Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кузьмак

Андрій Романович

УДК 530.12, 530.145.61, 530.145.62

ЗАДАЧА ПРО БРАХІСТОХРОНУ В КЛАСИЧНІЙ І КВАНТОВІЙ МЕХАНІЦІ

01.04.02 — теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ — 2015

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Ткачук Володимир Михайлович,
професор кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Ткач Микола Васильович, завідувач кафедри теоретичної фізики Чернівецького національного унієрситету імені Юрія Федьковича

кандидат фізико-математичних наук
Крохмальський Тарас Євстахійович, старший науковий співробітник відділу статистичної теорії конденсованих систем Інституту фізики конденсованих систем НАН України

Захист відбудеться “04” листопада 2015 р. о 15 год. 30 хв. на засіданні спеціалізованої Вченої ради Д 35.051.09 при Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79005, м. Львів, вул. Кирила і Мефодія, 8, фізичний факультет, аудиторія Велика Фізична.

Із дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: 79005, м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розіслано “ 22” вересня 2015 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор фіз.-мат. наук, професор Павлик Б. В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження задачі про брахістохрону в однорідному ґравітаційному полі дало змогу розвинути нові методи у математиці, що своєю чергою дозволило сформулювати основи сучасного апарату варіаційного числення, яке знайшло широке застосування у різних задачах, пов’язаних із оптимізацією, як-от знаходження оптимальної еволюції класичних і квантових систем. Приміром, задача знаходження оптимального шляху для корабля, який пливе річкою з постійною течією, чи задача розрахунку оптимальної траєкторії спуску частинки у ґравітаційному полі розв’язується за допомогою варіаційного числення.

Завдяки варіаційному численню також було сформульовано і розв’язано задачу про брахістохрону в квантовій механіці. Останніми роками у дослідженні цієї задачі зроблено помітний поступ, що є важливим у досягненні успіху при реалізації квантових обчислень. Згідно із законом Мура, кількість електронних елементів в одиниці об’єму комп’ютера кожного року подвоюється, що в недалекому майбутньому приведе до межі, коли суттєвими стають квантові флуктуації, які порушують роботу класичних комп’ютерів. Тому виникає необхідність у дослідженні систем, результати яких можуть бути використані для створення квантових комп’ютерів, що дадуть можливість розв’язувати певні задачі набагато ефективніше. А це дозволить економити часові й енергетичні ресурси. Важливо, щоб ці системи володіли великим часом когеренції і добре були захищені від небажаних впливів (шумів). Також є важливим, щоб станом системи можна було легко керувати за допомогою зовнішніх полів і з високою точністю прочитати інформацію про стан, приготовлений на ній. Останніми роками багато зроблено у цій галузі, наприклад, запропоновано різні фізичні системи на роль елементів квантового комп’ютера. Одна з ефективних реалізацій цих елементів ґрунтується на спінових системах.

Незважаючи на помітні успіхи у дослідженні еволюції спінових систем, а саме, досягнення великого часу когеренції таких систем та високої точності зчитування інформації з них, залишається ще багато невирішених теоретичних і практичних проблем, які стосуються приготування квантових станів на таких системах для забезпечення конкретних квантових обчислень. Також залишаються ще не розв’язані проблеми, які стосуються оптимальної еволюції класичних систем. Це, наприклад, знаходження точних розв’язків рівнянь, які виникають при дослідженні задачі про брахістохрону для таких систем.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та відповідно до держбюджетних тем Фф-14Ф “Нові методи дослідження квантових систем декількох і багатьох частинок” (2009–2011 рр., номер держреєстрації 0109U002096) та Фф-110Ф “Нові ефекти у квантових рідинах і газах та системах з деформованою алгеброю Гайзенберґа” (2012–2014 рр., номер держреєстрації 0112U001275).

Мета і завдання дослідження. Головною метою дисертаційної роботи є дослідження оптимальної еволюції класичних та квантових систем. Основну увагу приділено, дослідженню задачі про брахістохрону для частинки, яка рухається у сферично-симетричному ґравітаційному полі, що задається метрикою Шварцшільда, а також вивченню оптимальної еволюції спінових систем.

Значна частина роботи присвячена дослідженню еволюції спінових систем і геометрії многовидів, на яких відбувається така еволюція, що має пряме застосування для реалізації квантових обчислень. Також увагу приділено знаходженню оптимальних способів контролю еволюції таких систем, що дає змогу реалізувати певні квантові унітарні перетворення за мінімальний час.

Отже, *об’єктом дослідження* є частинка у ґравітаційному полі Шварцшільда та квантові системи спінів з різними типами взаємодії. *Предметом дослідження* є рух частинки у ґравітаційному полі та еволюція спінових систем. *Методом дослідження* задачі про брахістохрону в метриці Шварцшільда виступають методи варіаційного числення, а при дослідженні оптимальної еволюції квантових систем використовуються методи, пов’язані з дією оператора еволюції на просторі квантових станів.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі вперше отримано рівняння для брахістохрони в метриці Шварцшільда як щодо нерухомих спостерігачів, які знаходяться уздовж траєкторії, так і щодо віддаленого спостерігача. Також вперше отримано рівняння брахістохрони, коли рух частинки вздовж радіальної координати є незначним відносно відстані до центра поля, що є аналогом задачі про брахістохрону в однорідному ґравітаційному полі.

Уперше розв’язано задачу про квантову брахістохрону для двох спінів 1/2, взаємодія між якими описується анізотропним гамільтоніаном Гайзенберґа, в якому xz і yz компоненти взаємодії відсутні. Для такої системи показано можливість реалізації певних унітарних перетворень за мінімальний час.

Уперше було запропоновано метод для приготування довільного стану на системі двох спінів 1/2. Спрощену версію цього методу, яку на сьогодні можна експериментально реалізувати, розглянуто на атомі зі спіном ядра 1/2 та одним валентним електроном.

Уперше показано, що еволюція у магнітному полі системи двох спінів, взаємодія між якими описується ізотропною моделлю Гайзенберґа, відбувається на двопараметричному многовиді, який є тором. Також вперше отримано метрику многовиду, на якому відбуваються повороти власного стану оператора проекції спіну на деякий напрямок. Показано, що такий многовид є сферою із радіусом, залежним від величини проекції спіну. Вперше розв’язано задачу про брахістохрону для такої системи і показано, що для того, щоб еволюція відбувалася за мінімальний час, необхідно, щоб магнітне поле було спрямоване перпендикулярно до початкового і кінцевого станів.

Практичне значення отриманих результатів. Результати, отримані у роботі, можуть бути використані для реалізації квантових обчислень і побудови квантових комп’ютерів. Системи, які були досліджені у цій роботі, можуть бути використані для побудови регістру квантового комп’ютера. Отримані у роботі умови для оптимальної еволюції спінових систем у магнітному полі дадуть можливість реалізувати конкретні унітарні перетворення за мінімально можливий час, що дозволить реалізувати обчислення на квантових комп’ютерах з економією часових і енергетичних ресурсів.

