з яких складається оператор $\Delta H'(\beta_2/2)$, нам достатньо працювати лише з операторами $\Delta_1 H(\beta_2/2)$, $\Delta_2 H(\beta_2/2)$ і $\Delta_1 H'(\beta_2/2)$, $\Delta_2 H'(\beta_2/2)$. Вони мають множник $\sim 1/\sqrt{N}$, так що їхній внесок в $\sigma_2 \sim 1/N$ ("наближення двох сум за хвильовим вектором" $\sim 1/N \sum\limits_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum\limits_{\mathbf{q}_2 \neq 0} (\ldots)$). Якщо записати і оператор $\Delta_3 H(\beta_2/2)$, який $\sim 1/N$, то ми будемо мати доданки в $\sigma_2 \sim 1/N^{3/2}$. Такий внесок дає підсумовування за трьома хвильовими векторами.

Отже, в прийнятому нами наближенні "двох сум за хвильовим вектором" величина σ_2 дорівнює:

$$\sigma_2 = \frac{1}{4}\int_0^{\beta} d\beta_1 \int_0^{\beta_1} d\beta_2 \overline{\left[\Delta_1 H\left(\frac{\beta_2}{2}\right) + \Delta_1 H'\left(\frac{\beta_2}{2}\right) + \Delta_2 H\left(\frac{\beta_2}{2}\right) + \Delta_2 H'\left(\frac{\beta_2}{2}\right)\right]} \times$$
$$\times \overline{\left[\Delta_1 H\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + \Delta_1 H'\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + \Delta_2 H\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + \Delta_2 H'\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\right]}. \tag{2.74}$$

Наступним кроком є розрахунок величин $\Delta_1 H(\beta_1/2)$, $\Delta_1 H'(\beta_1/2)$, $\Delta_2 H(\beta_1/2)$, $\Delta_2 H'(\beta_1/2)$, $\Delta_1 H(\beta_2/2)$, $\Delta_1 H'(\beta_2/2)$, $\Delta_2 H(\beta_2/2)$, $\Delta_2 H'(\beta_2/2)$. При цьому ми користуємося тими ж формулами (2.55), (2.56), (2.66), (2.67), що і у випадку розрахунку величини σ_1, однак, враховуючи, що похідні у виразі для σ_2, як уже згадувалося раніше, діють лише всередині цього виразу, що позначається рискою над операторами, то у виразах для $\Delta_1 H(\beta_1/2)$, $\Delta_1 H'(\beta_1/2)$, $\Delta_2 H(\beta_1/2)$, $\Delta_2 H'(\beta_1/2)$, які знаходяться у правій дужці, ми не беремо до уваги доданки, які містять похідні, оскільки вони, діючи направо на одиницю, дають нуль. У виразах для $\Delta_1 H(\beta_2/2)$, $\Delta_1 H'(\beta_2/2)$, $\Delta_2 H(\beta_2/2)$, $\Delta_2 H'(\beta_2/2)$, які є у лівій дужці, ми нехтуємо доданками, які не містять похідних, оскільки вони даватимуть шестичастинкові кореляції, врахування яких виходить за межі поставленої задачі. Зауважимо, що якби ми враховували ті шестичастинкові кореляції, які зображаються двома сумами за хвильовим вектором, то вони все одно б скоротилися з тими, які походять від величини $\sigma_1^2/2$ (нею ми знехтували раніше).

Не вдаючись у деталі нескладних, але доволі громіздких розрахунків, запишемо остаточний вираз для величини $\sigma_1+\sigma_2$ у прийнятому нами наближенні:

$$\sigma_1+\sigma_2=\bar{c}_0+\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\bar{c}_2\left(1^{j1},-1^{i_1}\right)\left(\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1}+\rho_{\mathbf{q}_1}^{1-j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{1-i_1}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{1}\bar{c}_3(1^{i_1},2^{i_2},3^{i_3})\left(\rho_{\mathbf{q}_1}^{i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{i_2}\rho_{\mathbf{q}_3}^{i_3}+\rho_{\mathbf{q}_1}^{1-i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{1-i_2}\rho_{\mathbf{q}_3}^{1-i_3}\right)+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{i_1,i_2=0}^{1}\sum_{j_1,j_2=0}^{1}\bar{c}_4(1^{j_1},-1^{i_1},2^{j_2},-2^{i_2})\times$$
$$\times\left(\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{j_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}^{i_2}+\rho_{\mathbf{q}_1}^{1-j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{1-i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{1-j_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}^{1-i_2}\right).$$

Індекси i_1,i_2,i_3,j_1,j_2, які стоять біля величин $\rho_{\mathbf{q}}$, можуть набирати значення 0 або 1, причому значення 0 означає відсутність штриха, а 1 — присутність. Позначення $\bar{c}_2\left(1^{j1},-1^{i_1}\right)$ — це скорочений запис $\bar{c}_2\left(\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1},\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1}\right)$, відповідно $\bar{c}_3(1^{i_1},2^{i_2},3^{i_3})$ — це $\bar{c}_3(\rho_{\mathbf{q}_1}^{i_1},\rho_{\mathbf{q}_2}^{i_2},\rho_{\mathbf{q}_3}^{i_3})$, а $\bar{c}_4(1^{j_1},-1^{i_1},2^{j_2},-2^{i_2})$ — це $\bar{c}_4(\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1},\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1},\rho_{\mathbf{q}_2}^{j_2},\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_2})$.

Величина $\overline{c}_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2})$ складається з трьох доданків:

$$\overline{c}_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}) = \overline{c}_4^{(1)}(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}) + \\ + \overline{c}_4^{(2)}(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}) + \frac{1}{8}, \tag{2.75}$$

де

$$\overline{c}_4^{(1)}(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}) = -\frac{1}{64}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2}(q_1^2+q_2^2)}{\operatorname{sh}^2(\beta E_{q_1})\operatorname{sh}^2(\beta E_{q_2})}\times \\ \times\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\sum_{\pm_3}\pm_1\pm_2\pm_3\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_1}\pm_1 E_{q_1}\pm_2 E_{q_2}\pm_3 E_{q_2})\right]}{E_{q_1}\pm_1 E_{q_1}\pm_2 E_{q_2}\pm_3 E_{q_2}}\times \\ \times\operatorname{ch}\left[\frac{\beta}{2}\left((-1)^{i_1}E_{q_1}\pm_1(-1)^{j_1}E_{q_1}\pm_2(-1)^{i_2}E_{q_2}\pm_3(-1)^{j_2}E_{q_2}\right)\right]. \tag{2.76}$$

$$\overline{c}_4^{(2)}(1^{j_1},-1^{i_1},2^{j_2},-2^{i_2}) = \frac{(-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2}}{128\alpha_{q_3}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]}{\operatorname{sh}^2(\beta E_{q_1})\operatorname{sh}^2(\beta E_{q_2})\operatorname{sh}(\beta E_{q_3})}\times \\ \times Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})\left\{\frac{\beta}{\tilde{E}}\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}\left((-1)^{i_1}\tilde{E}_{q_1}+(-1)^{i_2}\tilde{E}_{q_2}-E_{q_3}\right)\right]Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})- \right. \\ -\frac{2\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}\right]}{\tilde{E}^2}\operatorname{ch}\left[\beta\left((i_1-1)\tilde{E}_{q_1}+(i_2-1)\tilde{E}_{q_2}\right)\right]Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})- \\ -\frac{2\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right]}{\tilde{E}\tilde{E}_{q_2}}\operatorname{ch}\left[\frac{\beta}{2}\left((-1)^{i_1}\tilde{E}_{q_1}+2(i_2-1)\tilde{E}_{q_2}-E_{q_3}\right)\right]Q(\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})\times \\ +\frac{2\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})\right]}{\tilde{E}(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})}\operatorname{ch}\left[\frac{\beta}{2}\left(2(i_1-1)\tilde{E}_{q_1}+(-1)^{i_2}\tilde{E}_{q_2}\right)\right]Q(\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})- \\ -\frac{2\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}\right]}{\tilde{E}\tilde{E}_{q_1}}\operatorname{ch}\left[\frac{\beta}{2}\left((-1)^{i_2}\tilde{E}_{q_2}+2(i_1-1)\tilde{E}_{q_1}-E_{q_3}\right)\right]Q(-\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})+$$

$$+\frac{2\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]}{\tilde{E}(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})}\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}\Big(2(i_2-1)\tilde{E}_{q_2}+(-1)^{i_1}\tilde{E}_{q_1}\Big)\right]Q(-\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})-$$

$$-\frac{2\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_3\right]}{\tilde{E}E_{q_3}}\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}\left((-1)^{i_2}\tilde{E}_{q_2}+(-1)^{i_1}\tilde{E}_{q_1}\right)\right]Q(-\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})+$$

$$+\frac{2\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_2})\right]}{\tilde{E}(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_2})}\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}\left(2(i_2-1)\tilde{E}_{q_2}+2(i_1-1)\tilde{E}_{q_1}-E_{q_3}\right)\right]\times$$

$$\times\, Q(-\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})\Big\}. \tag{2.77}$$

Коефіцієнти $\overline{c}_2(1^{j_1},-1^{i_1})$ і $\overline{c}_0$ можна виразити через величини $\overline{c}_4^{(1)}(1^{j_1},-1^{i_1},2^{j_2},-2^{i_2})$ і $\overline{c}_4^{(2)}(1^{j_1},-1^{i_1},2^{j_2},-2^{i_2})$ таким чином:

$$\overline{c}_2(1^{j_1},-1^{i_1})=\frac{1}{4}+2\alpha_{q_2}\,\mathrm{sh}\,[\beta E_{q_2}]\times$$

$$\times\left(2\overline{c}_4^{(1)}(1^{j_1},-1^{i_1},2,-2')+\overline{c}_4^{(2)}(1^{j_1},-1^{i_1},2,-2')\right);$$

$$\overline{c}_0=\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}4\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\,\mathrm{sh}\,[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}\,[\beta E_{q_2}]\times$$

$$\times\left(2\overline{c}_4^{(1)}(1,-1',2,-2')+\frac{\overline{c}_4^{(2)}(1,-1',2,-2')}{3}\right)-\ln\tilde{C}_J.$$

Величина $\overline{c}_3(1^{i_1},2^{i_2},3^{i_3})$ має такий вигляд:

$$\overline{c}_3(1^{i_1},2^{i_2},3^{i_3})=-\frac{1}{16}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(-1)^{i_1+i_2}(\mathbf{q_1 q_2})}{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_3}]}\times$$

$$\times\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}(\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\pm_1\pm_2 1)\,\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\left(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3}\right)\right]}{\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3}}\times$$

$$\times\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\left((-1)^{i_1}\tilde{E}_{q_1}+(-1)^{i_2}\tilde{E}_{q_2}+(-1)^{i_3}E_{q_3}\right)\right]-\frac{1}{12}.$$

В написаних вище виразах введені такі позначення:

$$\tilde{E}_{q_1} = \pm_1 E_{q_1}; \quad \tilde{E}_{q_2} = \pm_2 E_{q_2}; \quad \tilde{E} = \pm_1 E_{q_1} \pm_2 E_{q_2} + E_{q_3}; \tag{2.78}$$

$$\tilde{\alpha}_{q_1} = \pm_1 \alpha_{q_1}; \quad \tilde{\alpha}_{q_2} = \pm_2 \alpha_{q_2};$$

$$Q(\tilde{\alpha}_{q_1}, \tilde{\alpha}_{q_2}, \alpha_{q_3}) = (\pm_1 \pm_2 \alpha_{q_1}\alpha_{q_2} + 1)(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2) +$$

$$+(\pm_1 \alpha_{q_1}\alpha_{q_3} + 1)(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3) + (\pm_2 \alpha_{q_2}\alpha_{q_3} + 1)(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3). \tag{2.79}$$

Наступний крок полягає в тому, щоб подати матрицю густини $R(\rho|\rho')$ у вигляді добутку матриці густини ідеального бозе-газу $R_N^0(r|r')$ на фактор $P_{int}(\rho|\rho')$, що враховує міжчастинкову взаємодію:

$$R(\rho|\rho') = R_N^0(r|r') P_{int}(\rho|\rho'), \tag{2.80}$$

$$R_N^0(r|r') = \frac{1}{N!} \left(\frac{m^*}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3N/2} \sum_Q \exp\left[-\frac{m^*}{2\beta\hbar^2} \sum_{j=1}^{N} (r'_j - r_{Qj})^2 \right]. \tag{2.81}$$

Ще раз підкреслимо, що координатне зображення матриці густини у вигляді добутку матриці густини ідеального бозе-газу з перенормованою масою m^* атомів на фактор, що враховує їхню непроникність, із феноменологічних міркувань запропонував Р. Фейнман [69, 86, 87, 241] з метою дослідження λ-переходу. Таке ж зображення матриці густини за деяких припущень було також отримане в роботі [99], безпосередньо виходячи з означення матриці густини.

У прийнятому нами наближенні "двох сум за хвильовим вектором" у представленні колективних змінних $R_N^0(r|r') = R^0(\rho|\rho')$, де $R^0(\rho|\rho')$ — це вираз для матриці густини $R(\rho|\rho')$, в якій "виключена" міжчастинкова взаємодія. Практично це реалізується через покладання рівним одиниці величин $\alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}, \alpha_{q_3}$, які входять у вираз для $R(\rho|\rho')$. Все вищесказане дає нам рецепт розрахунку фактора $P_{int}(\rho|\rho')$ і разом з тим побудови матриці густини $R(\rho|\rho')$ у вигляді (2.80):

$$P_{int}(\rho|\rho') = \frac{R(\rho|\rho')}{R(\rho|\rho')|_{\alpha_{q_1}=\alpha_{q_2}=\alpha_{q_3}=1}}. \tag{2.82}$$

Величину $P_{int}(\rho|\rho')$ зобразимо у вигляді добутку фактора $P_{pr}(\rho|\rho')$, що враховує парні кореляції, на фактор $P(\rho|\rho')$, що враховує прямі дво-, три- і чотиричастинкові кореляції в наближенні "двох сум за хвильовим вектором":

$$P_{int}(\rho|\rho') = P_{pr}(\rho|\rho')P(\rho|\rho'). \tag{2.83}$$

Вираз для $P_{pr}(\rho|\rho')$ є відомий [11]. Запишемо його в зручних для нас позначеннях:

$$P_{pr}(\rho|\rho') = \exp\left[c_0^{(pr)} + \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1} c_2^{(pr)}(1^{j1}, -1^{i_1})\left(\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1} + \rho_{\mathbf{q}_1}^{1-j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{1-i_1}\right)\right], \tag{2.84}$$

де

$$c_0^{(pr)} = -\beta E_0 + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\ln\left[\frac{\alpha_{q_1}\mathrm{th}\left(\frac{\beta E_{q_1}}{2}\right)}{\mathrm{th}\left(\frac{\beta\varepsilon_{q_1}}{2}\right)}\right] + \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\ln\left(\frac{1-e^{-\beta\varepsilon_{q_1}}}{1-e^{-\beta E_{q_1}}}\right),$$

$$c_2^{(pr)}(1,-1) = c_2^{(pr)}(1',-1') = -\frac{1}{8}\left[\alpha_{q_1}\,\mathrm{cth}(\beta E_{q_1}) - \mathrm{cth}(\beta\varepsilon_{q_1})\right],$$

$$c_2^{(pr)}(1',-1) = c_2^{(pr)}(1,-1') = \frac{1}{8}\left[\frac{\alpha_{q_1}}{\mathrm{sh}(\beta E_{q_1})} - \frac{1}{\mathrm{sh}(\beta\varepsilon_{q_1})}\right].$$

Таким чином матриця густини $R(\rho|\rho')$ може бути записана у вигляді:

$$R(\rho|\rho') = R_N^0(r|r')P_{pr}(\rho|\rho')P(\rho|\rho'). \tag{2.85}$$

Вирази для $R_N^0(r|r')$ і $P_{pr}(\rho|\rho')$ були вже наведені вище. Залишається записати вираз для величини $P(\rho|\rho')$. Отже

$$P(\rho|\rho') = \exp\Bigg[c_0 + \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1} c_2\left(1^{j1}, -1^{i_1}\right)\left(\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1} + \rho_{\mathbf{q}_1}^{1-j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{1-i_1}\right) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3\neq 0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3=0}\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{1} c_3(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3})\left(\rho_{\mathbf{q}_1}^{i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{i_2}\rho_{\mathbf{q}_3}^{i_3} + \rho_{\mathbf{q}_1}^{1-i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{1-i_2}\rho_{\mathbf{q}_3}^{1-i_3}\right) +$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{i_1,i_2=0}^{1}\sum_{j_1,j_2=0}^{1} c_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2})\times$$

$$\times\left(\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{j_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}^{i_2} + \rho_{\mathbf{q}_1}^{1-j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{1-i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{1-j_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}^{1-i_2}\right)\Bigg], \tag{2.86}$$

де

$$c_0 = \bar{c}_0 - \bar{c}_0^0, \quad c_2\left(1^{j1}, -1^{i_1}\right) = \frac{1}{N}\left[\bar{c}_2\left(1^{j1}, -1^{i_1}\right) - \bar{c}_2^0\left(1^{j1}, -1^{i_1}\right)\right], \tag{2.87}$$

$$c_3(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3}) = \bar{c}_3(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3}) - \bar{c}_3^0(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3}), \tag{2.88}$$

$$c_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}) = \bar{c}_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}) - \bar{c}_4^0(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}). \tag{2.89}$$

Величини $\bar{c}_0^0, \bar{c}_2^0, \bar{c}_3^0, \bar{c}_4^0$ — це відповідні величини $\bar{c}_0, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4$, в яких у виразах прийнято $\alpha_{q_1} = \alpha_{q_2} = \alpha_{q_3} = 1$.

Аналізуючи знайдений вираз для матриці густини, можемо зауважити, що він є симетричний стосовно заміни нештрихованих змінних на штриховані і навпаки, як і повинно бути. Крім того величини

$c_3(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3})$ є симетричними стосовно перестановок хвильових векторів $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$, а величини $c_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2})$ стосовно перестановок хвильових векторів $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$.

2.7 Матриця густини при температурі абсолютного нуля

Безпосередньою перевіркою можна впевнитися, що в границі низьких температур з усього набору величин $c_2\left(1^{j1}, -1^{i_1}\right)$, $c_3(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3})$, $c_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2})$ ненульовими є лише такі: $c_2\left(1, -1\right)$ і $c_2\left(1', -1'\right)$, $c_3(1, 2, 3)$ і $c_3(1', 2', 3')$, $c_4(1, -1, 2, -2)$ і $c_4(1', -1', 2', -2')$, причому

$$c_2\left(1, -1\right) = c_2\left(1', -1'\right) = \frac{1}{4}a_2(\mathbf{q}_1), \tag{2.90}$$

$$c_3(1, 2, 3) = c_3(1', 2', 3') = \frac{1}{12}a_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3), \tag{2.91}$$

$$c_4(1, -1, 2, -2) = c_4(1', -1', 2', -2') = \frac{1}{16}a_4(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2), \tag{2.92}$$

де величини $a_2(\mathbf{q}_1)$, $a_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, $a_4(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2)$ — це відомі вирази [125, 126]. Вони мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} a_2(\mathbf{q}_1) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\Bigg[&\frac{q_2^2}{2q_1^2\alpha_{q_1}}a_4(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) + \\ &+ \frac{(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)}{q_1^2\alpha_{q_1}}a_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)\Bigg], \end{aligned} \tag{2.93}$$

$$a_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = -\frac{\sum\limits_{1\leq i<j\leq 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)(\alpha_{q_i} - 1)(\alpha_{q_j} - 1)}{2\sum\limits_{j=1}^{3}\mathbf{q}_j^2\alpha_{q_j}},$$

$$a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2) = \frac{1}{q_1^2\alpha_{q_1}+q_2^2\alpha_{q_2}}\Big\{(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)^2 a_3^2(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_2)+$$

$$+(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)^2 a_3^2(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)-[(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1)(\alpha_{q_1}-1)+$$

$$+(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)(\alpha_{q_2}-1)]a_3(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_2)-[(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)(\alpha_{q_1}-1)+$$

$$+(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1)(\alpha_{q_2}-1)]\,a_3(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\Big\}. \tag{2.94}$$

Так само

$$\lim_{T\to 0}\overline{c}_0 = -\beta E_0 - \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{a_2(\mathbf{q_1})}{\alpha_{q_1}} - \frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{a_4(\mathbf{q_1},-\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},-\mathbf{q_2})-1}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}} -$$

$$-\frac{1}{12N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\frac{[2a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)+1]^2}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}} - \ln\tilde{C}_J. \tag{2.95}$$

Матриця густини в наближенні парних кореляцій $R_0(\rho|\rho')$ при $T\to 0$, як було вперше показано Боголюбовим і Зубарєвим [10], рівна:

$$R_0(\rho|\rho') = R_N^0(r|r')P_{pr}(\rho|\rho') = \frac{1}{V^N}\left(\prod_{\mathbf{q}\neq 0}{}'\alpha_q\right)e^{-\beta E_0^B}$$

$$\times\ \exp\left[-\frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}(\alpha_q-1)(\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}+\rho'_{\mathbf{q}}\rho'_{-\mathbf{q}})\right]. \tag{2.96}$$

В написаному вище виразі використано той факт, що матриця густини ідеального бозе-газу в границі низьких температур $R_N^0(r|r') = 1/V^N$.

В результаті для матриці густини $R(\rho|\rho')$ взаємодіючих бозе-частинок із врахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій в границі низьких температур отримаємо такий вираз:

$$R(\rho|\rho') = \frac{1}{V^N}\left(\prod_{\mathbf{q}\neq 0}{}'\alpha_q\right)\exp\left\{-\beta E_0 - \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{a_2(\mathbf{q_1})}{\alpha_{q_1}} - \right.$$

$$-\frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{a_4(\mathbf{q_1},-\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},-\mathbf{q_2})-1}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}} -$$

$$\left. -\frac{1}{12N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\frac{[2a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)+1]^2}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}\right\}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}(\alpha_{q_1}-1-2a_2(\mathbf{q}_1))\left(\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}+\rho'_{\mathbf{q}_1}\rho'_{-\mathbf{q}_1}\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{6\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)(\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}+\rho'_{\mathbf{q}_1}\rho'_{\mathbf{q}_2}\rho'_{\mathbf{q}_3})+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)(\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}+\rho'_{\mathbf{q}_1}\rho'_{-\mathbf{q}_1}\rho'_{\mathbf{q}_2}\rho'_{-\mathbf{q}_2})\right\},$$

де

$$E_0 = E_0^B + \frac{\hbar^2}{48mN}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\left[(q_1^2+q_2^2+q_3^2)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_1}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_2}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_3}}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\sum_{1\leq i<j\leq 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)(\alpha_{q_i}-1)(\alpha_{q_j}-1)\right)^2\Bigg/\left(\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\sum_{j=1}^{3}q_j^2\alpha_{q_j}\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{\hbar^2}{24mN}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\sum_{1\leq i<j\leq 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_i}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right)\right\}. \qquad (2.97)$$

З означення матриці густини випливає, що в границі низьких температур її можна подати у вигляді:

$$R(\rho|\rho') = e^{-\beta E_0}\psi_0(\rho')\psi_0(\rho), \tag{2.98}$$

де E_0 — енергія основного стану системи взаємодіючих бозе-частинок, $\psi_0(\rho)$ — нормована хвильова функція основного стану цієї системи:

$$\psi_0(\rho) = A\exp\Bigg\{-\frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\left(\alpha_{q_1} - 1 - 2a_2(\mathbf{q}_1)\right)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1} +$$
$$+\frac{1}{6\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3} +$$
$$+\frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\Bigg\}, \tag{2.99}$$

де

$$A = \frac{1}{\sqrt{V^N}}\left(\prod_{\mathbf{q}\neq 0}{}'\sqrt{\alpha_q}\right)\exp\Bigg\{-\frac{\ln\tilde{C}_J}{2} - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{a_2(\mathbf{q_1})}{\alpha_{q_1}} -$$
$$-\frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{a_4(\mathbf{q_1},-\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},-\mathbf{q_2}) - 1}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}} -$$
$$-\frac{1}{24N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\frac{[2a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)+1]^2}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}\Bigg\}.$$

Переконатися у правильності значення величини A можна на основі умови нормування хвильової функції $\psi_0(\rho)$:

$$\int\psi_0^2(\rho)J(\rho)(d\rho) = 1.$$

Оскільки точно порахувати цей інтеграл не вдасться, то перепишемо його як середнє за величиною $\exp\left[-1/2\sum\limits_{\mathbf{q}\neq 0}\alpha_q\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right]$. Отже

$$\int\psi_0^2(\rho)J(\rho)(d\rho) = A^2 C_J\int\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\alpha_q\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right](d\rho)\times$$

$$\times\left\langle\exp\left[\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}a_2(\mathbf{q}_1)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}+\frac{1}{6\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}[2a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)+1]\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}+\frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}[a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)-1]\,\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\right]\right\rangle_p. \tag{2.100}$$

Інтеграл, який стоїть у правій частині написаної вище рівності, легко знайти, звернувшись до означень (2.20), (2.21):

$$\int\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\alpha_q\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right](d\rho) = \prod_{\mathbf{q}\neq 0}{}'\int_{-\infty}^{\infty}d\rho^c_{\mathbf{q}}\int_{-\infty}^{\infty}d\rho^s_{\mathbf{q}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\alpha_q({\rho^s_{\mathbf{q}}}^2+{\rho^c_{\mathbf{q}}}^2)\right] = \prod_{\mathbf{q}\neq 0}{}'\frac{\pi}{\alpha_q}.$$

Після цього скористаємося концепцією кумулянтних розкладів, з допомогою якої в прийнятому нами наближенні “двох сум за хвильовим вектором” отримаємо:

$$\int\psi_0^2(\rho)J(\rho)(d\rho) = A^2\left(\prod_{\mathbf{q}\neq 0}{}'\frac{\pi}{\alpha_q}\right)C_J\exp\left[\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}a_2(\mathbf{q}_1)\left\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\right\rangle_p+\right.$$

$$+\frac{1}{6\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}[2a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)+1]\left\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\right\rangle_p+$$

$$+\frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\left[a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)-1\right]\left\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\right\rangle_p+$$

$$+\frac{1}{12N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\left[2a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)+1\right]^2\Big[\left\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_3}\right\rangle_p-$$

$$-\left\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\right\rangle_p\left\langle\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_3}\right\rangle_p\Big], \qquad (2.101)$$

де

$$\left\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\ldots\rho_{\mathbf{q}_n}\rho_{-\mathbf{q}_n}\right\rangle_p=\frac{\int\exp\left[-\frac{1}{2}\sum\limits_{\mathbf{q}\neq 0}\alpha_q\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right]\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\ldots\rho_{\mathbf{q}_n}\rho_{-\mathbf{q}_n}(d\rho)}{\int\exp\left[-\frac{1}{2}\sum\limits_{\mathbf{q}\neq 0}\alpha_q\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right](d\rho)}=$$

$$=(-1)^n\frac{\delta^n}{\delta\alpha_{q_1}\ldots\delta\alpha_{q_n}}\frac{\int\exp\left[-\frac{1}{2}\sum\limits_{\mathbf{q}\neq 0}\alpha_q\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right](d\rho)}{\int\exp\left[-\frac{1}{2}\sum\limits_{\mathbf{q}\neq 0}\alpha_q\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right](d\rho)}=\frac{1}{\alpha_{q_1}\ldots\alpha_{q_n}}, \qquad (2.102)$$

$$\left\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\right\rangle_p=\frac{\int\exp\left[-\frac{1}{2}\sum\limits_{\mathbf{q}\neq 0}\alpha_q\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right]\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}(d\rho)}{\int\exp\left[-\frac{1}{2}\sum\limits_{\mathbf{q}\neq 0}\alpha_q\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right](d\rho)}=0. \qquad (2.103)$$

Підставивши знайдені величини, переконаємося, що

$$\int\psi_0^2(\rho)J(\rho)(d\rho)=1. \qquad (2.104)$$

2.8 Матриця густини в границі високих температур

Система частинок починає виявляти квантові властивості, коли довжина теплової хвилі де Бройля $\lambda = (2\pi\hbar^2/mT)^{1/2}$ стає співмірною з середньою відстанню між частинками. В границі високих температур довжина хвилі де Бройля прямує до нуля, а отже квантові ефекти стають неспівмірно малими, тому вираз для матриці густини $R(\rho|\rho')$, яка описує систему взаємодіючих бозе-частинок, в границі високих температур мав би переходити у класичний, якщо покласти $\rho' = \rho$:

$$R(\rho|\rho) = \frac{1}{N!}\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3N/2} e^{-\beta\Phi}, \tag{2.105}$$

де Φ — це потенціальна енергія, вираз для якої в представленні колективних змінних був записаний дещо раніше (2.13).

Проаналізуємо вираз для фактора $P(\rho|\rho')$ (2.86), який враховує три- і чотиричастинкові кореляції, а також всі величини, які входять у цей вираз, у границі високих температур. Не вдаючись в деталі цього аналізу, зауважимо, що в границі високих температур фактор $P(\rho|\rho')$=1. Це означає, що при $\beta \to 0$ матриця густини $R(\rho|\rho')$ (2.85) є еквівалентна матриці густини в наближенні парних кореляцій, діагональні елементи якої в свою чергу, як було показано в [11], в границі високих температур дають класичний вираз (2.105).

2.9 Висновок

В цьому розділі, виходячи із перших принципів, вдалося розвинути метод розрахунку повної матриці густини багатобозонної системи у координатному зображенні для широкого інтервалу температур із врахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій в наближенні “двох сум за хвильовим вектором”. В граничному випадку низьких температур, $T \to 0$, вираз для знайденої матриці густини має очікуваний вигляд добутку хвильових функцій основного стану на больцманівський фактор з енергією основного стану і збігається з уже відомим [125]. В границі високих температур, $T \to \infty$, він відтворює класичний результат [11], що, по-перше, підтверджує коректність наших розрахунків, а, по-друге, дає підстави очікувати добрих кількісних результатів в околі λ-переходу.

Розділ 3

Статистична сума в post-RPA наближенні

3.1 Вступ

Розрахунок статистичної суми відіграє важливу роль у вивченні термодинамічних і структурних властивостей багаточастинкових систем. Бувши вираженою через макроскопічні змінні, вона пов'язує макровеличини з мікроскопічними станами. Фактично, статистична сума містить повну інформацію про термодинамічний стан системи, оскільки всі термодинамічні функції можуть бути виражені через відповідні похідні від цієї величини. Це саме можна сказати і про статичні структурні властивості досліджуваної системи.

Статистичну суму можна записати як інтеграл від діагональних елементів повної матриці густини за $3N$ координатами частинок. У випадку RPA-наближення її розрахунок в широкотемпературній області в представленні колективних змінних не складає жодних принципових труднощів [11]. Не складно також знайти вираз для статистичної суми і у вищому наближенні, але для випадку, коли розрахунок ведеться на основі матриці густини без виділення ідеального бозе-газу. Для цієї процедури достатньо буде застосувати метод кумулянтних розкладів.

Натомість, коли йдеться про розрахунок на основі матриці густини з виділеною матрицею ідеального бозе-газу, то він є значно складнішим, оскільки вимагає застосування не тільки кумулянтних розкладів, але й функціонального інтегрування. Такий розрахунок проведений у роботі [104]. Однак статистична сума, знайдена там, містить лише непрямі три- і чотиричастинкові кореляції.

