ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

Кузьмак Андрій Романович

УДК 530.12, 530.145.61, 530.145.62

Задача про брахістохрону в класичній і квантовій механіці

01.04.02 — Теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук,
професор
Ткачук Володимир Михайлович

ЛЬВІВ — 2015

Зміст

ВСТУП **5**

РОЗДІЛ 1. Огляд літератури **13**

1.1 Задача про брахістохрону в класичній механіці 13

1.2 Задача про брахістохрону в квантовій механіці 20

РОЗДІЛ 2. Рівняння брахістохрони в метриці Шварцшільда **29**

2.1 Вступ 29

2.2 Рівняння брахістохрони щодо спостерігачів, які є вздовж траєкторії 31

2.3 Розрахунок рівняння брахістохрони 35

2.4 Рівняння для часу руху по брахістохроні 38

2.5 Рівняння брахістохрони у однорідному ґравітаційному полі 40

2.6 Рівняння брахістохрони відносно далекого спостерігача . 43

2.7 Висновки 46

РОЗДІЛ 3. Задача про брахістохрону для двох спінів 1/2 з анізотропною взаємодією Гайзенберґа **50**

3.1 Вступ 50

3.2 Гамільтоніан двох взаємодіючих спінів 51

3.3 Задача про брахістохрону для двох взаємодіючих спінів . 53
3.3.1 Квантова еволюція на підпросторі $|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ . . . 54
3.3.2 Квантова еволюція на підпросторі $|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle$ . . . 59
3.4 Квантові логічні елементи 62
3.4.1 Реалізація квантових логічних елементів на двох взаємодіючих спінах 64
3.5 Висновки 69

РОЗДІЛ 4. Приготування довільного квантового стану двох спінів 1/2 у вигляді розкладу Шмідта 72
4.1 Вступ 72
4.2 Двокрокове приготування довільного квантового стану двох спінів 1/2 у вигляді розкладу Шмідта 74
4.3 Приготування квантового стану двох спінів 1/2 на фізичних системах 80
4.4 Приготування квантового стану на системі атома фосфору в оточенні атомів кремнію 85
4.5 Висновки 90

РОЗДІЛ 5. Квантова еволюція на торі для двох спінів з ізотропною взаємодією Гайзенберґа 92
5.1 Вступ 92
5.2 Квантова еволюція двох спінів 93
5.3 Метрика многовиду двох взаємодіючих спінів у магнітному полі 95
5.4 Заплутаність квантових станів на торі 98
5.5 Висновки 101

РОЗДІЛ 6. Задача про брахістохрону для довільного спі-

ну у магнітному полі **103**

6.1 Вступ 103

6.2 Обертові многовиди спіну 1/2 і спіну 1 105

6.3 Метрики обертових многовидів спіну 1/2 і спіну 1 108

6.4 Задача про брахістохрону для спіну 1 у магнітному полі 110

6.5 Узагальнення для довільного спіну 117

6.6 Висновки 120

ВИСНОВКИ **123**

Список використаних джерел **127**

ВСТУП

Актуальність теми. Дослідження задачі про брахістохрону в однорідному ґравітаційному полі [1] дало змогу розвинути нові методи у математиці, що своєю чергою дозволило сформулювати основи сучасного апарату варіаційного числення, яке знайшло широке застосування у різних задачах, пов'язаних із оптимізацією, як-от знаходження оптимальної еволюції класичних і квантових систем. Приміром, задача знаходження оптимального шляху для корабля, який пливе річкою з постійною течією [2, 3], чи задача розрахунку оптимальної траєкторії спуску частинки у ґравітаційному полі [4–6] розв'язується за допомогою варіаційного числення.

Завдяки варіаційному численню також було сформульовано і розв'язано задачу про брахістохрону в квантовій механіці [7]. Останніми роками у дослідженні цієї задачі зроблено помітний поступ [7–12], що є важливим у досягненні успіху при реалізації квантових обчислень. Згідно із законом Мура, кількість електронних елементів в одиниці об'єму комп'ютера кожного року подвоюється, що в недалекому майбутньому приведе до межі, коли суттєвими стають квантові флуктуації, які порушують роботу класичних комп'ютерів. Тому виникає необхідність у дослідженні систем, результати яких можуть бути використані для створення квантових комп'ютерів [13], що дадуть можливість розв'язувати певні задачі набагато ефективніше. А це дозволить економити

часові й енергетичні ресурси. Важливо, щоб ці системи володіли великим часом когеренції і добре були захищені від небажаних впливів (шумів). Також є важливим, щоб станом системи можна було легко керувати за допомогою зовнішніх полів і з високою точністю прочитати інформацію про стан, приготовлений на ній. Останніми роками багато зроблено у цій галузі, наприклад, запропоновано різні фізичні систем на роль елементів квантового комп'ютера. Одна з ефективних реалізацій цих елементів ґрунтується на спінових системах (для прикладу, див. [14]).

Незважаючи на помітні успіхи у дослідженні еволюції спінових систем, а саме, досягнення великого часу когеренції таких систем [15] та високої точності зчитування інформації з них [16], залишається ще багато невирішених теоретичних і практичних проблем, які стосуються приготування квантових станів на таких системах для забезпечення конкретних квантових обчислень. Також залишаються ще не розв'язані проблеми, які стосуються оптимальної еволюції класичних систем. Це, наприклад, знаходження точних розв'язків рівнянь, які виникають при дослідженні задачі про брахістохрону для таких систем.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та відповідно до держбюджетних тем Фф-14Ф "Нові методи дослідження квантових систем декількох і багатьох частинок" (2009–2011 рр., номер держреєстрації 0109U002096) та Фф-110Ф "Нові ефекти у квантових рідинах і газах та системах з деформованою алгеброю Гайзенберґа" (2012–2014 рр., номер держреєстрації 0112U001275).

Мета і завдання дослідження. Головною метою дисертаційної роботи є дослідження оптимальної еволюції класичних та квантових

систем. Основну увагу приділено дослідженню задачі про брахістохрону для частинки, яка рухається у сферично-симетричному ґравітаційному полі, що задається метрикою Шварцшільда, а також вивченню оптимальної еволюції спінових систем.

Значна частина роботи присвячена дослідженню еволюції спінових систем і геометрії многовидів, на яких відбувається така еволюція, що має пряме застосування для реалізації квантових обчислень. Також увагу приділено знаходженню оптимальних способів контролю еволюції таких систем, що дає змогу реалізувати певні квантові унітарні перетворення за мінімальний час.

Отже, *об'єктом дослідження* є частинка у ґравітаційному полі Шварцшільда та квантові системи спінів з різними типами взаємодії. *Предметом дослідження* є рух частинки у ґравітаційному полі та еволюція спінових систем. *Методом дослідження* задачі про брахістохрону в метриці Шварцшільда виступають методи варіаційного числення, а при дослідженні оптимальної еволюції квантових систем використовуються методи, пов'язані з дією оператора еволюції на просторі квантових станів.

У першому розділі коротко подано історію досліджень задачі про брахістохрону в класичній і квантовій механіці, а також висвітлено сучасний стан цієї проблеми.

У другому розділі, використовуючи закони загальної теорії відносності, отримано рівняння брахістохрони в метриці Шварцшільда. Було отримано рівняння брахістохрони щодо спостерігачів, які є вздовж траєкторії, і рівняння стосовно далекого спостерігача, а також рівняння для часів руху вздовж цих траєкторій. Також знайдено аналог релятивістського рівняння брахістохрони у однорідному ґравітаційному полі.

У третьому розділі досліджено задачу про брахістохрону для системи двох спінів 1/2 у магнітному полі, яке спрямоване вздовж осі z. Взаємодія між спінами описується анізотропним гамільтоніаном Гайзенберґа без xz і yz компонент. Також було отримано оптимальні умови для реалізації деяких квантових логічних елементів, а саме, логічний елемент, що заплутує два спіни, логічний елемент, який обмінює стани двох спінів між собою, подібний до останнього логічний елемент, який ще домножує отриманий стан на уявну одиницю.

У четвертому розділі запропонований двокроковий метод для приготування довільного квантового стану двох спінів у вигляді розкладу Шмідта. Запропоновано фізичну реалізацію простішої версії цього методу, яка на даний час може бути експериментально реалізована. Як приклад, розглянуто приготування квантового стану на системі атома фосфору в оточені атомів кремнію.

У п'ятому розділі розглянуто еволюцію системи двох спінів $\frac{1}{2}$ у магнітному полі, взаємодія між якими описується ізотропним гамільтоніаном Гайзенберґа. Було показано, що така еволюція відбувається на двопараметричному многовиді, який є тором. Також, проаналізовано заплутаність станів, які належать до цього многовиду, і знайдено умови, які дозволяють досягнути максимально заплутаних станів. На цьому многовиді знайдено лінії, які задають стани однакової заплутаності, а також показано для яких початкових станів системи еволюція буде відбуватися вздовж таких ліній.

У шостому розділі досліджено квантову еволюцію для довільного спіну, який знаходиться у магнітному полі. Показано, що якщо початковий стан є одним з власних станів z-компоненти оператора спіну, то еволюція буде відбуватися на многовиді, який є сферою із радіусом залежним від величини спіну і величини його проекції. Знайдено

умови для оптимальної еволюції спіну на цьому многовиді.

Дисертаційна робота завершується **Висновками** та **Списком використаних джерел**.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі вперше отримано рівняння для брахістохрони в метриці Шварцшільда як щодо нерухомих спостерігачів, які знаходяться уздовж траєкторії, так і щодо віддаленого спостерігача. Також вперше отримано рівняння брахістохрони, коли рух частинки вздовж радіальної координати є незначним, що є аналогом задачі про брахістохрону в однорідному ґравітаційному полі.

Уперше розв'язано задачу про квантову брахістохрону для двох спінів 1/2, взаємодія між якими описується анізотропним гамільтоніаном Гайзенберґа, в якому xz і yz компоненти взаємодії рівні нулю. Для такої системи показано можливість реалізації певних унітарних перетворень за мінімальний час.

Уперше було запропоновано метод для приготування довільного стану на системі двох спінів 1/2. Спрощену версію цього методу, яку на сьогодні можна експериментально реалізувати, розглянуто на атомі зі спіном ядра 1/2 та одним валентним електроном.

Уперше показано, що еволюція у магнітному полі системи двох спінів, взаємодія між якими описується ізотропною моделлю Гайзенберґа, відбувається на двопараметричному многовиді, який є тором. Також вперше отримано метрику многовиду, на якому відбуваються повороти власного стану оператора проекції спіну на деякий напрямок. Показано, що такий многовид є сферою з радіусом, залежним від величини проекції спіну. Вперше розв'язано задачу про брахістохрону для такої системи і показано, що для того, щоб еволюція відбувалася за мінімальний час, необхідно, щоб магнітне поле було спрямоване

перпендикулярно до початкового і кінцевого станів.

Практичне значення отриманих результатів. Результати, отримані у роботі, можуть бути використані для реалізації квантових обчислень і побудови квантових комп'ютерів. Системи, які були досліджені у цій роботі, можуть бути використані для побудови регістру квантового комп'ютера. Отримані у роботі умови для оптимальної еволюції спінових систем у магнітному полі дадуть можливість реалізувати конкретні унітарні перетворення за мінімально можливий час, що дозволить реалізувати обчислення на квантових комп'ютерах з економією часових і енергетичних ресурсів.

Особистий внесок здобувача. Всі викладені в дисертації оригінальні результати отримані автором самостійно або при його безпосередній участі. У роботах, виконаних зі співавтором, здобувачеві належить:

- дослідження задачі про брахістохрону для системи двох спінів, взаємодія між якими описується анізотропним гамільтоніаном Гайзенберґа [17]; отримання умов для реалізації квантових логічних елементів на цій системі.

- отримання двокрокового методу для приготування довільного квантового стану на системі двох спінів [18]; дослідження простішої версії цього методу на фізичній системі атома зі спіном ядра $1/2$ і одним валентним електроном; отримання умов для приготування квантового стану на системі атома фосфору в оточені атомів кремнію.

- розрахунок метрики многовиду, який містить усі стани, що можна досягнути під час еволюції на системі двох спінів з ізотропною взаємодією Гайзенберґа у магнітному полі [19];

- розрахунок метрики многовиду, який містить стани, що можна досягнути при повороті власного стану оператора проекції спіну величиною s на визначений напрямок [20]; дослідження оптимальної еволюції довільного спіну у магнітному полі.

Результати статей, їхню інтерпретацію та застосовність використаних підходів співавтори обговорювали на паритетних засадах.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включені до дисертації, здобувач представляв особисто на таких конференціях та семінарах: Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2010" (Львів, 2010) [21]; X Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2010) [22]; Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics" (Київ, 2010) [23]; Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2011" (Львів, 2011) [24]; 11-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2011) [25]; III Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics" (Київ, 2011) [26]; 12-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2011) [27]; Workshop on Current Problems in Physics (Львів, 2012) [28]; IV Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics" (Київ, 2012) [29]; Різдвяні дискусії 2013 (Львів, 2013) [30]; Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2012 рік (Львів, 2013); Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2013" (Львів, 2013) [31];

6th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra - Lviv (Zielona Góra, 2013) [32]; Proceedings of VI International Conference "Physics of Disordered Systems" (Львів, 2013) [33]; V Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics" (Київ, 2013) [34]; Різдвяні дискусії 2014 (Львів, 2014) [35]; Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2013 рік (Львів, 2014); 14-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2014) [36]; Workshop on Current Problems in Physics (Львів, 2014) [37]; VI Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics" dedicated to the 105-th anniversary of M. M. Bogolyubov (Київ, 2014) [38].

Подані у роботі результати неодноразово обговорювали на наукових семінарах кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка, а також були апробовані під час наукових стажувань за кордоном.

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані у п'яти журнальних статтях [17–20, 39] та 18 тезах конференцій [21–38].

Розділ 1

Огляд літератури

1.1 Задача про брахістохрону в класичній механіці

Задачу про брахістохрону (з грецької: найкоротший час), уперше сформулював Й. Бернуллі в червні 1696 році. Її було викладено в "Acta Eruditorum" [1]. Постановка задачі звучала так: *"Задано дві точки A і B на вертикальній площині (рис. 1.1). Яка повинна бути форма траєкторії, щоб частинка під дією ґравітації переміститилася з точки A в точку B за найкоротший час?"* В травні 1697 року в "Acta Erudi-

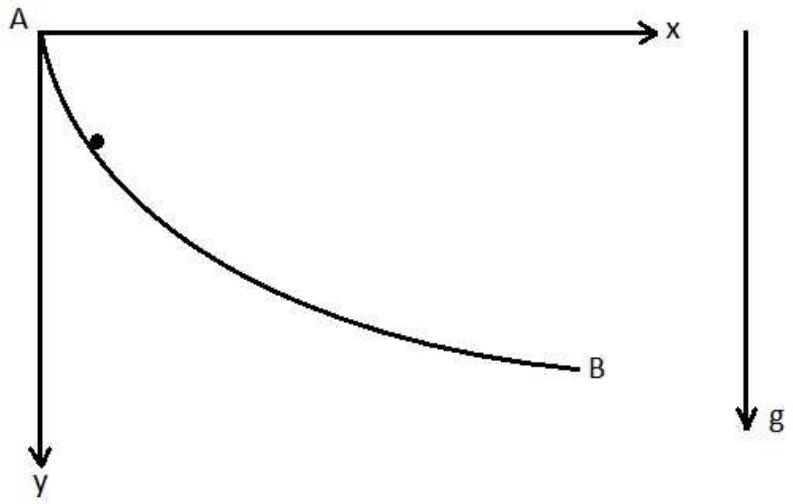

Рис. 1.1: Рівняння траєкторії, по якій частинка переміщається з однієї точки простору в іншу під дією однорідного ґравітаційного поля за найкоротший час, задається циклоїдою.

torum" було поміщено розв'язок братів Бернуллі, а також короткий опис Ляйбніца, який отримав подібний результат. Незалежно від ін-

ших, розв'язок отримали Ньютон і Лопіталь. Робота Лопіталя не була опублікована аж до 1988 року. Метод, який використав Й. Бернуллі є унікальним і ґрунтується на принципі Ферма [40, 41]. Всі ці результати отримані для однорідного ґравітаційного поля, а крива є відома з курсу шкільної геометрії – циклоїда, рівняння якої в декартових координатах має вигляд

$$x = C \arcsin \sqrt{\frac{y}{C}} - \sqrt{Cy - y^2}, \tag{1.1}$$

де C – це константа, яка знаходиться з крайових умов.

Задача про брахістохрону є однією з фундаментальних у варіаційному численні. Стандартний метод для вирішення цієї проблеми ґрунтується на рівнянні Ейлера-Лаґранжа (для прикладу, див. [42,43])

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \tag{1.2}$$

де функцію f беремо з функціоналу

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y'; x)dx, \tag{1.3}$$

який має мінімальне значення для функції $y(x)$, яка задовольняє крайові умови $y_1 = y(x_1)$ і $y_2 = y(x_2)$. Наприклад, у випадку задачі брахістохрони для частинки в однорідному ґравітаційному полі, роль функціоналу виконує час переміщення частинки з точки A в точку B

$$T = \int_{x_A}^{x_B} f(y, y'; x)dx, \tag{1.4}$$

де

$$f = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}. \tag{1.5}$$

У статтях [44–47] розглядається задача про брахістохрону для тіл, які скочуються з однієї точки вертикальної площини в іншу під дією

однорідного ґравітаційного поля. Втратами енергії на тертя нехтується. На відміну від задачі, яку розглядав Й. Бернуллі, у даній задачі закон збереження енергії буде містити додаткову складову, яка відповідає за кінетичну енергію обертання тіла $1/2I\omega^2$, де I є моментом інерції тіла, а ω є кутовою швидкістю з якою обертається тіло вздовж переміщення по траєкторії. Було показано, що у випадку кулі [44], диска [45, 46] і циліндра [47] форма траєкторії, так само, як і у випадку точкової частинки, є циклоїдою, тільки час спуску буде більшим у $\sqrt{7/5}$ для кулі і у $\sqrt{3/2}$ для диска та циліндра. Це тому, що частина потенціальної енергії йде на обертання цих тіл.

Ще одна цікава задача про брахістохрону у однорідному ґравітаційному полі була опублікована в роботі [48]. Постановка задачі є наступною: *"Задано початкову і кінцеву точки, які лежать на горизонтальній прямій. Необхідно знайти рівняння оптимальної траєкторії між цими двома точками для частинки, яка в початковий момент часу має горизонтальну складову швидкості. Система знаходиться у однорідному ґравітаційному полі. Тертям нехтується."* Було показано, що в такому випадку оптимальна траєкторія складається із трьох секцій, а саме двох симетрично розміщених парабол, між якими розміщується арка циклоїди, яка у двох точках по дотичній дотикається до останніх. Рівняння парабол характеризується початковою швидкістю частинки і є таке саме, як у задачі про траєкторію тіла, кинутого в горизонтальному напрямку. Початкова і кінцева точки арки циклоїди знаходяться на висоті, де кінетична енергія частинки дорівнює нулю. Отже, першу частину шляху частинка рухається по параболі так, ніби вона була кинута в горизонтальному напрямку. В точці дотику циклоїди до параболи частинка починає рухатися по циклоїді аж до моменту досягнення другої точки дотику симетрично розміще-

ної параболи, по якій вона завершує свій рух і досягає кінцевої точки з початковою швидкістю. Також авторами було отримано рівняння для часу подорожі по такій траєкторії. У статті [49] представлено розв'язок узагальненої версії даної задачі, а саме, коли ще задані напрямки, вздовж яких частинка починає і завершує рухатися. Варто зазначити, що постановка цієї задачі є опублікована у статті [50].

Подібну задачу, яка була запропонована у статті [48], було досліджено в роботі [51], тільки замість частинки розглядалося тіло з обертовим моментом. Авторами було показано, що подібно, як у роботі [48], траєкторія складається з трьох частин, а саме, двох симетрично розміщених секцій, які описуються бета-функцією, і аркою циклоїди, яка в двох точках дотикається до останніх і має початкову і кінцеву точку на висоті, де кінетична енергія тіла є рівною нулю. Варто зазначити, що за рахунок обертової складової кінетичної енергії тіла, висота, на якій його кінетична енергія є рівною нулю, є більшою, ніж у випадку, коли воно не обертається.

Досліджувалися також і інші цікаві випадки задачі про брахістохрону в однорідному ґравітаційному полі, як-от задача про брахістохрону, де рух частинки відбувається на поверхні циліндра [52], або проблема знаходження оптимального шляху спуску частинки з однієї кривої на іншу [53]. Також в роботі [54] представлені експериментальні дослідження спуску іграшкової моделі машинки "Хот Вілс" по різних траєкторіях (одна з яких циклоїда), а в роботі [55] викладено опис лабораторної роботи для студентів університету, де останні мають досліджувати спуск кульки по різних траєкторіях. Деякі теоретичні викладки для аудиторного розгляду задачі про брахістохрону в однорідному ґравітаційному полі можна знайти, для прикладу, у роботах [41, 43, 56].

Альтернативні методи для роз'язання задачі про брахістохрону в однорідному ґравітаційному полі запропоновані в роботах [57–62]. У праці [57] проблема була розв'язана чисельним методом, використовуючи поліноми Чебишева, а у статті [58] – за допомогою рівняння Гамільтона-Якобі. Також задача про брахістохрону у випадку однорідного і неоднорідного ґравітаційного поля була розв'язана, використовуючи принцип максимуму Понтрягіна [59]. Алгоритм, який використовується для знаходження найкоротшого шляху на графах, був застосований для розв'язання задачі про брахістохрону в роботі [60], тоді як в праці [61] ця задача формулюється як проблема про нелінійний оптимальний контроль і розв'язується за допомогою некласичного псевдоспектрального методу.

Цікавим методом проблема про брахістохрону розв'язується, коли у відповідність пошуку мінімального часу ставиться проблема пошуку мінімальної площі "тонкої плівки", яка знаходиться між двома відповідними поверхнями так, що її розміри задаються цими поверхнями і двома вертикальними лініями, які їх з'єднують [62]. Задавши відповідні поверхні, форма яких залежить від умови задачі, отримаємо, що вираз, який задає площу "тонкої плівки", має такий самий вигляд, з точністю до розмірного множника, як вираз для часу руху частинки. Це так звана проблема Плато, а назва "тонка плівка" походить з міркувань того, що мінімальна площа останньої відповідає мінімуму її енергії.

У всіх нижче згаданих роботах розглядалася задача про брахістохрону у однорідному ґравітаційному полі без врахування втрат на тертя. Вперше така проблема з врахуванням сили тертя була розглянута в праці [63], де було розв'язано задачу оптимального спуску частинки із однієї точки простору в іншу під дією однорідного ґравітаційного по-

ля і сили тертя, яка є пропорційна до сили реакції опори (кулонівське тертя). Детальніше ця задача розглядалася у статті [64]. У праці [65] задача про брахістохрону досліджена у випадку, коли спуск частинки відбувається на конкретній поверхні з кулонівським тертям. Задача оптимального спуску частинки під дією однорідного ґравітаційного поля і сили тертя, яка пропорційна до швидкості руху частинки, викладена у статті [66], а її розв'язок опублікований у статті [67].