Особистий внесок здобувача. Постановку завдань дослідження здійснив науковий керівник роботи проф. В. М. Ткачук. Усі викладені в дисертації результати автор отримав самостійно або при своїй безпосередній участі. У роботах, виконаних зі співавторами, здобувачеві належить:

- дослідження задачі про брахістохрону для системи двох спінів, взаємодія між якими описується анізотропним гамільтоніаном Гайзенберґа [2]; отримання умов для реалізації квантових логічних елементів на цій системі;
- отримання двокрокового методу для приготування довільного квантового стану на системі двох спінів [3]; дослідження простішої версії цього методу на фізичній системі атома зі спіном ядра 1/2 і одним валентним електроном; отримання умов для приготування квантового стану на системі атома фосфору в оточені атомів кремнію;
- розрахунок метрики многовиду, який містить усі стани, що можна досягнути під час еволюції на системі двох спінів з ізотропною взаємодією Гайзенберґа у магнітному полі [4];
- розрахунок метрики многовиду, який містить стани, що можна досягнути при повороті власного стану оператора проекції спіну величиною s на визначений напрямок [5]; дослідження оптимальної еволюції довільного спіну у магнітному полі.

Результати статей, їхню інтерпретацію та застосовність використаних підходів співавтори обговорювали на паритетних засадах.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включені до дисертації, здобувач представляв особисто на таких конференціях та семінарах: Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики ”Еврика-2010” (Львів, 2010) [6]; X Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2010) [7]; Young Scientists Conference ”Modern Problems of

Theoretical Physics” (Київ, 2010) [8]; Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики ”Еврика-2011” (Львів, 2011) [9]; 11-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2011) [10]; III Young Scientists Conference ”Modern Problems of Theoretical Physics” (Київ, 2011) [11]; 12-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2011) [12]; Workshop on Current Problems in Physics (Львів, 2012) [13]; IV Young Scientists Conference ”Modern Problems of Theoretical Physics” (Київ, 2012) [14]; Різдвяні дискусії 2013 (Львів, 2013) [15]; Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2012 рік (Львів, 2013); Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики ”Еврика-2013” (Львів, 2013) [16]; 6th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Gora - Lviv (Zielona Gora, 2013) [17]; Proceedings of VI International Conference ”Physics of Disordered Systems” (Львів, 2013) [18]; V Young Scientists Conference ”Problems of Theoretical Physics” (Київ, 2013) [19]; Різдвяні дискусії 2014 (Львів, 2014) [20]; Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2013 рік (Львів, 2014); 14-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2014) [21]; Workshop on Current Problems in Physics (Львів, 2014) [22]; VI Young Scientists Conference ”Problems of Theoretical Physics” dedicated to the 105-th anniversary of M. M. Bogolyubov (Київ, 2014) [23].

Подані у роботі результати неодноразово обговорювали на наукових семінарах кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка, а також були апробовані під час наукових стажувань за кордоном.

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано у п’яти журнальних статтях [1-5] та 18 тезах доповідей на конференціях [6-23].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, шести розділів, висновків та списку використаних джерел. Обсяг дисертації становить 150 сторінок включно зі списком використаних джерел, що містить 181 найменування. Результати роботи проілюстровано на 16 рисунках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність досліджень, які становлять зміст дисертації, висвітлено новизну одержаних результатів, подано зв’язок досліджень із науковими темами, у виконанні яких брав участь автор, окреслено мету роботи.

У **першому розділі** коротко подано історію дослідження задачі про брахістохрону, починаючи від статті Й. Бернуллі, а також висвітлено важливість квантової версії цієї проблеми при дослідженні еволюції квантових систем.

У **другому розділі** розв'язано задачу про брахістохрону у сферично-симетричному ґравітаційному полі, що задається метрикою Шварцшільда. З міркувань сферичної симетрії задачу зручно розглядати у площині і квадрат інтервалу записати у вигляді:

$$(ds)^2 = \left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2(dt)^2 - \frac{(dr)^2}{1-\frac{r_g}{r}} - r^2(d\phi)^2, \tag{1}$$

де c – це швидкість світла, $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ – це ґравітаційний радіус, G – це ґравітаційна стала і M є масою тіла, яке створює ґравітацію.

При русі частинки у сталому ґравітаційному полі зберігається її енергія, яка є часовою коваріантною компонентою чотири-вектора імпульсу помноженого на швидкість світла. Користуючись цим законом збереження, знаходимо швидкість частинки. Тепер, зважаючи на той факт, що час руху частинки вздовж елемента траєкторії, квадрат якого є просторовою компонентою квадрату інтервалу (1), прямо пропорційний до останнього і обернено пропорційний до швидкості руху частинки вздовж нього, отримуємо функціонал $L\left(r, \frac{dr}{d\varphi}\right)$, який пов'язаний з часом так:

$$d\tau = L\left(r, \frac{dr}{d\varphi}\right)d\varphi, \tag{2}$$

де τ – це час, який фіксується нерухомим спостерігачем в даній точці траєкторії. Використовуючи рівняння Ейлера-Лагранжа для цього функціоналу і увівши такі безрозмірні величини як $R = \frac{r}{r_g}$ і $R_s = \frac{r_s}{r_g}$, отримаємо таке рівняння:

$$\frac{dR}{d\phi} = \pm R\sqrt{\frac{C(R_s-1)R^3 + R - R_s}{R_s - R}}\sqrt{\frac{R-1}{R}}, \tag{3}$$

де C є сталою величиною. Для двох фіксованих точок у просторі це рівняння має безліч розв'язків, яким відповідають різні кути, під якими видно траєкторію з початку координат. Траєкторія, якій відповідає найменший кут, що збігається з полярним кутом між заданими точками, є траєкторією, по якій частинка рухається від початкової до кінцевої точок за найменший час. Ця траєкторія називається брахістохроною. Усі решта траєкторії будуть намотуватися навколо кола із радіусом r_g. Важливо зауважити, що при великих $R \gg 1$ рівняння (3) прямує до рівняння брахістохрони у ньютонівському ґравітаційному полі:

$$\frac{dR}{d\phi} = \pm R\sqrt{\frac{CR_sR^3 + R - R_s}{R_s - R}}. \tag{4}$$

Рівняння (3) описує брахістохрону щодо нерухомих спостерігачів, які знаходяться уздовж траєкторії. На рис. 1 зображено траєкторії у ґравітаційному полі Шварцшільда (ліворуч) і Ньютона (праворуч). Видно, що у ньютонівському випадку радіальні координати точок на траєкторії мають менші значення, ніж у полі Шварцшільда. Це зумовлено тим, що, на відміну від брахістохрони, яка реалізується у ґравітаційному полі Ньютона (4), релятивістська (3) має множник $\sqrt{\frac{R-1}{R}}$.