В цьому розділі буде запропоновано метод розрахунку статистичної суми в широкому інтервалі температур, який дасть можливість врахувати прямі три- та чотиричастинкові кореляції, а також дозволить знайти вираз для якобіана переходу від декартових до колективних змінних, в який "заховані" внески від матриці густини ідеального бозе-газу. В границі низьких температур він збігається з виразом для звичайної вагової функції $J(\rho)$, яка виникає з умови ермітовості гамільтоніану багатобозонної системи в представленні колективних змінних [239].

3.2 Якобіан переходу від декартових до колективних змінних із "захованими" внесками від матриці густини ідеального бозе-газу

Запишемо вираз для статистичної суми як інтеграл за $3N$ декартовими змінними від повної матриці густини, а потім перейдемо до інтегрування за колективними змінними згідно зі схемою, наведеною в роботі [11]:

$$Z = \int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r) P_{pr}(\rho|\rho) P(\rho|\rho) =$$

$$= \frac{Z_N^0}{V^N} \int J_0(\rho) P_{pr}(\rho|\rho) P(\rho|\rho)(d\rho), \tag{3.1}$$

де Z_N^0 — статистична сума ідеального бозе-газу, а $J_0(\rho)$ — якобіан переходу від декартових до колективних змінних, який виникає в результаті усереднення функції переходу Зубарєва [242] з діагональними елементами матриці густини ідеального бозе-газу. Його можна подати наступним чином [11]:

$$J_0(\rho) = \frac{V^N}{Z_N^0} \int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r) {\prod_{\mathbf{q}\neq 0}}' \delta\left(\rho_{\mathbf{q}} - \chi_{\mathbf{q}}(r)\right), \tag{3.2}$$

де

$$\chi_{\mathbf{q}}(r) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j}. \tag{3.3}$$

Для того, щоб отримати явний вираз для згаданого вище якобіана, запишемо δ-функцію: $\delta\left(\rho_{\mathbf{q}} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum\limits_{j=1}^{N} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j}\right)$ як інтеграл за $\omega_{\mathbf{q}}$ і проведемо усереднення з матрицею густини ідеального бозе-газу. Після цього скористаємося концепцією кумулянтних розкладів [68]. Тоді з урахуванням три- і чотиричастинкових кореляцій отримаємо:

$$J_0(\rho) = \frac{V^N}{Z_N^0} \int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r) {\prod_{\mathbf{q}\neq 0}}' \delta(\rho_{\mathbf{q}} - \chi_{\mathbf{q}}(r)) = V^N \int (d\omega_{\mathbf{q}}) e^{\pi i \sum\limits_{\mathbf{q}\neq 0} \omega_{\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}}} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\pi i \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \omega_{\mathbf{q}} \langle \chi_{\mathbf{q}}(r) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} (\pi i)^2 \omega_{\mathbf{q}_1} \omega_{\mathbf{q}_2} \left[\langle \chi_{\mathbf{q}_1}(r) \chi_{\mathbf{q}_2}(r) \rangle - \right.\right.$$

$$-\langle\chi_{\mathbf{q}_1}(r)\rangle\langle\chi_{\mathbf{q}_2}(r)\rangle] - \frac{1}{3!}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}(\pi i)^3\omega_{\mathbf{q}_1}\omega_{\mathbf{q}_2}\omega_{\mathbf{q}_3}\left[\left\langle\prod_{i=1}^{3}\chi_{\mathbf{q}_i}(r)\right\rangle -\right.$$

$$\left. -\sum_{i=1}^{3}\langle\chi_{\mathbf{q}_i}(r)\rangle\left\langle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}\chi_{\mathbf{q}_j}(r)\right\rangle + 2\prod_{i=1}^{3}\langle\chi_{\mathbf{q}_i}(r)\rangle\right] + \frac{1}{4!}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_4\neq 0}(\pi i)^4\times$$

$$\times\omega_{\mathbf{q}_1}\omega_{\mathbf{q}_2}\omega_{\mathbf{q}_3}\omega_{\mathbf{q}_4}\left[\left\langle\prod_{i=1}^{4}\chi_{\mathbf{q}_i}(r)\right\rangle - \sum_{i=1}^{4}\langle\chi_{\mathbf{q}_i}(r)\rangle\left\langle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\chi_{\mathbf{q}_j}(r)\right\rangle +\right.$$

$$+2\sum_{\substack{\{i,j,k,l\}=\{1,2,3,4\},\{1,3,2,4\},\{1,4,2,3\}\\ \{2,3,1,4\},\{2,4,1,3\},\{3,4,1,2\}}}\langle\chi_{\mathbf{q}_i}(r)\rangle\left\langle\chi_{\mathbf{q}_j}(r)\right\rangle\langle\chi_{\mathbf{q}_k}(r)\chi_{\mathbf{q}_l}(r)\rangle -$$

$$\left.\left. -\sum_{\substack{\{i,j,k\}=\{1,2,3\},\\ \{2,1,3\},\{3,1,2\}}}\langle\chi_{\mathbf{q}_1}(r)\chi_{\mathbf{q}_i}(r)\rangle\left\langle\chi_{\mathbf{q}_j}(r)\chi_{\mathbf{q}_k}(r)\right\rangle - 6\prod_{i=1}^{4}\langle\chi_{\mathbf{q}_i}(r)\rangle\right]\right\}. \tag{3.4}$$

Знак середнього $\langle ... \rangle$ має зміст усереднення з матрицею густини ідеального бозе-газу:

$$\langle ... \rangle = \frac{1}{Z_N^0}\int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r)(...). \tag{3.5}$$

Для того, щоб знайти середні від добутків величин $\chi_{\mathbf{q}}(r)$, запишемо їх у представленні вторинного квантування:

$$\chi_{\mathbf{q}}(r) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{+} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}. \tag{3.6}$$

Тоді

$$\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\langle\chi_{\mathbf{q}}(r)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\sum_{\mathbf{k}}\langle a_{\mathbf{k}}^{+} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}+\mathbf{q}} = 0. \tag{3.7}$$

Аналогічно

$$\langle \chi_{\mathbf{q}_1}(r)\chi_{\mathbf{q}_2}(r)\rangle = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}_1}\sum_{\mathbf{k}_2}\langle a^+_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1} a^+_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_2}\rangle =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}_1}\sum_{\mathbf{k}_2}\langle a^+_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1}\rangle\langle a_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_2} a^+_{\mathbf{k}_2}\rangle =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}_1}\sum_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_1}(1+n_{\mathbf{k}_2})\delta_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_2}\delta_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1} =$$

$$= \left[1 + \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1}\right]\delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2) = S_0(q_1)\delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2), \tag{3.8}$$

де $S_0(q_1)$ — парний структурний фактор ідеального бозе-газу. Так само можемо написати і для середніх від добутку трьох і чотирьох величин $\chi_{\mathbf{q}}(r)$:

$$\langle \chi_{\mathbf{q}_1}(r)\chi_{\mathbf{q}_2}(r)\chi_{\mathbf{q}_3}(r)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\delta(\mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}),$$

$$\langle \chi_{\mathbf{q}_1}(r)\chi_{\mathbf{q}_2}(r)\chi_{\mathbf{q}_3}(r)\chi_{\mathbf{q}_4}(r)\rangle - \langle \chi_{\mathbf{q}_1}(r)\chi_{\mathbf{q}_2}(r)\rangle\langle \chi_{\mathbf{q}_3}(r)\chi_{\mathbf{q}_4}(r)\rangle -$$

$$- \langle \chi_{\mathbf{q}_1}(r)\chi_{\mathbf{q}_3}(r)\rangle\langle \chi_{\mathbf{q}_2}(r)\chi_{\mathbf{q}_4}(r)\rangle - \langle \chi_{\mathbf{q}_1}(r)\chi_{\mathbf{q}_4}(r)\rangle\langle \chi_{\mathbf{q}_2}(r)\chi_{\mathbf{q}_3}(r)\rangle =$$

$$= \frac{1}{N} S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4)\delta(\mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}+\mathbf{q_4}), \tag{3.9}$$

де $S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3), S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,-\mathbf{q}_4)$ — відповідно три- і чотиричастинковий незвідні структурні фактори ідеального бозе-газу. Повертаючись до виразу (3.4), враховуючи зроблені вище перетворення, а також виділяючи ті доданки, які задовольняють прийняте нами наближення “двох сум за хвильовим вектором”, для якобіана переходу

$J_0(\rho)$ отримаємо наступний вираз:

$$J_0(\rho) = V^N \int (d\omega_{\mathbf{q}}) e^{\pi i \sum\limits_{\mathbf{q}\neq 0} \omega_{\mathbf{q}}\rho_{\mathbf{q}}} \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} (\pi i)^2 \omega_{\mathbf{q}} \omega_{-\mathbf{q}} S_0(q) - \right.$$

$$- \frac{1}{3!\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} (\pi i)^3 \omega_{\mathbf{q}_1}\omega_{\mathbf{q}_2}\omega_{\mathbf{q}_3} S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) +$$

$$\left. + \frac{1}{8N} \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} (\pi i)^4 \omega_{\mathbf{q}_1}\omega_{-\mathbf{q}_1}\omega_{\mathbf{q}_2}\omega_{-\mathbf{q}_2}\; S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) \right\}. \qquad (3.10)$$

Знайдений вираз (3.10) можна подати, скориставшись результатами роботи [243], в наступний спосіб :

$$J_0(\rho) = V^N {\prod_{\mathbf{q}\neq 0}}' \frac{1}{\pi S_0(q)} \exp\left\{ \sum_{n\geq 3} \hat{D}_n(\rho) \right\} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}}{S_0(q)} \right\}, \quad (3.11)$$

де

$$\hat{D}_n(\rho) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{N^{\frac{n-2}{2}}} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n \\ \mathbf{q}_1+\ldots+\mathbf{q}_n=0}} S_0^{(n)}(\rho_{\mathbf{q}_1}, \ldots, \rho_{\mathbf{q}_n}) \frac{\partial^n}{\partial\rho_{\mathbf{q}_1}\ldots\partial\rho_{\mathbf{q}_n}}. \qquad (3.12)$$

Щоб забезпечити прийняте нами наближення, достатньо взяти тільки два члени ряду: $\hat{D}_3(\rho)$, $\hat{D}_4(\rho)$. Отже:

$$J_0(\rho) = V^N {\prod_{\mathbf{q}\neq 0}}' \frac{1}{\pi S_0(q)} \exp\left\{ -\frac{1}{3!\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) \times \right.$$

$$\times \frac{\partial^3}{\partial\rho_{\mathbf{q}_1}\partial\rho_{\mathbf{q}_2}\partial\rho_{\mathbf{q}_3}} + \frac{1}{8N} \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) \times$$

$$\left. \times \frac{\partial^4}{\partial\rho_{\mathbf{q}_1}\partial\rho_{-\mathbf{q}_1}\partial\rho_{\mathbf{q}_2}\partial\rho_{-\mathbf{q}_2}} \right\} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}}{S_0(q)} \right\}. \qquad (3.13)$$

Пронесемо останню експоненту наліво і отримаємо:

$$J_0(\rho) = V^N \prod_{\mathbf{q}\neq 0}{}' \frac{1}{\pi S_0(q)} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}}{S_0(q)} \right\} e^{\hat{A}}, \tag{3.14}$$

де

$$\hat{A} = -\frac{1}{6\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} \sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) \left(\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}_1}} - \frac{\rho_{-\mathbf{q}_1}}{S_0(q_1)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}_2}} - \frac{\rho_{-\mathbf{q}_2}}{S_0(q_2)}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}_3}} - \frac{\rho_{-\mathbf{q}_3}}{S_0(q_3)}\right) + \frac{1}{8N} \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}_1}} - \frac{\rho_{-\mathbf{q}_1}}{S_0(q_1)}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{-\mathbf{q}_1}} - \frac{\rho_{\mathbf{q}_1}}{S_0(q_1)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}_2}} - \frac{\rho_{-\mathbf{q}_2}}{S_0(q_2)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{-\mathbf{q}_2}} - \frac{\rho_{\mathbf{q}_2}}{S_0(q_2)}\right). \tag{3.15}$$

Ввівши параметр λ, запишемо, що

$$e^{\lambda\hat{A}} = e^{U(\lambda)}\hat{\sigma}(\lambda), \tag{3.16}$$

де $U(\lambda)$ — це функція змінних ρ, а $\hat{\sigma}(\lambda)$ — деякий невідомий оператор, який можна подати у вигляді експоненти від виразів, що містять похідні за змінними ρ (тому результат дії цього оператора на 1 рівний 1). Продиференціюємо останню рівність за λ і отримаємо:

$$\hat{A}e^{\lambda\hat{A}} = \frac{\partial U(\lambda)}{\partial\lambda}e^{U(\lambda)}\hat{\sigma}(\lambda) + e^{U(\lambda)}\frac{\partial\hat{\sigma}(\lambda)}{\partial\lambda}. \tag{3.17}$$

Пронесемо функцію $e^{U(\lambda)}$ через оператор $\hat{A}$, а потім скоротимо на цю функцію і знайдемо:

$$\tilde{A}\hat{\sigma}(\lambda) = \frac{\partial U(\lambda)}{\partial\lambda}\hat{\sigma}(\lambda) + \frac{\partial\hat{\sigma}(\lambda)}{\partial\lambda}, \tag{3.18}$$

де $\tilde{A}$ — це оператор $\hat{A}$, через який пронесено функцію $e^{U(\lambda)}$. Виберемо $U(\lambda)$ у наступному вигляді:

$$U(\lambda)=\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} U_2(\mathbf{q}_1)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} U_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}+$$
$$+\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} U_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}. \tag{3.19}$$

Тоді для $\tilde{A}$ отримаємо вираз, з якого виділимо неоператорну частину $\tilde{A}_n$ і у прийнятому нами наближенні “двох сум за хвильовим вектором” знайдемо:

$$\tilde{A}_n=-\frac{1}{6\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\left[\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_3}\left(2U_2(\mathbf{q}_1)-\frac{1}{S_0(q_1)}\right)\times\right.$$
$$\times\left(2U_2(\mathbf{q}_2)-\frac{1}{S_0(q_2)}\right)\left(2U_2(\mathbf{q}_3)-\frac{1}{S_0(q_3)}\right)+\frac{18}{\sqrt{N}}U_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\times$$
$$\left.\times\left(2U_2(\mathbf{q}_1)-\frac{1}{S_0(q_1)}\right)\left(2U_2(\mathbf{q}_2)-\frac{1}{S_0(q_2)}\right)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\right]+$$
$$+\frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)\left(2U_2(\mathbf{q}_1)-\frac{1}{S_0(q_1)}\right)\times$$
$$\times\left(2U_2(\mathbf{q}_2)-\frac{1}{S_0(q_2)}\right)\left(2U_2(-\mathbf{q}_1)-\frac{1}{S_0(q_1)}\right)\left(2U_2(-\mathbf{q}_2)-\frac{1}{S_0(q_2)}\right)\times$$
$$\times\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}. \tag{3.20}$$

Прирівнявши неоператорну частину $\tilde{A}_n$ і вираз для $\partial U(\lambda)/\partial\lambda$, отримаємо наступні рівняння:

$$\frac{\partial U_2(\mathbf{q}_1)}{\partial\lambda}=0, \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial U_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{\partial\lambda} = -\frac{1}{6}S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\left(2U_2(\mathbf{q}_1)-\frac{1}{S_0(q_1)}\right)\times$$

$$\times\left(2U_2(\mathbf{q}_2)-\frac{1}{S_0(q_2)}\right)\left(2U_2(\mathbf{q}_3)-\frac{1}{S_0(q_3)}\right),$$

$$\frac{\partial U_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)}{\partial\lambda} = -3S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)U_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\left(2U_2(\mathbf{q}_1)-\frac{1}{S_0(q_1)}\right)\times$$

$$\times\left(2U_2(\mathbf{q}_2)-\frac{1}{S_0(q_2)}\right)+\frac{1}{8}S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)\times$$

$$\times\left(2U_2(\mathbf{q}_1)-\frac{1}{S_0(q_1)}\right)^2\left(2U_2(\mathbf{q}_2)-\frac{1}{S_0(q_2)}\right)^2. \qquad (3.22)$$

Враховуючи, що при $\lambda = 0$ величини $U_2(\mathbf{q}_1), U_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3), U_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)$ теж рівні нулю, а у знайдених виразах слід покласти $\lambda = 1$, матимемо:

$$U_2(\mathbf{q}_1) = 0,$$

$$U_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) = \frac{1}{6}\frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)},$$

$$U_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) = -\frac{S_0(q_3)}{4}\left[\frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}\right]^2+\frac{1}{8}\frac{S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)}{S_0^2(q_1)S_0^2(q_2)}. \qquad (3.23)$$

Остаточно для якобіана переходу $J_0(\rho)$, враховуючи умову нормування, знайдемо такий вираз:

$$J_0(\rho) = V^N{\prod_{\mathbf{q}\neq 0}}'\frac{1}{\pi S_0(q)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}}{S_0(q)}\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{6N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\left(\frac{\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right]^2}{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}-\frac{3}{4}\frac{S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)}{S_0(q_1)S_0(q_2)}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{6\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}-$$

$$-\frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\left(\frac{\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right]^2}{S_0^2(q_1)S_0^2(q_2)S_0(q_3)}-\frac{1}{2}\frac{S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)}{S_0^2(q_1)S_0^2(q_2)}\right)\times$$

$$\times\ \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\Bigg\}. \tag{3.24}$$

3.3 Статистична сума в широкотемпературній області

Беручи до уваги вираз для матриці густини (2.80) і якобіана переходу $J_0(\rho)$ (3.24) та скориставшись методом кумулянтних розкладів, отримаємо:

$$Z=\frac{Z_N^0}{V^N}\int P_{pr}(\rho|\rho)P(\rho|\rho)J_0(\rho)(d\rho)=Z_N^0\exp\left(c_0^{(pr)}-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\ln[1+\lambda_q S_0(q)]\right)\times$$

$$\times\exp\left[C_0+\frac{1}{6N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\left(\frac{\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right]^2}{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}-\frac{3}{4}\frac{S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)}{S_0(q_1)S_0(q_2)}\right)\right]\times$$

$$\times\exp\Bigg\{2\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}C_2(\mathbf{q}_1)\left\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\right\rangle+\frac{2}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\Bigg[C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)-$$

$$-\frac{1}{8}\frac{\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right]^2}{S_0^2(q_1)S_0^2(q_2)S_0(q_3)}+\frac{1}{16}\frac{S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)}{S_0^2(q_1)S_0^2(q_2)}\Bigg]\left\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\right\rangle+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\left[C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)+\frac{1}{12}\frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}\right]\left\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\right\rangle+$$

$$+\frac{12}{N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\left[C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)+\frac{1}{12}\frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}\right]^2\times$$

$$\times\left[\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_3}\rangle-\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\rangle^2\right]\Bigg\}, \qquad (3.25)$$

де

$$C_0=c_0,\quad C_2(\mathbf{q}_1)=\overline{C}_2(\mathbf{q}_1)-\overline{C}_2^0(\mathbf{q}_1),$$

$$C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)=\overline{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)-\overline{C}_3^0(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3),$$

$$C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)=\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)-\overline{C}_4^0(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2), \qquad (3.26)$$

причому

$$\overline{C}_2(\mathbf{q}_1)=\frac{1}{N}\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\overline{c}_2(1^{j1},-1^{i_1});$$

$$\overline{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)=\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{1}\overline{c}_3(1^{i_1},2^{i_2},3^{i_3});$$

$$\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)=\sum_{i_1,i_2=0}^{1}\sum_{j_1,j_2=0}^{1}\overline{c}_4(1^{j_1},-1^{i_1},2^{j_2},-2^{i_2}). \qquad (3.27)$$

Позначення $\overline{C}_2^0(\mathbf{q}_1)$, $\overline{C}_3^0(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)$, $\overline{C}_4^0(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)$ означають величини $\overline{C}_2(\mathbf{q}_1)$, $\overline{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)$, $\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)$, у виразах для яких Боголюбівський фактор рівний одиниці: $\alpha_{q_1}=\alpha_{q_2}=\alpha_{q_3}=1$. Явні вирази для величин $\overline{C}_2(\mathbf{q}_1)$, $\overline{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)$, $\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)$ є такими:

$$
\begin{aligned}
\overline{C}_2(\mathbf{q_1}) = & -\frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q_2}\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{q_1^2+q_2^2}{\alpha_{q_2}\,\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]}\times\left\{\frac{\beta}{4}\,\mathrm{ch}[\beta E_{q_2}]-\right.\\
& \left.-\frac{\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]}{4E_{q_2}}+\frac{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{ch}[\beta E_{q_2}]}{4E_{q_1}}-\frac{\mathrm{sh}[\beta(E_{q_1}+E_{q_2})]}{8(E_{q_1}+E_{q_2})}-\frac{\mathrm{sh}[\beta(E_{q_1}-E_{q_2})]}{8(E_{q_1}-E_{q_2})}\right\}+\\
& +\frac{1}{16}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\sum_{\substack{\mathbf{q_2}\neq 0\\ \mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=0}}\sum_{\mathbf{q_3}\neq 0}\frac{Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]}{\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\tilde{E}\,\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\beta E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\beta E_{q_3}\right]}\times\\
& \times\left\{\frac{\beta}{4}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})+\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}\right]\times\right.\\
& \times\left(\frac{Q(-\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})}{\tilde{E}}+\frac{Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})}{\tilde{E}_{q_1}}\right)-\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})\right]\times\\
& \times\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})\right]\left(\frac{Q(-\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})}{\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}}+\frac{Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})}{\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3}}\right)-\\
& \left.-\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]\left(\frac{Q(\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})}{\tilde{E}_{q_2}}+\frac{Q(-\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})}{E_{q_3}}\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

$$
\overline{C}_3(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},\mathbf{q_3}) = -\frac{1}{48}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}\right]}{\tilde{E}\prod_{j=1}^{3}\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_j}\right]}Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3}). \tag{3.29}
$$

$$\overline{C}_4(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2}) = -\frac{1}{16}\sum_{\mathbf{q_1}\neq 0}\sum_{\mathbf{q_2}\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(q_1^2+q_2^2)}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]}\left\{\frac{\beta}{4}+\frac{\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]}{4E_{q_2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{ch}[\beta E_{q_2}]}{4E_{q_1}}+\frac{\mathrm{sh}[\beta(E_{q_1}+E_{q_2})]}{8(E_{q_1}+E_{q_2})}+\frac{\mathrm{sh}[\beta(E_{q_1}-E_{q_2})]}{8(E_{q_1}-E_{q_2})}\right\}+$$

$$+\frac{1}{64}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\frac{Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})}{\alpha_{q_3}\tilde{E}\,\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}\times$$

$$\times\left\{\left(\frac{\beta}{4}\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]-\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}\right]}{2\tilde{E}}\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})\right]\right)Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})+\right.$$

$$+\left(\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right]}{2\tilde{E}_{q_2}}\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]-\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})\right]}{2(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})}\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right]\right)\times$$

$$\times Q(\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})+\left(\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}\right]}{2\tilde{E}_{q_1}}\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]}{2(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})}\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}\right]\right)Q(-\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})+$$

$$\left.+\left(-\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}{2E_{q_3}}+\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})\right]}{2(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})}\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}\right]\right)Q(-\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})\right\}. \tag{3.30}$$

В написаному вище виразі (3.25) знак середнього $\langle ... \rangle$ має наступний зміст:

$$\langle ... \rangle = \frac{\int \exp\left[-\frac{1}{2}\sum\limits_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\lambda_q S_0(q)+1}{S_0(q)}\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right](...)(d\rho)}{\int \exp\left[-\frac{1}{2}\sum\limits_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\lambda_q S_0(q)+1}{S_0(q)}\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right](d\rho)},$$

де

$$\lambda_q = \Big(\alpha_q \mathrm{th}[\beta E_q] - \mathrm{th}[\beta\varepsilon_q]\Big)\,. \tag{3.31}$$

Тому

$$\langle \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rangle = \frac{S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)}, \tag{3.32}$$

$$\langle \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\rangle = 0, \tag{3.33}$$

$$\langle \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rangle = \frac{S_0(q_1)S_0(q_2)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]\,[1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)]}, \tag{3.34}$$

$$\langle \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\rho_{-\mathbf{q}_3}\rangle = \frac{S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)}\frac{S_0(q_2)}{1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)}\frac{S_0(q_3)}{1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)}. \tag{3.35}$$

Після проведених розрахунків отримаємо наступний вираз для статистичної суми:

$$Z = Z_N^0 Z_{pr} \exp\left\{\frac{1}{6N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\left(\frac{\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right]^2}{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)} - \frac{3}{4}\frac{S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)}{S_0(q_1)S_0(q_2)}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\left[\prod_{i=1}^{2}\frac{\lambda_{q_i}}{1+\lambda_{q_i}S_0(q_i)}\right]S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)-$$

$$-\frac{1}{12N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\Big[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\Big]^2\Bigg[\prod_{i=1}^{3}\frac{\lambda_{q_i}}{1+\lambda_{q_i}S_0(q_i)}+\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{1+\lambda_{q_i}S_0(q_i)}\Bigg]\Bigg\}\times$$

$$\times\exp\Bigg\{C_0+2\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{C_2(\mathbf{q}_1)S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)}+\frac{2}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)S_0(q_1)S_0(q_2)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)][1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)]}+$$

$$+\frac{2}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\frac{C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)][1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]}+$$

$$+\frac{12}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\frac{C_3^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)][1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]}\Bigg\},$$

$$(3.36)$$

де Z_{pr} — статистична сума в наближенні парних кореляцій:

$$Z_{pr}=\exp\left\{-\beta E_0^B+\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\ln\left[\frac{\alpha_q\,\mathrm{th}\left(\frac{\beta E_q}{2}\right)}{\mathrm{th}\left(\frac{\beta\varepsilon_q}{2}\right)}\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\ln\left(\frac{1-e^{-\beta\varepsilon_q}}{1-e^{-\beta E_q}}\right)-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\ln\left[1+\lambda_q S_0(q)\right]\right\}. \qquad (3.37)$$

3.4 Статистична сума в границі низьких і високих температур

Проаналізуймо отриманий нами результат (3.36) в границі низьких температур. В цій границі величини $S_0(q)=1$, $S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)=1$,

$S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) = 0$, тому вирази для середніх (3.32), (3.33), (3.34), (3.35) набувають вигляду:

$$\langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rangle = \frac{1}{\alpha_{q_1}}, \quad \langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{\mathbf{q}_3} \rangle = 0, \quad \langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2} \rangle = \frac{1}{\alpha_{q_1} \alpha_{q_2}},$$

$$\langle \rho_{\mathbf{q}_1} \rho_{-\mathbf{q}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2} \rho_{\mathbf{q}_3} \rho_{-\mathbf{q}_3} \rangle = \frac{1}{\alpha_{q_1} \alpha_{q_2} \alpha_{q_3}}. \tag{3.38}$$

Безпосередньою перевіркою можна також впевнитися, що

$$\lim_{T \to 0} C_2(\mathbf{q}_1) = \frac{1}{2} a_2(\mathbf{q}_1),$$

$$\lim_{T \to 0} C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \frac{1}{6} a_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3),$$

$$\lim_{T \to 0} C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{1}{8} a_4(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2). \tag{3.39}$$

Беручи до уваги, що в границі низьких температур статистична сума ідеального бозе-газу $Z_N^0 = 1$, прийдемо до висновку, що знайдений вираз для статистичної суми (3.36) в границі низьких температур набуває вигляду:

$$Z = e^{-\beta E_0}, \tag{3.40}$$

де E_0 задається вже знайденою раніше формулою (2.97).

Перейдемо тепер до високотемпературної границі. Користуючись явним виглядом виразів для величин $\overline{C}_2(\mathbf{q_1})$, $\overline{C}_3(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, \mathbf{q_3})$, $\overline{C}_4(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2})$ і пригадуючи означення (3.26), легко можемо отримати, що в границі високих температур:

$$\lim_{T \to \infty} C_0 = \lim_{T \to \infty} C_2(\mathbf{q_1}) = \lim_{T \to \infty} C_3(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, \mathbf{q_3}) = \lim_{T \to \infty} C_4(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) = 0.$$

Тому для статистичної суми (3.36) при високих температурах у квазікласичній границі внески від три- і чотиричастинкових кореляцій є зникаюче малими. Залишаються лише внески від парних кореляцій. Таким чином, в згаданій границі знайдений нами вираз для статистичної суми (3.36) переходить в уже відомий [11]:

$$Z = Z_N^0 \exp\left\{ -\beta \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\left[\ln\left(1+\beta\frac{N}{V}\nu_q\right) - \beta\frac{N}{V}\nu_q \right] \right\}, \tag{3.41}$$

де

$$Z_N^0 = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3N/2}. \tag{3.42}$$

3.5 Висновок

В цьому розділі, виходячи із виразу для матриці густини взаємодіючих бозе-частинок у координатному зображенні із врахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій, вдалося розрахувати статистичну суму для широкого інтервалу температур в наближенні "двох сум за хвильовим вектором" [17]. Отриманий результат проаналізовано в границі високих і низьких температур. В граничному випадку низьких температур, $T \to 0$, знайдений вираз для статистичної суми має очікуваний вигляд больцманівського фактора з енергією основного стану: $e^{-E_0/T}$, де T — температура системи, E_0 — енергія основного стану в наближенні "двох сум за хвильовим вектором", і узгоджується з виразом, який можна отримати на основі роботи [126]. При високих температурах у квазікласичній межі отриманий нами вираз збігається із виразом для статистичної суми в наближенні парних кореляцій [11] і має вигляд добутку статистичної суми ідеального газу на фактор, що враховує внесок від парних кореляцій. Це є також очікуваний результат, оскільки з підвищенням температури роль багаточастинкових кореляцій у формуванні поведінки системи стає все менш і менш помітною у порівнянні з парними кореляціями.

Отримані результати можуть бути застосовані для розрахунку термодинамічних і структурних функцій, таких як внутрішня енергія, теплоємність, парний структурний фактор тощо.

Розділ 4

Ефективна маса атома ^{4}He в надплинній і нормальній фазах

4.1 Вступ

До невирішених на сьогоднішній день задач в теорії рідкого ^{4}He можна зарахувати мікроскопічний розрахунок термодинамічних функцій у широкотемпературній області та температури переходу в надплинний стан, яка б узгоджувалась з експериментальним значенням. На якісному рівні зниження критичної температури обґрунтував Фейнман [87] введенням ефективної маси частинок. І хоча це був феноменологічний крок, він виявися доволі продуктивною ідеєю.

Продовжуючи підхід Фейнмана, ми вводимо ефективну масу як параметр теорії з метою частково врахувати вплив тих багаточастинкових кореляцій, які є опущені в силу наближення, в якому ми працюємо. Однак ми будуємо вираз для ефективної маси, щоб з його допомогою можна було не тільки ефективно врахувати згаданий вплив, але й усунути інфрачервоні розбіжності, які є типовими в теорії фазових переходів та критичних явищ [115]. Вони, зокрема, з'являються при розрахунку термодинамічних і структурних функції бозе-системи на основі матриці густини з виділеною матрицею густини ідеального бозе-газу, починаючи з другого порядку теорії збурень. У виразі для статистичної суми, який був розрахований у попередньому розділі, ці розбіжності містяться в чотиричастинковому структурному факторі ідеального бозе-газу.