Окрім задачі про брахістохрону в однорідному ґравітаційому полі також було розглянуто різні випадки цієї задачі у неоднорідному полі. Одна з таких задач звучить наступним чином: "Якої форми має бути тунель у однорідному сферичному тілі радіуса R, щоб частинка з однієї точки його поверхні в іншу зісковзнула за найкортший час". У роботі [68] було отримано диференціальну форму рівняння такого тунелю для Землі. Також чисельним методом отримано траєкторії між деяким фіксованими точками. Згодом був знайдений точний розв'язок цього рівняння [69–72] і показано, що крива, яка його описує є аркою гіпоциклоїди, утвореної колом радіуса $(R - R_{min})/2$ [69], де R_{min} є відстанню від центра тіла до найнижчої точки на кривій. Також ця задача була розв'язана подібно до того, як Бернуллі розв'язав задачу про брахістохрону у однорідному ґравітаційному полі, використовуючи принцип Ферма [73].

У статті [69] аналітично отримано вираз для часу руху по брахістохроні у однорідній кулі. Як і у випадку брахістохрони у однорідному ґравітаційному полі, брахістохрона у кулі є тавтохроною [74]. Це означає, що подорож між двома симетрично розташованими точками такої траєкторії займає однаковий час. Для прикладу, рух через прямий тунель, який проходить через центр Землі між двома симетрично розташованими відносно центру точками, завжди буде відбуватися за

один і той самий час, який рівний близько 42-ом хвилинам.

Тунель, який дозволяє зісковзнути частинці із однієї точки Землі в іншу за найкоротший час змодельовано в статті [75]. Розподіл густини для нашої планети було отримано з аналізу сейсмічних даних [76]. Показано, що на відміну від випадку зі сталою густиною, подорож між двома фіксованими точками відбуватиметься швидше, а такий тунель буде лежати глибше. У такому випадку час прольоту між двома діаметрально протилежними точками Земної кулі займає близько 38 хвилин.

Також було розглянуто задачу про брахістохрону у неоднорідному ґравітаційному полі для частинки, яка знаходиться поза сферичним тілом [4–6]. У цих статтях рівняння траєкторії отримане в диференціальній формі і розв'язане чисельним методом. Для різних положень початкової і кінцевої точок були отримані криві.

Інший цікавий випадок брахістохрони в неоднорідному полі є рух частинки на площині, яка обертається навколо фіксованої осі [77]. Авторами було отримано розв'язки у двох випадках, а саме, коли вісь обертання є перпендикулярною і паралельною до площини. Цікаво, що у першому випадку рівняння брахістохрони і тавтохрони збігаються і є аркою епіциклоїди, а у другому випадку рівняння брахістохрони і тавтохрони є різними і задаються неповними еліптичними інтегралами.

На закінчення варто зауважити, що задача про брахістохрону у релятивістській механіці вперше була розглянута в роботі [78]. У цій праці було розглянуто рух частинки у однорідному електричному полі і у однорідному ґравітаційному полі. Отримані результати було використано для знаходження енергії, яку заряд випромінює при русі вздовж брахістохрони у однорідному електричному полі [79]. Також

розглядалася задача про брахістохрону у неоднорідному ґравітаційному полі [6,80]. Детальніший огляд релятивістської задачі про брахістохрону буде зроблено на початку наступного розділу.

1.2 Задача про брахістохрону в квантовій механіці

Квантова задача про брахістохрону формулюється подібним чином, як і задача про брахістохрону в класичній механіці [7, 8, 81–84]: *"Необхідно знайти гамільтоніан квантової системи, з обмеженими енергетичний ресурсами, такий який би дозволив забезпечити еволюцію між фіксованими початковим $|\psi_i\rangle$ і кінцевим $|\psi_f\rangle$ станами цієї системи за найкоротший час."* Ця задача вперше була запропонована у роботі [7]. Використовуючи варіаційний принцип, автори представили загальний метод для знаходження гамільтоніану, який забезпечує оптимальну еволюцію для конкретної системи між двома фіксованими станами. У роботі [8] було показано, що аналогічний результат можна отримати безпосередньо використовуючи симетричні властивості простору квантових станів. Підхід, який автори використали для розв'язку цієї задачі, ґрунтується на роботі [85], в якій було досліджено проблему оптимальної еволюції між двома ортогональними станами. У статті [8] було показано, що задача про квантову брахістохрону зводиться до знаходження гамільтоніану H на гільбертовому просторі вимірності n, який забезпечує наступне унітарне перетворення $|\psi_f\rangle = e^{iH\tau}|\psi_i\rangle$ за найкоротший час. Зауважимо, що ми працюємо в системі одиниць, де $\hbar = 1$, а це означає, що гамільтоніан вимірюється в одиницях частоти. Також вважається, що різниця між найвищим E_+ і найнижчим E_- енергетичними рівнями гамільтоніану є фіксована. Було показано, що оптимальна еволюція між початковим і кінцевим

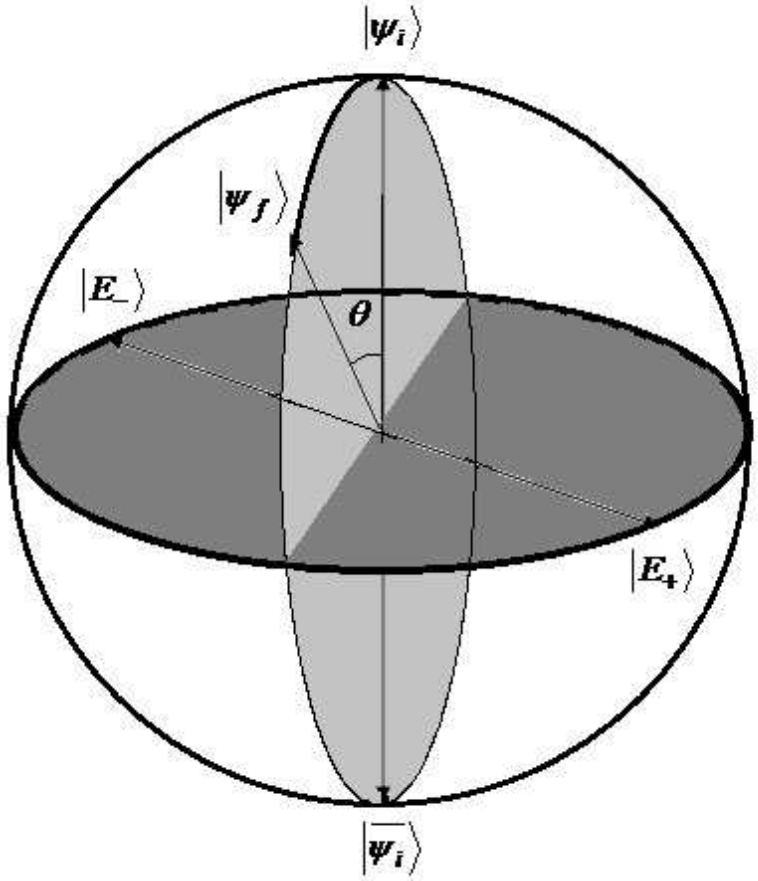

Рис. 1.2: Сфера Блоха, яка задає двовимірний квантовий простір станів.

станами відбувається на підпросторі, який є сферою Блоха, і який задається векторами $|\psi_i\rangle$ і $|\psi_f\rangle$ (див. рис. 1.2). Будь-який вектор стану позначається точкою на цій сфері. Очевидно, що найкоротша відстань (геодезична) між двома станами на цьому підпросторі є дугою великого кола, що з'єднує дві точки. Унітарне перетворення, яке переводить початковий стан у кінцевий за найкоротший час забезпечується поворотом сфери навколо осі, яка є перпендикулярною до напрямку із центра сфери на ці стани. Запишемо гамільтоніан, який забезпечує таке перетворення. Для цього кінцевий стан представимо за допомогою початкового стану і ортогонального до останнього:

$$|\psi_f\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\psi_i\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i(\phi+\pi/2)}|\overline{\psi_i}\rangle, \tag{1.6}$$

де $\langle\psi_i|\overline{\psi_i}\rangle = 0$, а θ і ϕ є полярним і азимутальним кутами у сферичній системі координат. Початковий стан спрямуємо вздовж осі z і тоді θ є кутом між початковим і кінцевим станами. Гамільтоніан, який забезпечує оптимальну еволюцію має вигляд:

$$H = \frac{i\omega}{\sin\frac{\theta}{2}}|\psi_i\rangle\langle\psi_f| - \frac{i\omega}{\sin\frac{\theta}{2}}|\psi_f\rangle\langle\psi_i| + h, \tag{1.7}$$

де параметр ω задається умовою, що різниця між найвищим і найнижчим енергетичними рівнями є фіксованою і рівною $E_+ - E_- = 2\omega$, а h доданок, який впливає тільки на початок відліку енергетичних рівнів. Час, за який здійснюється така еволюція, буде мати вигляд:

$$\tau = \frac{\theta}{2\omega}. \tag{1.8}$$

Запишемо ще стан, який можна досягнути під час еволюції системи з гамільтоніаном (1.7):

$$|\psi(t)\rangle = \left[\cos(\omega t) - \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin(\omega t)\right]|\psi_i\rangle + \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin(\omega t)\,|\psi_f\rangle. \tag{1.9}$$

Бачимо, що коли $t = \frac{\theta}{2\omega}$, тоді $|\psi(t)\rangle = |\psi_f\rangle$.

Використовуючи все вище згадане, розглянемо задачу про брахістохрону для системи спіну $\frac{1}{2}$, який знаходиться у магнітному полі (див., для прикладу, [84,86]). Це є двовимірна квантова система. Квантовий простір цієї системи можна задати за допомогою сфери Блоха. Виберемо систему координат так, щоб вектор початкового стану був спрямований вздовж осі z:

$$|\psi_i\rangle = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Це є власний стан z-компоненти оператора спіну з додатнім власним значенням. Кінцевий стан задамо у вигляді

$$|\psi_f\rangle = \cos\frac{\theta_f}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta_f}{2}e^{i\phi_f}|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2} \\ \sin\frac{\theta_f}{2}e^{i\phi_f} \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

де θ_f і ϕ_f є координатами, які задають кінцевий стан на сфері Блоха.

Найзагальніший гамільтоніан системи спіну $\frac{1}{2}$ у магнітному полі має вигляд

$$H = \omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \tag{1.12}$$

де $\mathbf{n}$ одиничний вектор, який задає напрямок магнітного поля. Оператор еволюції з цим гамільтоніаном має вигляд

$$e^{-i\omega \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}t} = \cos\omega t - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\sin\omega t. \tag{1.13}$$

Після нескладних обчислень отримуємо умови для оптимальної еволюції

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \phi = \phi_f + \pi/2. \tag{1.14}$$

Оптимальний гамільтоніан буде мати вигляд

$$H = \omega \begin{pmatrix} 0 & -ie^{\phi_f} \\ ie^{\phi_f} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

а час такої еволюції буде наступним

$$\tau = \frac{\theta_f}{\omega}. \tag{1.16}$$

Стан, в який система, переходить протягом часу t має вигляд:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t e^{i\phi_f} \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

Звідси можна зробити висновок, що для спіну $\frac{1}{2}$, який знаходиться в магнітному полі, квантова брахістохрона реалізується, коли напрямок цього поля буде перпендикулярним до початкового і кінцевого стану системи.

Варто зазначити, що задачу оптимальної еволюції для фізичної системи з кількістю вільних параметрів меншою, ніж кількість незалежних параметрів, які задають довільний стан цієї системи, не можна

звести до еволюції на двовимірному підпросторі. Для прикладу, система спіну s у магнітному полі містить тільки три вільні параметри, які визначають напрямок і величину магнітного поля, в той час як гільбертів простір такої системи є $2s+1$-вимірний. Дана система не може еволюціонувати між двома довільними наперед заданими станами на цьому просторі. Тому у даному випадку задача про брахістохрону зводиться до задачі оптимальної еволюції на двовимірному многовиді. У статті [9] було розглянуто задачу оптимальної еволюції для системи спіну 1 у магнітному полі у випадку, коли початковий стан був одним з власних станів z-компоненти оператора спіну. Ці результати нами узагальнені для системи довільного спіну [20]. У розділі 6 дана проблема детально розкрита.

Забезпечення еволюції за найкоротший час є важливим при реалізації квантових обчислень. Це дозволить економити енергетичні і часові ресурси. Останніми роками в літературі інтенсивно вивчається оптимальне генерування унітарних операторів, або, як їх ще називають квантові логічні елементи, які проводять конкретні операції над кубітами (квантовий біт). Для прикладу, в роботі [87] представлено метод для оптимальної реалізації конкретного унітарного перетворення. Цей метод розглядається на системі двох спінів, взаємодія між якими задається анізотропним гамільтоніаном Гайзенберґа із константами зв'язку J_{ii}, де $i = x, y, z$. Кожен зі спінів поміщено у своє магнітне поле, яке спрямовано вздовж осі z. Також автори знайшли умови для реалізації трьох унітарних перетворень, а саме, перетворення яке переставляє стани між двома кубітами ($SWAP$), квантове перетворення Фур'є і унітарне перетворення, що дозволяє заплутати між собою два спіни. Варто згадати інші роботи [88–90], де розглядається оптимальне приготування різних квантових логічних елементів, які діють на просторі

двох кубітів. Найнижчу межу для часу, який необхідний затратити для приготування унітарного оператора на конкретній системі із двох кубітів, подано в праці [91], а для системи з n кубітів в роботі [92].

У статті [93] отримано межу для максимальної швидкості еволюції оператора, який здійснює перетворення на системі n кубітів, а у статтях [94–99] містяться дослідження, які пов'язані з оптимальним приготуванням унітарних операторів на системі декількох кубітів. Також вивчалося як заплутаність між кубітами впливає на швидкість еволюції квантової системи [10–12, 100–103]. Показано, що в загальному випадку для багатокубітових систем наявність квантової заплутаності дозволяє системі швидше еволюціонувати [10, 100]. Зв'язок між заплутаністю і часом еволюції у випадку двокубітової і n-кубітової систем досліджувався у роботі [104], де показано, що верхня межа швидкості квантової еволюції системи досягається за наявності квантової заплутаності у системі.

Фізична реалізація квантових логічних елементів потребує систем, які є добре захищені від впливу небажаних шумів, що дозволяє досягнути високого часу когеренції станів приготовлених на них [105]. Також необхідно, щоб ці стани можна було прочитати з високою точністю. Існує багато фізичних систем, які володіють цими властивостями, а саме, спін електрона у квантовій точці [106–108], спін електрона у напівпровіднику [107, 109–115], кубіти, створені на надпровідниках [116–119], а також така відома система, як атом фосфору в оточені атомів кремнію [14, 16, 120–124]. Широке зацікавлення системою атома фосфору завдячує роботі [14], у якій було описано реалізацію квантового комп'ютера на кубітах, створених на ній. Ця система складається із двох взаємодіючих спінів $1/2$, один з яких є спіном ядра атома фосфору, а другий спіном його валентного електрона. Цей факт дозволяє

розглядати цю систему як двокубітову. Великий час когеренції спінів валентного електрона [122] і ядра [15, 124] дозволяють цій системі бути претендентом на роль будівельних блоків для реалізації квантового комп'ютера. Методи для зчитування інформації і керування спіном валентного електрона атома фосфору подані в працях [120, 125–128], а спіном ядра – в працях [16, 123, 124].

Для того щоб зрозуміти як відбувається квантова еволюція системи часто є необхідним дослідити многовид, який містить всі стани, що можна досягнути під час такої еволюції. Як було згадано раніше, що простір дворівневої системи можна представити за допомогою сфери Блоха (див. рис. 1.2). Тоді оптимальна траєкторія між двома станами є дуга великого кола, яка з'єднує дві точки на цій сфері. Подібну ситуацію маємо у випадку оптимальної еволюції системи спіну величиною s, яка знаходиться у магнітному полі [20]. Варто зазначити, що існують різні геометричні підходи для вивчення квантової еволюції [129–138]. В роботах [129–132] показано, що у випадку системи з фіксованим числом кубітів задача знаходження послідовності унітарних операторів, дія яких на заданий початковий стан системи забезпечує оптимальну еволюцію цієї системи, є тісно пов'язана з задачею знаходження мінімальної відстані між двома фіксованими точками на Рімановій метриці. Подібна проблема для випадку системи із n кутрітів (трирівнева квантова система) вивчалася у роботі [133], де було показано, що послідовність з унітарних операторів, яка забезпечує оптимальну еволюцію цієї системи, є еквівалентною до найкоротшої відстані між двома точками у геометрії $SU(3^n)$.

У роботі [135] авторами було представлено три різні матричні базиси, що можуть бути використані для розкладу матриці густини d-рівневої квантової системи, а саме: узагальнений Ґелл-Мановий матри-

чний базис, базис поляризаційних операторів і базис оператора Вейля. Також, показано, що розклади матриці густини d-рівневої системи, які здійснюються за допомогою цих базисів, можна пов'язати з вектором Блоха цієї системи.

Зв'язок фізичних характеристик системи спіну 1/2, 1, 3/2 і 2 з геометричними особливостями, які переважно ідентифікуються із комплексним многовидом, є досліджений в роботі [136]. У статтях [137,138] детально описано геометричні властивості одного із многовидів, на якому реалізується еволюція довільного спіну у магнітному полі [20] у випадку, коли початковий стан є власним станом з найбільшим власним значенням z-компоненти оператора спіну.

Також необхідно зазначити, що багаторівневі квантові системи є більш ефективніші для реалізації квантових алгоритмів, ніж дворівневі. За рахунок того, що ці системи володіють більшою густиною запису інформації, квантовий канал створений на них володіє більшою ємністю [139]. Ці системи краще запобігають підслуховуванню інформації при реалізації квантової криптографії [140–143]. Ці факти роблять кудіти (багаторівнева квантова система) ефективними для забезпечення квантових обчислень [144–146] і квантової криптографії [142,147]. Для прикладу, у роботі [148] представлено схему квантового комп'ютера на системі кутрітів, роль яких виконують йони атомів, керування якими здійснюється за допомогою магнітного поля. Ця схема є узагальненням подібної схеми для квантового комп'ютера на основі кубітів [149–151]. Інша квантова система, яка підходить для реалізації квантових обчислень на основі кутрітів, є фізична система двох скорельованих поляризованих фотонів [152–156].

На закінчення цього розділу згадаємо задачу про брахістохрону для PT-симетричного неермітового гамільтоніану, яка запропонована

в роботі [81], де показано, що для такої системи з відповідним енергетичним обмеженням оптимальна еволюція між двома фіксованими станами може бути як завгодно коротка. Більш детальніше ця проблема описана в роботах [82, 83].

Розділ 2

Рівняння брахістохрони в метриці Шварцшільда

2.1 Вступ

У цьому розділі розглянемо задачу про брахістохрону у сферично-симетричному ґравітаційному полі, яка формулюється наступним чином: "Нехай задано координати початкової і кінцевої точок, які знаходяться на відстані r_s і r_f відповідно від центра поля. Потрібно знайти рівняння траєкторії, яке дозволяє частинці під дією ґравітації зісковзнути з точки r_s в точку r_f за найкоротший час (рис. 2.1)." Очевидно, що для того щоб частинка досягнула кінцевої точки необхідно щоб $r_f \leq r_s$. Рівняння такої траєкторії у ньютонівському ґравітаційному полі отримане в роботах [4–6]:

$$\frac{dR}{d\phi} = \pm R\sqrt{\frac{CR_sR^3 + R - R_s}{R_s - R}}, \tag{2.1}$$

де $R = r/r_g$, $R_s = r_s/r_g$ – це знерозмірені відстані, що відміряються від центру ґравітаційного поля, r_g – це радіус тіла, яке створює поле, а C є сталою величиною. Інтеграл, який виникає при розв'язувані цього рівняння є еліптичним. Проте, у граничному випадку, коли $r_s = \infty$, рівняння розв'язується аналітично [6].

Цікаво є розглянути релятивістську задачу про брахістохрону у сферично-симетричному ґравітаційному полі. Вперше така задача бу-

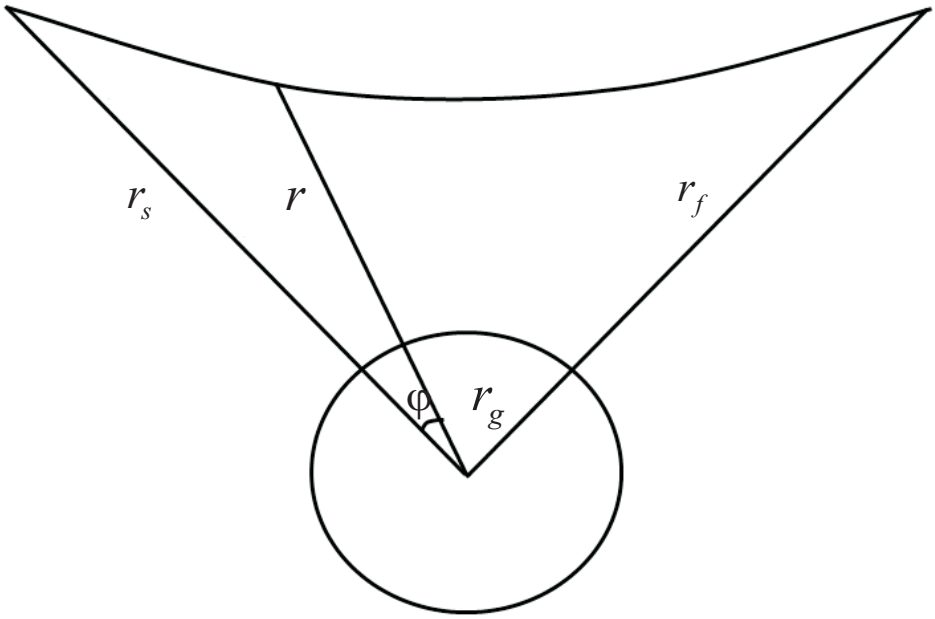

Рис. 2.1: У початковий момент часу частинка перебуває на відстані r_s від центру сферично-симетричного ґравітаційного поля, у будь-який інший момент часу частинка ковзає по брахістохроні і має координати $(r,\, \phi)$.