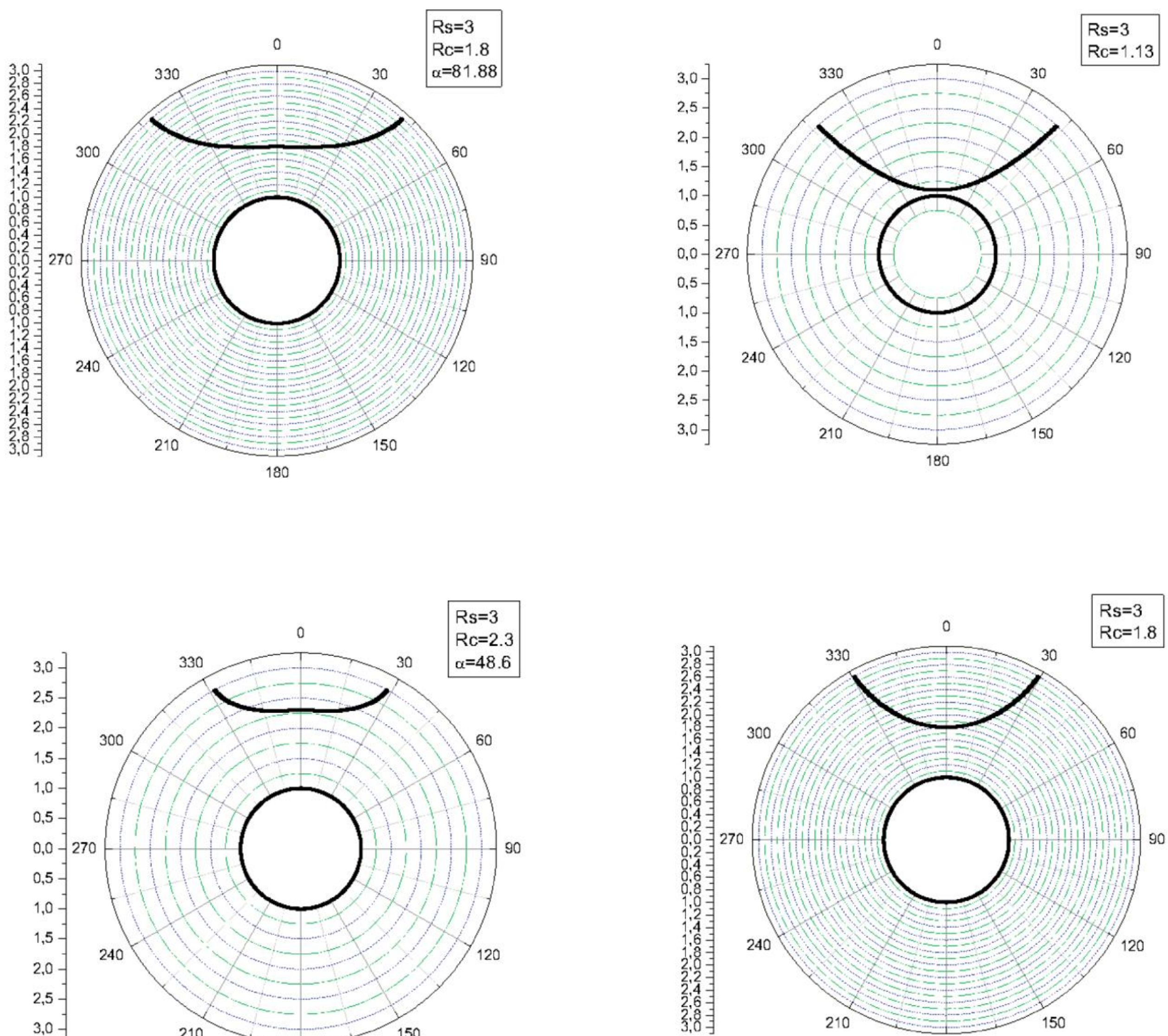

Рис. 1. З лівого боку зображені форми брахістохрони у ґравітаційному полі Шварцшільда, а праворуч – для ньютонівського поля, для різних значень початкової і кінцевої точок, які знаходяться на відстані трьох ґравітаційних радіусів від центру координат.

На рис. 2 зображено залежність часу, який необхідно частинці потратити при русі по релятивістських траєкторіях, від кута, під яким видно ці траєкторії з початку координат, у випадку, коли початкова і кінцева точки знаходяться на відстані трьох ґравітаційних радіусів від центра ґравітаційного поля.

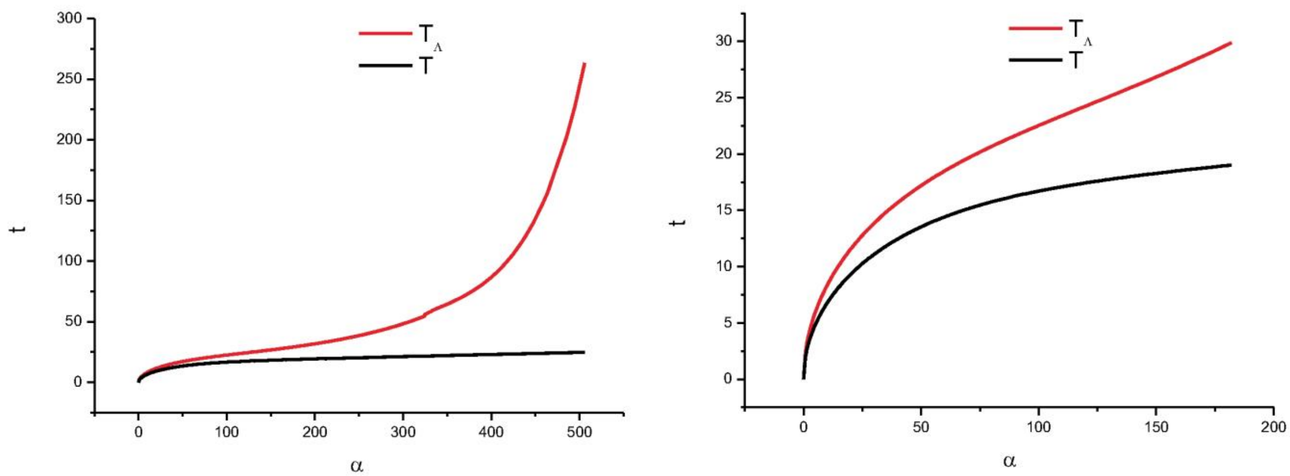

Рис. 2. Час, який фіксують спостерігачі вздовж траєкторії (T , нижня крива), і час стосовно далекого спостерігача (T_Λ , верхня крива) руху по брахістохроні у сферично-симетричному ґравітаціному полі Шварцшільда залежно від полярного кута між початковою і кінцевою точками, які знаходяться на відстані трьох ґравітаційних радіусів від центру координат.

Також у роботі отримуємо рівняння брахістохрони стосовно спостерігача, який перебуває на великій відстані від ґравітаційного поля. Подібно, як у попередньому випадку, записуємо вираз для проміжку часу руху частинки по траєкторії, який вимірюється віддаленим спостерігачем. Функціонал, який входить у цей вираз, підставляємо у рівняння Ейлера-Лагранжа і отримуємо таке рівняння

$$\frac{dR}{d\phi} = \pm R\sqrt{\frac{C(R_s-1)R^4-(R_s-R)(R-1)}{R(R_s-R)}}. \tag{5}$$

Це рівняння при великих R прямує до рівняння брахістохрони у ґравітаційному полі Ньютона (4).