Загальний спосіб розрахунку ефективної маси, яка дозволяє усунути інфрачервоні розбіжності, наведений в роботі [104]. Недоліком запропонованого в цій праці підходу є слабообґрунтований спосіб екстраполяції "затравочної" ефективної маси на широку область температур (лише на основі її виразу для нуля температур), а також некоректна поведінка отриманої величини ефективної маси в критичній області. Інший підхід до розрахунку ефективної маси був запропонований в роботі [105], де з її допомогою було знайдено температурну поведінку теплоємності і показано значно краще узгодження з експериментальними даними в порівнянні з розрахунком на основі "голої маси". Однак отриманий у цьому підході вираз для ефективної маси не усуває згадані інфрачервоні розбіжності, оскільки ідеологія його розрахунку не брала до уваги цієї мети.

Завдання, яке ми ставимо в цьому розділі, полягає в тому, щоб знайти такий вираз для ефективної маси, який би, з однієї сторони, усував інфрачервоні розбіжності, а з іншої — давав коректну поведінку в околі критичної точки (за винятком, хіба що, вузької флуктуаційної області) і був краще теоретично обґрунтований в широкотемпературній ділянці; а також отримати температурну поведінку теплоємності з новою ефективною масою і провести порівняння з попередніми результатами.

4.2 Загальні викладки

Для розрахунку теплоємності багатобозонної системи ми скористаємося виразом для внутрішньої енергії в наближенні парних кореляцій [104, 105], який можна отримати в результаті усереднення гамільтоніана системи з матрицею густини, знайденою в [11]:

$$E = N\frac{mc^2}{2} + \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\bar{\varepsilon}_q}{\bar{z}_0^{-1}e^{\beta\bar{\varepsilon}_q}-1} + \frac{1}{2}\frac{\bar{m}}{m}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\lambda_q}{1+\lambda_q\bar{S}_0(q)}\frac{\partial\bar{S}_0(q)}{\partial\beta} +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\varepsilon_q\left(\lambda_q^2+\alpha_q^2-1\right)\bar{S}(q) + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\varepsilon_q\left[\frac{\alpha_q}{\mathrm{sh}(\beta E_q)} - \frac{1}{\mathrm{sh}(\beta\varepsilon_q)}\right] +$$

$$+\frac{1}{16}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\varepsilon_q\left(1-\frac{1}{\alpha_q^2}\right)\left(\alpha_q - \frac{1}{\alpha_q} - 4\alpha_q^2\right), \tag{4.1}$$

де $\bar{m}$ — ефективна маса, $\bar{\varepsilon}_q = \hbar^2q^2/2\bar{m}$, $\bar{z}_0$, $\bar{S}_0(q)$ — перенормовані відповідно одночастинковий спектр, активність і структурний фактор ідеального бозе-газу; $\bar{S}(q)$ — перенормований структурний фактор бозе-рідини в наближенні парних кореляцій:

$$\bar{S}(q) = \frac{\bar{S}_0(q)}{1+\lambda_q\bar{S}_0(q)}. \tag{4.2}$$

Розподіл бозе-частинок з новим спектром є таким:

$$\bar{n}_p = \frac{1}{\bar{z}_0^{-1}e^{\beta\bar{\varepsilon}_p}-1}, \tag{4.3}$$

а сам перенормований одночастинковий спектр $\bar{\varepsilon}_p$ вибраний у вигляді:

$$\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon_p + \Delta_p - \Delta_0, \tag{4.4}$$

де Δ_p — поправка до спектра, яку потрібно визначити. Величина Δ_0 залежить тільки від температури і фактично відповідає за перенормування активності. Після усунення інфрачервоних розбіжностей для

Δ_p отримано [104]:

$$\Delta_p = \frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{q}' \neq 0} \frac{\lambda_{q'}}{1 + \lambda_{q'} \bar{S}_0(q')} \bar{n}_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}'|}. \tag{4.5}$$

Вираз для перенормованого одночастинкового спектру (4.4) можна записати у такий спосіб:

$$\bar{\varepsilon}_p = \frac{\hbar^2 p^2}{2\bar{m}(p)}, \tag{4.6}$$

де $\bar{m}(p)$ — це ефективна маса частинки, яка формується багаточастинковими кореляціями, починаючи з чотиричастинкових і залежить від модуля хвильового вектора $\mathbf{p}$. В межах поставлених нами завдань зацікавленість викликає поведінка $\bar{m}(p)$ лише в границі $p \to 0$. Тому надалі ефективною масою ми називатимемо величину $\bar{m} = \bar{m}(0)$. У зв'язку з цим ми докладніше розглянемо різницю $\Delta_p - \Delta_0$ при $p \to 0$. При малих значеннях p перенормований спектр (4.4) запишемо так [104]:

$$\bar{\varepsilon}_p = \frac{\hbar^2 p^2}{2\bar{m}}, \tag{4.7}$$

де

$$\frac{m^*}{\bar{m}} = 1 + \frac{1}{2\pi^2\rho} \int_0^\infty \frac{q^2 \lambda_q}{1 + \lambda_q \bar{S}_0(q)} \bar{n}_q (1 + \bar{n}_q) \left[\frac{2}{3} \beta \varepsilon_q (1 + 2\bar{n}_q) - 1 \right] dq. \tag{4.8}$$

В нашій теорії для температурної залежності "затравочної" ефективної маси m^*, яка враховує вплив оточення на атом ^{4}He в RPA наближенні, використаємо вираз, який знайдено в роботі [105]:

$$\frac{m}{m^*} = 1 - \frac{1}{3N} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{(\alpha_k - 1)^2}{\alpha_k(\alpha_k + 1)} - \frac{2}{3N} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left\{ \frac{\alpha_k^2 + 3}{\alpha_k^2 - 1} \left[n(\beta\varepsilon_k) - 1/\beta\varepsilon_k \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{3\alpha_k^2 + 1}{\alpha_k(\alpha_k^2 - 1)} \left[n(\beta E_k) - 1/\beta E_k \right] + 2 \left[1/\beta\varepsilon_k - \beta\varepsilon_k n(\beta\varepsilon_k) [1 + n(\beta\varepsilon_k)] \right] \right\}. \tag{4.9}$$

Тут зроблено наступне позначення: $n(x) = 1/(e^x - 1)$.

Не важко побачити, що розбіжність в критичній точці правої частини рівності (4.8) “сидить” в підінтегральному виразі в області малих значень хвильового вектора $\mathbf{q}$ і є логарифмічною за своєю природою, що буде показано згодом. Така розбіжність є характерною для критичних явищ. Наше завдання полягає в тому, щоб виділити цю неаналітичність і знайти коректний вираз для ефективної маси. Для цього повернемося до рівності, яка випливає з виразів (4.4) і (4.7):

$$\frac{m^*}{\bar{m}} = 1 + \lim_{p\to 0} \frac{\Delta_p - \Delta_0}{\varepsilon_p}, \tag{4.10}$$

де

$$\Delta_p - \Delta_0 = \frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\lambda_q}{1 + \lambda_q \bar{S}_0(q)} \left\{ \bar{n}_{|\mathbf{q}+\mathbf{p}|} - \bar{n}_q \right\}. \tag{4.11}$$

З виразу (4.11) виділимо величину Δ_∞, яка містить всю неаналітичність і водночас є набагато зручнішою для аналізу:

$$\Delta_\infty = \frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\lambda_q}{1 + \lambda_q \bar{S}_0(q)} \left\{ \frac{1}{\bar{z}_0^{-1} - 1 + \bar{z}_0^{-1}\beta\bar{\varepsilon}_{|\mathbf{q}+\mathbf{p}|}} - \frac{1}{\bar{z}_0^{-1} - 1 + \bar{z}_0^{-1}\beta\bar{\varepsilon}_q} \right\}. \tag{4.12}$$

Наступний крок — це знайти розклад Δ_∞ в околі малих значень p і обмежитися доданками пропорційними до p^2, оскільки лише вони будуть давати вклад у величину ефективної маси в силу рівності (4.10).

У правій частині рівності (4.12) перейдемо від підсумовування до інтегрування:

$$\Delta_\infty = \frac{p_0^2 \bar{z}_0}{4\pi^2\beta\rho} \int_0^\infty \frac{\lambda_q dq}{1 + \lambda_q \bar{S}_0(q)} \left\{ \frac{q}{2p} \ln \left| \frac{P_0^2 + (q+p)^2}{P_0^2 + (q-p)^2} \right| - \frac{2q^2}{P_0^2 + q^2} \right\}, \tag{4.13}$$

де $p_0^2 = 2\bar{m}/(\beta\hbar^2)$, $P_0 = p_0\sqrt{(1-\bar{z}_0)}$. В докритичній області активність $\bar{z}_0 = 1$, а тому в цій області $P_0 = 0$ і отримані нами вирази дещо спростяться. Зробимо заміну змінних: $q/p = x, dq = pdx$. Тоді

$$\Delta_\infty = \frac{p_0^2\bar{z}_0 p}{4\pi^2\beta\rho}\int\limits_0^\infty \frac{\lambda_{px}}{1+\lambda_{px}\bar{S}_0(px)}\times$$

$$\times\left\{\frac{x}{2}\ln\left|\frac{P_0^2/p^2+(x+1)^2}{P_0^2/p^2+(x-1)^2}\right| - \frac{2x^2}{P_0^2/p^2+x^2}\right\}dx. \qquad (4.14)$$

Функція $\lambda_{px}/(1+\lambda_{px}\bar{S}_0(px))$ є обмеженою і прямує до нуля, коли $x\to\infty$ (при фіксованому p), а функція

$$\frac{x}{2}\ln\left|\frac{P_0^2/p^2+(x+1)^2}{P_0^2/p^2+(x-1)^2}\right| - \frac{2x^2}{P_0^2/p^2+x^2}$$

теж є спадаючою до нуля при великих x, причому

$$\int\limits_0^\infty\left\{\frac{x}{2}\ln\left|\frac{P_0^2/p^2+(x+1)^2}{P_0^2/p^2+(x-1)^2}\right| - \frac{2x^2}{P_0^2/p^2+x^2}\right\}dx = 0$$

для будь-яких значень P_0 і p. Це дає підстави стверджувати (особливо, коли йдеться про докритичну область), що при $p\to 0$ незникаючий внесок у величину Δ_∞/p^2 робить лише область малих значень px функції $\lambda_{px}/(1+\lambda_{px}\bar{S}_0(px))$. Після цих слів перейдемо до пошуку розкладів величин λ_q і $\bar{S}_0(q)$ в околі нуля хвильового вектора $\mathbf{q}$. Для λ_q отримати результат є зовсім нескладно:

$$\lambda_q = \beta\rho\nu_0 + o(q), \qquad (4.15)$$

де ρ — це густина бозе-системи. Натомість вигляд розкладу структурного фактора ідеального бозе-газу залежить від того, в якій області температур ми працюємо. В докритичній ($T < T_c$) він має такий вигляд:

$$S_0(q) = \frac{4\bar{m}\left(1-(T/T_c)^{3/2}\right)}{\beta\hbar^2 q^2} + \frac{\bar{m}^2}{2\rho\hbar^4\beta^2}\frac{1}{q} + 1 + o\left(q\right), \tag{4.16}$$

а в надкритичній такий:

$$S_0(q) = \frac{\bar{m}^2}{\pi\rho\hbar^4\beta^2}\frac{1}{q}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2P_0}\right) + o(q). \tag{4.17}$$

Цей результат випливає безпосередньо із виразу для структурного фактора ідеального бозе-газу [11]:

$$\bar{S}_0(q) = 1 + \frac{\bar{m}}{4\pi^2\rho\beta\hbar^2}\frac{1}{q}\int\limits_0^\infty \frac{p}{\bar{z}_0^{-1}e^{\beta\frac{\hbar^2 q^2}{2\bar{m}}} - 1}\ln\left|\frac{1-\bar{z}_0 e^{-\beta\frac{\hbar^2(p+q)^2}{2\bar{m}}}}{1-\bar{z}_0 e^{-\beta\frac{\hbar^2(p-q)^2}{2\bar{m}}}}\right| dp. \tag{4.18}$$

Для аналітичного дослідження виразу (4.14) ми скористаємося таким наближенням для величин λ_q і $\bar{S}_0(q)$, яке містить лише наведені щойно члени розкладу. Переконатися в адекватності використаних наближень допоможе чисельний аналіз, результати якого показані на Рис.4.1 і Рис.4.2.

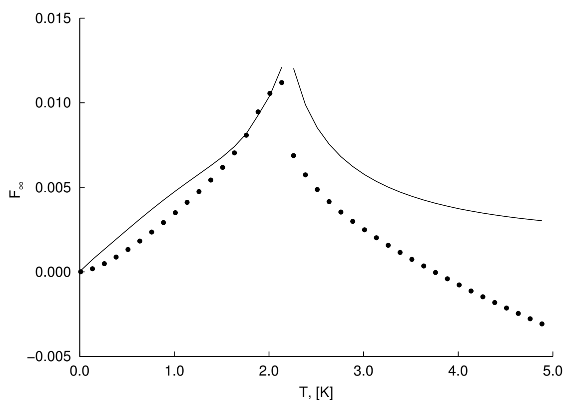

Рис. 4.1: Залежність величини $F_\infty = \Delta_\infty(p)/\varepsilon_p$ від температури при значенні параметра $p = 0.01$. Крапки — точний вираз, суцільна лінія — прийняте наближення.

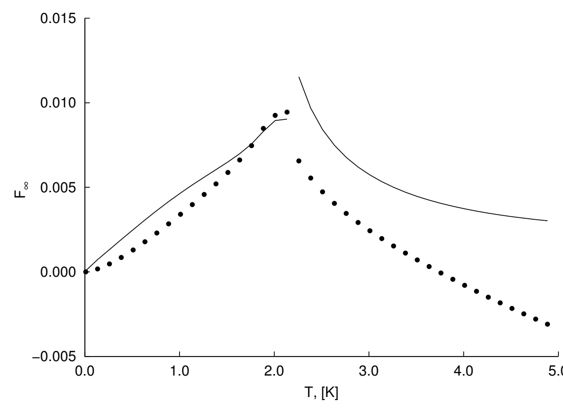

Рис. 4.2: Залежність величини $F_\infty = \Delta_\infty(p)/\varepsilon_p$ від температури при значенні параметра $p = 0.1$. Крапки — точний вираз, суцільна лінія — прийняте наближення.

Подальше дослідження виразу (4.14) ми будемо проводити окремо в докритичній і надкритичній області температур, а також в самій критичній точці в силу відмінності підходів, які потрібно застосувати в кожному із згаданих випадків.

4.3 Розрахунки в докритичній області температур

В докритичній області температур ($T < T_c$) вираз (4.14) набуде такого вигляду:

$$\Delta_\infty = \frac{p_0^2 \varkappa p^3}{4\pi^2 \beta\rho} \int_0^\infty \frac{x^2 \left(x \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2\right) dx}{(1+\varkappa)x^2 p^2 + \gamma x p + 2n_0 \varkappa} + o(p^2),$$

де

$$\varkappa = \beta\rho\nu_0; \quad \gamma = \frac{\bar{m}^2 \nu_0}{2\hbar^4 \beta}; \quad n_0 = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{4.19}$$

Далі, скориставшись представленням:

$$x \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2 = \int_{-1}^{1} \frac{x^2 da}{x^2 - a^2} - \int_{-1}^{1} da = \int_{-1}^{1} \frac{a^2 da}{x^2 - a^2}$$

і змінивши порядок інтегрування, будемо мати:

$$\Delta_\infty = \frac{2\bar{m}\varkappa p^3}{(2\pi\hbar\beta)^2 \rho} \int_{-1}^{1} da \int_0^\infty \frac{x^2 a^2 dx}{(x^2 - a^2)[(1+\varkappa)x^2 p^2 + \gamma x p + 2n_0 \varkappa]} + o(p^2). \tag{4.20}$$

Знаменник підінтегрального виразу розкладемо на множники, а весь підінтегральний вираз на прості дроби і проведемо елементарне інтегрування по змінній x. Тоді

$$\Delta_\infty = -\frac{p_0^2\varkappa p}{4\pi^2\beta\rho(1+\varkappa)}\int_{-1}^{1} a^2 da\left\{\frac{p^2 a\ln|a|}{2(ap-x_1)(ap-x_2)}-\right.$$

$$-\frac{p^2 a\ln|a|}{2(ap+x_1)(ap+x_2)}+\frac{px_2^2\ln|x_2/p|}{(a^2p^2-x_2^2)(x_1-x_2)}-$$

$$\left.-\frac{px_1^2\ln|x_1/p|}{(a^2p^2-x_1^2)(x_1-x_2)}\right\}+o(p^2), \tag{4.21}$$

де x_1/p і x_2/p— корені квадратного рівняння $(1+\varkappa)x^2p^2+\gamma xp+2n_0\varkappa=0$, причому:

$$x_{1,2}=\frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-8n_0(1+\varkappa)\varkappa}}{2(1+\varkappa)}. \tag{4.22}$$

Після відповідних перетворень і інтегрування за змінною a будемо мати, що

$$\Delta_\infty=\frac{p_0^2\varkappa}{4\pi^2\beta\rho(1+\varkappa)}\frac{1}{x_1-x_2}\left\{2(x_2^2-x_1^2)+\right.$$

$$+\frac{x_2^3}{p^2}\left(\operatorname{dilog}\left[1+\frac{p}{x_2}\right]-\operatorname{dilog}\left[1-\frac{p}{x_2}\right]\right)-$$

$$-\frac{x_1^3}{p^2}\left(\operatorname{dilog}\left[1+\frac{p}{x_1}\right]-\operatorname{dilog}\left[1-\frac{p}{x_1}\right]\right)+$$

$$+2x_2^2\ln|x_2/p|\left(1-\frac{x_2}{p}\operatorname{arcth}\left[\frac{p}{x_2}\right]\right)-$$

$$\left.-2x_1^2\ln|x_1/p|\left(1-\frac{x_1}{p}\operatorname{arcth}\left[\frac{p}{x_1}\right]\right)\right\}+o(p^2), \tag{4.23}$$

де $\operatorname{dilog}[x]=\int\limits_1^x \ln(y)/(1-y)dy$.

Проводячи розклад за p отриманого виразу, ми знайдемо, що доданки пропорційні до p^2 походять виключно з останніх двох доданків у фігурних дужках. В результаті будемо мати:

$$\Delta_\infty = \frac{p_0^2 \varkappa}{3\pi^2 \beta\rho(1+\varkappa)} \frac{\ln|x_1/x_2|}{(x_1 - x_2)} p^2 + o(p^2). \tag{4.24}$$

При наближенні до критичної точки один з коренів, скажімо x_2, прямує до нуля і ми отримуємо логарифмічну розбіжність для величини Δ_∞ в околі критичної точки. Як в цьому випадку бути з ефективною масою? Повертаючись до аналізу виразів для x_1 і x_2, ми прийдемо до висновку, що існує значення температури T_F, при якій величини x_1 і x_2 стають дійсними. Це, у свою чергу, приводить до того, що функція $\operatorname{arcth}(p/x_2)$ перестає бути обмеженою в області температур між T_F і T_c та прямує до безмежності при наближенні до критичної точки. Температуру T_F можна легко знайти, прирівнявши до нуля дискримінант наведеного вище квадратного рівняння. Його чисельний розв'язок відносно температури дає значення $T_F \approx 2.13$K при критичній температурі $T_c \approx 2.18$K. Як бачимо, це є вузька область, яку ми можемо інтерпретувати, як флуктуаційну, тобто таку, в якій флуктуації величини бозе-конденсату стають співмірними з кількістю самого конденсату. Про неї також можна говорити як про область, аналогічну до області Гінзбурга, де пертурбативний метод розрахунку не працює [244]. Так чи інакше, в цій вузькій області ми не можемо зробити коректних висновків про ефективну масу в межах нашого підходу. Для аналізу цієї ділянки потрібні інші методи, наприклад ренормгруповий підхід. Внесок Δ_∞ у значення ефективної маси до температури T_F є рівним нулю, в чому можна впевнитися завдяки безпосередньому аналізу виразу (4.24). Формально, аналітичний вигляд цього внеску у праву частину рівності (4.10) при $T < T_c$ є таким:

$$\frac{p_0^4 \varkappa}{6\pi^2\rho(1+\varkappa)} \frac{\ln|x_1/x_2|}{(x_1 - x_2)}. \tag{4.25}$$

4.4 Розрахунки в критичній точці

Щоб з'ясувати характер розбіжності величини Δ_∞/p^2 як функції p в критичній точці, проведемо розрахунок безпосередньо в ній. Повернемося до формули (4.20) і покладемо в ній $T = T_c$, що означає $n_0 = 0$. Тоді

$$\Delta_\infty = \frac{p_0^2 \varkappa p^2}{2\pi^2\beta\rho} \int\limits_0^1 da \int\limits_0^\infty \frac{xa^2 dx}{(x^2 - a^2)[(1+\varkappa)xp + \gamma]} + o(p^2). \tag{4.26}$$

Знову розкладемо знаменник підінтегрального виразу на множники, а сам вираз — на прості дроби і проінтегруємо за змінною x. В результаті отримаємо:

$$\Delta_\infty = -\frac{p_0^2 \varkappa p^2}{2\pi^2\beta\rho(1+\varkappa)} \int\limits_0^1 \frac{a^2 x_0 \ln|ap/x_0|}{a^2p^2 - x_0^2} da + o(p^2),$$

де x_0/p — корінь рівняння $(1+\varkappa)xp + \gamma = 0$, причому $x_0 = -\gamma/(1+\varkappa)$. У написаному вище інтегралі зробимо заміну змінних $ap/|x_0| = \xi$. Тоді

$$\Delta_\infty = \frac{p_0^2 \varkappa x_0^2}{2\pi^2\beta\rho(1+\varkappa)p} \int\limits_0^{p/|x_0|} \frac{\xi^2 \ln\xi}{\xi^2 - 1} + o(p^2) =$$

$$= -\frac{p_0^2 \varkappa x_0^2}{2\pi^2\beta\rho(1+\varkappa)p} \int\limits_0^{p/|x_0|} \xi^2 \ln\xi d\xi + o(p^2). \tag{4.27}$$

В результаті отримаємо:

$$\Delta_\infty = \frac{p_0^2 \varkappa p^2}{18\pi^2 \beta\rho(1+\varkappa)|x_0|}\left(1 - 3\ln\left|\frac{p}{x_0}\right|\right) + o(p^2).$$

Отож ми показали, що величина Δ_∞/p^2 в критичній точці розбігається як $\ln|p|$, $p \to 0$. Така розбіжність є характерною для критичних явищ. Її можна трактувати як наслідок розкладу одночастинкового спектру бозе-рідини в критичній точці:

$$\frac{\hbar^2 \tilde{p}^2}{2\bar{m}}\left(\frac{p}{\tilde{p}}\right)^{2-\eta} = \frac{\hbar^2 \tilde{p}^2}{2\bar{m}}\left(\frac{p}{\tilde{p}}\right)^2 e^{-\eta \ln(p/\tilde{p})} = \frac{\hbar^2 p^2}{2\bar{m}}\left(1 - \eta \ln\left(\frac{p}{\tilde{p}}\right)\right) + o\left(\eta\right), \tag{4.28}$$

де η — це так званий малий критичний індекс, $\tilde{p}$ — характерний масштаб хвильового вектора в околі критичної точки. Беручи до уваги, що в критичній точці характер одночастинкового спектру формується величиною Δ_∞, ми отримаємо рівняння, з якого можемо знайти η і $\tilde{p}$:

$$\frac{p_0^2 \varkappa p^2}{18\pi^2 \beta\rho(1+\varkappa)|x_0|}\left(1 - 3\ln\left|\frac{p}{x_0}\right|\right) = \frac{p^2}{p_0^2\beta}\left(1 - \eta\ln\left(\frac{p}{\tilde{p}}\right)\right). \tag{4.29}$$

Звідси:

$$\eta = \frac{4}{3\pi^2} \approx 0.135,$$

$$\tilde{p} = |x_0| \exp\left(\frac{\eta - 3}{3\eta}\right) \approx 1.68 \cdot 10^{-3} \text{Å}^{-1}. \tag{4.30}$$

Результат для критичного індексу η вперше отриманий в роботах [245–247], де для розрахунків використовувався метод розкладу за оберненими степенями вимірності параметра порядку. Наближення хаотичних фаз відтворює лише перший член цього розкладу, а тому й не дивно, що результат для малого критичного індексу відрізняється від результату Монте Карло симуляцій [248].

4.5 Розрахунки при температурах, вищих за критичну

При температурах, вищих за критичну, величина (4.13) набуде вигляду:

$$\Delta_\infty = \frac{p_0^2 \bar{z}_0 \varkappa}{4\pi^2 \beta\rho} \int\limits_0^\infty \frac{qdq}{q + \tilde{\gamma}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2P_0}\right)} \times$$

$$\times \frac{1}{p}\left\{\frac{q}{2}\ln\left|\frac{P_0^2 + (q+p)^2}{P_0^2 + (q-p)^2}\right| - \frac{2q^2 p}{P_0^2 + q^2}\right\}, \tag{4.31}$$

де $\tilde{\gamma} = 2\gamma/\pi$. Спочатку продиференціювавши, а потім проінтегрувавши за параметром p отриманий вираз, а також змінивши порядок інтегрування, будемо мати:

$$\Delta_\infty = \frac{p_0^2 \bar{z}_0 \varkappa}{4\pi^2 \beta\rho}\frac{1}{p} \int\limits_0^p dp \int\limits_0^\infty \frac{qdq}{q + \tilde{\gamma}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{q}{2P_0}\right)} \times$$

$$\times \frac{2q^2 p^2 (q^2 - p^2 - 3P_0^2)}{\left[P_0^2 + (p+q)^2\right]\left[P_0^2 + (p-q)^2\right]\left[P_0^2 + q^2\right]}. \tag{4.32}$$

Щоб порахувати написаний вище інтеграл, симетризуємо межі інтегрування за q, а потім зробимо аналітичне продовження підінтегральної функції у верхню півплощину і замкнемо контур інтегрування півколом радіуса R. В границі $R \to \infty$ інтеграл за півколом R дає нуль в силу того, що степінь знаменника підінтегральної функції на дві одиниці вищий за степінь чисельника. В результаті, наш інтеграл дорівнює сумі лишків аналітичного продовження підінтегральної функції у верхню півплощину помноженій на $2\pi i$. У цю півплощину потрапляє лише три особливі точки підінтегральної функції: $q = p + iP_0$; $\quad q = -p + iP_0$; $\quad q = iP_0$. Принагідно зауважимо, що знаменник дробу, який містить функцію арктангенса, не перетворюється в нуль в жодній точці комплексної площини. В результаті розрахунків отримаємо:

$$\Delta_\infty = \frac{p_0^2 \bar{z}_0 \varkappa}{4\pi^2 \beta\rho} \frac{\pi i}{2p} \int_0^p dp \left(\frac{2P_0^2}{iP_0 + \tilde{\gamma}\,\mathrm{arctg}(i/2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-p+iP_0)^2}{-p+iP_0+\tilde{\gamma}\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{p}{2P_0}+\frac{i}{2}\right)} + \frac{(p+iP_0)^2}{p+iP_0+\tilde{\gamma}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{p}{2P_0}+\frac{i}{2}\right)} \right). \tag{4.33}$$

Не вдаючись в деталі доволі простих перетворень, запишемо кінцевий результат для Δ_∞:

$$\Delta_\infty = \frac{p_0^2 \bar{z}_0 \varkappa}{4\pi\beta\rho p} \int_0^p dp \left\{ \frac{(f_2+P_0)(p^2-P_0^2) - 2pP_0(f_1+p)}{(f_1+p)^2+(f_2+P_0)^2} + \frac{P_0^2}{P_0+\tilde{\gamma}\ln(3)/2} \right\}, \tag{4.34}$$

де

$$f_1 = \frac{\tilde{\gamma}}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{4pP_0}{3P_0^2-p^2}\right),$$

$$f_2 = -\frac{\tilde{\gamma}}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{(3P_0^2-p^2)^2+16p^2P_0^2}}{9P_0^2+p^2}\right). \tag{4.35}$$

В отриманому виразі проведемо розклад за параметром p і збережемо лише доданки пропорційні до p^2. В результаті будемо мати:

$$\Delta_\infty = -\frac{p_0^2 \bar{z}_0 \varkappa \tilde{\gamma}}{54\pi\beta\rho} \frac{\left(-9\tilde{\gamma}\ln^2(3) + 8P_0 + 28\tilde{\gamma}\ln(3) - 16\tilde{\gamma}\right)}{(2P_0+\tilde{\gamma}\ln(3))^3} p^2 + o(p^2). \tag{4.36}$$

Відповідно, внесок у праву частину рівності (4.10) є таким:

$$-\frac{p_0^4 \bar{z}_0 \varkappa \tilde{\gamma}}{54\pi\rho} \frac{\left(-9\tilde{\gamma}\ln^2(3) + 8P_0 + 28\tilde{\gamma}\ln(3) - 16\tilde{\gamma}\right)}{(2P_0+\tilde{\gamma}\ln(3))^3}. \tag{4.37}$$

За допомогою чисельного аналізу можна переконатися у малості цієї величини, а тому її внеском в ефективну масу можна також знехтувати.

4.6 Аналітичний вираз для ефективної маси

Беручи до уваги, що величина Δ_∞ дає незначний вклад у значення ефективної маси (що було показано вище) і повертаючись до схеми розрахунку, наведеної в роботі [104], для ефективної маси отримаємо такий вираз:

$$\bar{m} = \frac{m^*}{1 + F(T)}, \tag{4.38}$$

де

$$F(T) = \lim_{p \to 0} \frac{1}{N\beta\varepsilon_p} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\lambda_q}{1 + \lambda_q \bar{S}_0(q)} \left(e^{\mathbf{p}\nabla_\mathbf{q}} - 1\right) \left(\bar{n}_q - \frac{1}{\bar{z}_0^{-1}(\beta\bar{\varepsilon}_q + 1 - \bar{z}_0)}\right), \tag{4.39}$$

$\nabla_\mathbf{q}$ — оператор градієнту.

Розкладемо в ряд оператор $e^{\mathbf{p}\nabla_\mathbf{q}}$, обмежившись першими трьома членами розкладу, оскільки саме вони дають необхідне нам наближення. Зробивши після цього нескладні перетворення, перейшовши від підсумовування до інтегрування і врахувавши зміст позначень p_0 і P_0, для величини $F(T)$ будемо мати такий вираз:

$$F(T) = \frac{1}{2\pi^2\rho} \int\limits_0^\infty \frac{\lambda_q q^2 dq}{1 + \lambda_q \bar{S}_0(q)} \Bigg(\bar{n}_q(1 + \bar{n}_q) \times \times \left[\frac{2}{3}\beta\varepsilon_q(1 + 2\bar{n}_q) - 1\right] - \frac{\bar{z}_0(\beta\bar{\varepsilon}_q - 3 + 3\bar{z}_0)}{3\left(\beta\bar{\varepsilon}_q + 1 - \bar{z}_0\right)^3} \Bigg). \tag{4.40}$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що в границі як низьких так і високих температур функція $F(T)$ рівна нулю, а тому в цих границях $\bar{m} = m^*$. Користуючись результатами роботи [105], знайдемо, що $\lim_{T\to 0} \bar{m} \approx 1.7m$, а $\lim_{T\to\infty} \bar{m} = m$.