ла розглянута у роботі [78]. У цій праці знайдено рівняння оптимальної траєкторії у однорідному електричному і ґравітаційному полях для частинки з релятивістською масою $\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Показано, що на відміну від класичного випадку ці рівняння будуть мати різний вигляд. Проте, ця задача була розглянута із точки зору спеціальної теорії відносності. Вперше рівняння брахістохрони, використовуючи закони загальної теорії відносності, отримано у роботах [6, 80]. А саме, у статті [80] розглянуто задачу про брахістохрону з наступною метрикою:

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 (dt)^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) \left[(dr)^2 - r^2 (d\Omega)^2\right], \quad (2.2)$$

де $(d\Omega)^2 = (d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\phi)^2$ є кутовою частиною квадрату інтервалу, c – це швидкість світла, $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ – це ґравітаційний радіус, G – це ґравітаційна стала і M є масою тіла, яке створює ґравітацію. Це є

метрика так званого "майже плоского простору". Її можна отримати з метрики Шварцшільда

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 (dt)^2 - \frac{(dr)^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\Omega)^2, \tag{2.3}$$

обмежившись лінійними доданками по r_g у просторовій частині квадрату інтервалу. Рівняння було отримано у випадку, коли в початковий момент часу частинка знаходиться на великій відстані від центру ґравітаційного поля і мінімізувалося відносно лабораторного часу. У випадку повної метрики (2.3) у статті [6] рівняння брахістохрони отримано для власного і лабораторного часу, але так само, як у роботі [80], частинка починає рух з відстані набагато більшої від r_g. Цікаво знайти рівняння оптимальної траєкторії у метриці Шварцшільда в загальному випадку для довільної початкової точки траєкторії.

2.2 Рівняння брахістохрони щодо спостерігачів, які є вздовж траєкторії

Знайдімо рівняння брахістохрони у сферично-симетричному ґравітаційному полі, яке задається квадратом інтервалу Шварцшільда (2.3). З міркувань сферичної симетрії задачу будемо розглядати в площині, для якої кут $\theta = \frac{\pi}{2}$. Тоді, квадрат інтервалу запишеться наступним чином:

$$(ds)^2 = (1 - \frac{r_g}{r}) c^2 (dt)^2 - \frac{(dr)^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\phi)^2. \tag{2.4}$$

При русі частинки у сталому ґравітаційному полі зберігається її енергія, яка є часовою коваріантною компонентою чотири-вектора імпульсу помноженого на швидкість світла [157]:

$$\epsilon = p_0 c = mc^2 u_0, \tag{2.5}$$

де m – це маса частинки, а $u_0 = \frac{dx_0}{ds}$ є часовою компонентою чотиривектора швидкості. Перепишемо dx_0 у вигляді $dx_0 = g_{00}dx^0$ і підставимо у (2.5):

$$\epsilon = \frac{mc^2 g_{00}dx^0}{\sqrt{g_{00}(dx^0)^2 - dl^2}} = \frac{mc^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{2.6}$$

де g_{00} є "00" компонентою метричного тензора; $(dl)^2 = \frac{(dr)^2}{1-\frac{r_g}{r}} + r^2(d\phi)^2$ є просторовою компонентою квадрату інтервалу; $v = \frac{dl}{\sqrt{g_{00}}dt}$ – це швидкість частинки, яку виміряв нерухомий спостерігач у даній точці траєкторії. Цей закон збереження енергії можна переписати через швидкість $V = \frac{dl}{dt}$, яку фіксує далекий спостерігач:

$$\epsilon = \frac{mc^2 g_{00}}{\sqrt{g_{00} - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{2.7}$$

Варто зауважити, що закон збереження енергії можна вивести з інших міркувань. Лаґранжіан частинки масою m у ґравітаційному полі має вигляд:

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = -mc^2\sqrt{g_{00} - \left(\frac{dl}{cdt}\right)^2}. \tag{2.8}$$

Знаючи лаґранжіан, легко записати енергію системи через швидкість, яку фіксує спостерігач у даній точці траєкторії:

$$\epsilon = \mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L, \tag{2.9}$$

або через швидкість, яку фіксує віддалений спостерігач:

$$\epsilon = \mathbf{V}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} - L. \tag{2.10}$$

Таким чином, підставивши лаґранжіан (2.8) у вирази (2.9) і (2.10), отримаємо закон збереження енергії (2.6) і (2.7) відповідно.

Для початку знайдімо рівняння брахістохрони щодо нерухомих спостерігачів, які знаходяться вздовж траєкторії. У цьому випадку будемо користуватися виразом (2.6) для закону збереження енергії.

Нехай в початковий момент часу частинка знаходиться в точці з координатами $(r_s, 0)$ і з швидкістю v=0. Тоді її енергію можна записати так:

$$\epsilon = mc^2\sqrt{g_{00}(r_s)}, \tag{2.11}$$

де $g_{00}(r_s)$ – це "00" компонента метричного тензора на відстані r_s від ґравітаційного центру. У будь-якій іншій точці (див. рис. 2.1) енергія частинки описується рівнянням (2.6). Прирівнявши рівняння (2.6) до рівняння (2.11), отримаємо швидкість:

$$v = c\sqrt{1 - \frac{g_{00}}{g_{00}(r_s)}} \tag{2.12}$$

З іншого боку $v = \frac{dl}{d\tau}$, де $\tau = \sqrt{g_{00}}t$ – це час, який фіксує нерухомий спостерігач у даній точці траєкторії. Звідси:

$$d\tau = \frac{\sqrt{r^2 + \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}}{c\sqrt{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_s}}}\sqrt{1 - \frac{r_g}{r_s}}d\phi. \tag{2.13}$$

Введемо позначення:

$$L(r) = \frac{\sqrt{r^2 + \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}}{c\sqrt{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_s}}}\sqrt{1 - \frac{r_g}{r_s}}.$$

Тому що $L(r)$ явно не залежить від ϕ, то τ можна інтерпретувати як дію, а L – як лаґранжіан, і скласти аналог гамільтоніана

$$E = \frac{\partial L}{\partial \frac{dr}{d\phi}}\frac{dr}{d\phi} - L.$$

Тоді, отримаємо:

$$E = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{1 - \frac{r_g}{r_s}}{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_s}}}\left[\frac{\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}} - \sqrt{r^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}\right]. \tag{2.14}$$

Помножимо ліву і праву частини цього рівняння на

$$c\sqrt{\frac{\frac{r_g}{r}-\frac{r_g}{r_s}}{1-\frac{r_g}{r_s}}}\left(r^2+\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2\right),$$

і після деяких спрощень отримаємо наступне рівняння, яке є диференційним рівнянням брахістохрони:

$$\frac{dr}{d\phi}=\pm r\sqrt{\left(\frac{r^2}{c^2E^2}\frac{1-\frac{r_g}{r_s}}{\frac{r_g}{r}-\frac{r_g}{r_s}}-1\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}. \tag{2.15}$$

Увівши такі безрозмірні величини як $R=\frac{r}{r_g}$ і $R_s=\frac{r_s}{r_g}$ і позначивши сталу величину наступним чином $C=\frac{{r_g}^2}{c^2E^2}$ ми отримаємо остаточно таке рівняння для брахістохрони:

$$\frac{dR}{d\phi}=\pm R\sqrt{\frac{C(R_s-1)R^3+R-R_s}{R_s-R}}\sqrt{\frac{R-1}{R}}. \tag{2.16}$$

Це рівняння при великих R прямує до рівняння брахістохрони в ньютонівській механіці (2.1).

Сталу C можна переписати через R_c, що шукається з умови мінімуму $\left(\frac{dR}{d\phi}\right)_{R_c}=0$:

$$C=\frac{R_s-R_c}{(R_s-1){R_c}^3},\quad 1<R_c<R_s.$$

R_c – це є відстань від початку координат до точки на траєкторії, яка знаходиться найближче до ґравітаційного радіусу. Для того щоб частинка досягнула кінцевої точки ця відстань не може дорівнювати одиниці тому, що з фізичних міркувань частинка не може вибратися із ґравітаційного радіуса.

На завершення цього розділу знайдімо рівняння брахістохрони, коли початкова точка знаходиться на дуже великій відстані від центру ґравітаційного поля ($R_s\gg 1$). Подібним чином, як в роботі [6], введемо

нову змінну $u = \frac{1}{R}$. Тоді рівняння (2.16) перепишімо у вигляді:

$$\frac{du}{d\phi} = \pm\sqrt{\frac{C(1-u_s) + u_s u^2 - u^3}{u - u_s}}\sqrt{1-u}, \tag{2.17}$$

де $u_s = \frac{1}{R_s}$. Звідси видно, що при великих R_s рівняння (2.17) прийме вигляд:

$$\frac{du}{d\phi} = \pm\sqrt{\frac{C - u^3}{u}}\sqrt{1-u}. \tag{2.18}$$

2.3 Розрахунок рівняння брахістохрони

Форму кривої будемо шукати так: задамо початкову точку R_s і точку R_c. Оскільки рівняння (2.16) є симетричним відносно точки R_c будемо мати:

$$\phi(R) = \int_{R_c}^{R} \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R_s - R}{(R_s - R_c)\frac{R^3}{{R_c}^3} + R - R_s}}\sqrt{\frac{R}{R-1}}dR. \tag{2.19}$$

У точці R_c підінтегральна функція має сингулярність. Тому перепишімо наш вираз так:

$$\phi(R) = \int_{R_c}^{R_c+\delta} \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R_s - R}{(R_s - R_c)\frac{R^3}{{R_c}^3} + R - R_s}}\sqrt{\frac{R}{R-1}}dR = I_1, \tag{2.20}$$

$$\phi(R) = \int_{R_c+\eta}^{R} \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R_s - R}{(R_s - R_c)\frac{R^3}{{R_c}^3} + R - R_s}}\sqrt{\frac{R}{R-1}}dR = I_2. \tag{2.21}$$

Тут $R_c \leq R \leq R_s$, а $0 \leq \delta \leq \eta$. Перший інтеграл описує рівняння брахістохрони в околі сингулярності. Для інтегралу I_1 зробімо заміну змінних ($R = R_c + \delta'$). Враховуючи, що $\delta << R$ у виразі під коренем для рівняння (2.20) у чисельнику і знаменнику будемо зберігати лінійні члени по δ'. Після простих арифметичних перетворень отримаємо:

$$I_1 \approx \frac{1}{\sqrt{\left(3\frac{R_s}{R_c} - 2\right)\left({R_c}^2 - R_c\right)}}\int_0^{\delta}\sqrt{\frac{R_s - R_c - \delta'}{\delta'}}d\delta'. \tag{2.22}$$

Тепер, враховуючи, що $\frac{R_s-R_c}{\delta'} \gg 1$ отримаємо:

$$I_1 \approx \frac{\sqrt{R_s - R_c}}{\sqrt{\left(3\frac{R_s}{R_c} - 2\right)\left({R_c}^2 - R_c\right)}} \int_0^{\delta} \frac{1}{\sqrt{\delta'}} d\delta'$$

$$= \frac{\sqrt{R_s - R_c}}{\sqrt{\left(3\frac{R_s}{R_c} - 2\right)\left({R_c}^2 - R_c\right)}} 2\sqrt{\delta}. \tag{2.23}$$

Інтеграл I_2 рахуємо чисельним методом.

Межу η в (2.21), будемо шукати наступним чином. Запишемо вираз з якого можна визначити полярний кут між точками R_c і R_s

$$\alpha/2 = \int_{R_c}^{R_c+\eta} \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R_s - R}{(R_s - R_c)\frac{R^3}{{R_c}^3} + R - R_s}}\sqrt{\frac{R}{R-1}} dR +$$

$$\int_{R_c+\eta}^{R_s} \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R_s - R}{(R_s - R_c)\frac{R^3}{{R_c}^3} + R - R_s}}\sqrt{\frac{R}{R-1}} dR$$

$$= \frac{\sqrt{R_s - R_c}}{\sqrt{\left(3\frac{R_s}{R_c} - 2\right)\left({R_c}^2 - R_c\right)}} 2\sqrt{\eta}$$

$$+ \int_{R_c+\eta}^{R_s} \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R_s - R}{(R_s - R_c)\frac{R^3}{{R_c}^3} + R - R_s}}\sqrt{\frac{R}{R-1}} dR, \tag{2.24}$$

де α – це кут, під яким брахістохрону видно з початку координат. Тепер η будемо змінювати і дивитися як при цьому змінюється результат. Область значень η, для якої результат (значення α) не залежить від η, можна використовувати для обчислення інтегралу.

Криві для початкової і кінцевої точок, які знаходяться на відстані трьох ґравітаційних радіусів ($R_s = R_f = 3$) для різних значень полярного кута між напрямком на початкову і кінцеву точку (α) зображені на рис.2.2 (з лівого боку).

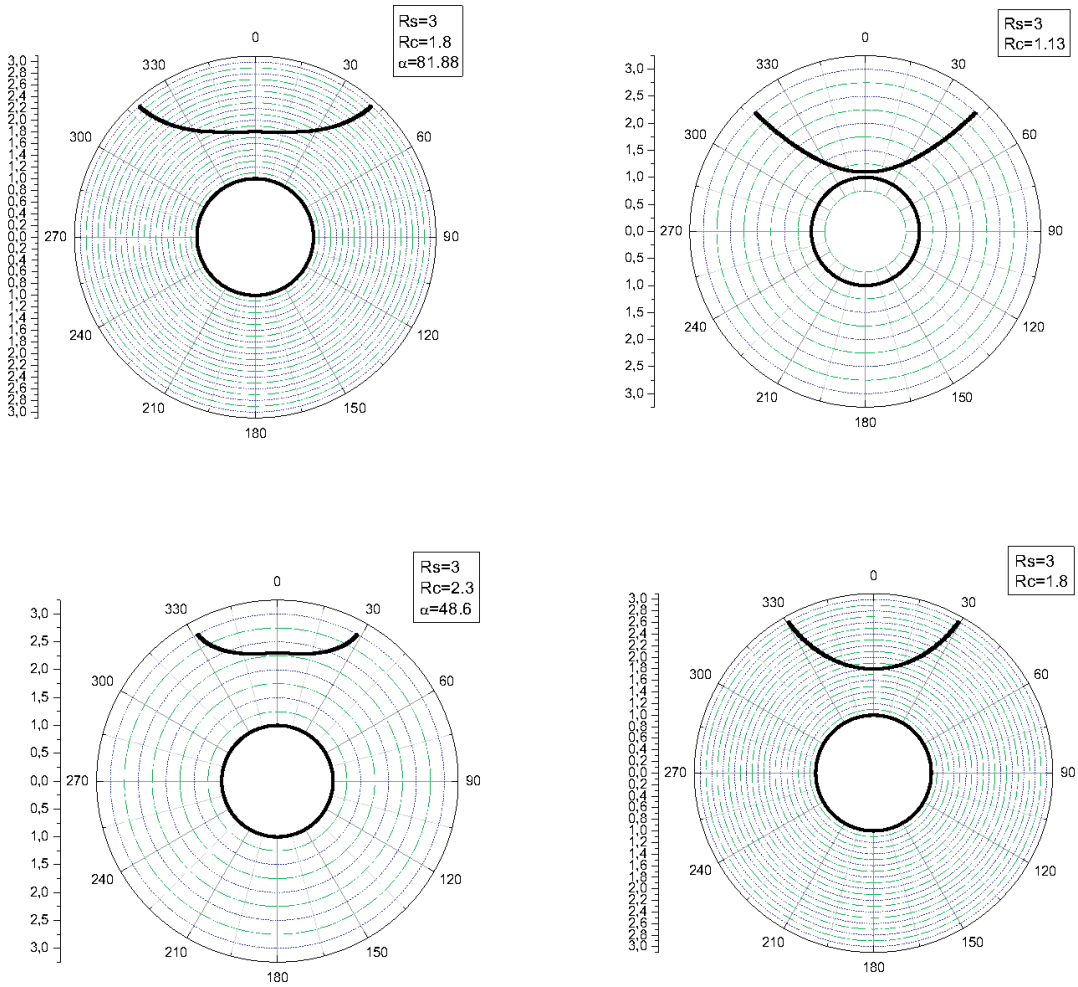

Рис. 2.2: Зліва зображено форми брахістохрони в ґравітаційному полі Шварцшільда, а праворуч – для ньютонівського поля при фіксованому значені $R_s = R_f = 3$ і для різних значень кутів між початковою і кінцевою точками траєкторії. В рамочці вгорі, біля кожного графіку траєкторії, вказано відстань від початкової і найнижчої точок траєкторії до центру ґравітаційного поля, а також кут, під яким брахістохрону видно з початку координат.

2.4 Рівняння для часу руху по брахістохроні

Отримаємо час руху частинки по брахістохроні. У рівняння (3.13) підставимо рівняння (3.16), враховуючи, що $R = \frac{r}{r_g}$, $R_s = \frac{r_s}{r_g}$ і поставимо $T = \tau\frac{c}{r_g}$:

$$dT = \sqrt{\frac{(R_s - R_c)(R_s - 1)}{{R_c}^3}}\frac{R^2}{\sqrt{R_s - R}\sqrt{(R_s - R_c)\frac{R^3}{{R_c}^3} + R - R_s}}$$

$$\times\sqrt{\frac{R}{R-1}}dR. \tag{2.25}$$

Час стосовно далекого спостерігача зв'язаний із часом, який фіксує нерухомий спостерігач у будь-якій точці на кривій, виразом:

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}dt. \tag{2.26}$$

Знерозміримо цей час $T_\Lambda = t\frac{c}{r_g}$ і отримаємо:

$$dT_\Lambda = \sqrt{\frac{(R_s - R_c)(R_s - 1)}{{R_c}^3}}\frac{R^2}{\sqrt{R_s - R}\sqrt{(R_s - R_c)\frac{R^3}{{R_c}^3} + R - R_s}}$$

$$\times\frac{R}{R-1}dR. \tag{2.27}$$

Підінтегральні функції у рівняннях (2.25) і (2.27) мають сингулярності в точках R_c і R_s. Дослідимо ці інтеграли в околі цих точок. Для цього розіб'ємо їх наступним чином:

$$dT_{(\Lambda)} = I_1 + I_2 + I_3, \tag{2.28}$$

де

$$I_1 = \int_{R_c}^{R_c+\eta_1} ...dR, \quad I_2 = \int_{R_c+\eta_1}^{R_s-\eta_2} ...dR, \quad I_3 = \int_{R_s-\eta_2}^{R_s} ...dR.$$

Для інтеґралу I_1 зробімо заміну змінних $R = R_c + \delta$, а для I_2 – заміну

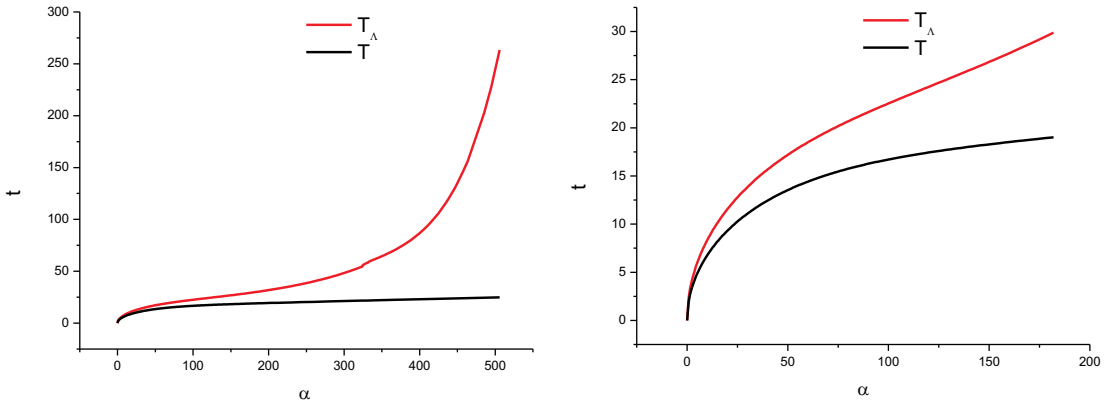

Рис. 2.3: Час, який фіксують спостерігачі вздовж траєкторії (T, нижня крива), і час стосовно далекого спостерігача (T_Λ, верхня крива) руху по брахістохроні у сферично-симетричному ґравітаційному полі Шварцшільда для $R_s = R_f = 3$ залежно від полярного кута між початковою й кінцевою точками.

$R = R_s - \delta$. Подібним чином, як у попередньому розділі в підінтегральних функціях, в знаменнику і чисельнику залишаємо лінійні члени по δ і отримаємо, що для T

$$I_1 = \frac{\sqrt{R_s - 1}}{\sqrt{\left(3\frac{R_s}{R_c} - 2\right)}} \frac{R_c}{\sqrt{R_c - 1}} 2\sqrt{\eta_1}, \quad I_3 = R_s 2\sqrt{\eta_2} \tag{2.29}$$

і для T_Λ

$$I_1 = \frac{\sqrt{R_s - 1}}{\sqrt{3\frac{R_s}{R_c} - 2}} \frac{\sqrt{{R_c}^3}}{R_c - 1} 2\sqrt{\eta_1}, \quad I_3 = \sqrt{\frac{{R_s}^3}{R_s - 1}} 2\sqrt{\eta_2}. \tag{2.30}$$

Інтеграл I_2 рахуємо чисельним методом.

Так само, як у попередньому розділі, шукаємо η для рівняння кривої і знаходимо η_1 і η_2. На рис. 2.3 зображено час, який фіксують спостерігачі вздовж траєкторії (T), і час стосовно далекого спостерігача (T_Λ) для $R_s = R_f = 3$ залежно від полярного кута між початковою і кінцевою точками.

2.5 Рівняння брахістохрони у однорідному ґравітаційному полі

Історично склалося так, що рівняння брахістохрони у ньютонівському ґравітаційному полі вперше було отримано для однорідного ґравітаційного потенціалу [1]. Розв'язок цієї задачі є набагато простішим, ніж у неоднорідному полі (2.16) [4]. Крива, яку брати Бернуллі та інші отримали у 1697 році, є циклоїдою. У нашому випадку так само можна одержати рівняння брахістохрони у однорідному полі.

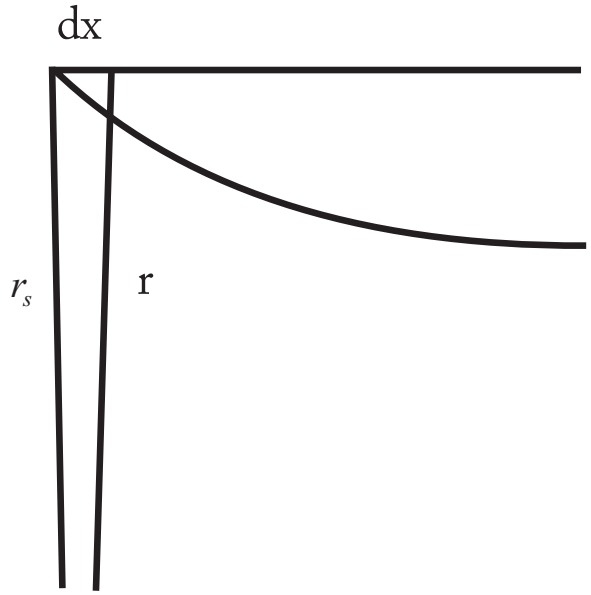

Рис. 2.4: У однорідному ґравітаційному полі відхилення по x і y дуже малі, тому наближено можна вважати, що $r = r_s - y$, $d\phi = \frac{dx}{r}$.