У **третьому розділі** досліджено систему двох спінів ½ взаємодія, між якими задається константами зв'язку J_{ii} ($i=x,y,z$), J_{jk} ($j \neq k = x,y$). Також вважається, що кожен спін поміщений у зовнішнє магнітне поле, яке спрямоване вздовж осі *z*. Гамільтоніан цієї системи має вигляд

$$H = \sum_{i,j=x,y,z} J_{ij}\sigma_i^1\sigma_j^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} h_z^\alpha \sigma_z^\alpha \ , \tag{6}$$

де $J_{xz} = J_{zx} = J_{yz} = J_{zy} = 0$, $\sigma_i^1 = \sigma_i \otimes I$, $\sigma_i^2 = I \otimes \sigma_i$, σ_i є матрицями Паулі, h_z^α – це величина, яка задає взаємодію спіну із полем, а параметр α вказує на номер спіну. Важливо зауважити, що цей гамільтоніан не містить *xz* і *yz* компонент взаємодії, що дає змогу такій системі еволюціонувати на двох підпросторах $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ і $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ окремо. Тут стани $|\uparrow\rangle$ і $|\downarrow\rangle$ є власними станами *z*-компоненти оператора спіну з власними значеннями 1 і -1 відповідно. Цей факт дає можливість розглянути еволюцію цієї системи на двох підпросторах окремо, що суттєво спрощує розв’язок задачі про брахістохрону для цієї системи.

Під час дослідження задачі про брахістохрону важливо задати умову, що фіксує енергетичні ресурси системи. У цій роботі ми використали умову із статті [A. Carlini, A. Hosoya, T. Koike, Y. Okudaira // Phys. Rev. A. – 2007. – Vol. 75. – Art. 042308. – 8 p.], яка є нічим іншим як фіксуванням суми квадратів власних значень гамільтоніану сталою величиною ω^2.

Спочатку розглянемо еволюцію на підпросторі, що задається векторами $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$. Вважається, що у початковий момент часу система перебуває у стані $|\psi_i\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$, а кінцевий стан, який необхідно досягнути за мінімальний час, має вигляд $|\psi_f\rangle = a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\downarrow\downarrow\rangle$. Тоді з рівняння $|\psi_f\rangle = e^{-iHt}|\psi_i\rangle$ знаходимо умови:

$$J_{xx} = -J_{yy} = -\frac{\omega}{2}\frac{\operatorname{Im} b}{|b|},\ J_{xy} = J_{yx} = \frac{\omega}{2}\frac{\operatorname{Re} b}{|b|},\ J_{zz} = 0,\ h_z^1 = h_z^2 = 0, \tag{7}$$

які дають змогу досягнути кінцевого стану за мінімальний час

$$\tau = \frac{1}{\omega}\arcsin|b|. \tag{8}$$

Зауважимо, що ми працюємо у системі одиниць, де $\hbar = 1$, а це означає, що гамільтоніан вимірюється в одиницях частоти.

Підпростір, який задається векторами $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$, є двовимірний, а це означає, що його можна задати сферою Блоха, де базисні стани будуть знаходитися на полюсах цієї сфери (див. рис. 3). Будь-який чистий стан, який належить до цього підпростору, можна зобразити точкою на цій сфері. Оптимальна еволюція буде відбуватися навколо осі, яка проходить через центр сфери і лежить перпендикулярно до напрямку на початковий і кінцевий стан. На кінцях цієї осі будуть знаходитися власні стани оптимального гамільтоніану $|\psi_I^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\uparrow\rangle + i\frac{b}{|b|}|\downarrow\downarrow\rangle\right]$ і $|\psi_I^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\uparrow\rangle - i\frac{b}{|b|}|\downarrow\downarrow\rangle\right]$, які відповідають наступним власним значенням ω і $-\omega$ відповідно. Оптимальний гамільтоніан отримується при підстановці умов (7) в гамільтоніан (6). У матричному представленні він має вигляд:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\omega\frac{b^*}{|b|} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\omega\frac{b}{|b|} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

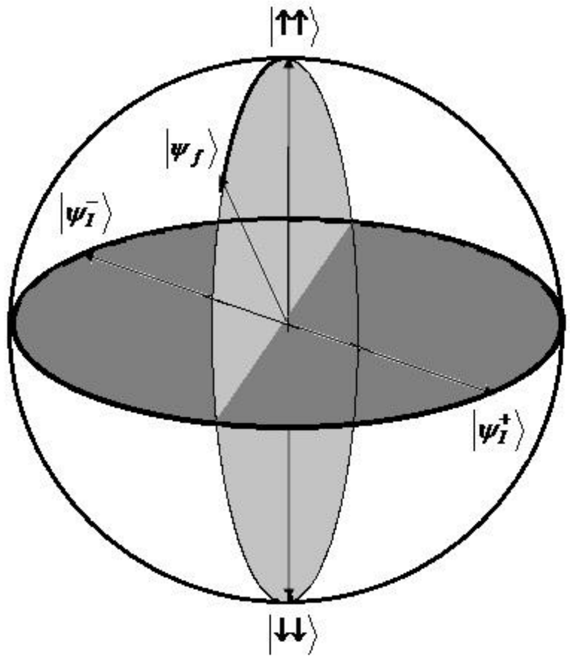

Рис. 3. Оптимальна еволюція системи між станами $|\uparrow\uparrow\rangle$ і $|\psi_f\rangle$ відбувається вздовж дуги кола, яке є перпендикулярне до осі, що проходить через власні стани $|\psi_I^+\rangle$ і $|\psi_I^-\rangle$ оптимального гамільтоніану.

На другому підпросторі, який задається векторами $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$, маємо подібну ситуацію. Тільки тут початковий і кінцевий стани задамо у вигляді $|\psi_i\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$ і $|\psi_f\rangle = a|\uparrow\downarrow\rangle + b|\downarrow\uparrow\rangle$ відповідно. Подібно, як у попередньому випадку знаходимо оптимальні умови

$$J_{xx} = J_{yy} = -\frac{\omega}{2}\frac{\operatorname{Im} b}{|b|},\ J_{xy} = -J_{yx} = -\frac{\omega}{2}\frac{\operatorname{Re} b}{|b|},\ J_{zz} = 0,\ h_z^1 = h_z^2 = 0, \qquad (10)$$

що дають змогу системі еволюціонувати за мінімальний час, який, як і у попередньому випадку, визначається формулою (8).

Цей підпростір також можна задати сферою Блоха, тільки на полюсах будуть знаходитися вектори $\left|\uparrow\downarrow\right\rangle$, $\left|\downarrow\uparrow\right\rangle$. Еволюція буде відбуватися навколо осі, на кінцях якої знаходяться власні стани оптимального гамільтоніану $\left|\psi_{II}^{+}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + i\frac{b}{|b|}\left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right]$ і $\left|\psi_{II}^{-}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - i\frac{b}{|b|}\left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right]$, який отримується підстановкою умов (10) в гамільтоніан (6):

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega\frac{b^*}{|b|} & 0 \\ 0 & i\omega\frac{b}{|b|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Отже, на такій системі можна побудувати квантові логічні елементи, які заплутують два спіни на одному і другому підпросторі, а також логічний елемент, що міняє стани двох спінів місцями (SWAP) і подібний оператор до останнього, який ще домножує отриманий стан на уявну одиницю (iSWAP). Створення таких елементів є важливим при реалізації різних алгоритмів у квантовій інформації. Наприклад, реалізація найпростішої схеми квантової телепортації стану одного кубіта [Charles H. Bennett et al. // Phys. Rev. Lett. – 1993. – Vol. 70. – P. 1895–1899] вимагає створення квантового каналу на синглетному стані, який реалізується на нашій системі.