4.7 Чисельний розрахунок ефективної маси і теплоємності

Щоб проілюструвати отриманий результат, потрібно подати його в графічному вигляді. Для цього необхідно провести чисельний розрахунок відношення $\bar{m}/m$, який вимагає самоузгодженого підходу, оскільки вираз для $\bar{m}$ містить в собі величини $\bar{S}_0(q), \bar{\varepsilon}_q, \bar{n}_q$, які, у свою чергу, залежать від $\bar{m}$. На практиці це означає здійснення ітераційного процесу, який у нашому випадку зводиться до 3-4 ітерацій. Обчислення проводимо при рівноважній густині гелію $\rho = 0.02185$ Å^{-3}, масі частинок $m = 4.0026$ а.о.м., швидкості звуку $c = 238.2$ м/с у границі $T \to 0$ [214]. Як вхідну інформацію, замість коефіцієнта Фур'є енергії парної взаємодії між частинками ν_q, використовуємо експериментально вимірюваний структурний фактор $S^{\exp}(q)$ рідкого ^{4}He , екстрапольований до температури $T \to 0$ з роботи [140]. На Рис.4.3 подана температурна залежність ефективної маси атома ^{4}He в наближенні парних міжчастинкових кореляцій.

Далі, за відомою формулою [249] легко знаходимо температуру бозе-конденсації в рідкому ^{4}He: $T_c \approx 2.18$ К, яка є дуже близькою до експериментального значення $T_c = 2.168$ К.

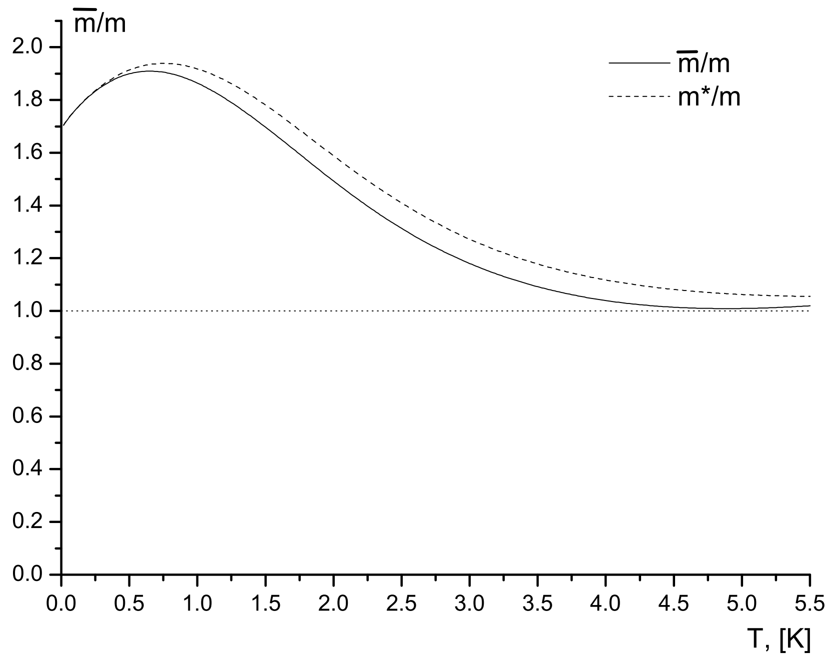

Рис. 4.3: Температурна залежність ефективної маси атома ^{4}He.

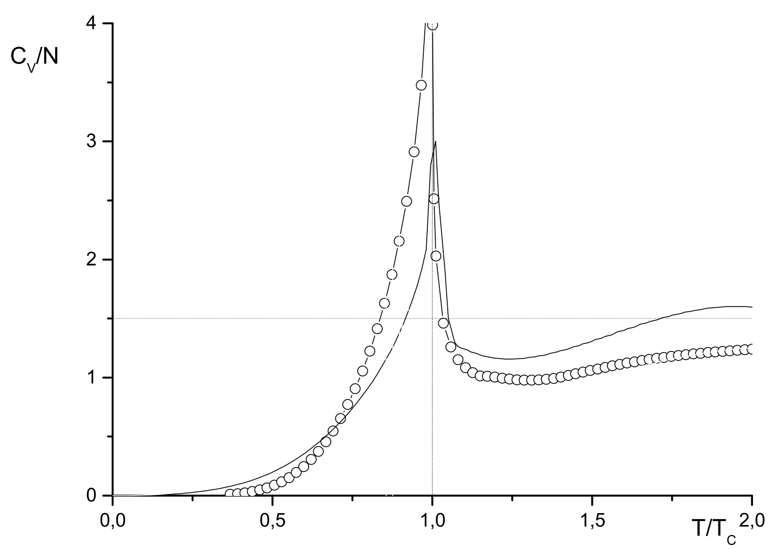

Рис. 4.4: Температурна залежність теплоємності рідкого ^{4}He. Суцільна крива — теоретичний результат з урахуванням ефективної маси, кружечки — експериментальні дані [70, 179, 250].

Для розрахунку теплоємності ми скористаємося виразом для внутрішньої енергії багатобозонної системи в наближенні парних кореляцій (4.1), чисельно продиференціювавши його по температурі. На Рис.4.4 наведено графік температурної залежності теплоємності з урахуванням ефективної маси.

4.8 Висновок

В цьому розділі знайдено вираз для температурної залежності ефективної маси атома ^{4}He (як у нормальній, так і надплинній фазі), яка дає можливість усунути інфрачервоні розбіжності, що є характерними для критичних явищ. Вираз для ефективної маси застосовний при всіх температурах, окрім вузької флуктуаційної області, яка розпочинається з температури $T_F \approx 2.13$K і закінчується температурою фазового переходу. В границі високих температур ефективна маса переходить у "голу" масу атома ^{4}He. Це саме відбувається і при "виключенні" міжчастинкової взаємодії. В границі низьких температур ми отримуємо значення, яке збігається зі значенням ефективної маси домішкового атома ^{3}He в рідині ^{4}He при заміні "голої" маси атома ^{3}He на масу атома ^{4}He [99].

Теоретично розрахований хід кривої теплоємності з урахуванням ефективної маси значно краще узгоджується з експериментом, зокрема в надкритичній області, ніж без її урахування [142]. Крім того, в порівнянні із "затравочною" масою, отримана нами ефективна маса дає краще узгодження з експериментом для теплоємності в області шириною приблизно 0.5K над точкою фазового переходу [105].

За допомогою ефективної маси вдалося зсунути точку фазового переходу від значення $T_c \approx 3.14$K для ідеального бозе-газу до температури $T_c \approx 2.18$K. "Затравочна" маса в цьому випадку дає $T_c \approx 1.94$K [105].

Запропонований в цій роботі підхід дозволив також знайти малий критичний індекс η в наближенні хаотичних фаз. Він доволі сильно відрізняється від сучасного значення [248], але водночас відтворює вже відомий результат цього наближення [245, 246].

Розділ 5

Структурні функції бозе-рідини

5.1 Вступ

Теоретичний розрахунок структурних функцій є вагомим кроком на шляху вивчення багаточастинкових систем загалом і рідкого ^{4}He зокрема, оскільки вони описують просторову структуру речовини і дають можливість досліджувати вплив на неї температури та вигляду міжчастинкового потенціалу. Серед структурних функцій важливе місце посідає парний структурний фактор. Великою мірою це пов'язано з тим, що він досить добре експериментально вимірюється, а тому теоретичні результати можна безпосередньо порівняти з експериментальними даними.

В широкотемпературній області в представленні колективних змінних парний структурний фактор був знайдений в роботі [142] за допомогою усереднення з матрицею густини взаємодіючих бозе-частинок, однак лише в наближенні парних кореляцій. Трохи згодом [104, 176] було проведено розрахунок незвідних дво-, три- і чотиричастинкового структурних факторів, а також парної функції розподілу в широкому інтервалі температур із врахуванням непрямих три- і чотиричастинкових кореляцій. Внески ж прямих три- і чотиричастинкових кореляцій у вираз для парного структурного фактора були знайдені значно раніше [13, 14, 16, 125, 126, 136, 139], але лише в границі низьких температур.

В цьому розділі ми маємо на меті знайти вирази для дво-, три- і чотиричастинкового структурних факторів в широкій області температур в post-RPA наближенні, яке враховує прямі три- і чотиричастинкові кореляції. Як уже було сказано раніше, це наближення для структурних функцій відповідає наближенню “однієї суми за хвильовим вектором”.

Чисельні розрахунки для парного структурного фактора були проведені нами при різних значеннях температури в діапазоні від 1K до 4.24K і з урахуванням ефективної маси, вираз для якої наведений у попередньому розділі, а також в роботі [22]. В цьому контексті варто згадати також і роботи [251, 252], де для узгодження розрахованих структурних функцій з експериментальними кривими була використана ефективна маса частинок як підгоночний параметр.

Знайдений двочастинковий структурний фактор в post-RPA наближенні відкриває шлях для знаходження температурної залежності швидкості першого звуку в бозе-рідині і проведення порівняння з експериментальними даними. Отримані результати допоможуть також спростити розрахунки термодинамічних функцій бозе-системи в наближенні “двох сум за хвильовим вектором”.

5.2 Дво-, три- і чотиричастинковий структурні фактори багатобозонної системи

Згідно з означенням n-частинковий структурний фактор

$$S^{(n)}(\rho_{\mathbf{q}_1},\ldots,\rho_{\mathbf{q}_n}) = N^{n/2-1}\langle\rho_{\mathbf{q}_1}...\rho_{\mathbf{q}_n}\rangle, \tag{5.1}$$

де N — кількість частинок, а позначення $\langle...\rangle$ означає усереднення з матрицею густини взаємодіючих бозе-частинок. В наших подальших обчисленнях ми використовуватимемо матрицю густини в post-RPA наближенні із виділеною матрицею густини ідеального бозе-газу.

Для парного структурного фактора (n=2) написаний вище вираз (5.1) можна зобразити у вигляді похідної за параметром λ_q:

$$\langle\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\rangle = -\frac{d}{d\lambda_q}\ln\left\{\int d\mathbf{r}_1\ldots\int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[c_0^{(pr)} - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\lambda_q\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right]P(\rho|\rho)\right\}.$$

У прийнятому нами наближенні цей вираз запишемо так:

$$\langle\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\rangle = -\frac{d}{d\lambda_q}\ln\left\{\int d\mathbf{r}_1\ldots\int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[b_0 - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\lambda_q\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right]\right\} - \frac{d}{d\lambda_q}\ln\left\{\langle P(\rho|\rho)\rangle\right\}.$$

Розрахунок першого доданку наведений в роботах [104, 176], а середнє $\langle P(\rho|\rho)\rangle$ має такий зміст:

$$\langle P(\rho|\rho)\rangle = \frac{\int d\mathbf{r}_1\ldots\int d\mathbf{r}_N R_N^0(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N|\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)P_{pr}(\rho|\rho)P(\rho|\rho)}{\int d\mathbf{r}_1\ldots\int d\mathbf{r}_N R_N^0(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N|\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)P_{pr}(\rho|\rho)}.$$

Це середнє можна отримати на основі роботи [18]:

$$\langle P(\rho|\rho)\rangle = \exp\left\{C_0+2\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}C_2(\mathbf{q}_1)\frac{S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)}+\frac{2}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\times\right.$$

$$\times\frac{S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)}\frac{S_0(q_2)}{1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)}+\frac{2}{N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\times$$

$$\left.\times\frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)+6C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)][1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]}\right\}. \tag{5.2}$$

Отож, користуючись явним виглядом величини $\langle P(\rho|\rho)\rangle$ і результатами робіт [104, 176], знайдемо:

$$S(q_1)=\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rangle=\frac{S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)}+\frac{1}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\times$$

$$\times\left(4C_2(\mathbf{q}_1)S_0^2(q_1)-\frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{k}_2\neq 0}\frac{\lambda_{k_2}S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_2)}{1+\lambda_{k_2}S_0(k_2)}+\right.$$

$$+\frac{1}{2N}\sum_{\substack{\mathbf{k}_2\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}}\sum_{\mathbf{k}_3\neq 0}\frac{\lambda_{k_2}}{1+\lambda_{k_2}S_0(k_2)}\frac{\lambda_{k_3}}{1+\lambda_{k_3}S_0(q_3)}\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)\right]^2+$$

$$+\frac{12}{N}\sum_{\substack{\mathbf{k}_2\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}}\sum_{\mathbf{k}_3\neq 0}\frac{C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)}{[1+\lambda_{k_2}S_0(k_2)][1+\lambda_{k_3}S_0(k_3)]}+\frac{8}{N}S_0^2(q_1)\sum_{\mathbf{k}_2\neq 0}C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2)\times$$

$$\left.\times\frac{S_0(k_2)}{1+\lambda_{k_2}S_0(k_2)}+\frac{72}{N}S_0^2(q_1)\sum_{\substack{\mathbf{k}_2\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}}\sum_{\mathbf{k}_3\neq 0}\frac{C_3^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)S_0(k_2)S_0(k_3)}{[1+\lambda_{k_2}S_0(k_2)][1+\lambda_{k_3}S_0(k_3)]}\right). \tag{5.3}$$

Вважаючи доданки з однією сумою малими в порівнянні з величиною, яка відтворює наближення парних кореляцій, двочастинковий структурний фактор можна подати у такому вигляді:

$$S(q_1) = \frac{S_0(q_1)}{1 + (\lambda_{q_1} + \Pi_{q_1})S_0(q_1)}, \quad \Pi_{q_1} = \Pi_{q_1}^{ind} + \Pi_{q_1}^{d}, \tag{5.4}$$

де $\Pi_{q_1}^{ind}$ — внесок непрямих три- і чотиричастинкових кореляцій, $\Pi_{q_1}^{d}$ — внесок прямих три- і чотиричастинкових кореляцій:

$$\Pi_{q_1}^{ind} = \frac{1}{2NS_0^2(q_1)} \left(\sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \frac{\lambda_{k_2} S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_2)}{1 + \lambda_{k_2} S_0(k_2)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{\mathbf{k}_2 \neq 0 \\ \mathbf{q}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0}} \sum_{\mathbf{k}_3 \neq 0} \frac{\lambda_{k_2} \lambda_{k_3} \left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \right]^2}{[1+\lambda_{k_2} S_0(k_2)][1+\lambda_{k_3} S_0(k_3)]} \right),$$

$$\Pi_{q_1}^{d} = -4C_2(\mathbf{q}_1) - \frac{8}{N} \sum_{\mathbf{k}_2 \neq 0} \frac{C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2) S_0(k_2)}{1 + \lambda_{k_2} S_0(k_2)} - \frac{12}{N} \sum_{\substack{\mathbf{k}_2 \neq 0 \\ \mathbf{q}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0}} \sum_{\mathbf{k}_3 \neq 0} C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \times$$

$$\times \frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)/S_0(q_1) + 6C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) S_0(k_2) S_0(k_3)}{[1+\lambda_{k_2} S_0(k_2)][1+\lambda_{k_3} S_0(k_3)]},$$

причому $S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ — це тричастинковий структурний фактор ідеального бозе-газу:

$$S_0^{(3)}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, -\mathbf{q} - \mathbf{k}) = 2\frac{n_0}{N} \left(n_q n_k + n_q n_{|\mathbf{q}+\mathbf{k}|} + n_k n_{|\mathbf{q}+\mathbf{k}|} \right) +$$

$$+ S_0(q) + S_0(k) + S_0(|\mathbf{q} + \mathbf{k}|) - 2 +$$

$$+ \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} n_p n_{|\mathbf{p}+\mathbf{k}|} n_{|\mathbf{p}-\mathbf{k}|}, \tag{5.5}$$

а $S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2)$ — чотиричастинковий структурний фактор ідеального бозе-газу після усунення інфрачервоних розбіжностей з допомогою знайденої у попередньому розділі ефективної маси:

$$S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) = 2\frac{n_0}{N}\left(n_{|\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2|} + n_{|\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|}\right)\left(n_{q_2}^2 + n_{q_2} + 2n_{q_1}n_{q_2}\right) +$$
$$+2\left(S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2) - S_0(q_1) - S_0(q_2) + 1\right) +$$
$$+\frac{2}{N}\sum_{\mathbf{p}\neq 0} n_p n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}_1|} n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}_2|} n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|}. \tag{5.6}$$

Для тричастинкового структурного фактора вираз (5.1) можна подати у вигляді:

$$\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\rangle = \frac{\sqrt{N}}{2}\frac{\delta \ln\langle P(\rho|\rho)\rangle}{\delta C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}.$$

Безпосередній розрахунок на основі попередньої формули дає нам такий результат:

$$S^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \sqrt{N}\,\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\rangle =$$
$$= \frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)][1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]} +$$
$$+\frac{12C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)][1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]}. \tag{5.7}$$

Незвідний чотиричастинковий структурний фактор записується в наступний спосіб:

$$S^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) = N\left[\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rangle - \langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rangle\,\langle\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rangle\right]. \tag{5.8}$$

Середнє $\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rangle$ ми знайшли раніше, залишається розрахувати $\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rangle$. Знову ж таки на основі формули (5.1) можна показати, що

$$\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rangle = \frac{1}{I_\lambda}\frac{d^2 I_\lambda}{d\lambda_{q_1}d\lambda_{q_2}},$$

де

$$I_\lambda = \int d\mathbf{r}_1 \ldots \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r) \exp\left[c_0^{(pr)} - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0} \lambda_q \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}}\right] P(\rho|\rho). \quad (5.9)$$

Тоді у прийнятому нами наближенні

$$\begin{gathered}
\langle \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rangle - \langle \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rangle \langle \rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rangle = \\
= \frac{d^2}{d\lambda_{q_1} d\lambda_{q_2}} \ln\left\{\int d\mathbf{r}_1 \ldots \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r) \times\right. \\
\left.\times \exp\left[c_0^{(pr)} - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\lambda_q \rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right]\right\} + \frac{d^2 \ln\langle P(\rho|\rho)\rangle}{d\lambda_{q_1} d\lambda_{q_2}}.
\end{gathered}$$

Перший доданок у написаному вище виразі знайдений раніше [104, 176], а другий легко розрахувати, беручи до уваги явний вираз для величини $\langle P(\rho|\rho)\rangle$ (5.2). В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned}
S^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) &= \frac{1}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\frac{1}{[1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)]^2}\times \\
&\times\left\{S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) - \frac{2\lambda_{|\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|}\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\right]^2}{1+\lambda_{|\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|}S_0(|\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|)}+\right. \\
&+ 48 S_0(q_1)S_0(q_2)S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\frac{C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)}{1+\lambda_{|\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|}S_0(|\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|)}+ \\
&\left.+ 16 S_0^2(q_1)S_0^2(q_2)\left[C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + 18\frac{C_3^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)S_0(|\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|)}{1+\lambda_{|\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|}S_0(|\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|)}\right]\right\}.
\end{aligned} \quad (5.10)$$

Тут $S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2)$ — це теж чотиричастинковий структурний фактор ідеального бозе-газу, але до проведення процедури усунення інфрачервоних розбіжностей.

5.3 Дво-, три- та чотиричастинковий структурні фактори в границі низьких і високих температур

Користуючись отриманими раніше виразами для величин $C_2(\mathbf{q}_1)$, $C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, $C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$, а також для структурних факторів ідеального бозе-газу, в границі низьких і високих температур ми можемо знайти відповідні вирази для дво-, три- і чотиричастинкового структурних факторів бозе-рідини.

Отож в границі низьких температур для парного структурного фактора здобудемо такий результат:

$$S(q_1) = \frac{1}{\alpha_{q_1}^2}\left[\alpha_{q_1} + \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{k}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{k}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}} \frac{\alpha_{k_2}-1}{\alpha_{k_2}}\frac{\alpha_{k_3}-1}{\alpha_{k_3}} + 2a_2(\mathbf{q}_1) + \right.$$
$$+ \frac{2}{N}\sum_{\mathbf{k}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{k}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}} \frac{a_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{\alpha_{k_2}\alpha_{k_3}} + \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}_2\neq 0}\frac{a_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2)}{\alpha_{k_2}} +$$
$$\left. + \frac{2}{N}\sum_{\mathbf{k}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{k}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}} \frac{a_3^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{\alpha_{k_2}\alpha_{k_3}}\right], \tag{5.11}$$

де $a_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2)$ — це скорочений запис величини $a_4(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_2)$.

В прийнятому нами наближенні він може бути записаний в той же спосіб, як і у роботах [13, 16]:

$$S(q_1) \;=\; 1/[1 - 2a_2(q_1) - \Sigma(q_1)],$$

де

$$\Sigma(q_1) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}_2\neq 0}\frac{a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_2)}{1-2\tilde{a}_2(k_2)} + \frac{2}{N}\sum_{\substack{\mathbf{k}_2\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}}\sum_{\mathbf{k}_3\neq 0}\times$$

$$\times\frac{\{\tilde{a}_2(k_2)\tilde{a}_2(k_3)+a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)[1+a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)]\}}{(1-2\tilde{a}_2(k_2))(1-2\tilde{a}_2(k_3))},$$

$$\tilde{a}_2(q_1) = -\frac{1}{2}(\alpha_{q_1}-1) + \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}_2\neq 0}\left[\frac{k_2^2}{2q_1^2\alpha_{q_1}}a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{(\mathbf{k}_2,\mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2)}{q_1^2\alpha_{q_1}}a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2,-\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_2)\right]. \tag{5.12}$$

Аналогічно для тричастинкового і чотиричастинкового структурних факторів в границі низьких температур матимемо такі вирази:

$$S^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) = \frac{1}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}\left\{1+2a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right\}, \tag{5.13}$$

$$S^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2) = \frac{2}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}^2}\left[-\frac{\alpha_{|\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|}-1}{\alpha_{|\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|}} + \right.$$

$$\left. +\frac{4}{\alpha_{|\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|}}a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2) + a_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) + \frac{4}{\alpha_{|\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|}}a_3^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\right]. \tag{5.14}$$

В границі високих температур, як зазначалося раніше, величини $C_2(\mathbf{q}_1)$, $C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)$, $C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)$ стають зникаюче малими, а тому в цій границі дво-, три- і чотиричастинковий структурні фактори багатобозонної системи переходять у відповідні вирази для ідеального бозе-газу:

$$\lim_{T\to\infty}S(q) = S_0(q), \qquad \lim_{T\to\infty}S^{(3)}(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},\mathbf{q_3}) = S_0^{(3)}(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},\mathbf{q_3}),$$

$$\lim_{T\to\infty}S^{(4)}(\mathbf{q_1},-\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},-\mathbf{q_2}) = S_0^{(4)}(\mathbf{q_1},-\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},-\mathbf{q_2}).$$

5.4 Чисельні розрахунки

Чисельний розрахунок двочастинкового структурного фактора (5.3) був проведений з урахуванням ефективної маси. Щоб не перевищувати точність розрахунків ми використовували ефективну масу лише в доданках, які відтворюють наближення парних кореляцій, натомість у виразах, які містять суму за хвильовим вектором, стоїть "гола" маса. Тут варто зробити ще таке зауваження: у структурних факторах ідеального бозе-газу, які входять у вирази з сумою за хвильовим вектором, ефективна маса використана лише для того, щоб змістити критичну точку через перенормування активності $z_0 = \exp[\beta\mu]$, де μ — хімічний потенціал. Введення ефективної маси дозволяє уникнути інфрачервоних розбіжностей, присутніх у неперенормованому чотиричастинковому структурному факторі ідеального бозе-газу [22].

Для розрахунку величин з однією сумою за хвильовим вектором потрібно від підсумовування перейти до інтегрування за відомим правилом (2.11). Провівши відповідні перетворення і зробивши необхідну заміну змінних, для нашого випадку ми отримаємо наступне правило переходу від підсумовування до інтегрування:

$$\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{k}_3\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}} = \frac{1}{4\pi^2\rho q_1}\int\limits_0^\infty k_2 dk_2 \int\limits_{|q_1-k_2|}^{|q_1+k_2|} k_3 dk_3, \tag{5.15}$$

де ρ — це рівноважна густина бозе-системи. Для такої квантової рідини як ^{4}He вона рівна $\rho = 0.02185$ Å^{-3} [214]. Наступний крок полягає у розрахунку величини α_q на основі екстрапольованих до нуля температур експериментальних даних для парного структурного фактора рідкого ^{4}He. Цю інформацію беремо з роботи [140]. Звернемося тепер до рівняння (5.11), переписавши його в наступний спосіб:

$$\frac{1}{\alpha_{q_1}} = S^{exp}(q_1) - \frac{1}{\alpha_{q_1}^2}\left[\frac{1}{2N}\sum_{\substack{\mathbf{k}_2\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}}\sum_{\mathbf{k}_3\neq 0}\frac{\alpha_{k_2}-1}{\alpha_{k_2}}\frac{\alpha_{k_3}-1}{\alpha_{k_3}} + 2a_2(\mathbf{q}_1) + \right.$$

$$+ \frac{2}{N}\sum_{\substack{\mathbf{k}_2\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}}\sum_{\mathbf{k}_3\neq 0}\frac{a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)}{\alpha_{k_2}\alpha_{k_3}} + \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}_2\neq 0}\frac{a_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2)}{\alpha_{k_2}} +$$

$$\left. + \frac{2}{N}\sum_{\substack{\mathbf{k}_2\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}}\sum_{\mathbf{k}_3\neq 0}\frac{a_3^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)}{\alpha_{k_2}\alpha_{k_3}}\right]. \tag{5.16}$$

Ми отримали ітераційне рівняння стосовно α_q. В нульовому наближенні $\alpha_q = 1/S^{exp}(q)$. Підставляючи це значення α_q в праву частину рівності (5.16), ми отримаємо значення α_q в першому наближенні і т. д. Однак такий ітераційний процес не є збіжним, що, скоріш за все, пов'язано із замалою кількістю членів розкладу для структурного фактора (5.11). Тому ми обмежимося лише нульовим наближенням для α_q. Результати чисельних розрахунків для температур 1.0K, 1.38K, 1.67K, 2.2K, 2.5K, 3.0K, 3.5K, 4.24K наведені нижче. Експериментальні дані для структурного фактора при згаданих вище температурах були взяті з робіт [172, 173].

В усіх наведених рисунках вигляд графіків має такий зміст: суцільна лінія — обчислений структурний фактор з урахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій, пунктирна — наближення парних кореляцій, крапки — експериментальні дані.

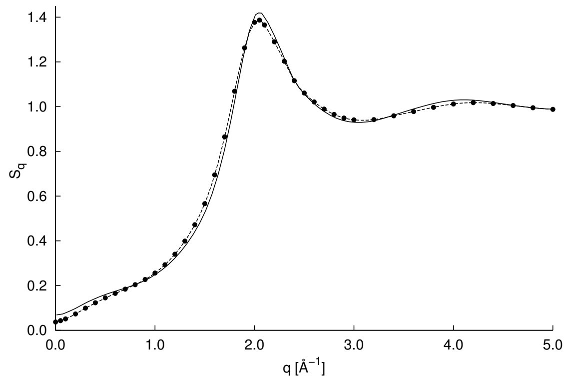

Рис. 5.1: Структурний фактор рідкого ^{4}He при температурі T=1.0 K.

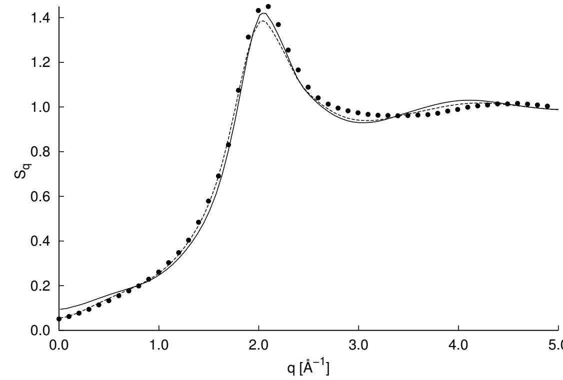

Рис. 5.2: Структурний фактор рідкого ^{4}He при температурі T=1.38 K.

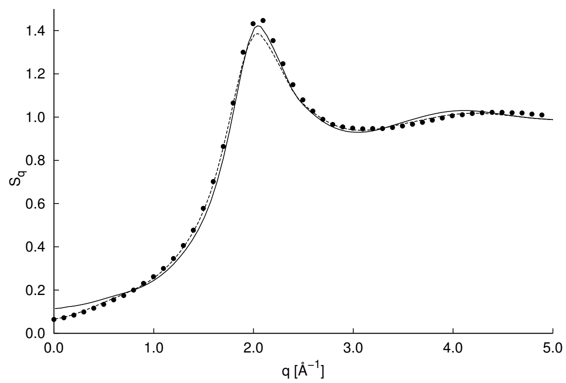

Рис. 5.3: Структурний фактор рідкого ^{4}He при температурі T=1.67 K.

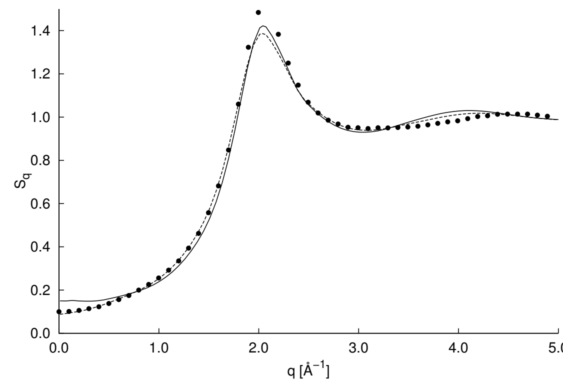

Рис. 5.4: Структурний фактор рідкого ^{4}He при температурі T=2.2 K.

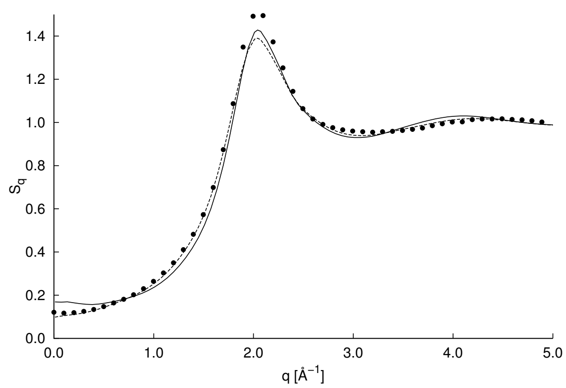

Рис. 5.5: Структурний фактор рідкого ^{4}He при температурі T=2.5 K.

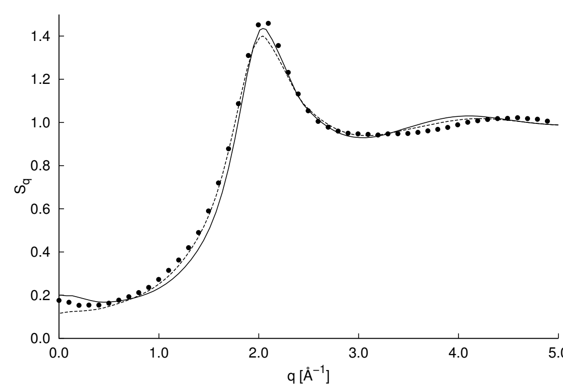

Рис. 5.6: Структурний фактор рідкого ^{4}He при температурі T=3.0 K.