Щоб спростити розв'язування задачі, перейдімо у декартові координати. Перепишімо інтервал Шварцшільда через координати $(x,\ y)$ при малих відхиленнях по x і y (див. рис.2.4). Зв'язок полярних координат із декартовими запишімо так: $r = r_s - y$, $dr = -dy$, $d\phi = \frac{dx}{r}$, тоді квадрат інтервалу перепишеться наступним чином:

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r_s - y}\right) c^2 (dt)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r_s - y}} (dy)^2 - (dx)^2. \qquad (2.31)$$

Розкладімо компоненти метричного тензора за малими відхиленнями по y й обмежимося лінійними членами. Запишімо окремо g_{00} компоненту метричного тензора і квадрат довжини в такому просторі:

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r_s} - \frac{r_g}{r_s^2} y, \tag{2.32}$$

$$(dl)^2 = \frac{1 - \frac{r_g}{r_s} + \frac{r_g}{r_s^2} y}{\left(1 - \frac{r_g}{r_s}\right)^2} (dy)^2 + (dx)^2. \tag{2.33}$$

Тепер, використовуючи закон збереження енергії (2.6) з виразом (2.32) для "00" компоненти метричного тензора, отримаємо швидкість руху частинки у однорідному ґравітаційному полі

$$v = c\sqrt{\frac{\frac{r_g}{{r_s}^2} y}{1 - \frac{r_g}{r_s}}}. \tag{2.34}$$

Тоді диференціал власного часу запишеться:

$$d\tau = \frac{dl}{v} = L(y)dx, \tag{2.35}$$

де введено наступне позначення

$$L(y) = \frac{1}{c} \frac{\sqrt{1 + \frac{1 - \frac{r_g}{r_s} + \frac{r_g}{{r_s}^2} y}{\left(1 - \frac{r_g}{r_s}\right)^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{\frac{\frac{r_g}{{r_s}^2} y}{1 - \frac{r_g}{r_s}}}}. \tag{2.36}$$

Подібно до того, як це було зроблено у підрозділі 2.2 для неоднорідного поля, функціонал $L(y)$ інтерпретуємо як лаґранжіан і складемо аналог гамільтоніану

$$E = \frac{\partial L}{\partial \frac{dy}{dx}} \frac{dy}{dx} - L$$

$$= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1 - \frac{r_g}{r_s}}{\frac{r_g}{{r_s}^2} y}} \left[\frac{\frac{1 - \frac{r_g}{r_s} + \frac{r_g}{{r_s}^2} y}{\left(1 - \frac{r_g}{r_s}\right)^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\sqrt{1 + \frac{1 - \frac{r_g}{r_s} + \frac{r_g}{{r_s}^2} y}{\left(1 - \frac{r_g}{r_s}\right)^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \right.$$

$$-\sqrt{1+\frac{1-\frac{r_g}{r_s}+\frac{r_g}{{r_s}^2}y}{\left(1-\frac{r_g}{r_s}\right)^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\Bigg]. \tag{2.37}$$

Звідси отримаємо рівняння брахістохрони у однорідному сферично-симетричному ґравітаційному полі:

$$\frac{dx}{dy}=\pm\sqrt{\frac{y}{C-y}}\frac{\sqrt{1-\frac{r_g}{r_s}+\frac{r_g}{r_s^2}y}}{1-\frac{r_g}{r_s}}. \tag{2.38}$$

Тут введено позначення $C=\frac{1-\frac{r_g}{r_s}}{c^2E^2\frac{r_g}{{r_s}^2}}$ – це константа, яку знаходимо із умови екстремуму $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{y_{min}}=0$:

$$C=y_{min},$$

де y_{min} – це найнижча точка на траєкторії. Варто зазначити, що при $r_s \gg r_g$ рівняння (2.38) перетворюється на рівняння брахістохрони у однорідному ґравітаційному полі, яке отримали брати Бернуллі [1]:

$$\frac{dx}{dy}=\pm\sqrt{\frac{y}{C-y}}. \tag{2.39}$$

Розв'язок цього рівняння є циклоїда (1.1).

Тепер знайдімо рівняння брахістохрони у однорідному полі, використовуючи результат рівняння у неоднорідному полі. Підставимо у рівняння (2.16), що $R=R_s-Y$, $dR=-dY$, $d\phi=\frac{dX}{R}$ і отримаємо

$$\frac{dX}{dY}=\pm\sqrt{\frac{Y}{C(R_S-Y)^3-Y}}\sqrt{\frac{R_s-Y}{R_s-Y-1}},$$

де $X=\frac{x}{r_g}$, $Y=\frac{y}{r_g}$. Тепер під першим коренем залишімо в чисельнику і знаменнику лінійні члени по Y, враховуючи, що $C=\frac{R_s-R_c}{{R_c}^3}=\frac{Y_{max}}{{R_c}^3}$, а під другим коренем розкладімо вираз у ряд по Y до лінійного члена:

$$\frac{dX}{dY}=\pm\sqrt{\frac{Y}{C-Y}}\frac{\sqrt{R_s^2-R_s+Y}}{R_s-1}. \tag{2.40}$$

Тут ми перепозначили константу $C = \frac{{R_s}^3}{{R_c}^3} Y_{max}$. Це і є рівняння брахістохрони у однорідному ґравітаційному полі в безрозмірних величинах. Звівши його до розмірних величин, одержимо рівняння (2.38).

2.6 Рівняння брахістохрони відносно далекого спостерігача

Знайдімо вигляд брахістохрони стосовно спостерігача, який перебуває на великій відстані від ґравітаційного поля. У даному випадку будемо користуватися законом збереження енергії, записаного через швидкість частинки V, виміряну віддаленим спостерігачем (2.7). Враховуючи, що у точці r_s швидкість частинки $V = 0$, знаходимо швидкість частинки у будь-якій іншій точці на траєкторії:

$$V = c\sqrt{g_{00}}\sqrt{1 - \frac{g_{00}}{g_{00}(r_s)}}$$

$$= c\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}\sqrt{\frac{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_s}}{1 - \frac{r_g}{r_s}}}. \tag{2.41}$$

Тепер, за допомогою такого самого методу, який викладений у підрозділі 2.2, одержуємо рівняння брахістохрони стосовно віддаленого спостерігача:

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm r\sqrt{\frac{r^2}{c^2E^2}\frac{1 - \frac{r_g}{r_s}}{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_s}} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \tag{2.42}$$

або в знерозмірених одиницях, які ми ввели у підрозділі 2.2 і з таким самим позначенням для константи $C = \frac{{r_g}^2}{c^2E^2}$:

$$\frac{dR}{d\phi} = \pm R\sqrt{\frac{R^4(R_s - 1)C - (R_s - R)(R - 1)}{R(R_s - R)}}. \tag{2.43}$$

Константу C перепишімо через найнижчу точку на траєкторії R_c

$$C = \frac{(R_s - R_c)(R_c - 1)}{(R_s - 1){R_c}^4}, \quad 1 < R_c < R_s.$$

Розв'язок рівняння (2.43) шукаємо подібно, як це описано у підрозділі 2.3, враховуючи той факт, що підінтегральна функція в точці R_c має сингулярність. Це рівняння в границі ($R >> 1$) прямує до рівняння брахістохрони у ньютонівському ґравітаційному полі (2.1).

На завершення знайдімо вигляд рівняння брахістохрони для випадку, коли початкова точка знаходиться на великій відстані ($R_s \gg 1$) від центру координат [6]. Для цього зробімо заміну змінних $u = \frac{1}{R}$ в рівнянні (2.43) і отримаємо

$$\frac{du}{d\phi} = \pm\sqrt{\frac{(1-u_s)C - u^2(u-u_s)(1-u)}{u-u_s}}. \tag{2.44}$$

Тепер спрямуємо $R_s \to \infty$, тоді $u_s \to 0$, і рівняння брахістохрони прийме вигляд як в роботі [6]

$$\frac{du}{d\phi} = \pm\sqrt{\frac{C - u^3(1-u)}{u}}. \tag{2.45}$$

Так само, як у підрозділі 2.4, отримуємо рівняння для часу руху по траєкторії:

$$dT = \sqrt{\frac{(R_s - R_c)\,(R_s - 1)\,(R_c - 1)}{{R_c}^4}}\frac{R^2}{\sqrt{R_s - R}}$$

$$\times\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{(R_s - R_c)\,(R_c - 1)\,\frac{R^4}{{R_c}^4} - (R_s - R)(R-1)}}\frac{R}{R-1}dR. \tag{2.46}$$

Розв'язок якого шукаємо чисельним методом, ураховуючи, що підінтегральна функція в точках R_s і R_c має сингулярності. Результати, що стосуються цього розділу для початкової і кінцевої точок, які приймають значення $R_s = R_f = 3$, зображені на рис. 2.5 (праворуч) і рис. 2.6.

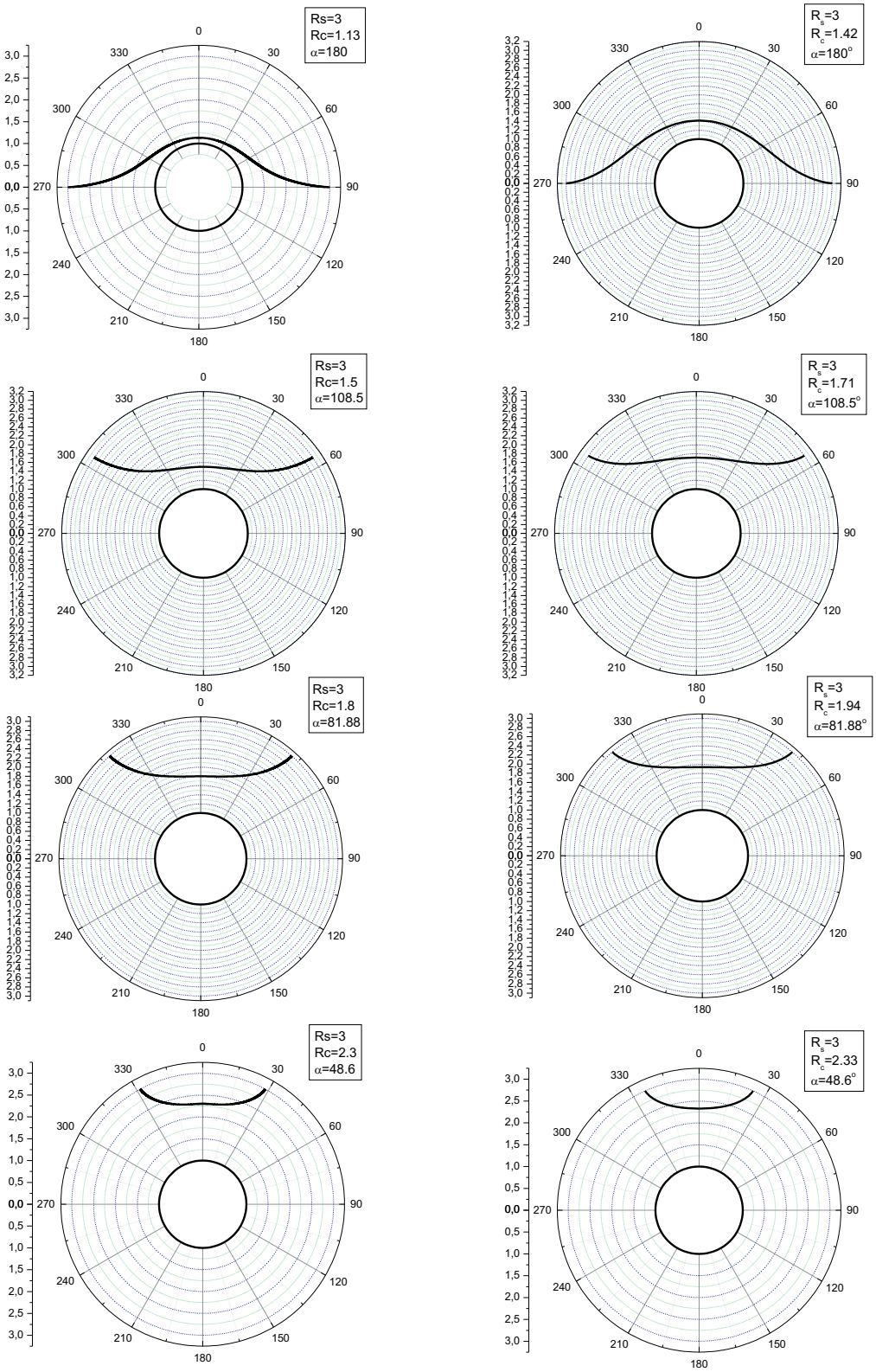

Рис. 2.5: Ліворуч зображені брахістохрони щодо спостерігачів, які розміщенні вздовж кривої, а праворуч – щодо віддаленого спостерігача.

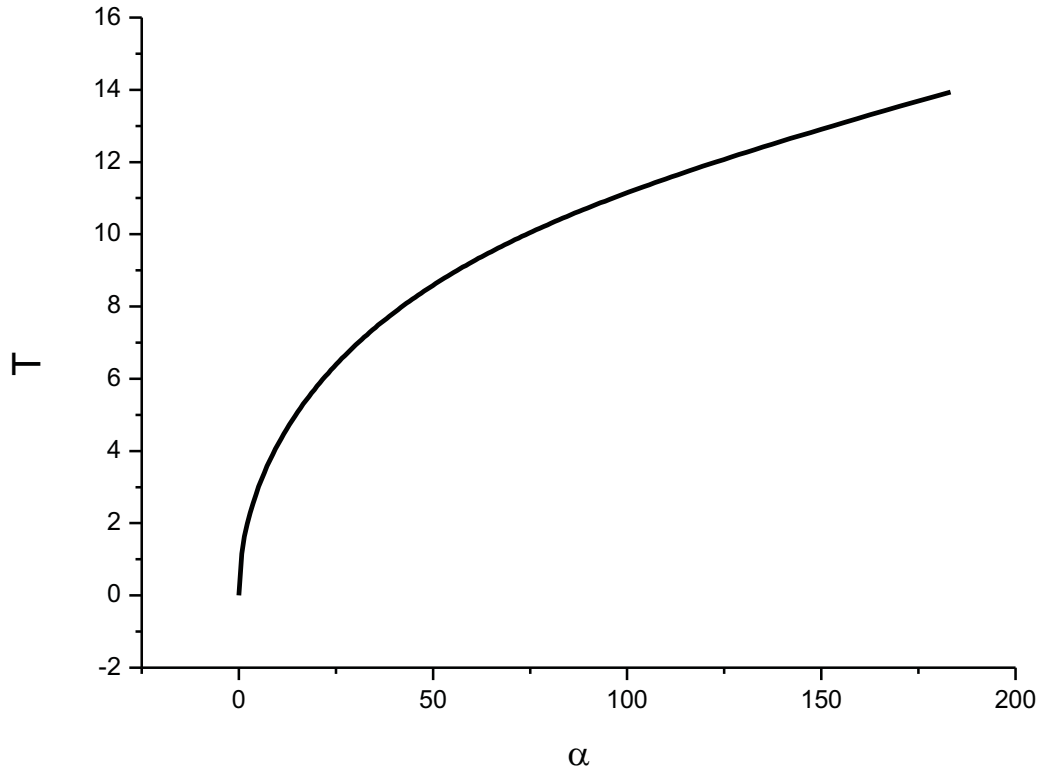

Рис. 2.6: Час подорожі частинки вздовж брахістохрони щодо віддаленого спостерігача в залежності від кута між початковою і кінцевою точками.

2.7 Висновки

Ми отримали диференціальне рівняння брахістохрони щодо спостерігачів, які є вздовж траєкторії (2.16) у сферично-симетричному ґравітаційному полі, виходячи із засад загальної теорії відносності. Також із цього результату розраховані рівняння (2.25), (2.27) для часу, який необхідно частинці затратити для переміщення по кривій. У підрозділі 2.5 представлено диференціальне рівняння брахістохрони (2.40) у однорідному полі. У попередньому підрозділі обчислені рівняння брахістохрони (2.43) і часу (2.46) стосовно далекого спостерігача.

Для крайових точок, які є на відстані $R_s = R_f = 3$, ми змінювали

кут між ними, а отримані результати зображені на рис. 2.2. На цьому рисунку (ліворуч) зображені форми кривих при різних кутах, а з правого боку показано вигляд кривих для ньютонівського представлення ґравітаційного поля при тих самих кутах. Видно, що при однакових положеннях початкової і кінцевої точок отримані криві у полі Шварцшільда і Ньютона відрізняються. У ньютонівському випадку радіальні координати точок на траєкторії мають менші значення, ніж у полі Шварцшільда. Це зумовлено тим, що на відміну від брахістохрони, яка реалізується у ґравітаційному полі Ньютона (2.1), релятивістська (2.16) має множник ($\sqrt{\frac{R-1}{R}}$).

Також видно, що у метриці Шварцшільда для двох фіксованих точок існує безліч траєкторій з різними значеннями найнижчої точки R_c. Проте одна траєкторія з максимальним значенням R_c буде відповідати мінімуму часу. Іншими словами, при зменшенні R_c кут α перевищуватиме 180^o (рис. 2.7), на відміну від ньютонівського випадку [4]. Ми бачимо, що чим ближче точка R_c до ґравітаційного радіусу, тим більше витків навколо сфери з ґравітаційним радіусом матиме крива, і при R_c, що прямує до одиниці – α прямує до нескінченності.

Час, який фіксує спостерігач у даній точці траєкторії (2.25), і час, який фіксує віддалений спостерігач (2.27) для значень $R_s = R_f = 3$ залежно від полярного кута між цими точками зображено на рис. 2.3. Отже, щоб знайти реальний час, потрібно знерозмірений час помножити на $\frac{r_g}{c}$. Значить, що чим більші розміри чорної діри, то більше часу потрібно затратити тілу, щоб переміститися по брахістохроні з початкової точки в кінцеву при фіксованих $R_s = R_f$ і куті між ними. Тобто, точки на кривій віддалятимуться від початку координат пропорційно до ґравітаційного радіусу (Rr_g), і відповідно відстань між початковою і кінцевою точками збільшуватиметься. На рис. 2.8 зобра-

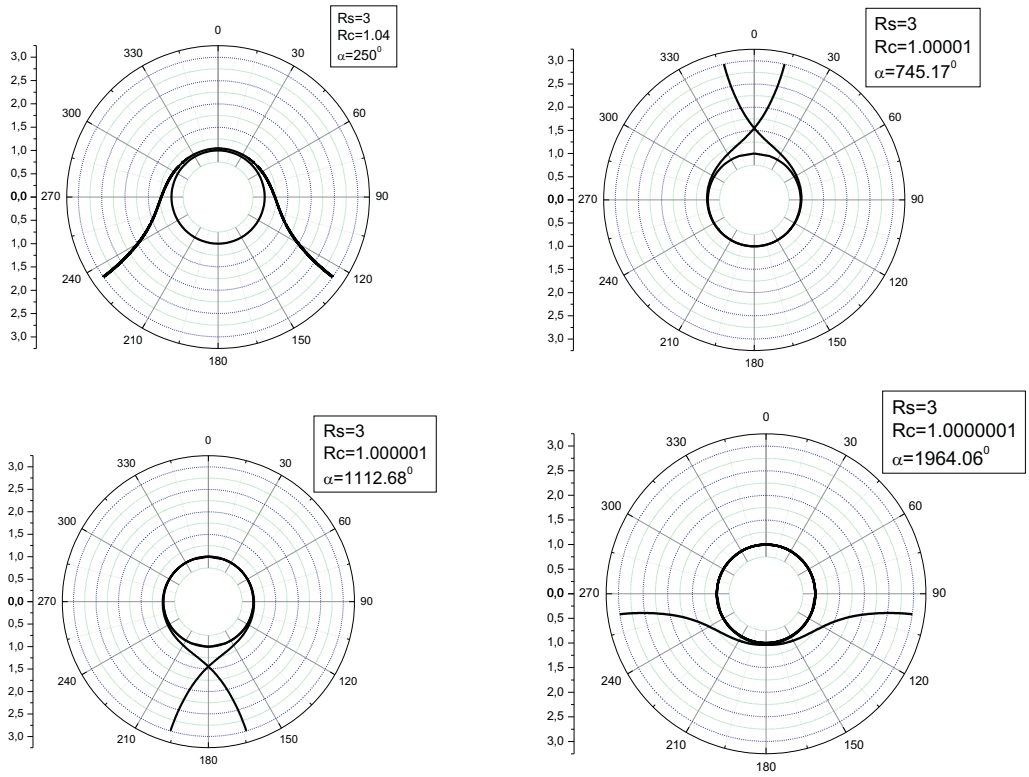

Рис. 2.7: При зменшенні R_c кут α перевищуватиме 180^o.

жено власний час руху по брахістохроні стосовно спостерігачів, які знаходяться уздовж траєкторії. Приблизно після $\alpha = 200^o$ залежність часу від кута α можна вважати лінійною. Це зумовлено тим, що частинка рухається достатньо великий проміжок шляху майже по коловій траєкторії, і через це її швидкість по цій траєкторії можна вважати сталою.