У **четвертому розділі** запропоновано двокроковий метод, який дає змогу приготувати довільний квантовий стан на двох спінах, взаємодія між якими описується ізотропним гамільтоніаном Гайзенберга. На першому кроці система з початкового стану $\left|\uparrow\downarrow\right\rangle$ еволюціонує, за рахунок взаємодії, певний проміжок часу t_1. Зауважимо, що початковий стан системи ми не беремо у вигляді $\left|\uparrow\uparrow\right\rangle$ чи $\left|\downarrow\downarrow\right\rangle$ тому, що ці стани є власними станами даної системи. На другому кроці у момент часу t_1 до кожного спіну прикладаємо своє імпульсне магнітне поле. В результаті отримуємо стан, який є залежний від проміжку часу t_1 і величин магнітних полів χ_1 і χ_2, а також сферичних кутів θ_1, φ_1 і θ_2, φ_2, які задають напрямки цих полів відповідно для першого і другого спіну. Цей стан має вигляд розкладу Шмідта:

$$\left|\psi\right\rangle = \cos\left(\frac{A}{2}t_1\right)\left[\left(\cos\chi_1 - i\sin\chi_1\cos\theta_1\right)\left|\uparrow\right\rangle + \sin\chi_1\sin\theta_1 e^{i\left(\phi_1-\frac{\pi}{2}\right)}\left|\downarrow\right\rangle\right]$$
$$\times\left[\sin\chi_2\sin\theta_2 e^{-i\left(\phi_2+\frac{\pi}{2}\right)}\left|\uparrow\right\rangle + \left(\cos\chi_2 + i\sin\chi_2\cos\theta_2\right)\left|\downarrow\right\rangle\right]$$

$$+\sin\left(\frac{A}{2}t_1\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}\left[\sin\chi_1\sin\theta_1 e^{-i\left(\phi_1+\frac{\pi}{2}\right)}\left|\uparrow\right\rangle+\left(\cos\chi_1+i\sin\chi_1\cos\theta_1\right)\left|\downarrow\right\rangle\right]$$
$$\times\left[\left(\cos\chi_2-i\sin\chi_2\cos\theta_2\right)\left|\uparrow\right\rangle+\sin\chi_2\sin\theta_2 e^{i\left(\phi_2-\frac{\pi}{2}\right)}\left|\downarrow\right\rangle\right]. \quad (12)$$

Цей стан визначається сімома дійсними параметрами, але насправді один параметр є фазою і може бути опущений. Таким чином цей стан містить шість дійсних параметрів, підбором яких можна прийти до довільного стану системи двох спінів.

Сучасна експериментальна техніка не дозволяє керувати кожним спіном окремо за допомогою імпульсного магнітного поля, як це описано на другому кроці нашого методу. Тому ми запропонували простішу версію цього методу, яка є застосовна до такої фізичної системи як атом зі спіном ядра $I=1/2$ і одним валентним електроном ($S=1/2$). Отже, вважається, що у початковий момент часу наша система перебуває у стані $\left|+-\right\rangle$, де $\left|+\right\rangle$ і $\left|-\right\rangle$ є власними станами оператора проекції спіну ½ на напрямок, який визначається сферичними кутами θ і φ. Магнітне поле, яке є однаковим для кожного спіну і діє протягом часу взаємодії між спінами, спрямуємо вздовж осі *z*. В результаті отримаємо стан, який визначається чотирма дійсними параметрами, а саме, часом еволюції системи *t*, величиною магнітного поля B_z і двома кутами, які задають проекцію початкового стану. Цей метод не дає можливості досягнути довільного стану на системі двох спінів. Проте, якщо початковий стан спроектувати на вісь *z*, то можна отримати довільний стан на підпросторі, який задається векторами $\left|\uparrow\downarrow\right\rangle$, $\left|\downarrow\uparrow\right\rangle$:

$$\left|\psi\right\rangle=\left(\cos(\Omega t)-i\frac{\omega_-}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)\left|\uparrow\downarrow\right\rangle+\frac{A}{2\Omega}\sin(\Omega t)e^{-i\frac{\pi}{2}}\left|\downarrow\uparrow\right\rangle, \quad (13)$$

де $\Omega=\sqrt{\omega_-^{\,2}+\frac{A^2}{4}}$, A – величина взаємодії між спінами, $\omega_-=\frac{\gamma_e+\gamma_n}{2}B_z$. Тут γ_e і γ_n – це гіромагнітні співвідношення для електрона і ядра відповідно.

Відомо, що така система, як атом фосфору в оточенні атомів кремнію має великий час когеренції спіна валентного електрона [A. M. Tyryshkin et al. // Nature Materials. – 2012. – Vol. 11. – P. 143-147.] і спіна ядра [K. Saeedi et al. // Science. – 2013. – Vol. 342. – P. 830-833.], а також стан, приготований на ній, можна прочитати з високою точністю [J. J. Pla et al. // Nature. – 2013. – Vol. 496. – P. 334–338.]. Ці властивості дають змогу такій системі претендувати на роль “будівельних” блоків квантового комп’ютера. Тому вищерозглянутий метод може бути застосований для приготування квантового стану на такій системі. Приміром, отриманий метод дає змогу на системі атома фосфору отримати один з Беллівських станів $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle+\left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right)$, якщо у початковий момент часу система перебувала у стані $\left|\uparrow\downarrow\right\rangle$. Для цього її потрібно помістити у магнітне поле величиною $B_z = 4.2$ мТл на час $t = 19$ нс.

У **п'ятому розділі** розглянуто квантову еволюцію системи двох спінів ½ з ізотропною взаємодією Гайзенберґа, які поміщені у магнітне поле, що спрямоване вздовж осі *z*. У початковий момент часу система перебуває у стані $\left|\psi_i\right\rangle = a_i\left|\uparrow\uparrow\right\rangle + b_i\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + c_i\left|\downarrow\uparrow\right\rangle + d_i\left|\downarrow\downarrow\right\rangle$, а стан, якого система досягла протягом часу *t*, є таким:

$$\left|\psi(\theta,\varphi)\right\rangle = a_i e^{-i(\varphi+\theta)}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle + (b_i\cos\theta - ic_i\sin\theta)\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + (-ib_i\sin\theta + c_i\cos\theta)\left|\downarrow\uparrow\right\rangle + d_i e^{i(\varphi-\theta)}\left|\downarrow\downarrow\right\rangle, \quad (14)$$