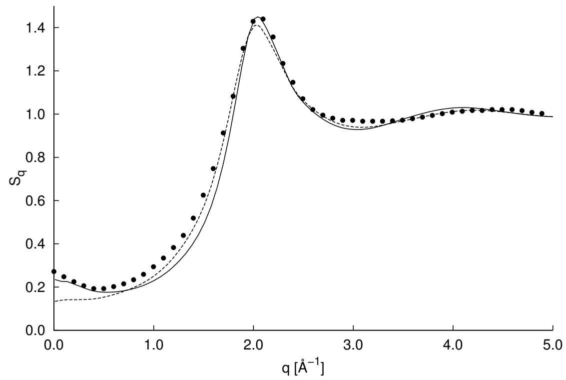

Рис. 5.7: Структурний фактор рідкого ^{4}He при температурі T=3.5 K.

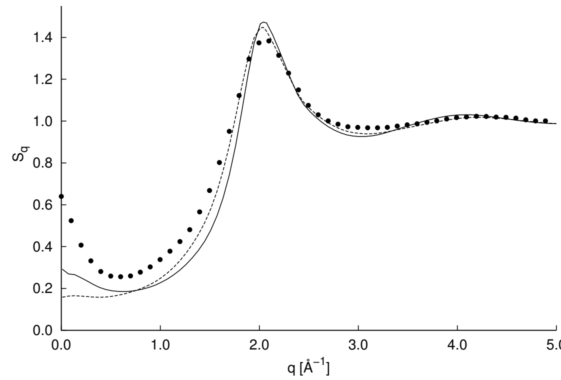

Рис. 5.8: Структурний фактор рідкого ^{4}He при температурі T=4.24 K.

5.5 Висновок

В цьому розділі були знайдені вирази для дво-, три- і чотиричастинкового структурних факторів в наближенні “однієї суми за хвильовим вектором” із врахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій в широкотемпературній ділянці. В границі низьких температур отримані вирази для дво- і тричастинкового структурних факторів переходять в уже відомі [13, 16, 253]. Ці самі слова будуть актуальними і стосовно границі високих температур.

Знайдені вирази є доволі громіздкими. Для їх аналізу були застосовані чисельні методи і в результаті здобуто графічне представлення для парного структурного фактора при різних значеннях температури рідкого ^{4}He.

Розділ 6

Швидкість першого звуку в бозе-рідині

6.1 Вступ

Вивчення швидкості звуку в такій квантовій багатобозонній системі як рідкий ^{4}He привертає увагу дослідників вже здавна. Сприяє цьому відносна простота і точність проведення експерименту з його вимірювання в широкотемпературній ділянці. Експериментальні дані, отримані майже 80 років тому [211], прекрасно узгоджуються з сучасними результатами [214].

Теоретичне вивчення швидкості першого звуку в підході колективних змінних проводилося раніше, але лише в границі низьких температур [16, 125, 136, 254, 255]. Зокрема в роботах [125, 255] був знайдений взаємозв'язок між швидкістю звуку при абсолютному нулі температур і коефіцієнтом Фур'є енергії парної міжчастинкової взаємодії в наближенні "однієї суми за хвильовим вектором". Цей результат був здобутий двома різними шляхами. Перший пролягав через знаходження довгохвильової асимптотики структурних величин, які враховували прямі три-і чотиричастинкові кореляції, а другий базувався на відомому співвідношенні: $c^2 = \frac{N}{m}\frac{d^2E_0}{dN^2}$, де c — швидкість звуку, N —

кількість частинок, m — маса частинки, E_0 — енергія основного стану, яка була взята в наближенні парних кореляцій. Згаданий зв'язок, але вже в наближенні "двох сум за хвильовим вектором", був знайдений в роботі [20].

Завдання цього розділу полягає в тому, щоб в підході колективних змінних знайти температурну поведінку швидкості першого звуку в бозе-рідині. Ми виходитимемо з точного співвідношення, яке пов'язує швидкість звуку з довгохвильовою границею структурного фактора [11], а також з результатів, які ми отримали раніше для парного структурного фактора в наближенні "однієї суми за хвильовим вектором", що враховує три- і чотиричастинкові кореляції. Зауважимо, що розрахунок швидкості звуку на основі структурного фактора в наближенні лише парних кореляцій в докритичній області приводить до сталості його значення, а в надкритичній дає повільне зростання (це навіть якісно не узгоджується з експериментом при $T > T_c$). Результати розрахунків в post-RPA наближенні показують доволі добре, принаймні якісне, узгодження з експериментальними даними. Отриманий вираз для швидкості першого звуку в границі низьких і високих температур переходить в уже відомий [125, 249, 255].

6.2 Аналітичний розрахунок швидкості першого звуку у широкотемпературній області

Як відомо [249], існує точне співвідношення між величиною першого звуку і довгохвильовою границею парного структурного фактора в широкій області температур:

$$\lim_{q\to 0} S(q) = \frac{T}{mc^2(T)}. \tag{6.1}$$

Щоб отримати вираз для температурної залежності швидкості першого звуку в post-RPA наближенні, потрібно скористатися виразом для парного структурного фактора багатобозонної системи в наближенні “однієї суми за хвильовим вектором” (5.4), яке враховує внески прямих три- і чотиричастинкових кореляцій. Тоді:

$$c^2(T) = \frac{T}{m} \lim_{q_1\to 0} \left[\frac{1}{S_0(q_1)} + \lambda_{q_1} + \Pi_{q_1} \right], \tag{6.2}$$

де $S_0(q_1)$ — це двочастинковий структурний фактор ідеального бозе-газу (4.18), а Π_{q_1} — знайдена раніше величина, яка забезпечує post-RPA наближення. У вираз для Π_{q_1} входять величини $C_2(\mathbf{q_1})$ (3.28), $C_3(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},\mathbf{q_3})$ (3.29), $C_4(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2})$ (3.30), а також дво-, три і чотиричастинковий структурні фактори ідеального бозе-газу. Тому нашим завданням є знайти їхній вигляд в границі малих значень хвильового вектора. Отож:

$$C_2^0(T) = \lim_{q_1\to 0} C_2(\mathbf{q}_1) = \frac{1}{32N} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} \frac{(\alpha_{q_2}^2 - 1)^2}{\alpha_{q_2}^4} \left\{ \frac{\beta^2 E_{q_2}^2}{\mathrm{sh}^2\left[\beta E_{q_2}\right]} + \beta E_{q_2} \coth[\beta E_{q_2}] - 2 \right\}, \tag{6.3}$$

$$C_3^0(q_2, T) = \lim_{q_1\to 0} C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) = \frac{1}{24} \frac{\alpha_{q_2}^2 + 1}{\alpha_{q_2}} \mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2} E_{q_2}\right] - \frac{1}{12} \mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}\varepsilon_{q_2}\right] + \\ + \frac{1}{48} \frac{\beta\varepsilon_{q_2}(1 - \alpha_{q_2}^2)}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2} E_{q_2}\right]}, \tag{6.4}$$

$$C_4^0(q_2,T)=\lim_{q_1\to 0} C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)=\frac{1}{32}\left\{\frac{\beta^2 E_{q_2}^2(\alpha_{q_2}^2-1)^2}{4\alpha_{q_2}^3}\frac{\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]}+\right.$$

$$+\frac{\beta E_{q_2}}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]}\frac{(\alpha_{q_2}^2-1)^2+2(\alpha_{q_2}^4-1)}{4\alpha_{q_2}^3}-\frac{(\alpha_{q_2}^2-1)^2+2(\alpha_{q_2}^4-1)}{2\alpha_{q_2}^3}\times$$

$$\left.\times\,\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]-\frac{4}{\alpha_{q_2}}\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]+4\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}\varepsilon_{q_2}\right]\right\}. \tag{6.5}$$

Беручи до уваги явні вирази для дво- (4.18), три- (5.5) і чотиричастинкового (5.6) структурних факторів ідеального бозе-газу, без особливих труднощів знайдемо довгохвильову границю для величин $1/S_0(q_1)$, $S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)/S_0(q_1)$, $S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)/S_0^2(q_1)$:

$$S_2^0(T)\equiv\lim_{q_1\to 0}\frac{1}{S_0(q_1)}=\begin{cases}0, & (T\le T_c)\\[2ex] \dfrac{1}{1+F_1(T)}, & (T>T_c)\end{cases} \tag{6.6}$$

$$S_3^0(q_2,T)\equiv\lim_{q_1\to 0}\frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)}{S_0(q_1)}=$$

$$=\begin{cases}2n_{q_2}+1, & (T<T_c)\\[2ex] 1+2\dfrac{S_0(q_2)-1+F_2(q_2,T)}{1+F_1(T)}, & (T>T_c)\end{cases} \tag{6.7}$$

$$S_4^0(q_2,T) \equiv \lim_{q_1\to 0} \frac{S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)}{S_0^2(q_1)} =$$

$$= \begin{cases} 0, & (T \le T_c) \\ \\ \dfrac{2[S_0(q_2)-1+2F_2(q_2,T)+F_3(q_2,T)]}{[1+F_1(T)]^2}, & (T > T_c) \end{cases} \tag{6.8}$$

де T_c —критична температура, n_{q_2} — числа заповнення, z_0 — активність. Явний вигляд функцій $F_1(T)$, $F_2(q_2,T)$, $F_3(q_2,T)$ є таким:

$$F_1(T) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{p}\neq 0} n_p^2 = \frac{1}{2\pi^2\rho}\int\limits_0^\infty \frac{p^2dp}{(z_0^{-1}\exp[\beta p^2]-1)^2}, \tag{6.9}$$

$$F_2(q_2,T) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{p}\neq 0} n_p^2 n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}_2|} = \frac{1}{4\pi^2\rho}\int\limits_0^\infty \frac{p^2dp}{(z_0^{-1}\exp[\beta p^2]-1)^2}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2\beta p q_2}\ln\left(\frac{z_0^{-1}\exp[\beta(p+q_2)^2]-1}{z_0^{-1}\exp[\beta(p-q_2)^2]-1}\right)-2\right\}, \tag{6.10}$$

$$F_3(q_2,T) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{p}\neq 0} n_p^2 n_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}_2|}^2 = \frac{1}{8\pi^2\rho\beta q_2}\int\limits_0^\infty \frac{pdp}{(z_0^{-1}\exp[\beta p]-1)^2}\times$$

$$\times\left\{-\ln\left(\frac{z_0^{-1}\exp[\beta(p+q_2)^2]-1}{z_0^{-1}\exp[\beta(p-q_2)^2]-1}\right)+4\beta p q_2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{z_0^{-1}\exp[\beta(p+q_2)^2]-1}+\frac{1}{z_0^{-1}\exp[\beta(p-q_2)^2]-1}\right\}. \tag{6.11}$$

Зауважимо, що ці функції є розбіжними в критичній точці. Якщо виділити ці розбіжності, то можна показати, що величини $1/S_0(q_1)$,

$S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)/S_0(q_1)$, $S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2)/S_0^2(q_1)$ при $q_1 \to 0$ є скінченними в усій області температур.

Враховуючи також, що $\lim\limits_{q_1 \to 0} \lambda_{q_1} = \beta\rho\nu_0$, в результаті для температурної залежності квадрату швидкості першого звуку в багатобозонній системі отримаємо такий вираз:

$$c^2(T) = \rho\nu_0 + \frac{T}{m}\left(S_2^0(T) + \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \frac{\lambda_{q_2} S_4^0(q_2, T)}{1 + \lambda_{q_2} S_0(q_2)} - \right.$$
$$- \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \frac{\left[\lambda_{q_2} S_3^0(q_2, T)\right]^2}{[1 + \lambda_{q_2} S_0(q_2)]^2} + 4C_2^0(T) + \frac{12}{N}\sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \frac{C_3^0(q_2, T) S_3^0(q_2, T)}{[1 + \lambda_{q_2} S_0(q_2)]^2} +$$
$$\left. + \frac{8}{N}\sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \frac{C_4^0(q_2, T) S_0(q_2)}{1 + \lambda_{q_2} S_0(q_2)} + \frac{72}{N}\sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \frac{\left[C_3^0(q_2, T) S_0(q_2)\right]^2}{[1 + \lambda_{q_2} S_0(q_2)]^2} \right). \qquad (6.12)$$

6.3 Границя низьких і високих температур

В границі низьких температур

$$\lim_{T \to 0} T C_2^0(T) = \frac{1}{32N}\sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \frac{\varepsilon_{q_2}\left(\alpha_{q_2}^2 - 1\right)^2}{\alpha_{q_2}^3},$$

$$\lim_{T \to 0} T C_3^0(q_2, T) = 0, \qquad \lim_{T \to 0} T C_4^0(q_2, T) = 0,$$

$$\lim_{T \to 0} T S_2^0(q_2, T) = 0, \qquad \lim_{T \to 0} T S_3^0(q_2, T) = 0, \qquad \lim_{T \to 0} T S_4^0(q_2, T) = 0. \qquad (6.13)$$

Тому

$$c^2 \equiv \lim_{T \to 0} c^2(T) = \frac{\rho\nu_0}{m} - \frac{1}{8mN}\sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \frac{\varepsilon_{q_2}\left(\alpha_{q_2}^2 - 1\right)^2}{\alpha_{q_2}^3}. \qquad (6.14)$$

Цей самий результат ми отримаємо, якщо візьмемо другу похідну по кількості частинок від виразу для енергії основного стану в наближенні Боголюбова:

$$c^2 = \frac{N}{m}\frac{\partial^2 E_0}{\partial N^2}. \tag{6.15}$$

Беручи квадратний корінь з рівності (6.14) і використовуючи факт малості другого доданка в порівнянні з першим, будемо мати:

$$c \equiv \lim_{T\to 0} c(T) = \sqrt{\frac{\rho\nu_0}{m}} - \frac{1}{16N\sqrt{m\rho\nu_0}} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} \frac{\varepsilon_{q_2}\left(\alpha_{q_2}^2 - 1\right)^2}{\alpha_{q_2}^3}. \tag{6.16}$$

Інший шлях до того ж самого результату пролягає через використання формули [125, 255]:

$$c = -\frac{\hbar}{m}\lim_{q_1\to 0} q_1 \tilde{a}_2(q_1), \tag{6.17}$$

де величина $\tilde{a}_2(q_1)$ вже була наведена раніше (5.12).

В границі високих температур внески три- і чотиричастинкових кореляцій є рівними нулеві [20]. Беручи також до уваги той факт, що $\lim\limits_{T\to\infty} S_0(q_1) = 1$, ми отримаємо добре відомий класичний вираз для швидкості першого звуку у високотемпературній області [249]:

$$c(T) = \sqrt{\left(T + \rho\nu_0\right)/m}. \tag{6.18}$$

6.4 Чисельний розрахунок швидкості першого звуку в бозе-рідині

Для чисельних розрахунків швидкості першого звуку ми опиратимемося на вираз (6.12). Перехід від підсумовування до інтегрування здійснюється за наведеною раніше схемою (2.11).

Щодо невідомої величини ν_0, то її можна знайти, використовуючи значення швидкості першого звуку при нулі температур, отриманого з допомогою екстраполяції експериментальних даних. Таким чином, зі співвідношення (6.14) будемо мати:

$$\nu_0 = \frac{m}{\rho}\left\{c^2 + \frac{1}{8mN}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{\varepsilon_{q_2}\left(\alpha_{q_2}^2 - 1\right)^2}{\alpha_{q_2}^3}\right\}. \tag{6.19}$$

Щоб не перевищувати точність, знайдене значення ν_0 (6.19) використовуватимемо виключно у виразах, які відтворюють наближення парних кореляцій, а у виразах, що стоять під сумою, покладемо $\nu_0 = mc^2/\rho$. Чисельний розрахунок проводитимемо зі знайденою раніше ефективною масою атома ^{4}He, щоб уникнути інфрачервоних розбіжностей, які присутні в неперенормованому чотиричастинковому структурному факторі ідеального бозе-газу.

Результати чисельних розрахунків наведені на Рис.6.1. Температурну поведінку ізотермічної швидкості звуку (c_T), з якою ми проводили порівняння отриманих нами результатів, легко знайти на основі експериментальних даних для адіабатичної швидкості звуку (c_σ) [214] і значень питомих темлоємностей при сталому об'ємі (C_v) і сталому тиску (C_p) [179], використовуючи добре відоме співвідношення: $c_T = c_\sigma\sqrt{C_v/C_p}$.

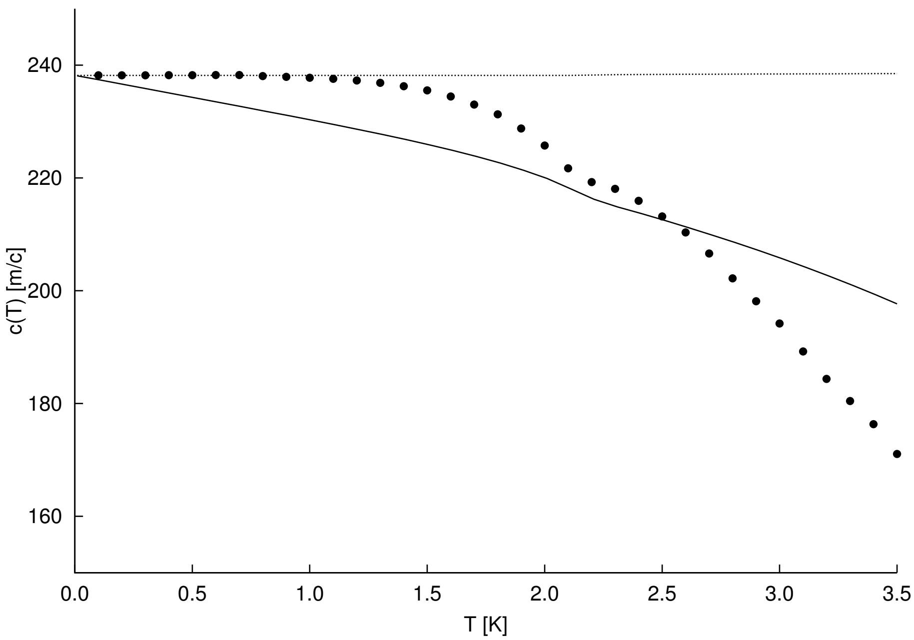

Рис. 6.1: Температурна залежність швидкості першого звуку в рідкому ^{4}He. Штрихована лінія — наближення парних кореляцій, суцільна крива — post-RPA наближення, крапки — непрямі експерментальні дані на основі робіт [179, 214]

6.5 Висновок

В цьому розділі отримано вираз для температурної залежність ізотермічної швидкості першого звуку в бозе-системі, який в границі високих і низьких температур відтворює відомі результати. Як видно з рисунку, узгодження з експериментальними даними є досить добрим, однак далеко неповним. Щоб покращити теоретичні результати потрібно врахувати наступне наближення для швидкості звуку. Це означає, що для наших розрахунків ми маємо використовувати вираз для двочастинкового структурного фактора у вищому, ніж post-RPA, наближенні (наближення “двох сум за хвильовим вектором” для структурного фактора).

Розділ 7

Термодинамічні функції бозе-рідини

7.1 Вступ

Робота Боголюбова [106], в якій він вперше наближено обчислив енергію основного стану і енергетичний спектр рідкого ^{4}He, дала значний поштовх для подальшого дослідження термодинамічних функцій бозе-систем. Згодом [13,14,16,125,136–139] вирази для енергії основного стану та інших термодинамічних функцій рідкого ^{4}He при нулі температур були отримані у вищому, ніж Боголюбівське, наближенні. Завдяки цим роботам було показано, що врахування три- та чотиричастинкових кореляцій покращує значення для енергії основного стану.

В широкотемпературній області в RPA-набиженні середні значення кінетичної, потенціальної та повної внутрішньої енергії були знайдені в роботі [142]. Розрахунок проводився за допомогою усереднення з матрицею густини взаємодіючих бозе-частинок. Узгодження з експериментальними даними отриманих результатів є досить добрим, однак далеко неповним. Це великою мірою пов'язано з тим, що для матриці густини було взято лише наближення парних кореляції. Для більш точних обчислень потрібно враховувати три- та чотиричастинкові кореляції. Отож завданням, яке ставиться в цьому розділі, є розрахунок середніх значень кінетичної, потенціальної і повної внутрішньої енергії багатобозонної системи в широкотемпературній ділянці в post-RPA наближенні, яке враховує внески прямих три- і чотиричастинкових кореляцій.

Важливим аспектом вивчення термодинамічних функцій бозе-рідини є представлення отриманих результатів в графічному вигляді, якому, звичайно, передують чисельні розрахунки. При цьому відкритим залишається питання про вигляд міжатомного потенціалу взаємодії в гелії. Відповідь на нього дослідники намагаються дати, використовуючи різноманітні модельні потенціали. Ми пішли іншим шляхом, скориставшись підходом до цієї проблеми, запропонованим у роботах [140, 202], де міжатомний потенціал взаємодії був відновлений за експериментальними даними. Вхідною інформацією про потенціал взаємодії в наших обчисленнях є екстрапольовані до температури абсолютного нуля експериментальні результати для структурного фактора. Чисельний розрахунок термодинамічних функцій, як і у випадку парного структурного фактора, проводився з урахуванням знайденої раніше ефективної маси.

7.2 Загальні викладки

Середню енергію системи N безспінових бозе-частинок з координатами $(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ можна записати наступним чином:

$$E = \langle \hat{H} \rangle = \langle \hat{K} \rangle + \langle \hat{\Phi} \rangle, \tag{7.1}$$

де $\hat{H}$ — гамільтоніан системи, $\hat{K}$ — оператор кінетичної, $\hat{\Phi}$ — потенціальної енергії:

$$\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{N}\nabla_j^2, \tag{7.2}$$

$$\hat{\Phi} = \sum_{1\le i<j\le N}\Phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|), \tag{7.3}$$

а усереднення проводиться з матрицею густини взаємодіючих бозе-частинок із виділеною матрицею густини ідеального бозе-газу, яка враховує прямі три- і чотиричастинкові кореляції:

$$R(\rho|\rho') \;=\; R_N^0(r|r')\exp[U], \tag{7.4}$$

де

$$\begin{aligned} U = \ln\big[R(\rho|\rho')/R_N^0(r|r')\big] = c_0^{(pr)} + \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} c_2^{(pr)}(1^{j1}, -1^{i_1})\big(\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1} + \rho_{\mathbf{q}_1}^{1-j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{1-i_1}\big) + \\ + c_0 + \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1} c_2(1^{j1}, -1^{i_1})\left(\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1} + \rho_{\mathbf{q}_1}^{1-j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{1-i_1}\right) + \\ + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{1} c_3(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3})\big(\rho_{\mathbf{q}_1}^{i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{i_2}\rho_{\mathbf{q}_3}^{i_3} + \rho_{\mathbf{q}_1}^{1-i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{1-i_2}\rho_{\mathbf{q}_3}^{1-i_3}\big) + \\ + \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{i_1,i_2=0}^{1}\sum_{j_1,j_2=0}^{1} c_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2})\times \\ \times\left(\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{j_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}^{i_2} + \rho_{\mathbf{q}_1}^{1-j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{1-i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{1-j_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}^{1-i_2}\right). \end{aligned} \tag{7.5}$$

7.3 Середня кінетична енергія

Скористаємося результатами роботи [142] і запишемо вираз для середнього значення кінетичної енергії в наступний спосіб:

$$\left\langle \hat{K} \right\rangle = \left\langle \hat{K}_1 \right\rangle + \left\langle \hat{K}_2 \right\rangle + \left\langle \hat{K}_3 \right\rangle, \tag{7.6}$$

де

$$\left\langle \hat{K}_1 \right\rangle = \frac{\int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N \left[P_{pr}(\rho|\rho') P(\rho|\rho') \sum\limits_{j=1}^{N} \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_j^2}{2m} \right) R_N^0(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \right]_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}}}{\int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N P_{pr}(\rho|\rho) P(\rho|\rho) R_N^0(\mathbf{r}|\mathbf{r})}, \tag{7.7}$$

$R_N^0(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ — це скорочений запис $R_N^0(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N|\mathbf{r}'_1, ..., \mathbf{r}'_N)$, а $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ — це, відповідно, скорочений запис виразу: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}'_N = \mathbf{r}_N$.

Застосувавши теорему Блоха: $-\partial R_N^0/\partial\beta = \hat{K} R_N^0$ до написаної вище рівності, знайдемо, що середнє

$$\left\langle \hat{K}_1 \right\rangle = \frac{\partial}{\partial\beta'} \ln\left\{ \int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N P_{pr}(\rho|\rho) P(\rho|\rho) R_N^0(\mathbf{r}|\mathbf{r};\beta') \right\}_{\beta'=\beta}, \tag{7.8}$$

яке у прийнятому нами наближенні “двох сум за хвильовим вектором” можна подати у вигляді:

$$\left\langle \hat{K}_1 \right\rangle = \frac{\partial}{\partial\beta'} \ln\left\{ \int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N P_{pr}(\rho|\rho) R_N^0(\mathbf{r}|\mathbf{r};\beta') \right\}_{\beta'=\beta} + \\ + \frac{\partial}{\partial\beta'} \ln\left[\langle P(\rho|\rho) \rangle \right]_{\beta'=\beta}. \tag{7.9}$$

Перший доданок у наведеному виразі розрахований в роботі [142], а середнє $\langle P(\rho|\rho) \rangle$ записується формулою (5.2).

Пропускаючи громіздкі проміжні обчислення, для величини $\left\langle \hat{K}_1 \right\rangle$ в результаті отримаємо такий вираз:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{K}_1 \right\rangle &= \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\varepsilon_q}{z_0^{-1} e^{\beta\varepsilon_q} - 1} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\lambda_q}{1+\lambda_q S_0(q)} \frac{\partial S_0(q)}{\partial\beta} - \\
&- \frac{1}{8N} \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} \left[\prod_{i=1}^{2} \frac{\lambda_{q_i}}{1+\lambda_{q_i} S_0(q_i)} \right] \left\{ \frac{\partial S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2)}{\partial\beta} - \right. \\
&- \left. \left[\sum_{j=1}^{2} \frac{\lambda_{q_j}}{1+\lambda_{q_j} S_0(q_j)} \frac{\partial S_0(q)}{\partial\beta} \right] S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) \right\} + \\
&+ \frac{1}{12N} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} \left[\prod_{i=1}^{3} \frac{\lambda_{q_i}}{1+\lambda_{q_i} S_0(q_i)} \right] \left\{ 2 S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \times \right. \\
&\times \left. \frac{\partial S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}{\partial\beta} - \left[\sum_{j=1}^{3} \frac{\lambda_{q_j}}{1+\lambda_{q_j} S_0(q_j)} \frac{\partial S_0(q)}{\partial\beta} \right] \left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \right]^2 \right\} - \\
&- 2 \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} \frac{C_2(\mathbf{q}_1)}{[1+\lambda_{q_1} S_0(q_1)]^2} \frac{\partial S_0(q_1)}{\partial\beta} - \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \times \\
&\times \sum_{\substack{\{i,j\}=\{1,2\}, \\ \{2,3\},\{3,1\}}} \frac{1}{[1+\lambda_{q_i} S_0(q_i)]^2} \frac{S_0(q_j)}{1+\lambda_{q_j} S_0(q_j)} \frac{\partial S_0(q_i)}{\partial\beta} - \\
&- \frac{2}{N} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} \frac{C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}{[1+\lambda_{q_1} S_0(q_1)][1+\lambda_{q_2} S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3} S_0(q_3)]} \times \\
&\times \left(\frac{\partial S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}{\partial\beta} - \left[\sum_{j=1}^{3} \frac{\lambda_{q_j}}{1+\lambda_{q_j} S_0(q_j)} \frac{\partial S_0(q)}{\partial\beta} \right] S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \right) + \\
&+ \frac{12}{N} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} C_3^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \sum_{\substack{\{i,j,l\}=\{1,2,3\}, \\ \{2,3,1\},\{3,1,2\}}} \frac{1}{[1+\lambda_{q_i} S_0(q_i)]^2} \times \\
&\times \frac{S_0(q_j)}{1+\lambda_{q_j} S_0(q_j)} \frac{S_0(q_l)}{1+\lambda_{q_l} S_0(q_l)} \frac{\partial S_0(q_i)}{\partial\beta}.
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

Тепер перейдемо до розрахунку наступних середніх: $\left\langle \hat{K}_2 \right\rangle$ і $\left\langle \hat{K}_3 \right\rangle$, вирази для яких легко записати, скориставшись результатами роботи [142]:

$$\left\langle \hat{K}_2 \right\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\langle \sum_{j=1}^{N} \left(\nabla_j^2 U + [\nabla_j U]^2 \right) |_{\mathbf{r}'_1=\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}'_N=\mathbf{r}_N} \right\rangle,$$

$$\left\langle \hat{K}_3 \right\rangle = \frac{\hbar^2}{4m} \left\langle \sum_{j=1}^{N} \nabla_j^2 U + [\nabla_j U]^2 \right\rangle.$$

Якщо перейти до представлення колективних змінних, то для величин $\left\langle \hat{K}_2 \right\rangle$ і $\left\langle \hat{K}_3 \right\rangle$ будемо мати:

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{K}_2 \right\rangle &= \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \frac{\hbar^2 q_1^2}{2m} \left(\left\langle \rho_{\mathbf{q}_1} \frac{\partial U}{\partial \rho_{\mathbf{q}_1}} |_{\rho=\rho'} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 U}{\partial \rho_{\mathbf{q}_1} \partial \rho_{-\mathbf{q}_1}} |_{\rho=\rho'} \right\rangle - \right.\\ &\left. - \left\langle \frac{\partial U}{\partial \rho_{\mathbf{q}_1}} \frac{\partial U}{\partial \rho_{-\mathbf{q}_1}} |_{\rho=\rho'} \right\rangle \right) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1 \neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2 \neq 0}} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \frac{\hbar^2 (\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2)}{2m} \times \\ &\times \left(\left\langle \rho_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2} \frac{\partial^2 U}{\partial \rho_{\mathbf{q}_1} \partial \rho_{\mathbf{q}_2}} |_{\rho=\rho'} \right\rangle + \left\langle \rho_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2} \frac{\partial U}{\partial \rho_{\mathbf{q}_1}} \frac{\partial U}{\partial \rho_{\mathbf{q}_2}} |_{\rho=\rho'} \right\rangle \right),\end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\left\langle \hat{K}_3 \right\rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \hat{K}_2 \left|_{U(\rho|\rho')=U(\rho|\rho)} \right. \right\rangle, \quad (7.12)$$

або в явному вигляді:

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{K}_3 \right\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \frac{\hbar^2 q_1^2}{2m} \left(- \left\langle \rho_{\mathbf{q}_1} \frac{\partial U}{\partial \rho_{\mathbf{q}_1}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 U}{\partial \rho_{\mathbf{q}_1} \partial \rho_{-\mathbf{q}_1}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial U}{\partial \rho_{\mathbf{q}_1}} \frac{\partial U}{\partial \rho_{-\mathbf{q}_1}} \right\rangle \right) - \\ &- \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1 \neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2 \neq 0}} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \frac{\hbar^2 (\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2)}{2m} \left(\left\langle \rho_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2} \frac{\partial^2 U}{\partial \rho_{\mathbf{q}_1} \partial \rho_{\mathbf{q}_2}} \right\rangle + \left\langle \rho_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2} \frac{\partial U}{\partial \rho_{\mathbf{q}_1}} \frac{\partial U}{\partial \rho_{\mathbf{q}_2}} \right\rangle \right),\end{aligned}$$

(7.13)

причому у цій формулі $U \equiv U(\rho|\rho)$.