Подібно обчислено брахістохрону щодо віддаленого спостерігача. На рис. 2.5 зображені криві для початкової й кінцевої точок, які є на відстані трьох ґравітаційних радіусів від центру координат ($R_s = R_f = 3$) і при різному куті між ними. Ліворуч зображені траєкторії, які фіксують спостерігачі вздовж цих кривих (2.16), а праворуч брахістохрони відносно віддаленого спостерігача (2.43). Радіальні координати точок на траєкторії стосовно віддаленого спостерігача мають більші

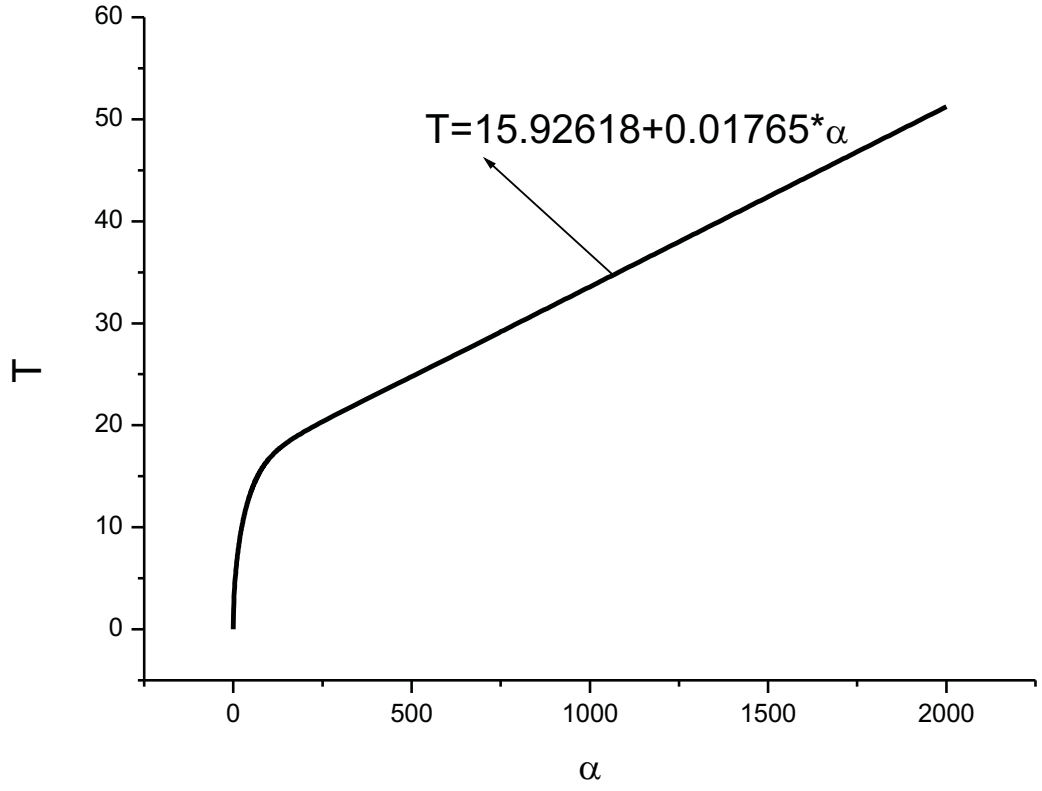

Рис. 2.8: Час, який фіксують спостерігачі вздовж траєкторії залежно від полярного кута між початковою і кінцевою точками. Прослідковується майже лінійна залежність власного часу від кута після $\alpha = 200^o$.

значення (крім крайових точок), ніж у першому випадку. Це зумовлено сповільненням часу у ґравітаційному полі (червоне зміщення). Також на рис. 2.6 зображено час подорожі частинки по брахістохроні залежно від кута між початковою й кінцевою точками (α).

Розділ 3

Задача про брахістохрону для двох спінів 1/2 з анізотропною взаємодією Гайзенберґа

3.1 Вступ

Задача про квантову брахістохрону формулюється наступним чином [7,8,81–84]: який вигляд має гамільтоніан квантової системи з обмеженими енергетичними ресурсами, що здійснює еволюцію між фіксованими початковим $|\psi_i\rangle$ і кінцевим $|\psi_f\rangle$ станами за мінімально можливий час? При моделюванні еволюції фізичної системи необхідно задати умову, яка фіксує енергетичні ресурси цієї системи тому, що реальні фізичні системи мають енергетичне обмеження. Для прикладу, максимальна енергія системи спіну 1/2, який знаходиться у магнітному полі, задається величиною цього поля. Найпростіша енергетична умова, яку накладають на систему, є зафіксована різниця між найвищим і найнижчим енергетичними рівнями:

$$\Delta E = 2\omega, \tag{3.1}$$

де ω є сталим і має розмірність енергії. У цьому розділі ми будемо розглядати систему подібну до тої, яка розглянута у роботі [87], і тому будемо користуватися енергетичною умовою з цієї роботи:

$$\mathrm{Tr}\ \mathrm{H}^2 - 2\omega^2 = 0. \tag{3.2}$$

Для дворівневої квантової системи з енергетичними рівнями $\frac{\Delta E}{2}$, $-\frac{\Delta E}{2}$ умови (3.1) і (3.2) збігаються.

Задача про брахістохрону знайшла широке застосування при дослідженні логічних операцій, які здійснюються на квантових системах. Є важливим, щоб ці операції можна було здійснювати за мінімально можливий час. Наприклад, у роботі [87] було розв'язано задачу оптимальної еволюції для системи двох спінів 1/2, взаємодія між якими задається константами зв'зку J_{ii} $(i = x, y, z)$ і які знаходяться у зовнішньому магнітному полі, яке спрямоване вздовж осі z. Також, авторами було знайдено умови для оптимальної реалізації таких квантових логічних елементів як SWAP, що здійснює обмін станами між двома кубітами, квантове перетворення Фур'є і логічний елемент, що здійснює квантове заплутування двох спінів.

3.2 Гамільтоніан двох взаємодіючих спінів

Ми розглядаємо систему двох спінів 1/2, взаємодія між якими задається константами зв'язку J_{ii} $(i = x, y, z)$, J_{jk} $(j \neq k = x, y)$. Також ми вважаємо, що кожен спін поміщений у зовнішнє магнітне поле, яке спрямовано вздовж осі z. Іншими словами, гамільтоніан даної системи має вигляд:

$$H = \sum_{i,j=x,y,z} J_{ij}\sigma_i^1\sigma_j^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} h_z^\alpha \sigma_z^\alpha, \tag{3.3}$$

де $J_{xz} = J_{zx} = J_{yz} = J_{zy} = 0$, $\sigma_i^1 = \sigma_i \otimes I$, $\sigma_i^2 = I \otimes \sigma_i$, σ_i є матрицями Паулі, h_z^α – це величина, яка визначає взаємодію спіну із полем, а параметр α вказує на номер спіну. Важливо зауважити, що цей гамільтоніан не містить доданків з $\sigma_x^1\sigma_z^2$, $\sigma_z^1\sigma_x^2$ і $\sigma_y^1\sigma_z^2$, $\sigma_z^1\sigma_y^2$, що дозволяє такій системі еволюціонувати на двох підпросторах $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ і $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$

окремо. Тут стани $|\uparrow\rangle$ і $|\downarrow\rangle$ є власними станами оператора σ_z з власними значеннями 1 і -1 відповідно. Це означає, що якщо початковий стан знаходиться на одному з підпросторів, то еволюція даної системи буде відбуватися на даному підпросторі. Ця властивість дозволяє нам переписати гамільтоніан (3.3) у наступному вигляді $H = H_I + H_{II}$, де в базисі $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$, гамільтоніани $H_{I(II)}$ записуються наступним чином:

$$H_I = \begin{pmatrix} h^+ + J_{zz} & 0 & 0 & J^-_{Re} - iJ^+_{Im} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ J^-_{Re} + iJ^+_{Im} & 0 & 0 & -h^+ + J_{zz} \end{pmatrix},$$

$$H_{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^- - J_{zz} & J^+_{Re} + iJ^-_{Im} & 0 \\ 0 & J^+_{Re} - iJ^-_{Im} & -h^- - J_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

де введені наступні позначення: $h^\pm = h^1_z \pm h^2_z$, $J^\pm_{Re} = J_{xx} \pm J_{yy}$ і $J^\pm_{Im} = J_{xy} \pm J_{yx}$. Із (3.4) легко бачити, що оператори H_I і H_{II} комутують між собою ($[H_I, H_{II}] = 0$). Відповідно до того, гамільтоніан H_I реалізує еволюцію системи на підпросторі з базисними векторами $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$, а гамільтоніан H_{II} на підпросторі, що задається векторами $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$.

Гамільтоніан (3.3) має чотири власних значення: $E^+_I = J_{zz} + \omega_I$, $E^-_I = J_{zz} - \omega_I$, $E^+_{II} = -J_{zz} + \omega_{II}$, $E^-_{II} = -J_{zz} - \omega_{II}$, яким відповідають такі власні вектори:

$$|\psi^+_I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_I(\omega_I - h^+)}} \left[\left(J^-_{Re} - iJ^+_{Im}\right) |\uparrow\uparrow\rangle + \left(\omega_I - h^+\right) |\downarrow\downarrow\rangle \right],$$

$$|\psi_I^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_I(\omega_I + h^+)}} \left[\left(J_{Re}^- - iJ_{Im}^+\right) | \uparrow\uparrow\rangle - \left(\omega_I + h^+\right) | \downarrow\downarrow\rangle \right],$$

$$|\psi_{II}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{II}(\omega_{II} - h^-)}} \left[\left(J_{Re}^+ + iJ_{Im}^-\right) | \uparrow\downarrow\rangle + \left(\omega_{II} - h^-\right) | \downarrow\uparrow\rangle \right],$$

$$|\psi_{II}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{II}(\omega_{II} + h^-)}} \left[\left(J_{Re}^+ + iJ_{Im}^-\right) | \uparrow\downarrow\rangle - \left(\omega_{II} + h^-\right) | \downarrow\uparrow\rangle \right], \quad (3.5)$$

де введено позначення:

$$\omega_I = \sqrt{{J_{Re}^-}^2 + {J_{Im}^+}^2 + h^{+2}}, \quad \omega_{II} = \sqrt{{J_{Re}^+}^2 + {J_{Im}^-}^2 + h^{-2}}.$$

Гамільтоніани H_I і H_{II} мають спільну систему власних функцій (3.5). Гамільтоніан H_I має два власних значення E_I^+, E_I^-, яким відповідають власні функції $|\psi_I^+\rangle$, $|\psi_I^-\rangle$ і одне двократно вироджене власне значення 0 з власними функціями $|\psi_{II}^+\rangle$ і $|\psi_{II}^-\rangle$. Подібну ситуацію будемо мати у випадку з H_{II}. Цей оператор має два власні значення E_{II}^+, E_{II}^-, яким відповідають власні функції $|\psi_{II}^+\rangle$, $|\psi_{II}^-\rangle$ і одне власне значення 0 з власними функціями $|\psi_I^+\rangle$ і $|\psi_I^-\rangle$.

3.3 Задача про брахістохрону для двох взаємодіючих спінів

Як було показано раніше, гамільтоніан (3.3) реалізує квантову еволюцію на двох підпросторах, що задаються векторами $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ і $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ окремо. Це означає, що ми не можемо спостерігати еволюції між двома станами, які належать до різних підпросторів. Таким чином задача про брахістохрону для даної системи розбивається на задачу про брахістохрону на одному і другому підпросторі, а це означає, що оператор еволюції з гамільтоніаном (3.3) можна представити у вигляді:

$$U(t) = e^{-iHt} = e^{-iH_I t} e^{-iH_{II} t} = U_I U_{II}, \quad (3.6)$$

де U_I задає еволюцію на підпросторі $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ і діє як одиничний оператор на підпростір $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$, і навпаки оператор U_{II} реалізує еволюцію на підпросторі $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ і діє як одиничний оператор на підпростір $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$. Тут ми скористалися тим, що гамільтоніани H_I і H_{II} комутують між собою.

Енергетична умова (3.2) для гамільтоніану (3.3) має вигляд:

$$\omega_I{}^2 + \omega_{II}{}^2 + 2J_{zz}{}^2 = \omega^2. \tag{3.7}$$

Ця умова є нічим іншим як фіксуванням суми квадратів власних значень гамільтоніану (3.3).

Розглянемо задачу про квантову брахістохрону на підпросторах з базисними станами $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ і $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ окремо.

3.3.1 Квантова еволюція на підпросторі $|\uparrow\uparrow\rangle$,$|\downarrow\downarrow\rangle$

Розглянемо задачу про квантову брахістохрону системи двох спінів 1/2, яка описується гамільтоніаном (3.3), на підпросторі, що задається базисними векторами $|\uparrow\uparrow\rangle$,$|\downarrow\downarrow\rangle$. Гамільтоніан (3.3) діє на довільний стан з цього підпростору $|\psi\rangle = a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\downarrow\downarrow\rangle$ наступним чином:

$$H|\psi\rangle = H_I|\psi\rangle.$$

Тут виконується умова нормування $|a|^2+|b|^2 = 1$. Таким чином при дослідженні квантової еволюції на цьому підпросторі будемо використовувати гамільтоніан H_I з (3.4). Спростимо запис цього гамільтоніану. Для цього введемо наступні оператори:

$$\sigma_x^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_z^I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I^I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Ці оператори задовільняють властивостям матриць Паулі σ_x, σ_y, σ_z і одиничної матриці I на станах $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$, якщо ці стани перепозначити наступним чином: $|\uparrow\uparrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle \equiv |\downarrow\rangle$.

За допомогою операторів (3.8) гамільтоніан H_I з (3.4) можна представити у наступному вигляді:

$$H_I = \boldsymbol{\sigma}^I \cdot \mathbf{h}^I + J_{zz} I^I, \tag{3.9}$$

де $\mathbf{h}^I = (J_{Re}^-, J_{Im}^+, h^+)$. Цей гамільтоніан має вигляд гамільтоніану, який описує спін $1/2$ у магнітному полі, яке визначається вектором $\mathbf{h}^I$. Задача про брахістохрону для спіну $1/2$ у магнітному полі є розглянута в книжці [84]. У нашому випадку ми не можемо використовувати результати із задачі про еволюцію спіну $1/2$ тому, що ми накладаємо на систему іншу енергетичну умову (3.7), ніж у роботі [84], де автор фіксує відстань між найвищим і найнижчим енергетичними рівнями системи.

Використовуючи (3.9), представимо оператор еволюції $U_I = e^{-iH_I t}$ у вигляді:

$$U_I = \left(I - I^I + \cos(\omega_I t) I^I - \frac{i}{\omega_I} \sin(\omega_I t) \boldsymbol{\sigma}^I \cdot \mathbf{h}^I \right) A^I, \tag{3.10}$$

де

$$A^I = \begin{pmatrix} e^{-iJ_{zz}t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-iJ_{zz}t} \end{pmatrix}.$$

При виведенні (3.10) ми скористалися наступними властивостями операторів (3.8): $\left(\boldsymbol{\sigma}^I \cdot \mathbf{h}^I\right)^{2n} = {\omega_I}^{2n} I^I$ і $\left(\boldsymbol{\sigma}^I \cdot \mathbf{h}^I\right)^{2n+1} = {\omega_I}^{2n} \boldsymbol{\sigma}^I \cdot \mathbf{h}^I$, де $n = 1, 2, 3, ...$ У матричному представлені оператор (3.10) має вигляд:

$$U_I = \begin{pmatrix} (\cos(\omega_I t) - \frac{i}{\omega_I}\sin(\omega_I t)\, h^+) e^{-iJ_{zz}t} & 0 & 0 & -\frac{i}{\omega_I}\sin(\omega_I t)\,(J^-_{Re} - iJ^+_{Im}) e^{-iJ_{zz}t} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i}{\omega_I}\sin(\omega_I t)\,(J^-_{Re} + iJ^+_{Im}) e^{-iJ_{zz}t} & 0 & 0 & (\cos(\omega_I t) + \frac{i}{\omega_I}\sin(\omega_I t)\, h^+) e^{-iJ_{zz}t} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Тепер можемо дослідити квантову еволюцію системи на даному підпросторі. Будемо вважати, що в початковий момент часу система перебуває у стані $|\psi_i\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$, а кінцевий стан, який необхідно досягнути, має вигляд $|\psi_f\rangle = a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\downarrow\downarrow\rangle$. Використовуючи матричне представлення оператора еволюції U_I (3.11), рівняння $|\psi_f\rangle = U_I|\psi_i\rangle$ запишімо наступним чином:

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = e^{-iJ_{zz}t} \begin{pmatrix} \cos(\omega_I t) - \frac{i}{\omega_I}\sin(\omega_I t)\, h^+ \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{i}{\omega_I}\sin(\omega_I t)\,(J^-_{Re} + iJ^+_{Im}) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Звідси знайдімо час, який необхідно системі, щоб досягнути кінцевого стану. Для цього візьмемо модулі зліва і справа від четвертої компоненти вектора стану у рівнянні (3.12) і прирівняємо їх

$$\frac{1}{\omega_I}\sin(\omega_I t)\sqrt{{J^-_{Re}}^2 + {J^+_{Im}}^2} = |b|. \quad (3.13)$$

З цього рівняння отримуємо час за який система еволюціонує з початкового $|\uparrow\uparrow\rangle$ до кінцевого $a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\downarrow\downarrow\rangle$ станів

$$t = \frac{1}{\omega_I}\arcsin\left(\sqrt{1 + \frac{{h^+}^2}{{J^-_{Re}}^2 + {J^+_{Im}}^2}}|b|\right).$$

Пам'ятаючи, що енергія системи обмежується умовою (3.7), знаходимо параметри, при яких цей час буде мінімальним

$$\omega_{II} = J_{zz} = h^+ = 0, \quad \omega_I = \omega. \quad (3.14)$$

Тоді вираз для мінімального часу буде мати вигляд:

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arcsin |b|. \tag{3.15}$$

Для прикладу, мінімальний час еволюції між двома ортогональними станами є наступним: $\tau = \frac{\pi}{2\omega}$.

Умови (3.14) ще не забезпечують досягнення системою кінцевого стану тому, що ми не врахували фази параметра b. Для знаходження решти необхідних умов, які дозволяють досягнути кінцевого стану за час (3.15), підставимо у рівняння (3.12) умови (3.14), а замість часу t мінімальний час з (3.15). Тоді, ми отримаємо наступне рівняння:

$$-\frac{i}{\omega}|b| \left(J^-_{Re} + iJ^+_{Im}\right) = b,$$

з якого знаходимо інші умови для оптимальної еволюції системи:

$$J^-_{Re} = -\omega \frac{\operatorname{Im} b}{|b|}, \quad J^+_{Im} = \omega \frac{\operatorname{Re} b}{|b|},$$

де $b = \operatorname{Re} b + i \operatorname{Im} b$. Пам'ятаючи, що $\omega_{II} = 0$, перепишемо ці умови у наступному вигляді:

$$J_{xx} = -J_{yy} = -\frac{\omega}{2}\frac{\operatorname{Im} b}{|b|}, \quad J_{xy} = J_{yx} = \frac{\omega}{2}\frac{\operatorname{Re} b}{|b|}.$$

Таким чином всі необхідні умови для забезпечення оптимальної еволюції на підпросторі, який задається векторами $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$, мають вигляд:

$$J_{xx} = -J_{yy} = -\frac{\omega}{2}\frac{\operatorname{Im} b}{|b|}, \quad J_{xy} = J_{yx} = \frac{\omega}{2}\frac{\operatorname{Re} b}{|b|},$$

$$J_{zz} = 0, \quad h^1_z = h^2_z = 0. \tag{3.16}$$

Часто при дослідженні різних проблем, які стосуються квантових обчислень, виникає необхідність створення максимально заплутаних

станів. Для прикладу, максимально заплутаний стан двох кубітів фігурує в процедурі квантової телепортації [158]. Тому буде корисно знайти умови, при яких наша система досягає максимально заплутаного стану

$$|\psi_{ENT}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\uparrow\rangle + e^{i\phi}|\downarrow\downarrow\rangle\right) \tag{3.17}$$

за мінімальний час. Тут $\phi \in [0, 2\pi]$. Підставляючи наступне значення $b = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}$ у вирази (3.15) і (3.16), отримаємо мінімальний час еволюції $\tau = \frac{\pi}{4\omega}$ і оптимальні умови

$$J_{xx} = -J_{yy} = -\frac{\omega}{2}\sin\phi, \quad J_{xy} = J_{yx} = \frac{\omega}{2}\cos\phi, \quad J_{zz} = 0, \quad h_z^1 = h_z^2 = 0$$

для досягнення системою стану (3.17).

Знайдімо гамільтоніан системи, який забезпечує оптимальну еволюцію на підпросторі $|\uparrow\uparrow\rangle$,$|\downarrow\downarrow\rangle$. Для цього покладемо умови (3.16) у вираз (3.3) і отримаємо такий гамільтоніан

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\omega\frac{b^*}{|b|} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\omega\frac{b}{|b|} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Підпростір $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ є двовимірний і його можна задати сферою Блоха, де базисні стани будуть знаходитися на полюсах цієї сфери (див. рис. 3.1). Будь-який чистий стан можна зобразити точкою на сфері Блоха. Найкоротша відстань між двома станами $|\psi_i\rangle$ і $|\psi_f\rangle$ є дугою великого кола сфери (геодезична лінія). Оптимальний перехід з $|\psi_i\rangle$ в $|\psi_f\rangle$ забезпечується поворотом всієї сфери навколо осі, яка є ортогональною до геодезичної. Ця вісь проходить через два стани $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\uparrow\rangle + i\frac{b}{|b|}|\downarrow\downarrow\rangle\right]$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\uparrow\rangle - i\frac{b}{|b|}|\downarrow\downarrow\rangle\right]$, які є власними станами гамільтоніану (3.18) з відповідними власними значеннями ω і $-\omega$. Всі максимально заплутані стани знаходяться на екваторі сфери.

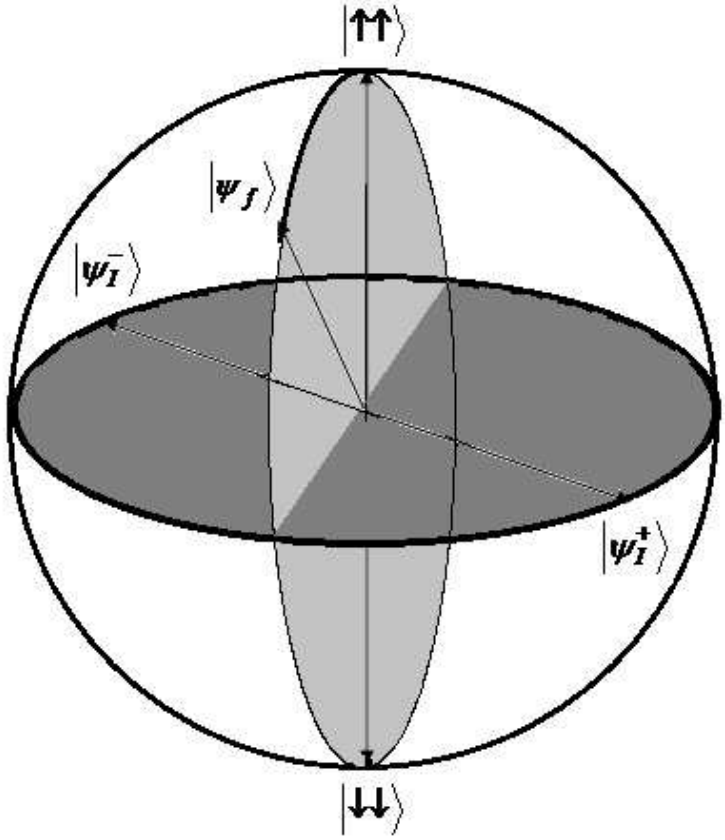

Рис. 3.1: Геометрія підпростору, який задається станами $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$. Оптимальна еволюція системи між станами $|\uparrow\uparrow\rangle$ і $|\psi_f\rangle$ відбувається вздовж дуги кола при повороті сфери навколо осі, що проходить через стани $|\psi_I^+\rangle$ і $|\psi_I^-\rangle$, які є власними станами оптимального гамільтоніану.