де $\theta = 2Jt$, $\varphi = 2h_z t$, J – величина взаємодії між спінами, h_z є пропорційною до величини магнітного поля. Легко бачити, що цей стан, з точністю до фази, є періодичним з періодом π за θ і з періодом 2π за φ. Отже, еволюція даної системи відбувається на двопараметричному замкнутому многовиді, метрику якого отримаємо, скориставшись означенням, наприклад, з роботи [I. Bengtsson, K. Zyczkowski. – Cambridge : Cambridge University Press, 2006. – 418 p.]. Тоді ми отримаємо, що квадрат відстані між двома близько розташованими станами на цьому многовиді визначається виразом

$$ds^2 = \gamma^2\left[B(2-B)(d\theta)^2 + \left(A-D^2\right)(d\phi)^2 + 2BDd\theta d\phi\right], \quad (15)$$

де γ – це довільний параметр, який вибирається з міркувань зручності, $A = |a_i|^2 + |d_i|^2$, $B = |b_i - c_i|^2$ і $D = |a_i|^2 - |d_i|^2$. Легко переконатися, що заміна $\varphi = \varphi' - \frac{DB}{A-D^2}\theta'$ і $\theta = \theta'$ переводить вираз (15) у діагональну форму, а також, що нові компоненти метричного тензора завжди будуть додатніми. Зважаючи на той факт, а також на те, що отримана метрика є плоскою, що випливає з незалежності компонент метричного тензора від параметрів θ і φ, робимо висновок, що цей многовид є тором.

Забезпечення різних алгоритмів для квантових обчислень часто вимагає приготування максимально заплутаних станів. Тому корисно дослідити заплутаність станів, які належать до многовиду, що задається виразом (15). Скориставшись означенням для узгодженості [William K. Wootters // Phys. Rev. Lett. – 1998. –Vol. 80. – P. 2245–2248; Scott Hill, William K. Wootters // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 78. – P. 5022–5025.], яка є мірою заплутаності, отримаємо, що заплутаність стану (14) визначається тільки параметром, що є пропорційний до величини взаємодії між спінами

$$C = 2\left|a_i d_i e^{-i2\theta} - \left(b_i c_i \cos 2\theta - \frac{i}{2}\left(b_i^2 + c_i^2\right)\sin 2\theta\right)\right|. \quad (16)$$

Це означає, що для кожного фіксованого значення θ існують лінії на торі, які містять всі стани із тією самою заплутаністю. З виразу для метрики (15) отримуємо, що ці лінії є колами із радіусом $\gamma\sqrt{A-D^2}$.

На завершення, скориставшись вищеотриманими результатами, знаходимо, що коли наша система перебуває у початковому стані, який є факторизований і спроектований на визначений напрям так, що перший спін має додатну проекцію, а другий – від'ємну, то максимально заплутаний стан досягається за умови, що параметр $\theta = \frac{\pi}{4}$.

У **шостому розділі** вивчено обертові многовиди, які отримують при повороті власних станів *z*-компоненти оператора спіну *s* спочатку на кут θ навколо осі *y*, а потім на кут φ навколо осі *z*. Показано, що метрика такого многовиду є метрикою сфери із радіусом, залежним від величини спіну і власного значення *m*, що відповідає початковому станові. Вираз, який задає квадрат відстані між двома близько розташованими станами на обертовому многовиді має вигляд:

$$ds_m^2 = \frac{\gamma^2}{2}\left(s+s^2-m^2\right)\left((d\theta)^2+\sin^2\theta\left(d\phi\right)^2\right), \tag{17}$$

з якого робимо висновок, що існує *s+1* обертовий многовид для цілого спіну і *s+1/2* – для півцілого спіну.

Еволюцію спіну на одному з таких многовидів можна забезпечити за допомогою магнітного поля. Якщо початковий стан спіну знаходиться на одному з таких многовидів, тоді еволюція буде відбуватися на останньому. Знайдімо умови, які забезпечують еволюцію між двома заданими станами за мінімальний час, за умови, що величина магнітного поля є фіксованою. Іншими словами, необхідно знайти напрямок магнітного поля, при якому еволюція з початкового до кінцевого стану буде проходити за мінімально можливий час. Це є задачею про брахістохрону для довільного спіну, який знаходиться у магнітному полі.

Зауважимо, що коли поле спрямоване під кутом θ' до напрямку на початковий стан, то цей стан буде прецесувати навколо осі, яка задає напрямок поля. Тому, щоб досягнути кінцевого стану, кут між віссю, що задає напрямок поля, і цим станом, має бути таким самим, як між цією віссю і початковим станом. Враховуючи те, що еволюція відбувається на многовиді, який є сферою радіуса *R*, і те, що кут між початковим і кінцевим станами є рівний θ_f , знаходимо відстань, яку система долає між цими станами під час еволюції

$$s = 2R\sin\theta`\arcsin\frac{\sin\frac{\theta_f}{2}}{\sin\theta`}. \tag{18}$$

Швидкість еволюції знаходиться з формули Анандана-Ааронова [J. Anandan,

Y. Aharonov // Phys. Rev. Lett. – 1990. – Vol. 65. – P. 1697–1700.] і у нашому випадку вона рівна

$$v = \omega R \sin\theta', \tag{19}$$

де ω є пропорційною до напруженості магнітного поля. Враховуючи, що час еволюції є пропорційним до її шляху (18) і обернено пропорційний до швидкості, з якою система еволюціонує (19), робимо висновок, що остання буде відбуватися за мінімальний час, коли $\theta' = \frac{\pi}{2}$. Це означає, що у цьому випадку поле має бути спрямоване перпендикулярно до початкового і кінцевого станів. Також знаходимо, що мінімальний час еволюції є пропорційним до кута між початковим і кінцевим станами і обернено пропорційний до величини взаємодії поля зі спіном $t_{\min} = \frac{\theta_f}{\omega}$, і не залежить від многовиду, на якому відбувається еволюція.

Дисертаційна робота завершується **Висновками** та **Списком використаних джерел**.

Основні результати та висновки дисертації можна викласти у вигляді таких тверджень:

- Отримано рівняння брахістохрони для частинки, яка рухається у сферично-симетричному ґравітаційному полі, що описується метрикою Шварцшільда. Зокрема, розраховано рівняння оптимальної траєкторії відносно нерухомих спостерігачів, які знаходяться вздовж останньої, а також знайдено рівняння такої траєкторії відносно віддаленого спостерігача.
- Розв’язано задачу про квантову брахістохрону для системи двох спінів з анізотропним гамільтоніаном Гайзенберґа без *xz* і *yz* компонент взаємодії. Показано, що на такій системі можна побудувати квантові логічні елементи, які заплутують два спіни, квантовий логічний елемент, який обмінює стани між двома спінами (SWAP) і подібний до останнього логічний елемент, який отриманий стан домножує на уявну одиницю (iSWAP).
- Запропоновано двокроковий метод, який дає змогу приготувати довільний квантовий стан на системі двох спінів, взаємодія між якими описується ізотропною моделлю Гайзенберґа. Показано, що простіша версія цього методу може бути реалізована на такій фізичній системі як атом зі спіном ядра ½ і одним валентним електроном.
- Показано, що еволюція двоспінової системи, яка описується ізотропним гамільтоніаном Гайзенберґа, що знаходиться у магнітному полі, відбувається на многовиді, який є тором.
- Показано, що метрика многовиду, який містить стани, що досягаються під час поворотів власного стану оператора проекції довільного спіну на визначений

напрямок, є метрикою сфери із радіусом, який залежить від параметрів, що задають початковий стан, а саме, від величини спіну і величини його проекції. Також показано, що гамільтоніан, який задає еволюцію на такому многовиді є гамільтоніаном довільного спіну у магнітному полі. Доведено, що еволюція буде відбуватися за мінімальний час, у випадку, коли поле буде спрямоване перпендикулярно до початкового і кінцевого станів, а траєкторія, що відповідає цій еволюції, буде дугою великого кола, що з'єднує два стани на сфері.