Знак середнього $\langle ... \rangle$ тут знову має зміст усереднення з матрицею густини взаємодіючих бозе-частинок, яка враховує прямі три- та чотиричастинкові кореляції:

$$\langle ... \rangle = \frac{\int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r) P_{pr}(\rho|\rho) P(\rho|\rho)(...)}{\int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r) P_{pr}(\rho|\rho) P(\rho|\rho)}.$$

Зауважимо також, що

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \rho_{\mathbf{q}_1}}\right|_{\rho=\rho'} = -\frac{\lambda_{q_1}}{2}\rho_{-\mathbf{q}_1} + 2C_2(\mathbf{q}_1)\rho_{-\mathbf{q}_1} +$$
$$+ \frac{3}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q}_2 \neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \sum_{\mathbf{q}_3 \neq 0} C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3} + \frac{4}{N} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}, \tag{7.14}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}}\right|_{\rho=\rho'} = 4c_2^{(pr)}(1,-1) + 2\widetilde{C}_2(\mathbf{q}_1) + \frac{4}{N}\sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \widetilde{C}_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}, \tag{7.15}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}}\right|_{\rho=\rho'} = \frac{6}{\sqrt{N}}\widetilde{C}_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)\rho_{-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2} + \frac{2}{N}\widetilde{C}_4'(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_2}, \tag{7.16}$$

де

$$\widetilde{C}_2(\mathbf{q}_1) = \left[c_2(1,-1) + c_2(-1,1)\right],$$

$$\widetilde{C}_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \sum_{j_2, i_2 = 0}^{1} \left[c_4(1,-1,2^{j_2},-2^{i_2}) + c_4(1,-1,2^{1-j_2},-2^{1-i_2})\right],$$

$$\widetilde{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)=\sum_{i_3=0}^{1}\left[c_3(1,2,3^{i_3})+c_3(1,2,3^{1-i_3})\right],$$

$$\widetilde{C}'_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)=\sum_{j_1,i_2=0}^{1}[c_4(1,-1^{i_1},2,-2^{i_2})+c_4(-1^{i_1},1,2,-2^{i_2})+$$

$$+c_4(1,-1^{i_1},-2^{j_2},2)+c_4(-1^{i_1},1,-2^{i_2},2)]. \tag{7.17}$$

Явні вирази для величин $\widetilde{C}_2(\mathbf{q}_1)$, $\widetilde{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)$, $\widetilde{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)$ є такими:

$$\widetilde{C}_2(\mathbf{q_1})=\overline{C}_2(\mathbf{q_1})+\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q_2}\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{q_1^2+q_2^2}{\alpha_{q_2}\,\mathrm{sh}^2[\beta E_{q_1}]\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]}\left\{\frac{\beta}{2}\,\mathrm{ch}[\beta E_{q_1}]\mathrm{ch}[\beta E_{q_2}]-\right.$$

$$-\frac{\mathrm{ch}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]}{2E_{q_2}}-\frac{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{ch}[\beta E_{q_2}]}{2E_{q_1}}+\frac{\mathrm{sh}[\beta(E_{q_1}+E_{q_2})]}{4(E_{q_1}+E_{q_2})}+$$

$$\left.+\frac{\mathrm{sh}[\beta(E_{q_1}-E_{q_2})]}{4(E_{q_1}-E_{q_2})}\right\}-\frac{1}{8}\sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\frac{Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})}{\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\tilde{E}\,\mathrm{sh}^2[\beta E_{q_1}]\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\mathrm{sh}[\beta E_{q_3}]}\times$$

$$\times\left\{\frac{\beta}{4}\,\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\beta(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})-\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}\right]}{2\tilde{E}}\times\right.$$

$$\times\left(\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}\right]+\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(-\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_1}\right]\right)Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})+$$

$$+\left[-\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right]}{2\tilde{E}_{q_2}}\left(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+2E_{q_3})\right]+\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right]\right)+\right.$$

$$+\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})\right]}{2(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})}\left(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}-\tilde{E}_{q_1})\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+2\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]\right)\right]Q(\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})+$$

$$+\left[-\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}\right]}{2\tilde{E}_{q_1}}\left(-\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}\right]+\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+2\tilde{E}_{q_2}+2E_{q_3})\right]\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]}{2(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})}\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]\right]Q(-\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})+$$

$$+\left[-\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}{2E_{q_3}}\left(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(2\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]+\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]\right)+\right.$$

$$+\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})\right]}{2(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})}\left(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}-\tilde{E}_{q_1})\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\ \mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}+2E_{q_3})\right]\right)\right]Q(-\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})\Big\}-\Big\{\alpha_{q_{1,2,3}}=1\Big\}, \tag{7.18}$$

де позначення $\left\{\alpha_{q_{1,2,3}}=1\right\}$ означає весь вираз після знаку рівності, в якому всюди покладено $\alpha_{q_1}=\alpha_{q_2}=\alpha_{q_3}=1$.

$$\widetilde{C}_3(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},\mathbf{q_3})=-\frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\mathbf{q_1}\mathbf{q_2})}{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_3}]}\times$$

$$\times\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}(\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\pm_1\pm_2 1)\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\left(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}\right)\right]\times$$

$$\times\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\left(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3}\right)\right]}{\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3}}-\Big\{\alpha_{q_{1,2,3}}=1\Big\}. \tag{7.19}$$

$$\widetilde{C}_4(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2})=\overline{C}_4(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2})-\frac{1}{64}\sum_{\mathbf{q_1}\neq0}\sum_{\mathbf{q_2}\neq0}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(q_1^2+q_2^2)}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{sh}^2\left[\beta E_{q_2}\right]}\times$$

$$\times\Big\{2\beta\,\mathrm{ch}\left[\beta E_{q_2}\right]+\frac{2\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]}{E_{q_2}}-\frac{2\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{ch}[\beta E_{q_2}]}{E_{q_1}}+\frac{\mathrm{sh}[\beta(E_{q_1}+E_{q_2})]}{(E_{q_1}+E_{q_2})}+$$

$$
+\frac{\mathrm{sh}[\beta(E_{q_1}-E_{q_2})]}{(E_{q_1}-E_{q_2})}\Bigg\}-\frac{1}{64}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\frac{Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})}{\alpha_{q_3}\tilde{E}\,\mathrm{sh}^2[\beta E_{q_1}]\mathrm{sh}^2[\beta E_{q_2}]\mathrm{sh}[\beta E_{q_3}]}\times
$$

$$
\times\Bigg\{\Bigg(\frac{\beta}{2}\,\mathrm{ch}\Big[\beta\tilde{E}_{q_2}\Big]\mathrm{sh}\,[\beta E_{q_3}]-\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}\right]}{2\tilde{E}}\Bigg(\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}-E_{q_3})\right]+
$$

$$
+\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}\right]\Bigg)\,Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})+\Bigg[\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right]}{\tilde{E}_{q_2}}\Big(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right]+
$$

$$
+\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+2E_{q_3})\right]\Big)-\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})\right]}{(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})}\Big(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_2}\right]\times
$$

$$
\times\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})\right]+\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}-E_{q_3})\right]\Big)\Bigg]\,Q(\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})+
$$

$$
+\Bigg[\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}\right]}{\tilde{E}_{q_1}}\Big(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}+2E_{q_3}\right]+\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}\right]\Big)-
$$

$$
-\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]}{(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})}\,\mathrm{sh}\left[\beta\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}-E_{q_3})\right]\Bigg]\,Q(-\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})+
$$

$$
+\Bigg[\frac{\mathrm{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}{E_{q_3}}\,\mathrm{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right]-\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})\right]}{(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})}\Big(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_2}\right]\times
$$

$$
\times\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})\right]+\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_1}+2E_{q_3})\right]\Big)\Bigg]Q(\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})\,\Bigg\}-
$$

$$
-\left\{\alpha_{q_{1,2,3}}=1\right\}.
$$

Підставляючи у рівності (7.11) і (7.13) отримані вирази (7.14), (7.15), (7.16), а також врахувавши вирази для всіх середніх $\langle ... \rangle$, в прийнятому наближенні “двох сум за хвильовим вектором” знайдемо:

$$\left\langle \hat{K_{23}} \right\rangle = \left\langle \hat{K_2} \right\rangle + \left\langle \hat{K_3} \right\rangle = \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \frac{\hbar^2 q_1^2}{2m} \left\{ \frac{\lambda_{q_1}^2}{4} S(q_1) - \frac{\lambda_{q_1}}{2} + 4c_2^{(pr)}(1,-1) - \right.$$

$$-2C_2(\mathbf{q}_1) \frac{\lambda_{q_1} S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1} S_0(q_1)} + 2(C_2(\mathbf{q}_1) - \widetilde{C}_2(\mathbf{q}_1)) -$$

$$-\frac{3\lambda_{q_1}}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \sum_{\substack{\mathbf{q}_3 \neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) S^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) -$$

$$-\frac{4\lambda_{q_1}}{N} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \frac{S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1} S_0(q_1)} \frac{S_0(q_2)}{1+\lambda_{q_2} S_0(q_2)} +$$

$$+\frac{18}{N} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \sum_{\substack{\mathbf{q}_3 \neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} C_3^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \frac{S_0(q_2)}{1+\lambda_{q_2} S_0(q_2)} \frac{S_0(q_3)}{1+\lambda_{q_3} S_0(q_3)} +$$

$$\left. + \frac{4}{N} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} (C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) - \widetilde{C}_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)) \frac{S_0(q_2)}{1+\lambda_{q_2} S_0(q_2)} \right\} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{\substack{\mathbf{q}_2 \neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2 \neq 0}} \frac{\hbar^2 (\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2)}{2m} \times$$

$$\times \left\{ \frac{6}{\sqrt{N}} \frac{(C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - \widetilde{C}_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)) S_0(|\mathbf{q_1} + \mathbf{q_2}|)}{1+\lambda_{|\mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}|} S_0(|\mathbf{q_1} + \mathbf{q_2}|)} + \right.$$

$$+ \frac{\lambda_{q_1} \lambda_{q_2}}{4} S^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - \frac{3}{\sqrt{N}} C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \times$$

$$\times \left(\frac{\lambda_{q_1} S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1} S_0(q_1)} \frac{S_0(|\mathbf{q_1} + \mathbf{q_2}|)}{1+\lambda_{|\mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}|} S_0(|\mathbf{q_1} + \mathbf{q_2}|)} + \frac{\lambda_{q_2} S_0(q_2)}{1+\lambda_{q_2} S_0(q_2)} \times \right.$$

$$\left. \left. \times \frac{S_0(|\mathbf{q_1} + \mathbf{q_2}|)}{1+\lambda_{|\mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}|} S_0(|\mathbf{q_1} + \mathbf{q_2}|)} \right) \right\}, \tag{7.20}$$

де $S(q_1)$ (5.3), $S^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ (5.7) — це дво- і тричастинковий структурні фактори багатобозонної системи.

7.4 Середня потенціальна енергія

В представленні колективних змінних потенціальна енергія (7.3) запишеться так:

$$\Phi = \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 + \frac{N}{2V}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\nu_q(\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}} - 1). \tag{7.21}$$

Беручи до уваги явний вигляд для величини $S(q) = \langle\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\rangle$ (5.3), а також рівність

$$\frac{N}{2V}\nu_q = \frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_q^2 - 1), \tag{7.22}$$

для середнього значення потенціальної енергії отримаємо наступний вираз:

$$\langle\Phi\rangle = \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 + \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_q^2 - 1)\left(\frac{S_0(q)}{1+\lambda_q S_0(q)} - 1\right) -$$

$$-\frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_{q_1}^2 - 1)\frac{1}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{\lambda_{q_2}S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)}{1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)} +$$

$$+\frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\alpha_{q_1}^2 - 1)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\frac{\lambda_{q_2}\lambda_{q_3}\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right]^2}{[1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]} +$$

$$+4\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}C_2(\mathbf{q}_1)\frac{(\alpha_{q_1}^2 - 1)S_0^2(q_1)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2} + \frac{12}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\alpha_{q_1}^2 - 1)S_0(q_1)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\times$$

$$\times\sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\frac{C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{[1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]} + \frac{8}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\alpha_{q_1}^2 - 1)S_0^2(q_1)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\times$$

$$\times\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)S_0(q_2)}{1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)} + \frac{72}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\alpha_{q_1}^2 - 1)S_0^2(q_1)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\times$$

$$\times \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} C_3^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\frac{S_0(q_2)S_0(q_3)}{[1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]}. \tag{7.23}$$

З написаного вище виразу потрібно виключити величину ν_0. Зробити це можна за допомогою відомого співвідношення:

$$c^2 = \frac{N}{m}\frac{\partial^2 E_0}{\partial N^2}, \tag{7.24}$$

де c — швидкість першого звуку в бозе-системі при температурі абсолютного нуля, N — кількість частинок, m — маса частинки, E_0 — енергія основного стану в наближенні “двох сум за хвильовим вектором”.

Отож для величини ν_0 будемо мати:

$$\nu_0 = \frac{mc^2}{\rho} + \frac{1}{8N\rho}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\varepsilon_q\frac{1}{\alpha_q}\left(\alpha_q - \frac{1}{\alpha_q}\right)^2 + \nu_0^{(2)}, \tag{7.25}$$

де

$$\nu_0^{(2)} = -\frac{\hbar^2}{48mN^2\rho}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\Bigg\{2\left(f_1 - \frac{f_2^2}{f_3} - 2f_4\right) + 2\Bigg(f_1' - \frac{2f_2f_2'}{f_3} +$$

$$+\frac{f_2^2 f_3'}{f_3^2} - 2f_4'\Bigg) + \left(f_1'' - \frac{2f_2''+2(f_2')^2}{f_3} + \frac{4f_2f_2'f_3' + f_2^2f_3''}{f_3^2} - \frac{2f_2^2(f_3')^2}{f_3^3} - 2f_4''\right)\Bigg\}.$$

Явні вирази для величин $f_1, f_2, f_3, f_4, f_1', f_2', f_3', f_4', f_1'', f_2'', f_3'', f_4''$ є такі:

$$f_1 = \left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_1}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_2}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_3}}\right),$$

$$f_1' = \frac{1}{2}\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)\sum_{\substack{\{i,j,k\}=\{1,2,3\},\\ \{2,3,1\},\{3,1,2\}}}\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}^3}\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_k}}\right),$$

$$f_1'' = \frac{1}{4}\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)\sum_{\substack{\{i,j,k\}=\{1,2,3\},\\ \{2,3,1\},\{3,1,2\}}}\left\{-3\frac{(\alpha_{q_i}^2-1)^2}{\alpha_{q_i}^5}\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_k}}\right)+\right.$$

$$\left.+\,2\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}^3}\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}^3}\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_k}}\right)\right\},$$

$$f_2 = \sum_{1\le i<j\le 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)(\alpha_{q_i}-1)(\alpha_{q_j}-1),$$

$$f_2' = \frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left\{(\alpha_{q_i}-1)\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}}+(\alpha_{q_j}-1)\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}}\right\},$$

$$f_2'' \;=\; \frac{1}{4}\sum_{1\le i<j\le 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left\{2\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}}\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}}-(\alpha_{q_i}-1)\frac{(\alpha_{q_j}^2-1)^2}{\alpha_{q_j}^3}-\right.$$

$$\left.-\;\;(\alpha_{q_j}-1)\frac{(\alpha_{q_i}^2-1)^2}{\alpha_{q_i}^3}\right\},$$

$$f_3 = \alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\sum_{j=1}^{3}q_j^2\alpha_{q_j},$$

$$f_3' = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\{i,j,k\}=\{1,2,3\},\\ \{2,3,1\},\{3,1,2\}}}q_j^2\left\{2\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}}+\alpha_{q_j}^2\alpha_{q_k}\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}}+\alpha_{q_j}^2\alpha_{q_i}\frac{\alpha_{q_k}^2-1}{\alpha_{q_k}}\right\},$$

$$f_3'' = \frac{1}{4}\sum_{\substack{\{i,j,k\}=\{1,2,3\},\\ \{2,3,1\},\{3,1,2\}}}q_j^2\left\{-\alpha_{q_j}^2\alpha_{q_k}\frac{(\alpha_{q_i}^2-1)^2}{\alpha_{q_i}^3}+\alpha_{q_j}^2\alpha_{q_i}\frac{(\alpha_{q_k}^2-1)^2}{\alpha_{q_k}^3}+4\alpha_{q_i}\alpha_{q_j}\times\right.$$

$$\left.\times\;\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}}\frac{\alpha_{q_k}^2-1}{\alpha_{q_k}}+4\alpha_{q_j}\alpha_{q_k}\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}}\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}}+2\alpha_{q_j}^2\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}}\frac{\alpha_{q_k}^2-1}{\alpha_{q_k}}\right\},$$

$$f_4 = \sum_{1 \le i < j \le 3} (\mathbf{q}_i \mathbf{q}_j) \left(1 - \frac{1}{\alpha_{q_i}}\right) \left(1 - \frac{1}{\alpha_{q_j}}\right),$$

$$f_4' = \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le 3} (\mathbf{q}_i \mathbf{q}_j) \left\{ \left(1 - \frac{1}{\alpha_{q_i}}\right) \frac{\alpha_{q_j}^2 - 1}{\alpha_{q_j}^3} + \left(1 - \frac{1}{\alpha_{q_j}}\right) \frac{\alpha_{q_i}^2 - 1}{\alpha_{q_i}^3} \right\},$$

$$f_4'' = \frac{1}{4} \sum_{1 \le i < j \le 3} (\mathbf{q}_i \mathbf{q}_j) \left\{ 2 \frac{\alpha_{q_i}^2 - 1}{\alpha_{q_i}^3} \frac{\alpha_{q_j}^2 - 1}{\alpha_{q_j}^3} - 3 \left(1 - \frac{1}{\alpha_{q_i}}\right) \frac{(\alpha_{q_j}^2 - 1)^2}{\alpha_{q_j}^5} - \right.$$

$$\left. - 3 \left(1 - \frac{1}{\alpha_{q_j}}\right) \frac{(\alpha_{q_i}^2 - 1)^2}{\alpha_{q_i}^5} \right\}.$$

Якщо тепер зі знайдених середніх $\left\langle \hat{K}_1 \right\rangle$, $\left\langle \hat{K}_{23} \right\rangle$, $\left\langle \hat{\Phi} \right\rangle$ виділити тільки внески від парних кореляцій і додати їх, то ми отримаємо вираз для середньої енергії в наближенні парних кореляцій, який збігається з уже відомим [142].

7.5 Середні кінетична, потенціальна і повна внутрішня енергія в границі низьких температур

В границі низьких температур парний структурний фактор ідеального бозе-газу рівний одиниці, а його похідна по оберненій температурі рівна нулю. Враховуючи відомі вирази для дво- (5.11) і тричастинкового (5.13) структурних факторів в границі низьких температур, а також те, що

$$\lim_{T \to 0} C_2(\mathbf{q}_1) = \frac{1}{2} \lim_{T \to 0} \widetilde{C}_2(\mathbf{q}_1) = \frac{1}{2} a_2(\mathbf{q}_1),$$

$$\lim_{T \to 0} C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \lim_{T \to 0} \widetilde{C}_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \frac{1}{6} a_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3),$$

$$\lim_{T\to 0} C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) = \lim_{T\to 0} \widetilde{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) = \frac{1}{8} a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2), \tag{7.26}$$

для середньої кінетичної енергії в границі низьких температур знайдемо такий вираз:

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{K} \right\rangle =& \frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\hbar^2 q^2}{2m}\frac{(\alpha_q-1)^2}{\alpha_q} + \frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \frac{\hbar^2 q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}-1}{\alpha_{q_1}}\left[\prod_{i=1}^{3}\frac{\alpha_{q_i}-1}{\alpha_{q_i}}\right] - \\ & -\frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{\hbar^2 q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2} a_2(\mathbf{q}_1) - \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \frac{\hbar^2 q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}-1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}} \times \\ & \times a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) - \frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{\hbar^2 q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}} a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2) + \\ & + \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \frac{\hbar^2 q_1^2}{2m}\frac{a_3^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}} - \frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2\neq 0}} \frac{\hbar^2(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)}{2m} \times \\ & \times \left(\frac{(\alpha_{q_1}-1)(\alpha_{q_2}-1)}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{|\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|}} - 2\frac{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}-1}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}} a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right).\end{aligned} \tag{7.27}$$

Аналогічно, для середньої потенціальної енергії будемо мати:

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{\Phi} \right\rangle =& N\left(\frac{mc^2}{2} + \frac{\rho\nu_0^{(2)}}{2}\right) + \frac{1}{16}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\hbar^2 q^2}{2m}\left(1-\frac{1}{\alpha_q^2}\right)\left(\alpha_q - \frac{1}{\alpha_q} - 4\alpha_q^2\right) + \\ & + \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\hbar^2 q^2}{8m}\frac{\alpha_q^2-1}{\alpha_q} + \frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \frac{\hbar^2 q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}+1}{\alpha_{q_1}}\left[\prod_{i=1}^{3}\frac{\alpha_{q_i}-1}{\alpha_{q_i}}\right] + \\ & + \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{\hbar^2 q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2} a_2(\mathbf{q}_1) + \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \frac{\hbar^2 q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}} \times\end{aligned}$$

$$\times\, a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)+\frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{\hbar^2 q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}}a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)+$$

$$+\frac{1}{2N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\frac{\hbar^2 q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}a_3^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3). \tag{7.28}$$

Додавши вирази для середніх значень кінетичної і потенціальної енергій та провівши необхідні перетворення, ми отримаємо величину середнього значення повної внутрішньої енергії в границі низьких температур в такому вигляді:

$$E=\left\langle \hat{K}\right\rangle+\left\langle \hat{\Phi}\right\rangle=\frac{N(N-1)}{2V}\nu_0-\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\hbar^2 q^2}{8m}\left(\alpha_q-1\right)^2+$$

$$+\frac{\hbar^2}{48mN}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\left[(q_1^2+q_2^2+q_3^2)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_1}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_2}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_3}}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\sum_{1\le i<j\le 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)(\alpha_{q_i}-1)(\alpha_{q_j}-1)\right)^2\Bigg/\left(\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\sum_{j=1}^{3}q_j^2\alpha_{q_j}\right)\right]-$$

$$-\frac{\hbar^2}{24mN}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\sum_{1\le i<j\le 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_i}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right), \tag{7.29}$$

де величина ν_0 визначається формулою (7.25).

7.6 Середні кінетична, потенціальна і повна внутрішня енергія при високих температурах

В границі високих температур парний, три- і чотиричастинковий структурні фактори багатобозонної системи переходять у відповідні вирази для ідеального бозе-газу, а всі внески від три- і чотиричастинкових кореляцій стають рівними нулю. Тому пошук середнього значення кінетичної енергії в області високих температур зводиться до наступної задачі:

$$\left\langle \hat{K} \right\rangle_{T\to\infty} = \sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0 \\ T\to\infty}} \frac{\varepsilon_q}{z_0^{-1} e^{\beta\varepsilon_q} - 1}, \tag{7.30}$$

оскільки всі інші доданки у згаданій вище границі рівні нулю. Умову для визначення активності z_0 можна записати цим рівнянням:

$$\sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{1}{z_0^{-1} e^{\beta\varepsilon_q} - 1} = N. \tag{7.31}$$

В області високих температур $z_0 \to 0$, тому написана вище умова набуде такого вигляду:

$$z_0 \sum_{\mathbf{q}\neq 0} e^{-\beta\varepsilon_q} = N. \tag{7.32}$$

Переходячи в цій рівності від підсумовування до інтегрування, будемо мати:

$$z_0 \frac{4\pi V}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty q^2 e^{-\beta\frac{\hbar^2}{2m}q^2} dq = z_0 \frac{V}{8} \left(\frac{2m}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}} = N. \tag{7.33}$$

Звідси

$$z_0^{-1} = \frac{1}{8\rho} \left(\frac{2m}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}}. \tag{7.34}$$

Підставивши щойно отриманий результат у рівність (7.30), провівши відповідні спрощення і перейшовши від підсумовування до інтегрування, знайдемо, що

$$\left\langle \hat{K} \right\rangle_{T\to\infty} = \frac{3}{2} NT. \tag{7.35}$$

Ми отримали результат, який збігається з виразом для ідеального газу.

Для значення середньої потенціальної енергії в границі високих температур будемо мати:

$$\langle \Phi \rangle_{T\to\infty} = \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 + \frac{N}{2V}\sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0 \\ T\to\infty}} \nu_q(\langle \rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\rangle - 1) = \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0, \quad (7.36)$$

оскільки

$$\langle \rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\rangle_{T\to\infty} = 1.$$

Об'єднуючи отримані результати, для внутрішньої енергії багатобозонної системи в області високих температур здобудемо такий вираз:

$$E = \left\langle \hat{K} \right\rangle_{T\to\infty} + \langle \Phi \rangle_{T\to\infty} = \frac{3}{2}NT + \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0, \quad (7.37)$$

який збігається з результатом роботи [11].

7.7 Чисельні розрахунки

Для чисельного розрахунку внутрішньої енергії рідкого ^{4}He скористаємося знайденими виразами для $\langle K_1\rangle$ (7.10), $\langle K_{23}\rangle$ (7.20) і $\langle \Phi\rangle$ (7.23). Величину ν_0 будемо шукати за наведеною вище формулою (7.25). Щоб виконати поставлену задачу потрібно від підсумовування перейти до інтегрування за відомим правилом (2.11). У нашому випадку двох сум це правило є дещо складнішим:

$$\frac{1}{N^2}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} = \frac{1}{8\pi^4\rho^2}\int_0^\infty q_1 dq_1 \int_0^\infty q_2 dq_2 \int_{|q_1-q_2|}^{|q_1+q_2|} q_3 dq_3. \quad (7.38)$$

При чисельних розрахунках кінетичної, потенціальної і повної внутрішньої енергії у виразах, які відтворюють наближення парних кореляцій, ми використовували ефективну масу атома ^{4}He, натомість у виразах, які містять дві суми за хвильовим вектором, стоїть “гола” маса.

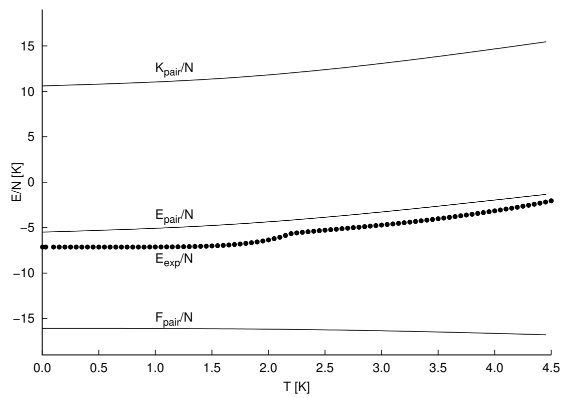

Рис. 7.1: Температурна залежність середніх кінетичної, потенціальної і повної внутрішньої енергії рідкого ^{4}He в наближенні парних кореляцій. K_{pair}/N — середня кінетична енергія, F_{pair}/N — середня потенціальна енергія, E_{pair}/N — середнє значення повної внутрішньої енергії, E_{exp}/N — експериментальні дані [179].

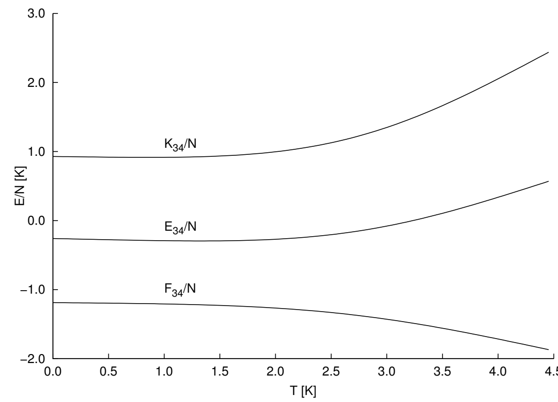

Рис. 7.2: Внесок три- ча чотиричастинкових кореляцій у значення середніх кінетичної, потенціальної і повної внутрішньої енергії рідкого ^{4}He. K_{34}/N — внесок у середнє значення кінетичної енергії, F_{34}/N — внесок у середнє значення потенціальної енергії, E_{34}/N — внесок у середнє значення повної внутрішньої енергії.

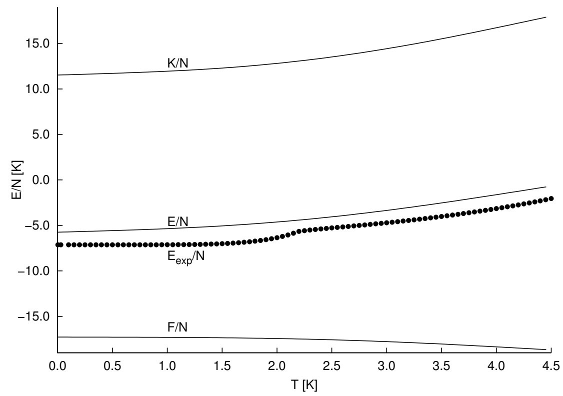

Рис. 7.3: Температурна залежність середніх кінетичної, потенціальної і повної внутрішньої енергії рідкого ^{4}He в наближенні "двох сум за хвильовим вектором". K/N — середня кінетична енергія, F/N — середня потенціальна енергія, E/N — середнє значення повної внутрішньої енергії, E_{exp}/N — експериментальні дані [179].

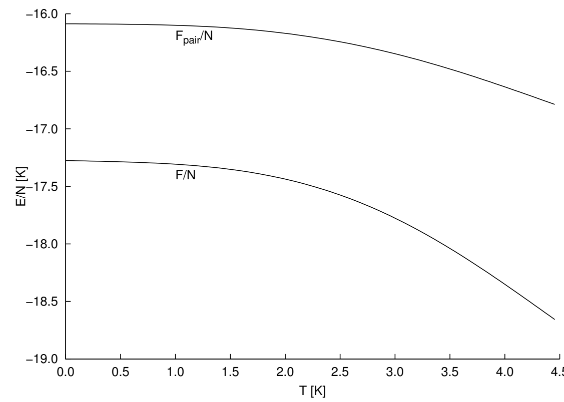

Рис. 7.4: Температурна залежність середнього значення потенціальної енергії рідкого ^{4}He. F_{pair}/N — наближення парних кореляцій, F/N — наближення "двох сум за хвильовим вектором".

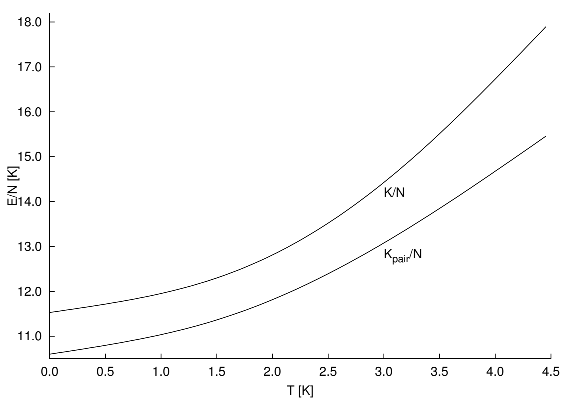

Рис. 7.5: Температурна залежність середнього значення кінетичної енергії рідкого ^{4}He. K_{pair}/N — наближення парних кореляцій, K/N — наближення "двох сум за хвильовим вектором".