3.3.2 Квантова еволюція на підпросторі $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$

У цьому підрозділі ми розглянемо задачу про квантову брахістохрону для системи двох спінів 1/2, яка описується гамільтоніаном (3.3), на підпросторі, що задається базисними векторами $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$. Подібно, як у попередньому підрозділі, гамільтоніан (3.3) діє на довільний стан з цього підпростору $|\psi\rangle = a|\uparrow\downarrow\rangle + b|\downarrow\uparrow\rangle$ наступним чином:

$$H|\psi\rangle = H_{II}|\psi\rangle.$$

Тому для дослідження еволюції на цьому підпросторі будемо використовувати гамільтоніан H_{II} з (3.4). Перепишімо цей гамільтоніан за

допомогою наступних операторів:

$$\sigma_x^{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y^{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_z^{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I^{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.19)$$

Ці оператори задовільняють властивостям матриць Паулі σ_x, σ_y, σ_z і одиничної матриці I на станах $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$. Отже,

$$H_{II} = \boldsymbol{\sigma}^{II} \cdot \mathbf{h}^{II} - J_{zz} I^{II}, \qquad (3.20)$$

де $\mathbf{h}^{II} = (J_{Re}^{+}, -J_{Im}^{-}, h^{-})$. Оператор еволюції з цим гамільтоніаном запишеться у вигляді:

$$U_{II} = \left(I - I^{II} + \cos(\omega_{II} t) I^{II} - \frac{i}{\omega_{II}} \sin(\omega_{II} t) \boldsymbol{\sigma}^{II} \cdot \mathbf{h^{II}} \right) A^{II}, \quad (3.21)$$

де

$$A^{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{iJ_{zz}t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{iJ_{zz}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для представлення оператора еволюції U_{II} у вигляді (3.21) ми використали наступні властивості операторів (3.19): $\left(\boldsymbol{\sigma}^{II} \cdot \mathbf{h}^{II}\right)^{2n} = {\omega_{II}}^{2n} I^{II}$ і $\left(\boldsymbol{\sigma}^{II} \cdot \mathbf{h}^{II}\right)^{2n+1} = {\omega_{II}}^{2n} \boldsymbol{\sigma}^{II} \cdot \mathbf{h}^{II}$ де $n = 1, 2, 3, ...$ В матричному представлені U_{II} має такий вигляд:

$$U_{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\cos(\omega_{II} t) - \frac{i}{\omega_{II}} \sin(\omega_{II} t)\, h^{-}) e^{iJ_{zz}t} & -\frac{i}{\omega_{II}} \sin(\omega_{II} t)\, (J_{Re}^{+} + iJ_{Im}^{-}) e^{iJ_{zz}t} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\omega_{II}} \sin(\omega_{II} t)\, (J_{Re}^{+} - iJ_{Im}^{-}) e^{iJ_{zz}t} & (\cos(\omega_{II} t) + \frac{i}{\omega_{II}} \sin(\omega_{II} t)\, h^{-}) e^{iJ_{zz}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Тепер, користуючись матричним представленням (3.22) оператора U_{II}, дослідимо квантову еволюцію системи, яка в початковий момент часу перебуває у стані $|\psi_i\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$, а кінцевий стан задамо у вигляді $|\psi_f\rangle = a|\uparrow\downarrow\rangle + b|\downarrow\uparrow\rangle$. Подібно, як у попередньому випадку, представимо рівняння $|\psi_f\rangle = U_{II}|\psi_i\rangle$ у формі:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = e^{iJ_{zz}t} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\omega_{II}t) - \frac{i}{\omega_{II}}\sin(\omega_{II}t)\, h^- \\ -\frac{i}{\omega_{II}}\sin(\omega_{II}t)\,(J^+_{Re} - iJ^-_{Im}) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

З третьої компоненти цього матричного рівняння знаходимо час, який система витрачає на досягнення кінцевого стану:

$$t = \frac{1}{\omega_{II}} \arcsin\left(\sqrt{1 + \frac{h^{-2}}{{J^+_{Re}}^2 + {J^-_{Im}}^2}}|b|\right),$$

а користуючись енергетичною умовою (3.7) мінімізуємо його. Як і у попередньому випадку оптимальний час еволюції має вигляд (3.15), тільки тут параметр b буде характеризувати кінцевий стан на підпросторі $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$. Умови, які забезпечують оптимальну еволюцію на цьому підпросторі, запишуться наступним чином:

$$J_{xx} = J_{yy} = -\frac{\omega}{2}\frac{\operatorname{Im} b}{|b|}, \quad J_{xy} = -J_{yx} = -\frac{\omega}{2}\frac{\operatorname{Re} b}{|b|},$$

$$J_{zz} = 0, \quad h^1_z = h^2_z = 0, \tag{3.24}$$

На цьому підпросторі максимально заплутаний стан

$$|\psi_{ENT}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + e^{i\phi}|\downarrow\uparrow\rangle\right) \tag{3.25}$$

можна досягнути за мінімальний час $\tau = \frac{\pi}{4\omega}$. Для цього на систему потрібно накласти наступні умови:

$$J_{xx} = J_{yy} = -\frac{\omega}{2}\sin\phi, \quad J_{xy} = -J_{yx} = -\frac{\omega}{2}\cos\phi, \quad J_{zz} = 0, \quad h^1_z = h^2_z = 0.$$

Тут ϕ також приймає значення $[0, 2\pi]$.

Гамільтоніан, який забезпечує оптимальну еволюцію на підпросторі $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$, можна отримати, якщо умови (3.24) підставити у вираз (3.3)

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega\frac{b^*}{|b|} & 0 \\ 0 & i\omega\frac{b}{|b|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Як і у попередньому випадку підпростір $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ можна задати сферою Блоха (див. рис. 3.1). Тільки на полюсах будуть базисні стани, які задають цей підпростір, а на екваторі максимально заплутані стани (3.25). Вісь, навколо якої відбувається оптимальна еволюція, буде проходити через стани $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle + i\frac{b}{|b|}|\downarrow\uparrow\rangle\right]$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle - i\frac{b}{|b|}|\downarrow\uparrow\rangle\right]$, які є власними станами оптимального гамільтоніану H_{II} (3.26) з відповідними власними значеннями ω і $-\omega$.

3.4 Квантові логічні елементи

Роль квантового регістру в квантових комп'ютерах виконує система кубітів. Діючи унітарним перетворенням на вектор стану такої системи, ми виконуємо відповідну логічну операцію і, таким чином, отримуємо бажаний вектор стану. Такі унітарні оператори ще називають квантовими логічними елементами. Ці логічні операції виконують роль процесора для квантового комп'ютера. Квантові логічні елементи є базовою частиною у квантовому алгоритмі, подібно, як класичні логічні операції у класичних алгоритмах, і відрізняються тим від останніх, що працюють з квантовими бітами, які підкоряються законам квантової механіки.

Найпростіші квантові логічні елементи є однокубітовими. Вони змінюють стан тільки одного кубіта з регістру і залишають незмінними всі інші кубіти. Для прикладу, універсальний однокубітовий логічний оператор можна представити у наступному вигляді:

$$U = e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}+\phi I\right)}, \tag{3.27}$$

де $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ – це одиничний вектор, θ – це кут на який відбувається поворот навколо одиничного вектора, а ϕ – це фаза. Змінюючи ці параметри, можна отримати будь-який однокубітовий логічний елемент. Для прикладу, покладаючи у вираз (3.27), що $\theta = \pi$, $n_x = n_z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n_y = 0$ і $\phi = \frac{\pi}{2}$ отримаємо оператор Адамара:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

Дія цього оператора на стани $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ є наступною:

$$H|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right), \quad H|\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right). \tag{3.29}$$

Наступними логічними операторами є двокубітові унітарні оператори, які змінюють стани певних двох кубітів і залишають незмінними всі інші. У праці [159] було показано, що достатньо двох однокубітових та одного двокубітового операторів, щоб побудувати довільний унітарний оператор, що діє на Гільбертовому просторі n кубітів. Проте для цього може бути необхідним побудувати ланцюжок із $4^n n^3$ базових операторів. Дальше буде показано, які двокубітні квантові логічні елементи можна побудувати на системі двох спінів, яка описується гамільтоніаном (3.3).

3.4.1 Реалізація квантових логічних елементів на двох взаємодіючих спінах

З оператора еволюції (3.6) разом з (3.11) і (3.22), який ми отримали у попередньому підрозділі, можна отримати деякі двокубітні квантові логічні елементи. Щоб отримати умови при яких можна реалізувати конкретний логічні елементи на системі, що описується гамільтоніаном (3.3), потрібно записати і розв'язати наступне матричне рівняння:

$$U(T) = e^{i\chi} U_{target}, \tag{3.30}$$

де U_{target} – це логічний елемент, який ми хочемо реалізувати, T є часом, за який генерується відповідний елемент, χ – це фаза.

Розглянемо деякі логічні елементи, які можна створити на системі, яка задається гамільтоніаном (3.3). Для початку розглянемо логічний елемент, який дозволяє заплутати два спіни на підпросторі $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$:

$$U_{ENT} = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

де $\phi \in [0, \pi]$. Якщо подіяти цим оператором на стан $|\uparrow\uparrow\rangle$, ми отримаємо стан, заплутаність якого залежить від ϕ: $\cos\phi|\uparrow\uparrow\rangle - \sin\phi|\downarrow\downarrow\rangle$. Щоб отримати умови, при яких можна згенерувати оператор U_{ENT}, потрібно (3.6) разом з (3.11), (3.22) і (3.31) підставити у рівняння (3.30). Тоді ми отримаємо систему рівняннь:

$$(\cos(\omega_I t) - \frac{i}{\omega_I}\sin(\omega_I t)\, h^+)e^{-iJ_{zz}t} = e^{i\chi}\cos\phi,$$

$$(\cos(\omega_I t) + \frac{i}{\omega_I}\sin(\omega_I t)\, h^+)e^{-iJ_{zz}t} = e^{i\chi}\cos\phi,$$

$$-\frac{i}{\omega_I}\sin(\omega_I t)\,(J^-_{Re}-iJ^+_{Im})e^{-iJ_{zz}t}=e^{i\chi}\sin\phi,$$

$$-\frac{i}{\omega_I}\sin(\omega_I t)\,(J^-_{Re}+iJ^+_{Im})e^{-iJ_{zz}t}=-e^{i\chi}\sin\phi,$$

$$(\cos(\omega_{II}t)-\frac{i}{\omega_{II}}\sin(\omega_{II}t)\,h^-)e^{iJ_{zz}t}=e^{i\chi},$$

$$(\cos(\omega_{II}t)+\frac{i}{\omega_{II}}\sin(\omega_{II}t)\,h^-)e^{iJ_{zz}t}=e^{i\chi},$$

$$-\frac{i}{\omega_{II}}\sin(\omega_{II}t)\,(J^+_{Re}+iJ^-_{Im})e^{iJ_{zz}t}=0,$$

$$-\frac{i}{\omega_{II}}\sin(\omega_{II}t)\,(J^+_{Re}-iJ^-_{Im})e^{iJ_{zz}t}=0.$$

Пам'ятаючи, що наша система обмежена енергетичною умовою (3.7) і, що U_{ENT} потрібно згенерувати за мінімальний час, ми приходимо до такого розв'язку цієї системи рівнянь:

$$J_{xx}=J_{yy}=J_{zz}=0,\quad J_{xy}=J_{yx}=-\frac{\omega}{2},$$

$$h^1_z=h^2_z=0,\quad t=\frac{\phi}{\omega},\quad \chi=2\pi p, \tag{3.32}$$

де p довільне ціле число. Порівнюючи $t=\frac{\phi}{\omega}$ з часом оптимальної еволюції (3.15), ми бачимо, що цей час є також мінімальним часом еволюції вздовж брахістохрони на підпросторі $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$, а зв'язок між параметрами ϕ і b є наступним $\phi=\arcsin|b|$. Іншими словами умови з (3.32) дозволяють згенерувати логічний оператор (3.31) за мінімальний час.

Покладаючи у вираз (3.31), що $\phi=\frac{\pi}{4}$ отримаємо унітарний оператор, який дозволяє отримати наступні Беллівські стани: $|\Phi^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle+|\downarrow\downarrow\rangle)$ зі стану $|\psi_I\rangle=|\downarrow\downarrow\rangle$ і $|\Phi^-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle-|\downarrow\downarrow\rangle)$ зі стану $|\uparrow\uparrow\rangle$, за час $t=\frac{\pi}{4\omega}$. Також, якщо в (3.31) покласти, що $\phi=\frac{\pi}{2}$, тоді ми

отримаємо оператор, який діє на базисні стани наступним чином

$$U_{ENT}(\frac{\pi}{2})|\uparrow\uparrow\rangle = -|\downarrow\downarrow\rangle,$$

$$U_{ENT}(\frac{\pi}{2})|\downarrow\downarrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle.$$

На відміну від системи, яку розглядають у роботі [87], гамільтоніан, який описує нашу систему (3.3) додатково містить J_{xy} і J_{yx} константи взаємодії, що дозволяє згенерувати U_{ENT} вздовж геодезичної на підпросторі $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$.

Тепер знайдімо умови для створення унітарного оператора, який буде заплутувати два спіни на підпросторі $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$. Цей оператор можна створити з U_{ENT} і U_{NOT} ($U_{NOT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) таким чином:

$$U_{\overline{ENT}} = U^1_{NOT} U_{ENT} U^1_{NOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3.33)$$

де $U^1_{NOT} = U_{NOT} \otimes I$. Якщо оператор (3.33) подіє на стан $|\uparrow\downarrow\rangle$, ми отримаємо наступний заплутаний стан: $\cos\phi|\uparrow\downarrow\rangle + \sin\phi|\downarrow\uparrow\rangle$. Подібно, як у попередньому випадку, унітарний оператор (3.6) прирівнюємо до (3.33) і, враховуючи (3.30), знаходимо оптимальні умови, при яких можна згенерувати це унітарне перетворення і час його генерування:

$$J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = 0, \quad J_{xy} = -J_{yx} = -\frac{\omega}{2},$$

$$h^1_z = h^2_z = 0, \quad t = \frac{\phi}{\omega}, \quad \chi = 2\pi p, \qquad (3.34)$$

де p довільне ціле число. Як можна побачити, час за який генерується $U_{\overline{ENT}}$ є мінімально можливим для нашої системи.

Якщо покласти $\phi = \frac{\pi}{4}$ у (3.33) і подіяти цим оператором на стан $|\uparrow\downarrow\rangle$ або $|\downarrow\uparrow\rangle$, ми отримаємо максимально заплутаний Беллівський стан $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$ або стан, який описує ЕПР пару $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ відповідно. Як і у попередньому випадку, якщо покласти в (3.33), $\phi = \frac{\pi}{2}$, тоді ми отримаємо оператор, який діє на базисні стани наступним чином

$$U_{\overline{ENT}}(\frac{\pi}{2})|\uparrow\downarrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle,$$

$$U_{\overline{ENT}}(\frac{\pi}{2})|\downarrow\uparrow\rangle = -|\uparrow\downarrow\rangle.$$

Наступним важливим двокубітовим логічним оператором, який можна досягнути на нашій системі, є SWAP

$$U_{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

який міняє стани двох кубітів місцями. Роблячи подібні кроки, як для попередніх квантових логічних елементів, отримуємо наступні умови:

$$J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = (-1)^p \frac{\omega}{\sqrt{6}}, \quad J_{xy} = J_{yx} = 0,$$

$$h_z^1 = h_z^2 = 0, \tag{3.36}$$

які потрібно накласти на нашу систему щоб приготувати оператор (3.35). Тут $\chi = -\frac{\pi}{4}(-1)^p$, де p – це довільне ціле число. Ці умови дозволяють приготувати U_{SWAP} за мінімальний час $t = \frac{\sqrt{6}\pi}{4\omega}$. Іншими словами, оператор еволюції, який згенерований на нашій системі з параметрами (3.36), дозволяє провести еволюцію між двома станами $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ за час $t = \frac{\sqrt{6}\pi}{4\omega}$. Так само, як і у статті [87], генерування оператора U_{SWAP} відбувається вздовж геодезичної на підпросторі, який задається наступними векторами $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$.

Подібно, як і у попередньому випадку, отримаємо умови, при яких можна згенерувати логічний елемент, що дозволяє перевести стан $|\uparrow\uparrow\rangle$ у стан $|\downarrow\downarrow\rangle$ і навпаки:

$$U_{\overline{SWAP}} = U^1_{NOT} U_{SWAP} U^1_{NOT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

Такий логічний оператор можна отримати, якщо на оператор еволюції (3.6) накласти наступні умови:

$$J_{xx} = -J_{yy} = -J_{zz} = (-1)^p \frac{\omega}{\sqrt{6}}, \quad J_{xy} = J_{yx} = 0,$$

$$h^1_z = h^2_z = 0. \tag{3.38}$$

Тут так само, як і для U_{SWAP} мінімальний час генерування $U_{\overline{SWAP}}$ є $t = \frac{\sqrt{6}\pi}{4\omega}$, а $\chi = -\frac{\pi}{4}(-1)^p$, де p – довільне ціле число. Генерування цього унітарного оператора відбувається вздовж геодезичної на підпросторі $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$.

Як останній приклад логічного оператора, який можна згенерувати на системі (3.3), буде оператор iSWAP:

$$U_{iSWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

Детальніше про цей логічний елемент можна прочитати у статті [160], де розглядається його реалізація на системі двох спінів, взаємодія між якими описується за допомогою XY гамільтоніану. Це унітарне перетворення можна отримати з оператора еволюції (3.6), якщо накласти

на нього наступні умови:

$$J_{xx} = J_{yy} = -\frac{\omega}{2}, \quad J_{zz} = J_{xy} = J_{yx} = 0,$$

$$h_z^1 = h_z^2 = 0. \tag{3.40}$$

Час за який генерується цей оператор є мінімальним часом еволюції $t = \frac{\pi}{2\omega}$, який можна досягнути на нашій системі на підпросторі, що задається векторами $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$. Ці умови зводять гамільтоніан (3.3) до гамільтоніану, який запропонований у роботі [160].

Також розглянемо подібний логічний оператор, який діє на підпросторі $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$:

$$U_{\overline{iSWAP}} = U_{NOT}^1 U_{iSWAP} U_{NOT}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Умови, при яких можна згенерувати $U_{\overline{iSWAP}}$ на нашій системі, мають вигляд:

$$J_{xx} = -J_{yy} = -\frac{\omega}{2}, \quad J_{zz} = J_{xy} = J_{yx} = 0,$$

$$h_z^1 = h_z^2 = 0, \tag{3.42}$$

а час генерування є наступним $t = \frac{\pi}{2\omega}$.

Як для оператора U_{iSWAP}, так і для оператора $U_{\overline{iSWAP}}$, фаза $\chi = 2\pi p$, де p є довільне ціле число.

3.5 Висновки

Ми розв'язали задачу про квантову брахістохрону для системи двох спінів 1/2, взаємодія між якими задається наступними константами

зв'язку: J_{ii} $(i = x, y, z)$, J_{jk} $(j \neq k = x, y)$. Кожен спін поміщений у зовнішнє магнітне поле, яке спрямовано вздовж осі z. Варто відзначити, що гамільтоніан такої системи (3.3) не містить доданків з $\sigma_1^x\sigma_2^z$, $\sigma_1^z\sigma_2^x$ і $\sigma_1^y\sigma_2^z$, $\sigma_1^z\sigma_2^y$, що забороняє такій системі еволюціонувати з підпростору, який задається базисними векторами $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ у підпростір з базисними векторами $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$, і навпаки. Це нам дозволило розглянути задачу про брахістохрону на цих підпросторах окремо.

Отже, було отримано мінімальний час (3.15) і умови (3.16), (3.24) для оптимальної еволюції на кожному з підпросторів відповідно. Також знайдено вигляд Гамільтоніанів (3.18) і (3.26), які забезпечують еволюцію по брахістохроні на підпросторах, що задаються векторами $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ і $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ відповідно. Ці підпростори є двовимірним і їх можна представити сферою Блоха (3.1). Найкоротший шлях переходу одного стану в інший є дуга великого кола, яка з'єднує два стани (геодезична на сфері). Для того, щоб забезпечити оптимальну еволюцію потрібно, щоб вісь, яка з'єднує власні стани системи знаходилась у перпендикулярному положенні до початкового і кінцевого стану.

Подібно до того, як було зроблено у роботі [87], нами було знайдено умови для реалізації деяких квантових логічних елементів. Наша квантова система є подібна до тої, яка досліджується у цій роботі, тільки відрізняється тим, що містить додатково J_{xy} і J_{yx} взаємодію. Авторами роботи [87] було отримано умови для оптимального генерування оператора SWAP, квантового перетворення Фур'є і оператора, який заплутує два спіни на підпросторі $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ (U_{ENT}). Як видно з їхньої роботи генерування логічного елементу U_{ENT} не відбувається за мінімальний час, який можна досягнути на цьому підпросторі. Ми показали, що даний логічний елемент можна згенерувати за мінімальний час, що забезпечується J_{xy} і J_{yx} взаємодією. Також ми розглянули

унітарне перетворення, яке заплутує два спіна на підпросторі $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$. Генерування таких логічних операторів є важливим тому, що вони дозволяють приготувати всі Беллівські стани.

Подібно, як в роботі [87], нами було отримано умови для створення квантового логічного оператора SWAP, а також унітарного перетворення $\overline{SWAP}$, яке переводить стан $|\uparrow\uparrow\rangle$ у стан $|\downarrow\downarrow\rangle$, і навпаки. Останні квантові логічні елементи, які ми розглянули як такі, що можна реалізувати на нашій системі це $iSWAP$ і $\overline{iSWAP}$. Ці елементи діють на базисні стани подібно до того, як попередні елементи і, крім того, домножують отримані стани на уявну одиницю.

Розділ 4

Приготування довільного квантового стану двох спінів 1/2 у вигляді розкладу Шмідта

4.1 Вступ

Для створення будівельних блоків квантового процесора (кубітів) необхідні системи, які є добре захищені від впливу середовища [105], що необхідно для забезпечення високого рівня когеренції квантових станів, створених на цих системах. Також, є важливим щоб ці стани можна було виміряти з високою точністю. Для прикладу, такими властивостями володіє така система як атом фосфору, який знаходиться в оточені атомів кремнію. Зацікавлення цією системою появилося після виходу у світ статті [14], де розглядається реалізація квантового комп'ютера на ядрах атома фосфору.