Список опублікованих праць за темою дисертації:

[1] *Кузьмак А. Р.* Рівняння брахістохрони в метриці Шварцшільда / А. Р. Кузьмак // Журн. фіз. досл. — 2011. — Т. 15. — Ст. 3002. — 9 с.

[2] *Kuzmak A. R.* The quantum brachistochrone problem for two spins-1/2 with anisotropic Heisenberg interaction / A. R. Kuzmak, V. M. Tkachuk // J. Phys. A: Math. Theor. — 2013. — Vol. 46. — Art. 155305. — 12 p.

[3] *Kuzmak A. R.* Preparation of quantum states of two spin- 1/2 particles in the form of the Schmidt decomposition / A. R. Kuzmak, V. M. Tkachuk // Phys. Lett. A. — 2014. — Vol. 378. — P. 1469–1474.

[4] *Kuzmak A. R.* Quantum evolution on torus for two spins with isotropic Heisenberg interaction / A. R. Kuzmak, V. M. Tkachuk // Visnyk of the Lviv University. Series Physics. — 2013. — Vol. 48. — P. 279-284.

[5] *Kuzmak A. R.* The quantum brachistochrone problem for an arbitrary spin in a magnetic field / A. R. Kuzmak, V. M. Tkachuk // Phys. Lett. A. — 2015. — Vol. 379. — P. 1233–1239.

[6] *Кузьмак А.* Рівняння брахістохрони в полі чорної діри Шварцшільда / А. Кузьмак // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики ”Еврика-2010”. — Львів, 19-21 травня 2010: Тези доповідей. — С. B8.

[7] *Кузьмак А.* Рівняння брахістохрони в полі чорної діри Шварцшільда / А. Кузьмак // X Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, 3-4 червня 2010. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 45.

[8] *Kuzmak A. R.* Brachistochrone problem in the Schwarzschild metric / A. R. Kuzmak // Young Scientists Conference ”Modern Problems of Theoretical Physics”. — Kyiv, Ukraine, December 22-24, 2010: Program and Abstracts. — P. 71.

[9] *Кузьмак А.* Ефекти, які виникають для брахістохрони в метриці Шварцшільда / А. Кузьмак // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики ”Еврика-2011”. — Львів, 18-20 травня 2011: Тези доповідей. — С. B10.

[10] *Кузьмак А.* Ефекти, які виникають для брахістохрони в метриці Шварцщільда / А. Кузьмак // 11-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, 1-3 червня 2011. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 37.

[11] *Kuzmak A. R.* Brachistochrone problem for two spin-1/2 particles in a 2-dimensional basis / A. R. Kuzmak // III Young Scientists Conference ”Modern Problems of Theoretical Physics”. — Kyiv, Ukraine, December 21-23, 2011: Program and Abstracts. — P. 128.

[12] *Кузьмак А.* Задача брахістохрони для системи двох спінів-1/2 / А. Кузьмак // 12-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, 30 травня-1 червня 2012. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 32.

[13] *Kuzmak A. R.* Quantum brachistochrone problem for two spin-1/2 / A. R. Kuzmak // Workshop on Current Problems in Physics, Lviv, 10-11 July, 2012. — J. Phys. Stud. — Vol. 16. — P. 3998.

[14] *Kuzmak A. R.* Quantum gates realized by two interacting spins / A. R. Kuzmak // IV Young Scientists Conference ”Modern Problems of Theoretical Physics”. — Kyiv, Ukraine, October 23-26, 2012: Program and Abstracts. — P. 44.

[15] *Кузьмак А. Р.* Геометрія многовиду власних станів спіну-1 в магнітному полі / А. Р. Кузьмак // Різдвяні дискусії 2013, Львів, 3-4 січня 2013. — Журн. фіз. дослідж. — Т. 17, №1. — С. 1998-4.

[16] *Кузьмак А*. Геометрія многовиду власних станів спіну-j в магнітному полі / А. Кузьмак // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики ”Еврика-2013”. — Львів, 15-17 травня 2013: Тези доповідей. — С. F6.

[17] *Kuzmak A. R.* Preparation of quantum states of two spins-1/2 in the Schmidt decomposition / A. R. Kuzmak // 6th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Gora — Lviv, 23-25 September 2013. — Zielona Gora, Poland, Book of abstracts. — P. 16.

[18] *Kuzmak A. R.* Preparation of a quantum states of two spin-1/2 / A. R. Kuzmak // Proceedings of VI International Conference ”Physics of Disordered Systems”. — Lviv, Ukraine, October 14-16, 2013. — P. 31.

[19] *Kuzmak A. R.* Preparation of quantum states of two spins-1/2 in the Schmidt decomposition / A. R. Kuzmak // V Young Scientists Conference ”Problems of Theoretical Physics”. — Kyiv, Ukraine, December 24-27, 2013: Program and Proceedings. — P. 31.

[20] *Кузьмак А. Р*. Геометрія многовиду власних станів спіну s у мігнітному полі / А. Р. Кузьмак // Різдвяні дискусії 2014, Львів, 9-10 січня 2014. — Журн. фіз. дослідж. — Т. 18. — С. 1998-5.

[21] *Кузьмак А.* Створення квантових логічних елементів на системі двох спінів 1/2 / А. Кузьмак // 14-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, 4-6 червня 2014. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 46.

[22] *Kuzmak A. R.* Geometry of the manifold of eigenstates of the operator of projection of spin-s on an arbitrary direction / A. R. Kuzmak // Workshop on Current Problems in Physics, Lviv, 08-09 July, 2014. — J. Phys. Stud. — Vol. 18. — P. 2998.

[23] *Kuzmak A. R.* The quantum brachistochrone problem on the rotational manifolds / A. R. Kuzmak // VI Young Scientists Conference ”Problems of Theoretical Physics” dedicated to the 105- th anniversary of M. M. Bogolyubov. — Kyiv, Ukraine, November 25-27, 2014: Program and Proceedings. — P. 30.

Анотація

Кузьмак А. Р. Задача про брахістухрону в класичній і квантовій механіці. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика, Львівський національний університет імені Івана Франка. – Львів, 2015.