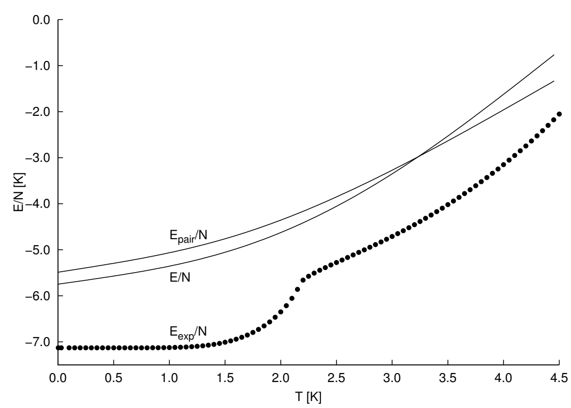

Рис. 7.6: Температурна залежність середнього значення повної внутрішньої енергії рідкого ^{4}He. E_{pair}/N — наближення парних кореляцій, E/N — наближення "двох сум за хвильовим вектором", E_{exp}/N — експериментальні дані [179].

7.8 Висновок

В цьому розділі були знайдені вирази для середніх значень кінетичної, потенціальної та повної внутрішньої енергії в наближенні “двох сум за хвильовим вектором” із врахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій в широкотемпературній ділянці. В границі низьких температур для внутрішньої енергії ми отримали вже відоме значення [125, 136]. Ці самі слова будуть актуальними і стосовно границі високих температур. Знайдені вирази є доволі громіздкими. Для їх аналізу були застосовані чисельні методи і в результаті здобуто графічне представлення температурної залежності середніх значень кінетичної, потенціальної і повної внутрішньої енергії рідкого ^{4}He. Результати, які ми отримали в наближенні “двох сум за хвильовим вектором”, краще узгоджуються з експериментальними даними в порівнянні з наближенням парних кореляцій.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано такі основні задачі:

1. Вперше за допомогою методу колективних змінних побудовано мікроскопічну теорію бозе-рідини в широкотемпературній ділянці, яка дає можливість врахувати й оцінити внески прямих три- та чотиричастинкових кореляцій у вирази для величин, що безпосередньо стосуються опису системи багатьох бозонів. Запропонована теорія була застосована для дослідження такої квантової рідини, як рідкий ^{4}He. Отримані теоретичні вирази в границі низьких та високих температур відтворюють відомі результати, а в широкотемпературній ділянці добре узгоджуються з експериментальними даними й покращують результати, знайдені раніше без урахування прямих три- та чотиричастинкових кореляцій.

2. З перших принципів у представленні колективних змінних вперше отримано вираз для повної матриці густини в широкій області температур у post-RPA наближенні, яка містить не тільки парні, але також прямі три- та чотиричастинкові кореляції. Кінцевий вираз представлено у вигляді добутку матриці густини ідеального бозе-газу на фактор, який враховує взаємодію. Завдяки інтегруванню діагональних елементів цієї матриці було отримано вираз для статистичної суми в post-RPA наближенні.

3. За допомогою функціонального інтегрування і кумулянтних розкладів вперше знайдено вираз для якобіана переходу від декартових до колективних змінних в широкій області температур у так званому наближенні “двох сум за хвильовим вектором”; він містить внески від матриці густини невзаємодіючих бозе-частинок і є результатом усереднення функції переходу Зубарєва за станами ідеального бозе-газу.

4. Виходячи з умов, необхідних для усунення інфрачервоних розбіжностей, які виникають у нашій теорії і є характерними для критичних явищ, вперше за допомогою теорії збурень було знайдено коректний вираз для ефективної маси атома ^{4}He в широкій ділянці температур, за винятком вузької флуктуаційної області ($0.97 \lesssim T/T_c \leq 1$), де не працює пертурбативний метод розрахунку. У границі низьких температур величина ефективної маси є близькою до значень, знайдених різними методами раніше. Введення ефективної маси дозволило змістити температуру бозе-конденсації до $T_c = 2.18$K, що майже співпадає з експериментально спостережуваним значенням $T_c = 2.168$K, а також поправити теоретично розрахований хід кривої теплоємності, зокрема в околі λ-переходу. Запропонований підхід до розрахунку ефективної маси дав також можливість знайти так званий малий критичний індекс (індекс Фішера) $\eta = 0.135$ у наближенні хаотичних фаз.

5. Вперше знайдено вирази для таких структурних і термодинамічних функцій рідкого ^{4}He в широкотемпературній області в post-RPA наближенні: дво-, три- і чотиричастинковий структурні фа-

ктори, швидкість першого звуку, середні кінетична, потенціальна і повна внутрішня енергія. Проведено порівняння внесків парних і прямих три- та чотиричастинкових кореляцій. З метою візуалізації результатів і їх порівняння з експериментальними даними було проведено чисельний розрахунок більшості з названих величин. Вхідною інформацією про взаємодію були екстрапольовані до нуля температур експериментальні дані для структурного фактора і швидкості першого звуку в рідкому ^{4}He.

Бібліоґрафія

[1] Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor / M. H. Anderson, J. N. Ensher, M. R. Matthews et al. // Science. — 1995. — Vol. 269, No. 5221. — P. 198–201.

[2] Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions / C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, R. G. Hulet // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol. 75, No. 9. — P. 1687–1690.

[3] Bose–Einstein condensation in a gas of sodium atoms / K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews et al. // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol. 75, No. 22. — P. 3969–3973.

[4] *Adriaans M. J.* Second sound measurements very near the lambda point / M. J. Adriaans, J. A. Lipa // Physica B: Condensed Matter. — 2000. — Vol. 284–288, No. 1. — P. 49–50.

[5] Experiments on the Self-Organized Critical State of ^{4}He / A. R. Chatto, A. M. Lee, R. V. Duncan, D. L. Goodstein // J. Low Temp. Phys. — 2007. — Vol. 148, No. 5-6. — P. 519–526.

[6] *Shosuke S.* Logarithmic Singularity of Specific Heat in Liquid Helium II at the λ Point / S. Shosuke // J. Low Temp. Phys. — 2007. — Vol. 148, No. 3–4. — P. 97–102.

[7] *Jackson H. W.* Liquid ^{4}He: Contributions to First Principles Theory. II. Quantized Vortices and the λ Transition / H. W. Jackson // J. Low Temp. Phys. — 2009. — Vol. 155, No. 1–2. — P. 1–82.

[8] *Yuanming L.* Search for Enhancement of the Isobaric Thermal Expansion Coefficient of Superfluid ^{4}He near T_λ by a Heat Current / L. Yuanming, E. L. Melora, Ulf E. I. // J. Low Temp. Phys. — 2011. — Vol. 163, No. 1-2. — P. 13–25.

[9] *Perron J. K.* Specific Heat and Superfluid Density of ^{4}He near T_λ of a 33.6 nm Film Formed Between Si Wafers / J. K. Perron, F. M. Gasparini // J. Low Temp. Phys. — 2013. — Vol. 171, No. 5–6. — P. 589–598.

[10] *Боголюбов Н. Н.* Волновая функция нижнего состояния системы взаимодействующих бозе-частиц / Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев // Журн. эксп. теор. физ. — 1955. — Т. 28, № 2. — С. 129–139.

[11] *Vakarchuk I. O.* A self-consistent theory of liquid ^{4}He / I. O. Vakarchuk // J. Phys. Stud. — 2004. — Vol. 8, No. 3. — P. 223–240.

[12] *Вакарчук И. А.* К проблеме бозе-эйнштейновской конденсации в жидком ^{4}He / И. А. Вакарчук // Укр. физ. журн. — 1990. — Т. 29, № 7. — С. 1112–1113.

[13] *Вакарчук И. А.* Бозе-конденсат в жидком ^{4}He / И. А. Вакарчук // Теор. мат. физ. — 1985. — Т. 65, № 2. — С. 285–295.

[14] *Вакарчук И. А.* Свободная энергия многобозонной системы при низких температурах / И. А. Вакарчук, П. А. Глушак // Теор. мат. физ. — 1988. — Т. 75, № 1. — С. 101–113.

[15] *Вакарчук И. А.* Термодинамические функции жидкого гелия-4 при низких температурах / И. А. Вакарчук, П. А. Глушак. — Киев, ИТФ АН УССР, 1988. — 28 с. — Препринт / АН УССР. Институт теоретической физики, 88-29Р.

[16] *Вакарчук И. А.* Матрицы плотности сверхтекучего гелия-4. II / И. А. Вакарчук // Теор. мат. физ. — 1990. — Vol. 82, No. 3. — P. 438–449.

[17] *Вакарчук І. О.* Повна матриця густини багатобозонної системи з урахуванням три- та чотиричастинкових прямих кореляцій / І. О. Вакарчук, О. І. Григорчак // Журн. фіз. дослідж. — 2009. — Т. 13, № 3. — С. 3004 (28 стор.).

[18] *Вакарчук І. О.* Статистична сума багатобозонної системи з урахуванням прямих три- та чотиричастинкових кореляцій / І. О. Вакарчук, О. І. Григорчак // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. — 2011. — Т. 46. — С. 3–48.

[19] *Вакарчук І. О.* Структурні функції багатобозонної системи із урахуваннями прямих три- і чотиричастинкових кореляцій / І. О. Вакарчук, О. І. Григорчак // Укр. фіз. журн. — 2015. — Т. 60, № 11. — С. 1116–1126.

[20] *Вакарчук І. О.* Внутрішня енергія багатобозонної системи із врахуванням прямих три- ча чотиричастинкових кореляцій / І. О. Вакарчук, О. І. Григорчак // Журн. фіз. дослідж. — 2015. — Т. 19, № 1/2. — С. 1005 (14 стор.).

[21] *Hryhorchak O. I.* First Sound Velocity in ^{4}He Liquid / O. I. Hryhorchak // Condens. Matter Phys. — 2015. — Vol. 18, No. 4. — P. 43001 (7 pages).

[22] Ефективна маса атома ^{4}He в надплинній і нормальній фазах / І. О. Вакарчук, О. І. Григорчак, В. С. Пастухов, Р. О. Притула // Укр. фіз. журн. — 2016. — Т. 61, № 1. — С. 31–39.

[23] *Григорчак О.* Матриця густини взаємодіючих бозе-частинок / О. Григорчак // Міжнародна Конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2007". — Львів, 22-24 травня 2007 р.: Тези доповідей. — С. A15.

[24] *Hryhorchak O.* Three-particle Potential for Helium / O. Hryhorchak, A. Rovenchak // XIII th International Seminar on Physics and Chemistry of Solids ISPCS '07. — Ustroń Śląski, 10-13 czerwca 2007: Abstracts. — P. 17.

[25] *Григорчак О.* Матриця густини багатобозонної системи з урахуванням три- та чотиричастинкових кореляцій / О. Григорчак // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2008". — Львів, 19-21 травня 2008 р.: Тези доповідей. — С. A4.

[26] *Григорчак О. І.* Статистична сума системи взаємодіючих бозечастинок із врахуванням три- і чотиричастинкових прямих кореляцій / О. І. Григорчак, І. О. Вакарчук // Міжнародна конференція молодих учених та аспірантів ІЕФ-2009. — Ужгород, 25-28 травня 2009 р.: Програма і тези доповідей. — С. 121.

[27] *Vakarchuk I. O.* Internal energy of many-boson system taking into account straight three- and four-particle correlations / I. O. Vakarchuk, Hryhorchak O. I. // International Conference "Physics of Liquid Matter: Modern Problem". — Kyiv, Ukraine, May 21-24, 2010: Abstracts. — P. 337.

[28] *Григорчак О. І.* Структурні функції багатобозонної системи з урахуванням три- і чотиричастинкових прямих кореляцій / О. І. Григорчак, І. О. Вакарчук // X Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, Інститут фізики конденсованих систем НАН України, 3-4 червня 2010: Збірка тез. — С. 49.

[29] *Григорчак О.* Парний структурний фактор багатобозонної системи із урахуванням три- і чотиричастинкових кореляцій. Чисельні результати / О. Григорчак // 12-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, Інститут фізики конденсованих систем НАН України, 30 травня - 1 червня 2012: Збірка тез. — С. 38.

[30] *Григорчак О. І.* Чисельні результати для енерґії основного стану рідкого гелію-4 в наближенні двох сум за хвильовим вектором [Різдвяні дискусії 2013, Львів, 3-4 січня 2013] / О. І. Григорчак // Журн. фіз. досліdж. — 2013. — Т. 17, № 1. — С. 1998-5.

[31] *Григорчак О.* Самоузгоджений підхід до розрахунку ефективної маси рідкого гелію-4 і структурного фактора ідеального бозе-газу в широкотемпературній області [Різдвяні дискусії 2014, Львів, 9-10 січня 2014] / О. Григорчак // Журн. фіз. досліdж. — 2014. — Т. 18, № 1. — С. 1998-4.

[32] *Vakarchuk I. O.* Sound velocity in many-boson system / I. O. Vakarchuk, O. I. Hryhorchak. — 19-22 October 2015: Book of abstracts. — P. 13.

[33] *Janssen P. J. C.* Indecation de quelques- uns des resultants obternus á Guntoor pendant Í eclipse du mois d'aoŭt dernier, et á la suite de celte eclipse / P. J. C. Janssen // Compt. Rend. Acad. Sci. — 1868. — Vol. 76. — P. 838–839.

[34] *Rayet G.* The total solar eclipse of August, 1868. Report of M. Rayet / G. Rayet // Astronomical Register. — 1869. — Vol. 7.

[35] *Haig C. T.* Spectroscopic observations of the eclipse of the Sun / C. T. Haig // Proc. Roy. Soc. — 1868. — Vol. 17. — P. 74–80.

[36] *Herschel J.* Account of the solar eclipse of 1868, as seen at Jamkhandi in the Bombay Presidency / J. Herschel // Proc. Roy. Soc. — 1868. — Vol. 17. — P. 103–125.

[37] *Pogson N. R.* Report of the Government Astronomer upon the Proceedings of the Observatory, in Connection with the Total Eclipse of the Sun on August 18, 1868, as Observed in Masulipatam, Vunpurthy, Madras, and Other Stations in Southern India / N. R. Pogson. — Madras : Madras Observatory, 1868.

[38] *Ramsay W.* Discovery of Helium in Cléivite / W. Ramsay // J. Chem. Soc. — 1895. — Vol. 67. — P. 1107–1108.

[39] *Ramsay W.* On a Gas Showing the Spectrum of Helium, the Reputed Cause of D3, one of the Lines in the Coronal Spectrum / W. Ramsay // Proc. Roy. Soc. — 1895. — Vol. 58. — P. 65–67.

[40] *Ramsay W.* Helium, a Gaseous Constituent of Certain Minerals, Part 1 / W. Ramsay // Proc. Roy. Soc. — 1895. — Vol. 58. — P. 81–89.

[41] *Ramsay W.* Helium, a Gaseous Constituent of Certain Minerals, Part 2 / W. Ramsay // Proc. Roy. Soc. — 1895. — Vol. 59. — P. 325–330.

[42] *Kayser H.* Helium in the gases from springs at Wildbad in the Black Forest / H. Kayser // Chem. Ztg. — 1895. — Vol. 19. — P. 1549.

[43] *Kamerlingh Onnes H.* The liquefaction of helium. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen / H. Kamerlingh Onnes // Proc. Roy. Acad. Amsterdam. — 1908. — Vol. 11, No. 108. — P. 168–185.

[44] *Rjabinin J. N.* Über die Abhängigkeit der magnetischen Induktion des supraleitenden Blei von Feld / J. N. Rjabinin, L.W. Schubnikow // Phys. Sowjetunion. — 1934. — Vol. 6. — P. 557.

[45] *Kapitza P.* Viscosity of Liquid Helium below the λ-Point / P. Kapitza // Nature. — 1938. — Vol. 141, No. 3538. — P. 74.

[46] *Allen J. F.* Flow of Liquid Helium II / J. F. Allen, A. D. Misener // Nature. — 1938. — Vol. 141, No. 3538. — P. 75.

[47] *Bose [S.].* Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese / [S.] Bose // Zs. Phys. — 1924. — Bd. 26, No. 1. — S. 178–181.

[48] *Einstein A.* Quantentheorie des einatomigen idealen Gases / A. Einstein // Sitzungsber. Preuss. Konigl. Akad. Wiss.: phys.-math. Klasse. — 1924. — S. 261–267.

[49] *London F.* The λ-phenomenon of liquid helium and the Bose–Einstein degeneracy / F. London // Nature. — 1938. — Vol. 141, No. 3571. — P. 643–644.

[50] *London F.* On the Bose–Einstein Condensation / F. London // Phys. Rev. — 1938. — Vol. 54, No. 11. — P. 947–954.

[51] *Cowley R. A.* Inelastic scattering of thermal neutrons from liquid helium / R. A. Cowley, A. D. B. Woods // Can. J. Phys. — 1971. — Vol. 49, No. 2. — P. 177–200.

[52] *Puff R. D.* High-Energy Neutron-Liquid ^{4}He-Scattering and the ^{4}He Condensate Density / R. D. Puff, J.S. Tenn // Phys. Rev. A. — 1970. — Vol. 1, No. 1. — P. 125–132.

[53] *Mook H. A.* Neutron-Scattering Study of the Momentum Distribution of ^{4}He / H. A. Mook, R. Scherm, M. K. Wilkinson // Phys. Rev. Lett. — 1974. — Vol. 33, No. 21. — P. 1167–1170.

[54] Neutron-Scattering Determination of the Momentum Distribution and the Condensate Fraction in Liquid ^{4}He / V. F. Sears, E. C. Svensson, P. Martel, A. D. B. Woods // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 49, No. 4. — P. 279–282.

[55] *Sears V. F.* Kinetic energy and condensate fraction of superfluid ^{4}He / V. F. Sears // Phys. Rev. B. — 1983. — Vol. 28, No. 9. — P. 5109–5116.

[56] Momentum Distribution in Liquid ^{4}He / T. R. Sosnick, W. M. Snow, P. E. Sokol, R. N. Silver // Europhys. Lett. — 1989. — Vol. 9, No. 7. — P. 707–712.

[57] *Sosnick T. R.* Deep-inelastic neutron scattering from liquid ^{4}He / T. R. Sosnick, W. M. Snow, P. E. Sokol // Phys. Rev. B. — 1990. — Vol. 41, No. 16. — P. 11185–11202.

[58] *Glyde H. R.* Deep-inelastic neutron scattering from liquid ^{4}He / H. R. Glyde, R. T. Azuach, W. G. Stirling // Phys. Rev. B. — 2000. — Vol. 62, No. 21. — P. 14337–14349.

[59] *Пашицкий Э. Я.* Роль парных корреляций в формировании основного состояния и спектра элементарных возбуждений сверхтекучей бозе-жидкости / Э. Я. Пашицкий // ФНТ. — 1999. — Т. 25, № 2. — С. 115–140.

[60] Theory of Bose–Einstein condensation in trapped gases / F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari // Rev. Mod. Phys. — 1999. — Vol. 71. — P. 463–512.

[61] *Bloch I.* Many-body physics with ultracold gases / I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger // Rev. Mod. Phys. — 2008. — Vol. 80, No. 3. — P. 885–964.

[62] *Dana L. I.* Further experiments with liquid helium. B.A. Preliminary determinations of the latent heat of vaporization of liquid helium / L. I. Dana, H. Kamerlingh Onnes // Proc. Roy. Acad. Amsterdam. — 1926. — Vol. 29, No. 179c. — P. 1051–1060.

[63] *Dana L. I.* Further experiments with liquid helium. B.B. preliminary determinations of the latent heat of vaporization of liquid helium / L. I. Dana, H. Kamerlingh Onnes // Proc. Roy. Acad. Amsterdam. — 1926. — Vol. 29, No. 179d. — P. 1061–1068.

[64] *Keesom W. H.* Ueber die spezifische Wärme des flüssigen Helium / W. H. Keesom, K. Clusius // Proc. Roy. Acad. Amsterdam. — 1932. — Vol. 35. — P. 307–320.

[65] *Keesom W. H.* On the anomaly in the specific heat of liquid helium / W. H. Keesom, A. P. Keesom // Communications from the Physical Laboratory of Leiden. — 1932. — No. 221d. — P. 19–26.

[66] *Хуанг К.* Статистическая механика / К. Хуанг. — Москва : Мир, 1966. — 520 с.

[67] *Марч Н.* Проблема многих тел в квантовой механике / Н. Марч, У. Янг, С. Сампантхар. — Москва : Мир, 1969. — 496 с.

[68] *Исихара А.* Статистическая физика / А. Исихара. — Москва : Мир, 1973. — 471 с.

[69] *Фейнман Р.* Статистическая механика / Р. Фейнман. — Москва : Мир, 1978. — 408 с.

[70] *Ceperley D. M.* Path integrals in the theory of condensed helium / D. M. Ceperley // Rev. Mod. Phys. — 1995. — Vol. 67, No. 2. — P. 279–355.

[71] *Lipa J. A.* Heat Capacity and Thermal Relaxation of Bulk Helium very near the Lambda Point / J. A. Lipa, D. R. Swanson, J. A. Nissen // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 76, No. 6. — P. 944–947.

[72] Specific Heat of Helium Confined to a 57-μm Planar Geometry near the Lambda Point / J. A. Lipa, D. R. Swanson, J. A. Nissen et al. // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 84, No. 21. — P. 4894–4897.

[73] *Вакарчук И. А.* Представление когерентных состояний в теории многобозонных систем / И. А. Вакарчук // Теор. мат. физ. — 1978. — Т. 76, № 1. — С. 76–78.

[74] *Вакарчук И. А.* К микроскопической теории λ-перехода в жидком He^4. I / И. А. Вакарчук // Теор. мат. физ. — 1978. — Т. 36, № 1. — С. 122–135.

[75] *Kleinert H.* Critical exponents from seven-loop strong-coupling φ^4 theory in three dimensions / H. Kleinert // Phys. Rev. D. — 1999. — Vol. 60. — Art. 085001. — 15 p.

[76] *Kleinert H.* Theory and satellite experiment for critical exponent α of λ-transition in superfluid helium / H. Kleinert // Phys. Lett. A. — 2000. — Vol. 277, No. 4-5. — P. 205–211.

[77] Determination of the critical exponents for the λ-transition of ^{4}He by high-temperature expansion / M. Campostrini, A. Pelissetto, P. Rossi, E. Vicary // Phys. Rev. B. — 2000. — Vol. 61, No. 9. — P. 5905–5908.

[78] *Tisza L.* Transport Phenomena in Helium II / L. Tisza // Nature. — 1938. — Vol. 141, No. 3577. — P. 913.

[79] *Tisza L.* Viscosity of Liquid Helium and B.E. Statistics / L. Tisza // Compt. rend., Paris. — 1938. — Vol. 207. — P. 1186.

[80] *Tisza L.* The Theory of Liquid Helium / L. Tisza // Phys. Rev. — 1947. — Vol. 72, No. 9. — P. 838–854.

[81] *Кеезом В.* Гелий / В. Кеезом. — Москва : Изд-во иностр. лит., 1949. — 541 с.

[82] *Landau L. D.* The theory of superfluidity of Helium II / L. D. Landau // J. Phys. (USSR). — 1941. — Vol. 5. — P. 71–90.

[83] *Ландау Л. Д.* К гидродинамике гелия / Л. Д. Ландау // Журн. эксп. теор. физ. — 1944. — Т. 14. — С. 112.

[84] *Landau L. D.* On the theory of supefluidity of Helium II / L. D. Landau // J. Phys. (USSR). — 1947. — Vol. 11. — P. 91.

[85] *Feynman R. P.* Energy spectrum of the Excitations in Liquid Helium / R. P. Feynman, M Cohen // Phys. Rev. — 1956. — Vol. 102, No. 5. — P. 1159–1204.

[86] *Feynman R.* Atomic Theory of the Two-Fluid Model of Liquid Helium / R. Feynman // Phys. Rev. — 1954. — Vol. 94, No. 2. — P. 262–277.

[87] *Feynman R. P.* Atomic Theory of the λ Transition in Helium / R. P. Feynman // Phys. Rev. — 1953. — Vol. 91, No. 6. — P. 1291–1301.

[88] *Piery P.* Two-dimensional dilute Bose gas in the normal phase / P. Piery, G. C. Strinati, I. Tifrea // Euro. Phys. J. B. — 2001. — Vol. 22, No. 1. — P. 79–87.

[89] Density Dependence of the Transition Temperature in a Homogeneous Bose-Einstein Condensate / J. D. Reppy, B. C. Crooker, B. Hebral et al. // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 84, No. 10. — P. 2060–2063.

[90] *Stoof H. T. C.* Nucleation of Bose-Einstein condensation / H. T. C. Stoof // Phys. Rev. A. — 1992. — Vol. 45, No. 12. — P. 8398–8406.

[91] The Transition Temperature of the Dilute Interacting Bose Gas / G. Baym, J.-P. Blaizot, M. Holzmann et al. // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Vol. 83, No. 9. — P. 1703–1706.

[92] *Holzmann M.* Transition Temperature of the Homogeneous, Weakly Interacting Bose Gas / M. Holzmann, W. Krauth // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Vol. 83, No. 14. — P. 2687–2690.

[93] *Arnold P.* T_c for homogeneous dilute Bose gases: A second-order result / P. Arnold, G. Moore, B. Tomašik // Phys. Rev. A. — 2001. — Vol. 65. — Art. 013606. — 18 p.

[94] *Kastening B.* Bose-Einstein condensation temperature of a homogenous weakly interacting Bose gas in variational perturbation theory through seven loops / B. Kastening // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 69. — Art. 043613. — 8 p.

[95] *Kashurnikov V. A.* Critical Temperature Shift in Weakly Interacting Bose Gas / V. A. Kashurnikov, N. V. Prokof'ev, B.V. Svistunov // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 87, No. 12. — Art. 120402. — 4 p.

[96] *Arnold P.* BEC Transition Temperature of a Dilute Homogeneous Imperfect Bose Gas / P. Arnold, G. Moore // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 87. — Art. 120401. — 4 p.

[97] *Isihara A.* Exchange effects on the excitation spectrum of liquid helium / A. Isihara, T. Samulski // Phys. Rev. B. — 1977. — Vol. 16, No. 5. — P. 1969–1978.

[98] *Вакарчук І. О.* До теорії λ-переходу в рідкому ^{4}He / І. О. Вакарчук // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз. — 1993. — Т. 26. — С. 29–38.

[99] *Вакарчук І. О.* Статистичний оператор системи тотожних взаємодіючих частинок у координатному зображенні / І. О. Вакарчук // Журн. фіз. досл. — 1996. — Т. 1, № 1. — С. 25–38.

[100] *Вакарчук І. О.* New results for the distribution functions of many-particle quantum systems. / І. О. Вакарчук // J. Phys. Stud. — 1997. — Vol. 1, No. 2. — P. 156–168.

[101] *Rovenchak A. A.* Effective mass of atom and the excitation spectrum in liquid helium-4 at $T = 0$ K / A. A. Rovenchak // Fiz. Nizk. Temp. — 2003. — Vol. 29, No. 2. — P. 145–148.

[102] Toward a Microscopic Theory of the λ Transition in Liquid ^{4}He / M. L. Ristig, T. Lindenau, M. Serhan, J. W. Clarc // J. Low Temp. Phys. — 1999. — Vol. 114, No. 3-4. — P. 317–348.

[103] Bose–Einstein Condensation and the λ Transition in Liquid Helium / T. Lindenau, M. L. Ristig, J. W. Clarc, K. A. Gernoth // J. Low Temp. Phys. — 2002. — Vol. 129, No. 3-4. — P. 143–170.

[104] *Вакарчук І. О.* Структурні функції рідкого ^{4}He з урахуванням непрямих три- і чотиричастинкових кореляцій / І. О. Вакарчук, Р. О. Притула // Журн. фіз. досл. — 2008. — Т. 12, № 2. — С. 4001 (12 стор.).

[105] *Vakarchuk I. O.* Theory of heat capacity of liquid helium-4 for temperatures above the critical point / I. O. Vakarchuk,

V. S. Pastukhov, R. O. Prytula // Ukr.Phys. J. — 2012. — Vol. 57, No. 12. — P. 1214–1222.

[106] *Боголюбов Н. Н.* К теории сверхтекучести / Н. Н. Боголюбов // Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1947. — Т. 11, № 1. — С. 77–90.

[107] *Зубарев Д. Н.* Функция распределения неидеального бозе-газа при температуре абсолютного нуля / Д. Н. Зубарев // Журн. эксп. и теор. физ. — 1955. — Т. 29, № 6. — С. 881–882.

[108] *Penrose O.* Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium / O. Penrose, L. Onsager // Phys. Rev. — 1956. — Vol. 104, No. 3. — P. 576–584.

[109] *McMillan W. L.* Ground State of Liquid ^{4}He / W. L. McMillan // Phys. Rev. — 1965. — Vol. 138, No. 2A. — P. A442–A451.

[110] *Schiff D.* Ground State of Liquid Helium-4 and Helium-3 / D. Schiff, L. Verlet // Phys. Rev. — 1967. — Vol. 160, No. 1. — P. 208–218.

[111] *Francis W. P.* Ground State of Liquid ^{4}He / W. P. Francis, G. V. Chester, L. Reatto // Phys. Rev. A. — 1970. — Vol. 1, No. 1. — P. 86–97.

[112] *Kalos M. H.* Helium at zero temperature with hard-sphere and other forces / M. H. Kalos, D. Levesque, L. Verlet // Phys. Rev. A. — 1974. — Vol. 9, No. 5. — P. 2178–2195.

[113] *Lam P. M.* Density matrix and momentum distribution of helium liquids and nuclear matter / P. M. Lam, J. W. Clark, M. L. Ristig // Phys. Rev. B. — 1977. — Vol. 16, No. 1. — P. 222–230.

[114] *Вакарчук И. А.* Бозе-конденсат в жидком ^{4}He. II. Связь числа атомов в бозе-конденсате со структурными функциями жидкого ^{4}He / И. А. Вакарчук, О. П. Гонопольський. — Киев, ИТФ АН УССР, 1976. — 14 с. — Препринт / АН УССР, Институт теоретичкой физики, 76-25Р.

[115] *Vakarchuk I. O.* One-particle density matrix of liquid ^{4}He / I. O. Vakarchuk // Theor. Math. Phys. — 2008. — Vol. 154, No. 1. — P. 9–30.

[116] *Grigorishin K. V.* A self-consistent microscopic model of the energy spectrum of superfluid ^{4}He with the hermitian form of the Bogolyubov-Zubarev hamiltonian / K. V. Grigorishin, B. I. Lev. — 2011. — Vol. 56. — P. 1182–1197.

[117] *Hugenholtz N. M.* Ground-State Energy and Excitation Spectrum of a System of Interacting Bosons / N. M. Hugenholtz, D. Pines // Phys. Rev. — 1959. — Vol. 116, No. 3. — P. 489–506.

[118] *Беляев С. Т.* Применение методов квантовой теории поля к системе бозе-частиц / С. Т. Беляев // Журн. эксп. и теор. физ. — 1958. — Т. 34, № 2. — С. 417–432.

[119] *Беляев С. Т.* Энергетический спектр неидеального бозе-газа / С. Т. Беляев // Журн. эксп. и теор. физ. — 1958. — Т. 34, № 2. — С. 433–446.

[120] *Абе Р.* Квантова гідродинаміка бозонної системи / Р. Абе // Бусейрон Кенкю. — 1955. — Т. 90. — С. 61–78.