Система атома фосфору в оточені атомів кремнію має один валентний електрон і ядро зі спіном 1/2, що робить її двокубітовою системою (див. рис. 4.1). На сьогодні для такої системи, при температурах ~ 4 K, вдалося досягнути максимального часу когеренції для спіну електрона близько 2 с [122], а для спіну ядра близько 180 с [124]. У випадку йонізованого атома фосфору був досягнутий час когеренції спіну його ядра близько 39 хвилин при кімнатній температурі і

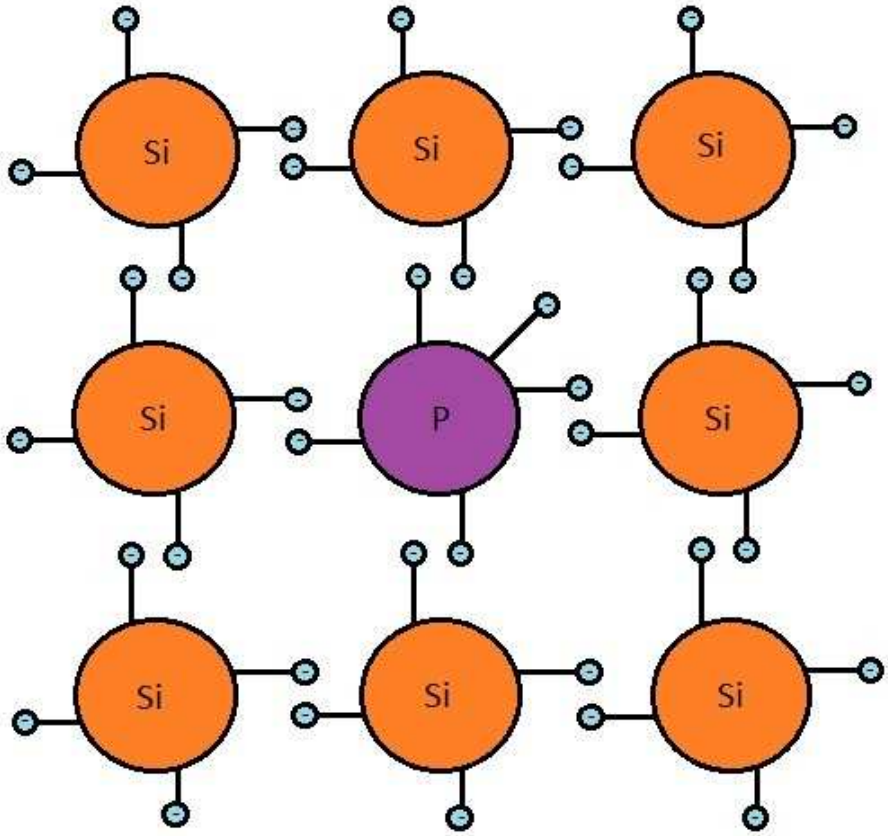

Рис. 4.1: Атом фосфору в оточені атомів кремнію.

близько 3-ох годин при температурі $4,2$ K [15]. Це вдалося зробити за рахунок додавання до системи домішки бору, який служить акцептором і перетягує на себе валентний електрон фосфору. Така система є добре ізольована від зовнішніх шумів, типу впливу електричного поля електродів і т. ін.

Крім досягнення достатньо великих часів когеренції спінів ядра і валентного електрона атома фосфору, також вдалося досягнути високої точності зчитування інформації про квантовий стан, який приготовлений на такій системі. Для прикладу, у роботі [16] було проведено вимір стану спіну ядра атома фосфору з точністю $99,8\%$, а в роботі [121] показано, що точність виміру стану спіна електрона перевищує

90%. Великий час когеренції і досягнення високої точності зчитування інформації про квантові стани, приготовлених на спінах електрона і ядра, дозволяють такій системі бути будівельним блоком для побудови твердотільних квантових комп'ютерів.

Крім атома фосфору у літературі розглядаються ще такі двоспінові квантові системи як атом бісмуту [161] чи атом водню [162], які знаходяться в оточені атомів кремнію. А саме, розглядається реалізація квантових бітів на таких системах.

Також цікаво знайти метод, який дозволив би досягнути довільного квантового стану на двокубітових системах, якщо керування здійснювати за допомогою магнітного поля. Така задача, наскільки нам відомо, досі у літературі не розглядалася. Мабуть це можна пояснити тим, що керувати спіновими системами за допомогою магнітного поля досить складно. Наприклад, поки що неможливо у випадку багатоспінових системах окремо діяти на кожен спін своїм полем, або доволі важко створити сильне постійне магнітне поле на достатньо короткий проміжок часу. Зауважимо, що у літературі [163, 164] розглянуто методи, які дозволяють приготувати довільний квантовий стан двох кубітів без застосування магнітного поля, але ці методи вимагають, щоб квантова система взаємодіяла з додатковими допоміжними кубітами.

4.2 Двокрокове приготування довільного квантового стану двох спінів $1/2$ у вигляді розкладу Шмідта

У цьому підрозділі буде розглянуто метод, який дозволяє приготувати довільний квантовий стан двох спінів, взаємодія між якими описується ізотропним гамільтоніаном Гайзенберґа. Цей метод складається з двох

кроків. Спочатку, за рахунок взаємодії між спінами, система еволюціонує певний проміжок часу t_1. Тоді, у момент часу t_1, прикладаємо окремо до кожного спіну імпульсне магнітне поле і отримаємо стан, який залежить від часу взаємодії між спінами і параметрів, які задають величини і напрямки магнітних полів. Розглянемо кожен крок детально.

Крок I Будемо вважати, що взаємодія між двома спінами задається ізотропним гамільтоніаном Гайзенберґа

$$H_I = \frac{A}{4}\left(\sum_{i=x,y,z} \sigma_i^1 \sigma_i^2 + 1\right), \tag{4.1}$$

де A є величиною взаємодії між спінами, $\sigma_i^1 = \sigma_i \otimes 1$, $\sigma_i^2 = 1 \otimes \sigma_i$ і σ_i – це матриці Паулі. Тут доданок $\frac{A}{4}$ зсуває початок відліку для енергетичних рівнів системи. Він є вибраний з міркувань зручності, що дозволяє спростити подальші обчислення. Ця система має один трикратно вироджений енергетичний рівень $\frac{A}{2}$ (триплет) з власними станами

$$|T_+\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \tag{4.2}$$

$$|T_-\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle, \tag{4.3}$$

$$|T_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right), \tag{4.4}$$

і рівень з енергією $-\frac{A}{2}$, який відповідає синглетному станові системи

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right). \tag{4.5}$$

Запишімо оператор еволюції для такої системи

$$U_I = e^{-iH_I t} = \cos\left(\frac{A}{2}t\right) - i\frac{2}{A}\sin\left(\frac{A}{2}t\right) H_I. \tag{4.6}$$

Тут ми використали той факт, що $H_I^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2$. Ми будемо працювати в одиницях, де $\hbar = 1$, а це означає, що параметр взаємодії A має

розмірність частоти. Зауважимо, що гамільтоніан (4.1) є частковим випадком гамільтоніану (3.3), який був розглянутий у попередньому розділі.

Тепер, знаючи оператор еволюції (4.6), можна розглянути еволюцію цієї системи. Будемо вважати, що система знаходиться у початковому стані, який має вигляд $|\uparrow\downarrow\rangle$. Цей стан легко приготувати, тому що він є власним станом системи двох спінів, які знаходяться у сильному магнітному полі, яке спрямоване вздовж осі z. Зауважимо, що ми не можемо вибрати початковий стан у вигляді $|\uparrow\uparrow\rangle$ чи $|\downarrow\downarrow\rangle$ тому, що ці стани є власними станами гамільтоніану (4.1). Таким чином, діючи оператором еволюції (4.6) на початковий стан системи протягом часу t_1, що відповідає взаємодії двох спінів протягом цього проміжку часу, отримаємо стан

$$|\psi_I\rangle = e^{-iH_I t_1}|\uparrow\downarrow\rangle = \cos\left(\frac{A}{2}t_1\right)|\uparrow\downarrow\rangle + \sin\left(\frac{A}{2}t_1\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}|\downarrow\uparrow\rangle. \quad (4.7)$$

Крок II. Стан (4.7) визначається одним вільним параметром t_1, а довільний квантовий стан двох кубітів повинен визначатися шістьма дійсними вільними параметрами. Тому подіємо індивідуально на кожен спін у момент часу t_1 імпульсним магнітним полем

$$H_{II} = \chi_1 \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{n}^1 \delta(t - t_1) + \chi_2 \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n}^2 \delta(t - t_1), \quad (4.8)$$

де $\delta(t-t_1)$ – це дельта-функція Дірака, $\mathbf{n}^i = (\sin\theta_i \cos\phi_i, \sin\theta_i \sin\phi_i, \cos\theta_i)$, сферичні кути ϕ_i і θ_i визначають напрямок магнітного поля для першого ($i = 1$) і другого ($i = 2$) спінів відповідно. Дельта-функція дозволяє нам знехтувати взаємодією між спінами під час дії поля. Справді, розглянемо, на достатньо короткому проміжку часу $[t_1, t_1 + \tau]$, оператор еволюції для системи двох взаємодіючих спінів, які контролюються магнітним полем (4.8)

$$U_{II} = \exp\left[-i\int_{t_1}^{t_1+\tau}\left(\frac{A}{4}\left(\sum_{i=x,y,z}\sigma_i^1\sigma_i^2 + 1\right) + \left(\chi_1\boldsymbol{\sigma}^1\cdot\mathbf{n}^1 + \chi_2\boldsymbol{\sigma}^2\cdot\mathbf{n}^2\right)\delta(t-t_1)\right)dt\right]$$

$$= \exp\left[-i\left(\frac{A}{4}\left(\sum_{i=x,y,z}\sigma_i^1\sigma_i^2+1\right)\tau+\chi_1\boldsymbol{\sigma}^1\cdot\mathbf{n}^1+\chi_2\boldsymbol{\sigma}^2\cdot\mathbf{n}^2\right)\right].$$

Тепер, період τ спрямуємо до нуля $\tau\to 0$, тоді оператор еволюції U_{II} прийме вигляд:

$$U_{II} = e^{-i\left(\chi_1\boldsymbol{\sigma}^1\cdot\mathbf{n}^1+\chi_2\boldsymbol{\sigma}^2\cdot\mathbf{n}^2\right)}$$

$$= \left(\cos\chi_1 - i\sin\chi_1\boldsymbol{\sigma}^1\cdot\mathbf{n}^1\right)\left(\cos\chi_2 - i\sin\chi_2\boldsymbol{\sigma}^2\cdot\mathbf{n}^2\right). \qquad (4.9)$$

При виведені цього виразу ми скористалися фактом, що оператори $\boldsymbol{\sigma}^1\cdot\mathbf{n}^1$ і $\boldsymbol{\sigma}^2\cdot\mathbf{n}^2$ комутують між собою, а $\left(\boldsymbol{\sigma}^i\cdot\mathbf{n}^i\right)^2 = 1$. Перший і другий множники у виразі (4.9) описують квантову еволюцію першого і другого спінів під дією імпульсного магнітного поля відповідно.

Остаточно, якщо оператором U_{II} (4.9) подіяти на стан $|\psi_I\rangle$ (4.7), то отримаємо наступний квантовий стан двох кубітів:

$$|\psi\rangle = U_{II}|\psi_I\rangle = \cos\left(\frac{A}{2}t_1\right)$$

$$\times\left[\left(\cos\chi_1 - i\sin\chi_1\cos\theta_1\right)|\uparrow\rangle + \sin\chi_1\sin\theta_1 e^{i\left(\phi_1-\frac{\pi}{2}\right)}|\downarrow\rangle\right]$$

$$\times\left[\sin\chi_2\sin\theta_2 e^{-i\left(\phi_2+\frac{\pi}{2}\right)}|\uparrow\rangle + \left(\cos\chi_2 + i\sin\chi_2\cos\theta_2\right)|\downarrow\rangle\right]$$

$$+\sin\left(\frac{A}{2}t_1\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\times\left[\sin\chi_1\sin\theta_1 e^{-i\left(\phi_1+\frac{\pi}{2}\right)}|\uparrow\rangle + \left(\cos\chi_1 + i\sin\chi_1\cos\theta_1\right)|\downarrow\rangle\right]$$

$$\times\left[\left(\cos\chi_2 - i\sin\chi_2\cos\theta_2\right)|\uparrow\rangle + \sin\chi_2\sin\theta_2 e^{i\left(\phi_2-\frac{\pi}{2}\right)}|\downarrow\rangle\right]. \qquad (4.10)$$

Цей стан визначається сімома дійсними параметрами, але насправді один параметр є довільною фазою і може бути опущеним. Таким чином, стан (4.10) містить шість незалежних дійсних параметрів. Тобто для кожного наперед заданого стану двох кубітів існує свій набір із шести параметрів.

Бачимо, що стан (4.10) має вигляд розкладу Шмідта

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1,2} c_i |\alpha_i\rangle |\beta_i\rangle, \tag{4.11}$$

де одночастинкові стани $|\alpha_i\rangle$ відносяться до першого спіну

$$|\alpha_1\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \alpha'|\downarrow\rangle, \quad |\alpha_2\rangle = e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(-\alpha'^*|\uparrow\rangle + \alpha^*|\downarrow\rangle\right), \tag{4.12}$$

а $|\beta_i\rangle$ – до другого

$$|\beta_1\rangle = \beta|\uparrow\rangle + \beta'|\downarrow\rangle, \quad |\beta_2\rangle = e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(\beta'^*|\uparrow\rangle - \beta^*|\downarrow\rangle\right). \tag{4.13}$$

Тут ми ввели наступні позначення:

$$c_1 = \cos\left(\frac{A}{2}t_1\right), \quad c_2 = \sin\left(\frac{A}{2}t_1\right), \tag{4.14}$$

$$\alpha = \cos\chi_1 - i\sin\chi_1\cos\theta_1 = |\alpha|e^{-i\gamma}, \quad \alpha' = \sin\chi_1\sin\theta_1 e^{i\left(\phi_1 - \frac{\pi}{2}\right)}, \tag{4.15}$$

$$\beta = \sin\chi_2\sin\theta_2 e^{-i\left(\phi_2 + \frac{\pi}{2}\right)}, \quad \beta' = \cos\chi_2 + i\sin\chi_2\cos\theta_2 = |\beta'|e^{i\eta}, \tag{4.16}$$

де

$$|\alpha| = \sqrt{\cos^2\chi_1 + \sin^2\chi_1\cos^2\theta_1}, \quad \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\chi_1\cos\theta_1, \tag{4.17}$$

$$|\beta'| = \sqrt{\cos^2\chi_2 + \sin^2\chi_2\cos^2\theta_2}, \quad \mathrm{tg}\eta = \mathrm{tg}\chi_2\cos\theta_2. \tag{4.18}$$

Звернемо увагу на те, що вектори, які відносяться до того самого спіну є ортогональними між собою

$$\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \langle\beta_i|\beta_j\rangle = \delta_{ij}, \tag{4.19}$$

а умова нормування для стану (4.11) запишеться у вигляді

$$c_1{}^2 + c_2{}^2 = 1. \tag{4.20}$$

Одночастинкові стани $|\alpha_1\rangle$ і $|\alpha_2\rangle$ (4.12) визначаються трьома дійсними незалежними параметрами $|\alpha|$, γ і ϕ_1. Пам'ятаємо, що α і α'

пов'язані між собою умовою $|\alpha|^2 + |\alpha'|^2 = 1$. Легко бачити, що незалежно від інших параметрів, параметр ϕ_1 приймає будь-яке значення з проміжку $[0, 2\pi]$. Покажемо, що параметри $|\alpha|$ і γ є незалежними між собою. З другого рівняння у (4.15) і (4.17) ми отримаємо

$$\mathrm{tg}\gamma = \sqrt{1 - \frac{|\alpha'|^2}{\sin^2 \chi_1}}\mathrm{tg}\chi_1. \tag{4.21}$$

Для того щоб це рівняння задовільнялося необхідно щоб $\sin^2 \chi_1 \geq |\alpha'|^2$. Із (4.21) випливає, що γ приймає значення $-\infty < \mathrm{tg}\gamma < +\infty$ незалежно від $|\alpha'|$. Це доводить, що ці параметри є незалежними між собою. Подібну ситуацію будемо мати у випадку $|\beta_1\rangle$ і $|\beta_2\rangle$ (4.13), де також всі три параметри $|\beta|$, η і ϕ_2, які визначають ці стани, є незалежними між собою.

Приклад. Знайдімо умови, які дозволяють приготувати стан (4.4), що є власним станом гамільтоніану (4.1). Цей стан є цікавим тим, що він має максимальну заплутаність. Він є одним з Беллівських станів. Щоб знайти умови, які дозволяють створити його на нашій системі, прирівняємо вираз (4.10) до стану (4.4), що приведе до наступного набору параметрів:

1. $A > 0$, $t_1 = \frac{\pi}{2A}$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ і $\chi_1 - \chi_2 = \frac{\pi}{4}$

чи

2. $A < 0$, $t_1 = \frac{\pi}{2|A|}$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ і $\chi_1 - \chi_2 = -\frac{\pi}{4}$.

Якщо накласти ці умови на нашу систему, то з початкового стану $|\uparrow\downarrow\rangle$ отримаємо стан (4.4). Тепер покроково розглянемо, які процедури над системою двох взаємодіючих спінів необхідно зробити, щоб приготувати цей стан.

Отже, спочатку дозволяємо двом спінам провзаємодіяти між собою протягом часу $t_1 = \frac{\pi}{2|A|}$ і таким чином із початкового стану $|\uparrow\downarrow\rangle$ ми отримаємо наступний стан $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - i|\downarrow\uparrow\rangle)$, якшо $A > 0$ або

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + i|\downarrow\uparrow\rangle)$ при $A < 0$. Тоді, на другому кроці, у момент часу t_1 до кожного спіну прикладаємо своє імпульсне магнітне поле, яке спрямовуємо вздовж осі z ($\theta_1 = \theta_2 = 0$). Різниця величин полів повинна бути наступною $\chi_1 - \chi_2 = \frac{\pi}{4}$ у разі, коли $A > 0$ або $\chi_1 - \chi_2 = -\frac{\pi}{4}$, коли $A < 0$. Отриманий стан буде станом (4.4) з точністю до фази $-\frac{\pi}{4}$ для $A > 0$ і $\frac{\pi}{4}$ для $A < 0$.

4.3 Приготування квантового стану двох спінів $1/2$ на фізичних системах

Сучасна експериментальна техніка, поки що, не дозволяє керувати кожним спіном окремо за допомогою імпульсного магнітного поля, як це описано на другому кроці нашого методу у попередньому підрозділі. Тому ми пропонуємо розглянути простішу версію цього методу, яка є застосовною до такої фізичної системи як атом, що містить ядро зі спіном $I = 1/2$ і один валентний електрон (спін $S = 1/2$). Варто зауважити, що магнітні поля, які на даний час використовують для контролю спіну електрону є порядку мТл [165]. Іншими словами, величина взаємодії між спіном електрону і магнітним полем є порядку величини надтонкої структури A у таких атомах. Таким чином, ми не можемо знехтувати взаємодією між спінами під час дії магнітного поля на систему. Це означає, що перший і другий крок із методу, який описаний у підрозділі 4.2, об'єднуються у один, а магнітне поле буде спільне для спінів ядра і електрону. Гамільтоніан, який описує таку систему буде містити компоненту, яка описує взаємодію системи із зовнішнім полем, а також доданок, який задає взаємодію між спінами ядра і валентного електрону

$$H = \gamma_e B\mathbf{S}\cdot\mathbf{n} - \gamma_n B\mathbf{I}\cdot\mathbf{n} + A\mathbf{S}\cdot\mathbf{I}, \tag{4.22}$$

де B – це напруженість магнітного поля, $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ задає напрямок цього поля, θ і ϕ є сферичними кутами, γ_e (γ_n) є гіромагнітним співвідношенням електрона (ядра). Гамільтоніан (4.22) не дозволяє нам приготувати довільного квантового стану двох спінів, тому що він не містить достатньої кількості параметрів. Зауважимо, що ми не беремо до уваги ефектів, які руйнували б структуру п-подібного імпульсу магнітного поля.

Скориставшись тим, що взаємодія між спінами ядра і електрона є ізотропною, легко записуємо гамільтоніан (4.22) у базисі $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$, $|--\rangle$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_e B}{2} - \frac{\gamma_n B}{2} + \frac{A}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_e B}{2} + \frac{\gamma_n B}{2} - \frac{A}{4} & \frac{A}{2} & 0 \\ 0 & \frac{A}{2} & -\frac{\gamma_e B}{2} - \frac{\gamma_n B}{2} - \frac{A}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma_e B}{2} + \frac{\gamma_n B}{2} + \frac{A}{4} \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

що нам дозволяє легко почислити його власні значення

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\gamma_e B}{2} - \frac{\gamma_n B}{2} + \frac{A}{4}, \\ E_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma_e B + \gamma_n B)^2 + A^2} - \frac{A}{4}, \\ E_3 &= -\frac{1}{2}\sqrt{(\gamma_e B + \gamma_n B)^2 + A^2} - \frac{A}{4}, \\ E_4 &= -\frac{\gamma_e B}{2} + \frac{\gamma_n B}{2} + \frac{A}{4}, \end{aligned} \tag{4.24}$$

які відповідають наступним власним функціям

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |++\rangle, \\ |\psi_2\rangle &= \cos\frac{\eta}{2}|+-\rangle + \sin\frac{\eta}{2}|-+\rangle, \end{aligned}$$

$$|\psi_3\rangle = -\sin\frac{\eta}{2}|+-\rangle + \cos\frac{\eta}{2}|-+\rangle,$$

$$|\psi_4\rangle = |--\rangle. \tag{4.25}$$

Тут стани

$$|+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|\downarrow\rangle,$$

$$|-\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + \cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|\downarrow\rangle$$

є власними станами оператора проекції спіну $1/2$ на напрямок $\mathbf{n}$ з відповідними власними значеннями $1/2$ і $-1/2$, а $\mathrm{tg}\eta = \frac{A}{\gamma_e B+\gamma_n B}$, де η є кутом між напрямком зовнішнього магнітного поля і віссю навколо, якої відбувається прецесія квантового стану системи [166]. Лівий (правий) кет вектор задає стан спіну електрона (ядра).

Для того, щоб спростити розрахунок оператора еволюції, початковий стан задамо у вигляді $|+-\rangle$, а магнітне поле спрямуємо вздовж осі z. Такий стан можна створити, якщо помістити нашу систему у сильне магнітне поле ($B \gg A$), яке спрямоване вздовж напрямку $\mathbf{n}$. Тоді власні вектори і власні значення такої системи запишуться у вигляді

$$\begin{aligned}
|++\rangle: &\quad \frac{\gamma_e B}{2} - \frac{\gamma_n B}{2} + \frac{A}{4},\\
|+-\rangle: &\quad \frac{\gamma_e B}{2} + \frac{\gamma_n B}{2} - \frac{A}{4},\\
|-+\rangle: &\quad -\frac{\gamma_e B}{2} - \frac{\gamma_n B}{2} - \frac{A}{4},\\
|--\rangle: &\quad -\frac{\gamma_e B}{2} + \frac{\gamma_n B}{2} + \frac{A}{4}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Це тому що $\cos\frac{\eta}{2} \simeq 1$ і $\sin\frac{\eta}{2} \simeq 0$ [16,120,167]. Технологія, яка базується на спін-електронному резонансі дозволяє легко приготувати факторизований початковий стан $|+-\rangle$ подібно, як це зроблено у статті [16]. У

наступному підрозділі ми детальніше опишемо створення початкового стану для системи атома фосфору в оточені атомів кремнію.