Дисертацію присвячено дослідженню оптимальної еволюції класичних і квантових систем. У роботі отримано рівняння брахістохрони для частинки, яка рухається у сферично-симетричному ґравітаційному полі, що описується метрикою Шварцшільда. Також розв’язано подібну задачу, коли відхилення частинки по радіальній координаті є незначними відносно відстані до центра поля, що є аналогом задачі про брахістохрону в однорідному ньютонівському полі.

Розв’язано задачу про брахістохрону для двох спінів з анізотропною взаємодією Гайзенберґа. Знайдено умови для реалізації квантових логічних елементів на такій системі. Запропоновано двокроковий метод, який дає змогу приготувати довільний квантовий стан на двох спінах, взаємодія між якими описується ізотропною моделлю Гайзенберґа. Простішу версію цього методу розглянуто на фізичній системі атома зі спіном ядра ½ і одним валентним електроном. Також показано, що многовид, на якому відбувається еволюція двох ізотропно взаємодіючих спінів у магнітному полі, є тором. Встановлено, що метрика многовидів, які отримуються при повороті власного стану оператора проекції довільного спіну на визначений напрямок, є метрикою сфери.

Ключові слова: задача про брахістохрону, метрика Шварцшільда, спінові системи, взаємодія Гайзенберґа, квантові логічні елементи, метрика квантових станів, многовид.

Аннотация

Кузьмак А. Р. Задача о брахистохроне в классической и квантовой механике. – Рукопис.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика, Львовский национальный университет имени Ивана Франко. – Львов, 2015.

Диссертация посвящена исследованию эволюции классических и квантовых систем. В работе получено уравнение брахистохроны для частицы, движущейся в сферически-симметричном гравитационном поле, которое задается метрикой Шварцшильда. Также решена подобная задача, когда отклонение частицы по радиальной координате незначительно относительно расстояния до центра поля, что является аналогом задачи о брахистохроне в однородном ньютоновском поле.

Получено решение задачи о брахистохроне для двух спинов с анизотропным взаимодействием Гейзенберга. Найдены условия для реализации квантовых логических элементов на такой системе. Предложен двухшаговый метод, который позволяет создать произвольное квантовое состояние на двух спинах, взаимодействие между которыми описывается изотропным гамильтонианом Гейзенберга. Простая версия этого метода рассмотрена на физической системе атома со спином ядра ½ и одним валентным электроном. Также показано, что многообразие, на котором происходит эволюция двух изотропно взаимодействующих спинов в магнитном поле, является тором, а также выявлено, что метрика многообразия, возникающая при повороте собственного состояния оператора проекции произвольного спина на определенное направление, является метрикой сферы.

Ключевые слова: задача о брахистохроне, метрика Шварцшильда, спиновые системы, взаимодействие Гейзенберга, квантовые логические элементы, метрика квантовых состояний, многообразие.

Abstract

A. R. Kuzmak. Brachistochrone problem in classical and quantum mechanics. – Manuscript.

A thesis for a Candidate of Sciences degree on the speciality 01.04.02. – Theoretical physics, Ivan Franko National University of Lviv. – Lviv, 2015.

The thesis is devoted to the description of the evolution of classical and quantum systems.

We solved the brachistochrone problem in the Schwarzschild metric using the law of general relativity. The brachistochrone equations and the equation for time regarding fixed observers located along the trajectory and regarding far-away observer were obtained. For some initial and final points we obtained the trajectory and the time which the particle spends on overcoming along these targectories. Also, we obtained the relativistic equation for the uniform gravitational field. We compared these results with the results obtained for the Newtonian representation of gravitation field.

We study the quantum brachistochrone evolution for a system of two spins- ½ described by an anisotropic Heisenberg Hamiltonian without *zx*, *zy* interacting couplings in magnetic field directed along the *z*-axis. This Hamiltonian realizes quantum evolution in two subspaces spanned by $\vert\uparrow\uparrow\rangle$, $\vert\downarrow\downarrow\rangle$ and $\vert\uparrow\downarrow\rangle$, $\vert\downarrow\uparrow\rangle$ separately and allows us to consider

the brachistochrone problem on each subspace separately. We obtained the conditions for optimal quantum evolution in each subspace and calculated the shortest possible time for evolution from the initial state to the final one. Also, we obtained Hamiltonians which provide optimal evolution on these subspaces. The Hilbert space of each subspace is two dimensional and is represented by the Bloch sphere. The optimal way of transporting the initial state into the final one is therefore to rotate the sphere around the axis which passes along the eigenvectors that correspond to the largest and the smallest eigenvalues of the optimal Hamiltonian. Thus, the shortest distance between two states is a large circle arc on the sphere (geodesic path). Finally, using the evolution operator for this system we generate quantum gates, namely an entangler gate, SWAP gate, iSWAP gate, etc.

We consider a system of two spins that are coupled via an isotropic Heisenberg Hamiltonian. For the first time, a two-step method for the preparation of an arbitrary quantum state of two qubits in the form of the Schmidt decomposition is proposed. At the first step, the quantum state driven by an isotropic Heisenberg Hamiltonian evolves from the initial state $|\uparrow\downarrow\rangle$ to some state which depends on the period of time of the evolution t_1. Note that we do not start with $|\uparrow\uparrow\rangle$ or $|\downarrow\downarrow\rangle$ states because these states are eigenstates of this system. Then at the second step, at the moment of time t_1 we apply individually to each spin the pulsed magnetic fields and obtain the final state. This state is defined by six independent parameters: period of time t_1, and parameters which determine the magnetic field for the first and the second spin. For each predefined state of two qubits there exists a defined set of these parameters. The simplified version of this method is applied to the physical system of an atom with a nuclear spin 1/2 and one valence electron. Namely, we consider the evolution of the two-spin system in an external uniform magnetic field oriented along a certain direction. The evolution of this system is determined by four parameters: period of time of the evolution, value of the magnetic field and two angles that define the direction of the field. This approach does not allow to prepare an arbitrary quantum state because the number of parameters determining the evolution of the system is not sufficient. Although, we can create an arbitrary state on the subspace spanned by $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$. As an example, the preparation of two-spin quantum states in the phosphorus donor in silicon system is considered.

The quantum evolution of two-spin system represented by the isotropic Heisenberg Hamiltonian couplings in the magnetic field directed along the *z*-axis was studied. We showed that this evolution is defined by two real parameters, namely, the period of time of evolution and the value of the magnetic field. The evolution of the two-spin system is periodic with respect to these parameters. Therefore, we conclude that this evolution happens on the two-parametric closed manifold. We calculated the Fubini-Study metric of this manifold and showed that it is metric of torus. The entanglement of the states which belong to this manifold was investigated. Using these results we obtained the conditions which allow to achieve the maximally entangled states having started from a non-entangled one.

Finally, we consider quantum brachistochrone evolution for an arbitrary spin system on rotational manifolds. Such manifolds are determined by the rotation of the eigenstates of the operator of projection of spin-*s* on some direction. The Fubini–Study metrics of these manifolds are those of spheres with radii dependent on the value of the spin and on the value of the spin projection. The conditions for optimal evolution of the spin-*s* system on rotational manifolds are obtained.

Key words: brachistochrone problem, Schwarzschild metric, spin systems, Heisenberg interaction, quantum gates, metrics of quantum states, manifold.