[121] *Sunakava S.* Collective Description of a System of Interacting Bose Particles. I / S. Sunakava, Y. Yoko-o, H. Nakatani // Prog. Theor. Phys. — 1962. — Vol. 27, No. 3. — P. 589–599.

[122] *Sunakava S.* Collective Description of a System of Interacting Bose Particles. II / S. Sunakava, Y. Yoko-o, H. Nakatani // Prog. Theor. Phys. — 1962. — Vol. 27, No. 3. — P. 600–607.

[123] *Юхновський І. Р.* Статистичний оператор та колективні змінні. І. Перетворення зміщення / І. Р. Юхновський // Укр.фіз.журн. — 1964. — Т. 9, № 7. — С. 702–714.

[124] *Юхновський І. Р.* Квантова статистична сума і колективні змінні. II. Функція переходу до колективних змінних / І. Р. Юхновський // Укр. фіз. журн. — 1964. — Т. 9, № 8. — С. 827–838.

[125] *Вакарчук И. А.* Самосогласованное описание дальнодействующих и короткодействующих корреляций в теории жидкого ^{4}He / И. А. Вакарчук, И. Р. Юхновський // Теор.мат.физ. — 1979. — Т. 40, № 1. — С. 100–111.

[126] *Юхновський И. Р.* Микроскопическая теория энергетического спектра жидкого He II / И. Р. Юхновський, И. А. Вакарчук // Теор. мат. физ. — 1980. — Т. 42, № 1. — С. 112–123.

[127] *Sunakava S.* Energy Spectrum of the Excitation in Liquid Helium II / S. Sunakava, S. Yamasaki, T. Kebukava // Theor. Phys. — 1969. — Vol. 41, No. 4. — P. 919–940.

[128] *Боголюбов Н. Н.* Избранные труды, т. 2 / Н. Н. Боголюбов. — Киев : Наукова думка, 1970. — 522 с.

[129] *Вакарчук И. О.* Матрицы плотности многобозонной системы при низких температурах / И. О. Вакарчук // Теор. мат. физ. — 1975. — Т. 23, № 2. — С. 260–272.

[130] *Юхновсъкий И. Р.* Применение коллективных переменных и учет короткодействующих сил в теории систем заряженных частиц / И. Р. Юхновський // Журн. эксп. теор. физ. — 1958. — Т. 34, № 2. — С. 379–389.

[131] *Юхновсъкий І. Р.* До статистичної теорії систем взаємодіючих іонів та дипольних частинок / І. Р. Юхновський // Укр. фіз. журн. — 1961. — Т. 6, № 3. — С. 333–339.

[132] *Идзик И. М.* Критическая точка системы жидкость–газ в методе коллективных переменных / И. М. Идзик // Теор. мат. физ. — 1987. — Т. 73, № 2. — С. 264–280.

[133] *Пацаган О. В.* Функционал большой статистической суммы в методе коллективных переменных с выделенной системой отсчета. Многокомпонентная система / О. В. Пацаган, И. Р. Юхновский // Теор. мат. физ. — 1990. — Т. 83, № 1. — С. 72–82.

[134] *Lee T. D.* Eigenvalues and Eigenfunctions of a Bose System of Hard Spheres and its Low-Temperature Properties / T. D. Lee, K. Huang, C.N. Yang // Phys. Rev. — 1957. — Vol. 106, No. 6. — P. 1135–1145.

[135] *Brueckner K. A.* Bose-Einstein Gas with Repulsive Interactions: General Theory / K. A. Brueckner, K. Sawada // Phys. Rev. — 1957. — Vol. 106, No. 6. — P. 1117–1127.

[136] *Вакарчук И. А.* Самосогласованное описание дальнодействующих и короткодействующих корреляций в теории жидкого He^4. II / И. А. Вакарчук, О. Л. Гонопольський, И. Р. Юхновський // Теор. мат. физ. — 1979. — Т. 41, № 1. — С. 77–88.

[137] *Вакарчук И. А.* Матрицы плотности сверхтекучего гелия-4. I / И. А. Вакарчук // Теор. мат. физ. — 1989. — Vol. 80, No. 3. — P. 439–451.

[138] *Вакарчук И. А.* Розрахунок термодинамічних функцій надплинного ^4He при низьких температурах. 1. Вільна енергія / И. А. Вакарчук, П. А. Глушак // Укр. фіз. журн. — 1996. — Т. 41, № 5-6. — С. 569–576.

[139] *Глушак П. А.* Исследование равновесных свойств сверхтекучево гелия-4 при низьких температурах : Диссерт. … канд. физ.-мат. наук: 01.04.02.

[140] *Vakarchuk I. O.* A potential energy of interaction between helium atoms / I. O. Vakarchuk, V. V. Babin, A. A. Rovenchak // J. Phys. Stud. — 2000. — Vol. 4, No. 1. — P. 16–22.

[141] *Vakarchuk I. O.* Thermodynamics of the Bose-system with a small number of particles / I. O. Vakarchuk, A. A. Rovenchak // Condens. Matter Phys. — 2001. — Vol. 4. — P. 431–447.

[142] *Вакарчук І. О.* Кінетична енерґія і теплоємність рідкого ^{4}He / І. О. Вакарчук, Р. О. Притула, А. А. Ровенчак // Журн. фіз. досл. — 2007. — Т. 11. — С. 259–267.

[143] Experiments with ^{4}He Heated from Above, Very Near the Lambda Point / D. A. Sergatskov, A. V. Babkin, S. T. P. Boyd et al. // J. Low. Temp. Phys. — 2004. — Vol. 134, No. 1-2. — P. 517–526.

[144] *Maris H. J.* Thermodynamic Properties of Superfluid ^{4}He at Negative Pressure / H. J. Maris, D. O. Edwards // J. Low. Temp. Phys. — 2002. — Vol. 129, No. 1-2. — P. 1–24.

[145] Thermodynamic Properties of ^{4}He Gas in the Temperature Range 4.2 – 10 K / S. M. Mosameh, A.S. Sandouqa, H. B. Ghassib, B.R. Joudeh // J. Low. Temp. Phys. — 2014. — Vol. 175, No. 3-4. — P. 523–542.

[146] *Chan M. H. W.* Overview on Solid ^{4}He and the Issue of Supersolidity / M. H. W. Chan, R. B. Hallock, L. Reatto // J. Low. Temp. Phys. — 2013. — Vol. 172, No. 5-6. — P. 317–363.

[147] *Hallok R. B.* A Summary of Mass Flux Measurements in Solid ^{4}He / R. B. Hallok, M. W. Ray, Y. Vekhov // J. Low. Temp. Phys. — 2012. — Vol. 169, No. 3-4. — P. 264–277.

[148] *Kim E. B.* Probable observation of a supersolid helium phase / E. B. Kim, M. H. W. Chan // Science. — 2004. — Vol. 427. — P. 225–227.

[149] *Kim E. B.* Supersolid Helium at High Pressure / E. B. Kim, M. H. W. Chan // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 97, No. 11. — Art. 115302.

[150] *Caupin F.* Density Functional Theory of Freezing of Superfluid Helium 4 / F. Caupin, T. Minoguchi // J. Low. Temp. Phys. — 2004. — Vol. 134, No. 1-2. — P. 181–186.

[151] *Krishnamachari B.* Monte Carlo studies of two-dimensional phases of helium using a shadow wave function / B. Krishnamachari, G. V. Chester // Phys. Rev. B. — 2000. — Vol. 61, No. 14. — P. 9677–9685.

[152] *Anderson R. H.* Recent Progress in Thin ^{3}He – ^{4}He Films / R. H. Anderson, D. Z. Li, M. D. Miller // J. Low. Temp. Phys. — 2012. — Vol. 169, No. 5-6. — P. 291–315.

[153] Thermodynamics of boson quantum films / C. E. Campbell, B. E. Clements, E. Krotscheck, M. Saarela // Phys. Rev. B. — 1997. — Vol. 55, No. 6. — P. 3769–3791.

[154] *Diaz-Avila M.* Behavior of ^{4}He Near T_λ in Films of Infinite and Finite Lateral Extent / M. Diaz-Avila, M. O. Kimball, F. M. Gasparini // J. Low. Temp. Phys. — 2004. — Vol. 134, No. 1-2. — P. 613–618.

[155] *Chaudhry G.* Thermodynamic Properties of Liquid ^{3}He - ^{4}He Mixtures Between 0.15K and 1.8K / G. Chaudhry, J. G. Brisson // J. Low. Temp. Phys. — 2009. — Vol. 155, No. 5-6. — P. 235–289.

[156] *Chaudhry G.* Thermodynamic Properties of Liquid ^{3}He-^{4}He Mixtures Between 0 – 10 bar below 1.5K / G. Chaudhry, J. G. Brisson // J. Low. Temp. Phys. — 2010. — Vol. 158, No. 5-6. — P. 806-853.

[157] *Folk R.* Tricritical Dynamics at the Demixing-λ-Transition in ^{3}He - ^{4}He Mixtures / R. Folk, G. Moser // J. Low. Temp. Phys. — 2008. — Vol. 150, No. 5-6. — P. 689-709.

[158] *Gordillo M. C.* Phase Diagrams of ^{4}He on Flat and Curved Environments / M. C Gordillo, J. Boronat // J. Low. Temp. Phys. — 2013. — Vol. 171, No. 5-6. — P. 606–612.

[159] *Shams A.* Localization of Bose–Einstein Condensation by Disorder / A. Shams, J. L. DuBois, H. R. Glyde // J. Low. Temp. Phys. — 2006. — Vol. 145, No. 5-6. — P. 357-367.

[160] *Lipa J. A.* Specific Heat of Helium Confined to Cylinders Near the Lambda Point / J. A. Lipa, M. Coleman, D. A. Stricker // J. Low. Temp. Phys. — 2001. — Vol. 124, No. 3-4. — P. 443–460.

[161] *Bogoyavlenskii I. V.* Study of the phonon–maxon region of the liquid helium dispersion curve – the latest results / I. V. Bogoyavlenskii, A. V. Puchkov, A. Skomorokhov // Phys. B: Cond. Matt. — 2000. — Vol. 284-288, No. 1. — P. 25–26.

[162] *Family Fereydoon.* Pressure dependence of phonon dispersion and the structure function of superfluid helium-4 at low temperatures / Fereydoon Family // Physica B+C. — 1981. — Vol. 107, No. 1-3. — P. 699–700.

[163] Dynamic structure factor and momentum distribution of a trapped Bose gas / F. Zambelli, L. Pitaevskii, D. M. Stamper-Kurn, S. Stringari // Phys. Rev. A. — 2000. — Vol. 61, No. 6. — Art. 063608. — 13 p.

[164] *Krotscheck E.* Dynamic Many-Body Theory: Dynamic Structure Factor of Two-Dimensional Liquid ^{4}He / E. Krotscheck, T. Lichtenegger // J. Low. Temp. Phys. — 2015. — Vol. 178, No. 1-2. — P. 61-77.

[165] Multi-Pair and Exchange Effects in the Dynamic Structure of Two-Dimensional ^{3}He / R. Hobbiger, R. Holler, E. Krotscheck, M. Panholzer // J. Low. Temp. Phys. — 2012. — Vol. 169, No. 5-6. — P. 350–366.

[166] *Sorkin V.* Path-Integral Monte Carlo Study of Phonons in the bcc Phase of ^{3}He / V. Sorkin, E. Polturak, J. Adler // J. Low. Temp. Phys. — 2006. — Vol. 143, No. 3-4. — P. 141-151.

[167] *Krotscheck E.* Dynamic structure factor of quantum liquid films / E. Krotscheck, C. J. Tymczak // Phys. Rev. B. — 1992. — Vol. 45, No. 1. — P. 217–232.

[168] *Miyazaki K.* Dynamic structure factor of a dilute Lennard-Jones gas / K. Miyazaki, I. M. de Schepper // Phys. Rev. E. — 2001. — Vol. 63, No. 6. — Art. 060201. — 4 p.

[169] *Bobrov V. B.* On a peculiarity of the dynamic structure factor of superfluid helium / V. B. Bobrov, S. A. Trigger, Yu. P. Vlasov // Phys. B: Cond. Matt. — 1994. — Vol. 203, No. 1-2. — P. 95–98.

[170] Static structure factor of liquid parahydrogen / J. Dawidowski, F. J. Bermejo, M. L. Ristig et al. // Phys. Rev. B. — 2004. — Vol. 69, No. 1. — Art. 014207. — 7 p.

[171] *Hayot F.* Dynamical structure factors in models of turbulence / F. Hayot, C. Jayaprakash // Phys. Rev. E. — 1998. — Vol. 57, No. 5. — P. R4867–R4870.

[172] Neutron-diffraction study of the static structure factor and pair correlations in ^{4}He / E. C. Svensson, V. F. Sears, A. D. B. Woods, P. Martel // Phys. Rev. B. — 1980. — Vol. 21, No. 8. — P. 3638–3651.

[173] *Robkoff H. N.* Structure-factor measurements in ^{4}He at saturated vapor pressure for $1.38 < T < 4.24$K / H. N. Robkoff, R. B. Hallok // Phys. Rev. B. — 1981. — Vol. 24, No. 1. — P. 159–182.

[174] *Caupin F.* Static Structure Factor and Static Response Function of Superfluid Helium 4: a Comparative Analysis / F. Caupin, J. Boronat, K. H. Andersen // J. Low. Temp. Phys. — 2008. — Vol. 152, No. 3-4. — P. 108–121.

[175] *Ziń P.* Pair-correlation function of a metastable helium Bose-Einstein condensate / P. Ziń, M. Trippenbach, M. Gajda // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 69, No. 2. — Art. 023614. — 5 p.

[176] *Вакарчук І. О.* Температурна залежність парної функції розподілу рідкого ^{4}He / І. О. Вакарчук, Р. О. Притула // Журн. фіз. досл. — 2009. — Т. 13, № 2. — Ст. 2003. — 5 с.

[177] *Achter F. K.* X-Ray Scattering from Liquid Helium / F. K. Achter, L. Meyer // Phys. Rev. — 1969. — Vol. 188, No. 1. — P. 291–300.

[178] *Stenley H. E.* Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena / H. E. Stenley. — Oxford : Clarendon Press, 1971. — 308 p.

[179] *Arp V. D.* Thermophysical Properties of Helium-4 from 0.8 to 1500K with Pressure to 2000 MPa / V. D. Arp, R. D. McCarty, D. G. Friend // Natl. Inst. Stand. Technol. Tech. Note 1334 (revised). — 1998. — 145 p.

[180] *Темперли Г.* Физика простых жидкостей / Г. Темперли, Дж. Роулисона, Дж. Рашбрука. — Москва : Мир, 1971. — 308 с.

[181] *Крокстон К.* Физика жидкого состояния / К. Крокстон. — Москва : Мир, 1978. — 400 с.

[182] *Chang C. C.* Energy and structure of the ground state of liquid ^{4}He / C. C. Chang, C. E. Campbell // Phys. Rev. B. — 1977. — Vol. 15, No. 9. — P. 4238–4255.

[183] *Lee F. J.* Perturbation corrections to the variational ground-state energy of liquid ^{4}He / F. J. Lee, D. K. Lee // Phys. Rev. B. — 1977. — Vol. 15, No. 11. — P. 5296–5301.

[184] *Krotscheck E.* Optimal three-body correlations and elementary diagrams in liquid ^{4}He / E. Krotscheck // Phys. Rev. B. — 1986. — Vol. 33, No. 5. — P. 3138–3167.

[185] *Woo C.-W.* Effect of Explicit Three-Particle Correlations on the Liquid Structure Function of Helium 4 / C.-W. Woo, R. L. Coldwell // Phys. Rev. Lett. — 1972. — Vol. 29, No. 16. — P. 1062–1064.

[186] *Вакарчук И. А.* Свободная энергия многобозонной системы при низких температурах : Диссерт. …д-ра физ.-мат. наук: 01.04.02. — Киев, 1980. — 270 с.

[187] *Vitiello S. A.* Helium Atoms Kinetic Energy at Temperature $T = 0$ / S. A. Vitiello // J. Low. Temp. Phys. — 2011. — Vol. 162, No. 3-4. — P. 154–159.

[188] *Boronat J.* A Quantum Monte Carlo Study of ^{4}He in Carbon Nanotube Bundles / J. Boronat, M. C. Gordillo // J. Low. Temp. Phys. — 2002. — Vol. 126, No. 1-2. — P. 199-204.

[189] *Bešlić I.* Diffusion Monte Carlo Study of the Small Mixed ^{3}He - ^{4}He Clusters / I. Bešlić, V. Markić, S. Kilić // J. Low. Temp. Phys. — 2006. — Vol. 143, No. 5-6. — P. 257–265.

[190] *Rota R.* Path Integral Monte Carlo Calculation of Momentum Distribution in Solid ^{4}He / R. Rota, J. Boronat // J. Low. Temp. Phys. — 2011. — Vol. 162, No. 3-4. — P. 146–153.

[191] Thermal Effects on the Microscopic Properties of ^{4}He Drops / J. Boronat, K. Sakkos, E. Sola, J. Casulleras // J. Low. Temp. Phys. — 2007. — Vol. 148, No. 5-6. — P. 845–849.

[192] *Kalos M. H.* Monte Carlo Calculations of the Ground State of Three- and Four-Body Nuclei / M. H. Kalos // Phys. Rev. — 1962. — Vol. 128, No. 4. — P. 1791–1795.

[193] *Moroni S.* Condensate Fraction in Liquid ^{4}He / S. Moroni, M. Boninsegni // J. Low. Temp. Phys. — 2004. — Vol. 136, No. 3-4. — P. 129–137.

[194] Peak in the static structure factor of a Bose-Einstein condensate / J. Steinhauer, R. Ozeri, N. Katz, N. Davidson // Phys. Rev. A. — 2005. — Vol. 72, No. 2. — Art. 023608. — P. 5.

[195] *Almarza N. G.* Determination of effective pair interactions from the structure factor / N. G. Almarza, E. Lomba, D. Molina // Phys. Rev. E. — 2004. — Vol. 70, No. 2. — Art. 021203. — P. 5.

[196] *Slatter J. C.* The van der Waalas Forces in Gases / J. C. Slatter, J. G. Kirkwood // Phys. Rev. — 1931. — Vol. 37, No. 6. — P. 682–697.

[197] *Egger J.* Bose and Fermi Gases with Lennard–Jones Interactions / J. Egger, E. Krotscheck, R. E. Zillich // J. Low. Temp. Phys. — 2011. — Vol. 165, No. 5-6. — P. 275–291.

[198] *Aziz R. A.* An examination of ab initio results for the helium potential energy curve / R. A. Aziz, M. J. Slaman // J. Chem. Phys. — 1991. — Vol. 94, No. 12. — P. 8047–8053.

[199] *Boronat J.* Monte Carlo analysis of an interatomic potential for He / J. Boronat, J. Casulleras // Phys. Rev. B. — 1994. — Vol. 49, No. 13. — P. 8920–8930.

[200] *Axelrod B. M.* Interaction of the van der Waals Type Between Three Atoms / B. M. Axelrod, E. Teller // J. Chem. Phys. — 1943. — Vol. 11, No. 6. — P. 299–300.

[201] *Parish C. A.* Three-body analytical potential for interacting helium atoms / C. A. Parish, C. E. Dykstra // J. Chem. Phys. — 1994. — Vol. 101, No. 9. — P. 7618–7624.

[202] *Ровенчак А. А.* Самоузгоджений розрахунок міжатомних потенціалів та термодинамічних функцій гелію-4 в надплинній та нормальній фазах : Диссерт. …канд. физ.-мат. наук: 01.04.02. — Львів, 2003. — 135 с.

[203] Acoustical Experiments on Superfluid ^{3}He - ^{4}He Mixtures in Aerogel / G. Lawes, E. Nazaretski, P. N. Brusov et al. // J. Low Temp. Phys. — 2002. — Vol. 126, No. 1-2. — P. 691–696.

[204] The first sound velocity and attenuation of supersaturated superfluid ^{3}He-^{4}He– solutions under elevated pressure / G. Sheshin, V. Chagovets, T. Kalko et al. // Low Temp. Phys. — 2003. — Vol. 329-333, No. 1. — P. 176–177.

[205] Concentration dependence of the attenuation of first sound in supersaturated superfluid ^{3}He – ^{4}He solutions under pressure / A. A. Zadorozhko, T. V. Kalko, E. Ya. Rudavskiĭ ét al. // Low Temp. Phys. — 2002. — Vol. 28, No. 2. — P. 73–78.

[206] The sound velocity measurements of nuclear-ordered bcc solid ^{3}He under magnetic fields / S. Sasaki, D. Takagi, Yu. Sasaki, T. Mi-

zusaki // J. Phys. Chem. Sol. — 2005. — Vol. 66, No. 8-9. — P. 1478-1481.

[207] *Stolzmann W.* Sound velocity of strongly coupled plasmas / W. Stolzmann // Phys. Lett. A. — 2001. — Vol. 282, No. 6. — P. 387—391.

[208] Sound velocity of liquid ^{4}He in aerogel / K. Matsumoto, O. Arai, Yu. Okuda, K. Tajiri // Phys. B: Cond. Matt. — 2000. — Vol. 284-288, No. 1. — P. 101–102.

[209] Pressure dependence of the sound velocity of ^{4}He in aerogel / M. Nishikawa, K. Yoshino, S. Abe et al. // J. Phys. Chem. Sol. — 2005. — Vol. 66, No. 8-9. — P. 1506–1508.

[210] *Liu X.-J.* First and second sound in a two-dimensional harmonically trapped Bose gas across the Berezinskii–Kosterlitz–Thouless transition / X.-J. Liu, H. Hu // Ann. Phys. — 2014. — Vol. 351. — P. 531–539.

[211] *Burton E. F.* Velocity of Sound in Liquid Helium / E. F. Burton // Nature. — 1938. — Vol. 141. — P. 970–971.

[212] The Velocity of Sound in Liquid Helium / J. C. Findlay, A. Pitt, H. S. Grayson, J. O. Wilhelm // Phys. Rev. — 1938. — Vol. 54. — P. 506–509.

[213] The Velocity of Sound in Liquid Helium under Pressure / J. C. Findlay, A. Pitt, H. S. Grayson, J. O. Wilhelm // Phys. Rev. — 1939. — Vol. 56. — P. 122.

[214] *Donnelly R. J.* The Observed Properties of Liquid Helium at the Saturated Vapor Pressure / R. J. Donnelly, C. F. Barenghi // J. Phys. Chem. Ref. Data. — 1998. — Vol. 27, No. 6. — P. 1217–1274.

[215] *Groenewold H. J.* Thermal conditions in sound waves / H. J. Groenewold // Physica. — 1939. — Vol. 6, No. 3. — P. 303–312.

[216] *Pellam J. R.* Ultrasonic Velocity and Absorption in Liquid Helium / J. R. Pellam, C. F. Squaire // Phys. Rev. — 1947. — Vol. 72, No. 12. — P. 1245–1252.

[217] *Humphrey J. M.* Attenuation and Velocity of Sound in Superfluid Helium / J. M. Humphrey // Phys. Rev. — 1972. — Vol. 28, No. 5. — P. 277–280.

[218] *Folk R.* Frequency-dependent shear viscosity, sound velocity, and sound attenuation near the critical point in liquids. II. Comparison with experiment / R. Folk, G. Moser // Phys. Rev. E. — 1998. — Vol. 57, No. 1. — P. 705–719.

[219] *Melnikovsky L. A.* On Sound Reflection in Superfluid / L. A. Melnikovsky // J. Low Temp. Phys. — 1998. — Vol. 150, No. 3-4. — P. 174-180.

[220] *Лифшиц Е. М.* Излучение звука в гелии II / Е. М. Лифшиц // ЖЄТФ. — 1944. — Т. 14. — С. 116.

[221] *Пешков В. П.* Второй звук в гелии II / В. П. Пешков // ДАН. — 1944. — Т. 45. — С. 385.

[222] *Peshkov V.* "Second sound" in helium II / V. Peshkov // Journal of Physics. — 1944. — Vol. 8, No. 6. — P. 381.

[223] *Пешков В. П.* Определение скорости распространения второго звука в гелии II / В. П. Пешков // ЖЄТФ. — 1946. — Т. 16. — С. 1000.

[224] Heat capacity and second sound velocity measurements with the DYNAMX instrument / J. A. Lipa, S. Wang, J. A. Nissen, D. Avaloff // Advances in Space Research. — 2005. — Vol. 36, No. 1. — P. 119–126.

[225] *Adriaans M. J.* Second sound measurements very near the lambda point / M. J. Adriaans, J. A. Lipa // Physica B: Condensed Matter. — 2000. — Vol. 284–288, No. 1. — P. 49–50.

[226] *Lane C. T.* Second Sound in Liquid Helium II / C. T. Lane, H. A. Fairbank, W. M. Fairbank // Phys. Rev. — 1947. — Vol. 71, No. 9. — P. 600–605.

[227] "Second Sound" in Liquid Helium II / C. T. Lane, H. A. Fairbank, H. L. Schultz, W. M. Fairbank // Phys. Rev. — 1947. — Vol. 70, No. 5-6. — P. 431–432.

[228] *Fairbank H. A.* Conversion of Ordinary Sound into Second Sound / H. A. Fairbank, W. M. Fairbank, C. T. Lane // Phys. Rev. — 1947. — Vol. 72, No. 7. — P. 645–646.

[229] *Rinberg D.* Parametric Generation of Second Sound by First Sound in Superfluid Helium / D. Rinberg, V. Cherepanov, V. Steinberg // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 76, No. 12. — P. 2105–2108.

[230] *Rinberg D.* Parametric generation of second sound in superfluid helium: Linear stability and nonlinear dynamics / D. Rinberg, V. Steinberg // Phys. Rev. B. — 2001. — Vol. 64, No. 5. — Art. 054506. — P. 27.

[231] *Wiechert H.* Theoretical studies of the propagation of sound in narrow channels filled with helium II. I. The dispersion relations of fourth sound and of the fifth wave mode / H. Wiechert, L. Meinhold-Heerlein // J. Low Temp. Phys. — 1971. — Vol. 4, No. 3. — P. 273–288.

[232] *Krotscheck E.* Third Sound and Stability of ^{3}He – ^{4}He Mixture Films / E. Krotscheck, M. D. Miller // J. Low Temp. Phys. — 2005. — Vol. 141, No. 1-2. — P. 1–25.

[233] *Romagnan J. P.* Propagation of Third Sound in a Waveguide Geometry / J. P. Romagnan, J. C. Noiray // J. Low Temp. Phys. — 2004. — Vol. 135, No. 3-4. — P. 203–217.

[234] *Luhman D. R.* Measurements of Third Sound Attenuation at $T =$ 1.35K / D. R. Luhman, R. B. Hallock // J. Low Temp. Phys. — 2007. — Vol. 148, No. 5-6. — P. 535–539.

[235] *Mongiovì M. S.* Attenuation of the fourth sound in liquid helium II via extended thermodynamics / M. S. Mongiovì, R. A. Peruzza // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2004. — Vol. 39, No. 6. — P. 1005–1012.

[236] "Sound" in superfluid liquids / B. N. Esel'son, M. I. Kaganov, E. Ya. Rudavskii, I. A. Serbin // Sov. Phys. Usp. — 1974. — Vol. 17, No. 2. — P. 215—238.

[237] *Mongiovì M. S.* Extended irreversible thermodynamics of liquid helium II: boundary condition and propagation of fourth sound / M. S. Mongiovì // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2001. — Vol. 292, No. 1-4. — P. 55—74.

[238] Transverse sound in differentially moving superfluid helium / I. N. Adamenko, K. E. Nemchenko, V. A. Slipko, A. F. G. Wyatt // Phys. Rev. B. — 2008. — Vol. 77, No. 14. — Art. 144515. — P. 6.

[239] *Вакарчук І. О.* Квантова механіка / І. О. Вакарчук. — 3-тє вид., доп. вид. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2007. — 848 с.

[240] *Penrose O.* On the Quantum Mechanics of Helium II / O. Penrose // Philos. Mag. — 1951. — Vol. 42, No. 335. — P. 1373–1377.

[241] *Feynman R. P.* Atomic Theory of Liquid Helium Near Absolute Zero / R. P. Feynman // Phys. Rev. — 1953. — Vol. 91, No. 6. — P. 1301–1308.

[242] *Зубарев Д. Н.* Вычисление конфигурационных интегралов для системы частиц, с кулоновским взаимодействием / Д. Н. Зубарев // ДАН СССР. — 1954. — Т. 95, № 4. — С. 757–760.

[243] *Юхновсъкий И. Р.* Метод смещений и коллективных переменных / И. Р. Юхновський. — Киев, ИТФ АН УССР, 1971. — 82 с. — Препринт / АН УССР, Институт теоретической физики, 71-26Р.

[244] *Паташинський А. З.* Флуктуационная теория фазовых переходов / А. З. Паташинський, В. Л. Покровський.— 2-е изд., перераб. вид.— Москва : Наука, Главная редакция физико-матиматической литературы, 1982. — 382 с.

[245] *Ferrell R. A.* Screening solution in the field theory of phase transitions / R. A. Ferrell, D. J. Scalapino // Phys. Lett. A.— 1972.— Vol. 41, No. 4.— P. 371–372.

[246] *Ferrell R. A.* Order-Parameter Correlations within the Screening Approximation / R. A. Ferrell, D. J. Scalapino, W. Zwerger // Phys. Rev. Lett.— 1972.— Vol. 29, No. 7.— P. 413–416.

[247] *Abe R.* Critical Exponent η up to $1/n^2$ for the Three-Dimensional System with Short-Range Interaction / R. Abe // Prog. Theor. Phys.— 1973.— Vol. 49, No. 6.— P. 1877–1888.

[248] Theoretical estimates of the critical exponents of the superfluid transition in ^{4}He by lattice methods / M. Campostrini, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, E. Vicari // Phys. Rev. B.— 2006.— Vol. 74, No. 14.— Art. 144506.— 18 p.

[249] *Вакарчук І. О.* Вступ до проблеми багатьох тіл / І. О. Вакарчук.— Львів : Львівський національний університет ім. Івана Франка, 1999.

[250] *Arp V. D.* ^{4}He state equation below 0.8K / V. D. Arp // Int. J. Thermophys.— 2005.— Vol. 26, No. 5.— P. 1477–1493.

[251] *Gernoth K. A.* Quantum structure of normal-liquid and supercritical ^{4}He / K. A. Gernoth, M. Serhan, M. L. Ristig // Phys. Rev. B. — 2008. — Vol. 78, No. 5. — Art. 054513. — 11 p.

[252] *Gernoth K. A.* Fluid Helium-4 in Thermal Equilibrium / K. A. Gernoth, M. Serhan, M. L. Ristig // Int. J. Mod. Phys. — 2009. — Vol. 23, No. 20n21. — P. 4096–4108.

[253] *Rovenchak A. A.* Extraction of interatomic potentials from structure of liquids / A. A. Rovenchak // Centr. Eur. J. Phys. — 2005. — Vol. 3, No. 1. — P. 47–60.

[254] *Юхновський І. Р.* Властивості рідкого гелію He^4 при наднизьких температурах / І. Р. Юхновський, І. О. Вакарчук // Вісник Академії наук УРСР. — 1977. — № 9. — С. 32–43.

[255] *Vakarchuk I. A.* Microscopic theory of the energy spectrum of liquid He II / I. A. Vakarchuk, I. R. Yukhnovskii // Theor. Math. Phys. — 1980. — Vol. 42, No. 1. — P. 73–80.