Розрахуємо оператор еволюції з гамільтоніаном (4.22), пам'ятаючи, що магнітне поле спрямоване вздовж осі z. Для того перепишімо цей гамільтоніан у наступному вигляді

$$H = H_{xy} + H_{zz} + H_{+}, \tag{4.27}$$

де

$$H_{xy} = \omega_{-} \left(S_z - I_z\right) + A \left(S_x I_x + S_y I_y\right), \tag{4.28}$$

$$H_{zz} = A S_z I_z, \tag{4.29}$$

$$H_{+} = \omega_{+} \left(S_z + I_z\right). \tag{4.30}$$

Тут введено позначення $\omega_{-} = \frac{\gamma_e B_z + \gamma_n B_z}{2}$ і $\omega_{+} = \frac{\gamma_e B_z - \gamma_n B_z}{2}$. Ми записали цей гамільтоніан у такому вигляді, тому що оператори H_{xy}, H_{+} і H_{zz} комутують між собою, що є зручним для розрахунку оператора еволюції. Варто зазначити, що у базисі $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ цей гамільтоніан буде мати вигляд (4.23), тільки замість B буде B_z. Беручи до уваги все вище сказане, запишімо оператор еволюції з гамільтоніаном (4.27)

$$U(t) = e^{-iH_{xy}t} e^{-iH_{zz}t} e^{-iH_{+}t}, \tag{4.31}$$

де

$$e^{-iH_{xy}t} = 1 + \left(\cos\left(\Omega t\right) - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2S_z I_z\right) - i\frac{\sin\left(\Omega t\right)}{\Omega} H_{xy}, \tag{4.32}$$

$$e^{-iH_{zz}t} = \cos\left(\frac{A}{4}t\right) - i\frac{4\sin\left(\frac{A}{4}t\right)}{A} H_{zz}, \tag{4.33}$$

$$e^{-iH_{+}t} = 1 + \left(\cos\left(\omega_{+}t\right) - 1\right)\left(\frac{1}{2} + 2S_z I_z\right) - i\frac{\sin\left(\omega_{+}t\right)}{\omega_{+}} H_{+}. \tag{4.34}$$

Тут використані наступні властивості операторів (4.28), (4.29) і (4.30):

$$H_{xy}^{2n} = \Omega^{2n}\left(\frac{1}{2} - 2S_zI_z\right), \quad H_{xy}^{2n+1} = \Omega^{2n}H_{xy}, \quad H_{zz}^2 = \left(\frac{A}{4}\right)^2,$$

$$H_{+}^{2n} = \omega_{+}^{2n}\left(\frac{1}{2} + 2S_zI_z\right), \quad H_{+}^{2n+1} = \omega_{+}^{2n}H_{+},$$

де $\Omega = \sqrt{{\omega_-}^2 + \left(\frac{A}{2}\right)^2}$ і $n = 1, 2, 3, \ldots$ У базисі $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ і $|\downarrow\downarrow\rangle$, оператор еволюції $U(t)$ можна записати наступним чином:

$$U(t) = U_1U_2, \tag{4.35}$$

де

$$U_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\left(\omega_+ + \frac{A}{4}\right)t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\left(\omega_+ - \frac{A}{4}\right)t} \end{pmatrix}, \tag{4.36}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\cos(\Omega t) - i\frac{\omega_-}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)e^{i\frac{A}{4}t} & -i\frac{A}{2\Omega}\sin(\Omega t)\,e^{i\frac{A}{4}t} & 0 \\ 0 & -i\frac{A}{2\Omega}\sin(\Omega t)\,e^{i\frac{A}{4}t} & \left(\cos(\Omega t) + i\frac{\omega_-}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)e^{i\frac{A}{4}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.37}$$

Використовуючи вираз (4.31) разом з виразами (4.32)–(4.34), отримаємо стан, який можна досягнути під час еволюції системи протягом проміжку часу t, якщо в початковий момент часу остання перебувала в стані $|+-\rangle$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = U(t)|+-\rangle &= e^{-i\omega_+t}e^{-i\frac{A}{4}t}e^{i\pi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\uparrow\rangle \\ &+ e^{i\frac{A}{4}t}e^{i\phi}\left[\cos^2\frac{\theta}{2}\cos(\Omega t) + i\left(\frac{A}{2\Omega}\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{\omega_-}{\Omega}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\sin(\Omega t)\right]|\uparrow\downarrow\rangle \\ &+ e^{i\frac{A}{4}t}e^{i\phi}e^{i\pi}\left[\sin^2\frac{\theta}{2}\cos(\Omega t) + i\left(\frac{A}{2\Omega}\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{\omega_-}{\Omega}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\sin(\Omega t)\right]|\downarrow\uparrow\rangle \\ &+ e^{i\omega_+t}e^{-i\frac{A}{4}t}e^{2i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\downarrow\rangle. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Звідси легко бачити, що при $\theta = 0$ ми можемо досягнути довільний квантовий стан на підпросторі, який задається векторами $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$

$$|\psi\rangle = \left(\cos(\Omega t) - i\frac{\omega_-}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)|\uparrow\downarrow\rangle + \frac{A}{2\Omega}\sin(\Omega t)\, e^{-i\frac{\pi}{2}}|\downarrow\uparrow\rangle. \quad (4.39)$$

Іншими словами, цей стан може бути досягнутий, якщо розпочати еволюцію зі стану $|\uparrow\downarrow\rangle$.

Тепер знайдімо умови, при яких можна досягнути максимально заплутаного стану

$$|\psi_{\text{ENT}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + e^{i\chi}|\downarrow\uparrow\rangle\right), \quad (4.40)$$

де χ є довільною фазою. Ці умови отримуються, якщо прирівняти вирази (4.39) і (4.40) між собою. Вони мають наступний вигляд

$$\cot\chi = -\frac{\omega_-}{\sqrt{\Omega^2 - 2\omega_-^2}}, \quad \text{tg}^2(\Omega t) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - 2\omega_-^2}. \quad (4.41)$$

Тут перша умова визначає параметр χ, а друга множник $1/\sqrt{2}$ у стані (4.40). З першого рівняння у (4.41) знаходимо величину магнітного поля

$$B_z = \frac{A\cos\chi}{\gamma_e + \gamma_n}, \quad (4.42)$$

яке необхідно прикласти до системи, щоб досягнути максимально заплутаного стану (4.40) за проміжок часу

$$t = \frac{2}{A\sqrt{1+\cos^2\chi}}\text{arctg}\sqrt{1+2\cot^2\chi}, \quad (4.43)$$

який визначаємо з другого рівняння у (4.41).

4.4 Приготування квантового стану на системі атома фосфору в оточенні атомів кремнію

Спінова система атома фосфору в оточені атомів кремнію складається зі спіну ядра $I = 1/2$ і спіну валентного електрону. Це завдяки

тому, що чотири електрони п'ятивалентного атома фосфору створюють ковалентні зв'язки з електронами чотирьох атомів кремнію так, як це показано на рис. 4.1. Тому таку систему можна розглядати як двокубітову, для якої взаємодія між спінами ядра і електрона (надтонка структура) є порядку $A = 117.53$ МГц [168], а взаємодія спінів ядра і електрона з магнітним полем є пропорційна до гіромагнітних співвідношень останніх: $\gamma_n = 17.23$ МГц Тл$^{-1}$ [169] і $\gamma_e = 27.97$ ГГц Тл$^{-1}$. Великий час когеренції [15, 122, 124] і висока точність зчитування інформації про квантові стани цієї системи [16, 121] дозволяє нам успішно керувати нею [120].

Знайдімо, для прикладу, умови, при яких можна приготувати стан $|T_0\rangle$ (4.4), який є власним станом нашої системи. Цей стан належить до підпростору, який задається векторами $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$, а це означає, як ми показали у попередньому підрозділі 4.3, що початковий стан потрібно вибрати у вигляді $|\uparrow\downarrow\rangle$. Більше того, стан $|T_0\rangle$ є максимально заплутаним, тому умови для його приготування отримуємо, якщо у рівняння (4.42) і (4.43) покладемо, що $\chi = 0$ і $A = 117.53$ МГц. Тоді отримаємо $B_z = \frac{A}{\gamma_e+\gamma_n} \simeq 4.2$ мТл, $t = \frac{\pi}{\sqrt{2}A} \simeq 19$ нс. Отже, щоб досягнути стан $|T_0\rangle$, необхідно нашу систему, яка знаходиться в стані $|\uparrow\downarrow\rangle$ помістити у магнітне поле величиною $B_z \simeq 4.2$ мТл на час $t \simeq 19$ нс. Період часу, протягом якого відбувається еволюція, є набагато коротший, ніж час когеренції, що рівний 2 с для спіну електрона в атомі фосфору [122]. Еволюція такої системи буде відбуватися на підпросторі, який задається векторами $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$. Такий підпростір можна зобразити за допомогою сфери Блоха (рис. 4.2). Тоді еволюція стану системи буде відбуватися навколо осі, яка лежить між початковим і кінцевим станами під кутом $\eta = \pi/4$ до осі z. Варто зазначити, що короткоперіодичні імпульси магнітного поля широко використовуються в різних областях

науки [170–172].

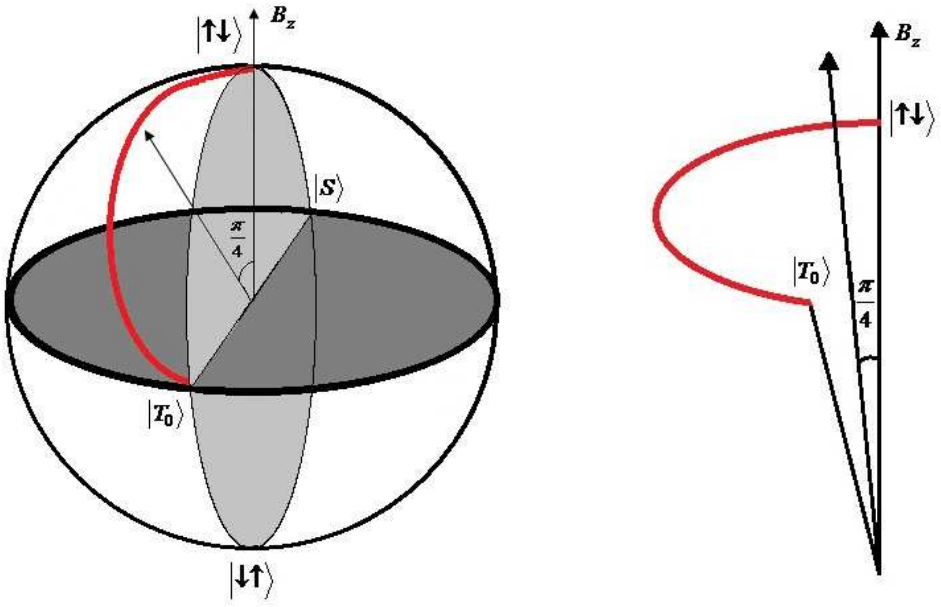

Рис. 4.2: Еволюція системи (червона дуга кола) між станами $|\uparrow\downarrow\rangle$ і $|T_0\rangle$ відбувається тоді, коли вісь, навколо якої стан прецесує, лежить під кутом $\eta = \pi/4$ до осі z, а це досягається при величині магнітного поля $B_z = \frac{A}{\gamma_e+\gamma_n} \simeq 4.2$ мТл.

У попередньому підрозділі було згадано, що початковий стан $|\uparrow\downarrow\rangle$ є власним станом системи двох спінів, поміщеної у сильне магнітне поле $B \gg A$, яке спрямоване вздовж осі z (4.26). Енергетичні рівні двоспінової системи атома фосфору в оточені атомів кремнію, які знаходиться у сильному магнітному полі зображені на рис. 4.3. Приклад створення стану $|\uparrow\downarrow\rangle$ за допомогою спін-електронного резонансу можна знайти у роботі [16]. Вимірювання стану на такій системі проводиться на двох частотах $\nu_{e1} \approx \gamma_e B - A/2$ і $\nu_{e2} \approx \gamma_e B + A/2$. Частота ν_{e1} відповідає переходу між станами $|\downarrow\downarrow\rangle$ і $|\uparrow\downarrow\rangle$, а частота ν_{e2} – між станами $|\downarrow\uparrow\rangle$ і $|\uparrow\uparrow\rangle$. Наприклад, якщо система перебуває у стані $|\downarrow\downarrow\rangle$, то її можна перевести у стан $|\uparrow\downarrow\rangle$, використовуючи електромагнітний імпульс із частотою ν_{e1}.

На завершення обчислимо точність, із якою можна отримати кван-

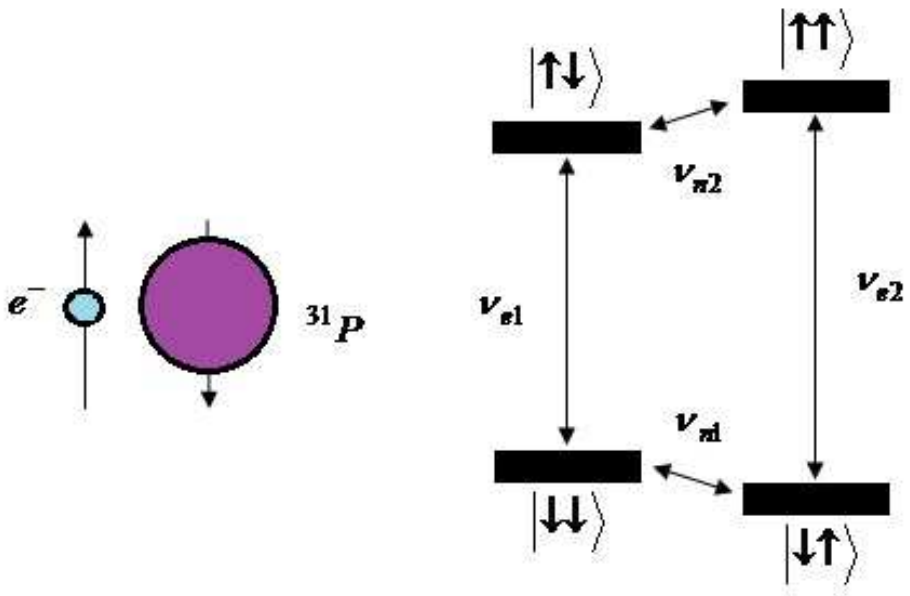

Рис. 4.3: Енергетичні рівні двоспінової системи атома фосфору в оточені атомів кремнію, яка знаходиться у сильному магнітному полі $B_z \gg A$.

товий логічний елемент, що дозволяє отримати стан $|T_0\rangle$, діючи на стан $|\uparrow\downarrow\rangle$. Ці обчислення можуть бути корисними для експериментальної реалізації вищезгаданої схеми. Отже, точність отримання логічного елементу W на квантовій системі, що має N енергетичних рівнів задається наступною функцією [173]

$$F(U(t)) = \frac{1}{N}\,\mathrm{Re}(Tr[W^+U(t)]). \tag{4.44}$$

Оператор W отримується, якщо на оператор еволюції (4.31) накласти наступні умови: $B_z = \frac{A}{\gamma_e+\gamma_n}$ і $t = \frac{\pi}{\sqrt{2}A}$. Використовуючи (4.35) разом з (4.36) і (4.37), запишімо W у матричному представлені:

$$W = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\gamma_e-\gamma_n}{\gamma_e+\gamma_n}+\frac{1}{2}\right)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4\sqrt{2}}} & -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4\sqrt{2}}} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4\sqrt{2}}} & \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4\sqrt{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\gamma_e-\gamma_n}{\gamma_e+\gamma_n}-\frac{1}{2}\right)} \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

Тепер, якщо (4.35) разом із (4.45) підставити у (4.44), і пам'ятаючи,

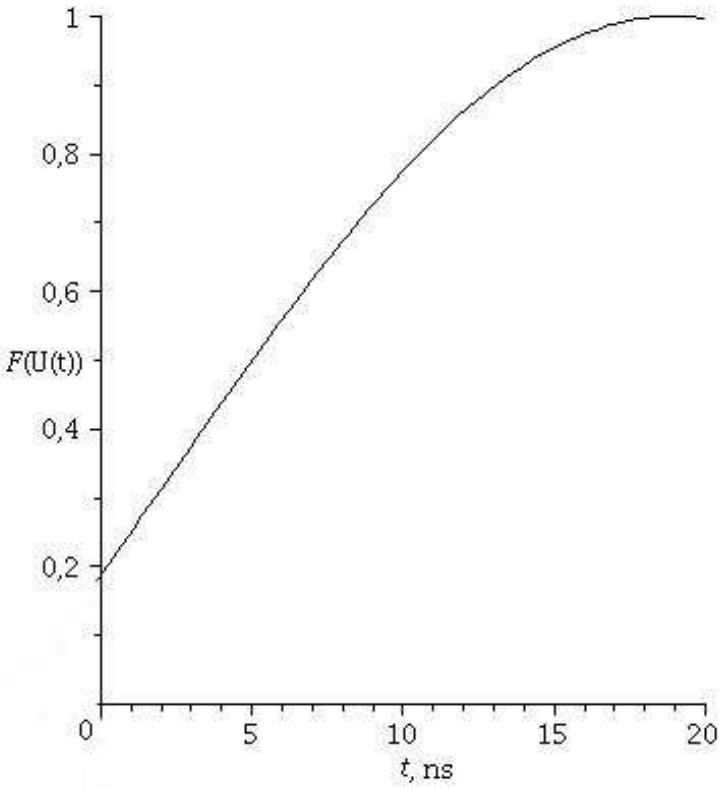

Рис. 4.4: Точність отримання квантового логічного елементу W (4.45) із оператора еволюції $U(t)$.

що $N = 4$, отримаємо вираз, який показує, з якою точністю можна досягнути оператор W із оператора еволюції $U(t)$

$$F(U(t)) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{A}{4}t - \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)$$
$$\times\left(\cos\left(\frac{\gamma_e - \gamma_n}{\gamma_e + \gamma_n}\left(\frac{At}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)\right) + \sin\left(\frac{A}{\sqrt{2}}t\right)\right). \qquad (4.46)$$

Як видно з рис. 4.4 точність отримання логічного елементу W прямує до одиниці зі збільшенням t. На мові постулату про вимірювання це означає, що чим $U(t)$ є ближчий до W, тим більша імовірність під час вимірювання отримати стан $|T_0\rangle$.

4.5 Висновки

У цьому розділі представлено двокроковий метод, який дозволяє приготувати довільний квантовий стан двох кубітів. На першому кроці квантова система двох спінів, взаємодія між якими описується ізотропним гамільтоніаном Гайзенберґа, еволюціонує зі стану $|\uparrow\downarrow\rangle$ протягом періоду часу t_1. Важливо зазначити, що у випадку, якщо початковий стан має вигляд $|\uparrow\uparrow\rangle$ і $|\downarrow\downarrow\rangle$ еволюція не буде відбуватися, тому що ці стани є власними станами системи. На другому кроці у момент часу t_1 індивідуально до кожного спіну ми прикладаємо імпульсне магнітне поле (4.8). Отриманий стан (4.10) природнім чином постає у вигляді розкладу Шмідта (4.11) і задається шістьма незалежними параметрами, а саме: періодом еволюції t_1 і величинами, що задають магнітні поля для першого і другого спіну. Для кожного конкретного стану двох кубітів існує визначений набір цих параметрів. Сучасна експериментальна техніка не дозволяє індивідуально керувати кожним спіном за допомогою імпульсного магнітного поля. Ми сподіваємося, що запропонований метод можна буде реалізувати у майбутньому. Проте, нами було запропоновано простішу версію цього методу, яка на даний час є застосовною до фізичних систем. Сучасні технології дозволяють контролювати еволюцію спінів, використовуючи магнітне поле так, щоб енергія взаємодії поля зі спіном $B\gamma_s$ була порядку 10^3 МГц (де γ_s – це гіромагнітне співвідношення для спіну) (для прикладу, див. [165]), що є порядку величини взаємодії між спінами у системі атома, який складається із ядра зі спіном $I = 1/2$ і одного валентного електрона. Тому ми розглянули еволюцію такої системи, поміщеної у зовнішнє магнітне поле, що спрямоване вздовж визначеного напрямку. Еволюція даної системи буде визначатися чотирма параметрами, такими як: пе-

ріод еволюції, величина магнітного поля і двома кутами, які задають напрямок поля. Через недостатню кількість параметрів цей підхід не дозволяє приготувати довільного квантового стану двох спінів. Проте він дозволяє створити довільний квантовий стан на підпросторі, який задається векторами $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ (4.39).

Також було знайдено умови для створення стану $|T_0\rangle$ (4.4) на системі атому ^{31}P, який знаходиться в оточені атомів кремнію. Ми показали, що такий стан можна досягнути із початкового стану $|\uparrow\downarrow\rangle$, якщо помістити цю систему на 19 нс у зовнішнє магнітне поле величиною 4.2 мТл і спрямувати його вздовж осі z.

Розділ 5

Квантова еволюція на торі для двох спінів з ізотропною взаємодією Гайзенберґа

5.1 Вступ

Відомо, що квантова механіка може формулюватися мовою геометрії [174–176]. Ця ідея не є якоюсь надзвичайною чи новою. Геометричні методи успішно застосовуються до розгляду еволюції квантових систем. Для прикладу, використовуючи симетричні властивості простору квантових станів, була розв'язана задача про квантову брахістохрону [8].

Щоб зрозуміти як відбувається динаміка квантової системи, корисно дослідити многовид, на якому відбувається ця еволюція. Часто це дозволяє спростити картину еволюції квантової системи. Інформація про геометрію такого многовиду дозволяє знайти оптимальний шлях еволюції. Для прикладу, повний простір дворівневої системи (кубіта) можна представити за допомогою сфери Блоха. Тоді еволюція між двома станами відбувається вздовж кривої між двома точками на цій сфері (для прикладу, див. [84, 177]). Найкоротший шлях буде відповідати дузі великого кола, яке проходить через ці дві точки, що дозволяє легко отримати умови, які потрібно накласти на систему щоб забезпе-

чити її еволюцію за мінімальний час.

Ніде у літературі не описана геометрія многовиду, на якому відбувається квантова еволюція стану двох взаємодіючих спінів, що знаходяться у магнітному полі. У попередніх розділах була описана реалізація певних квантових обчислень на системі двох взаємодіючих спінів у магнітному полі. Цікаво і важливо є дослідити геометрію многовиду, на якому відбувається еволюція такої системи.

5.2 Квантова еволюція двох спінів

Розглянемо систему двох спінів з ізотропною взаємодією Гайзенберґа, що знаходиться у магнітному полі, яке спрямоване вздовж осі z. Гамільтоніан цієї системи є наступним

$$H = H_{int} + H_{mf}, \tag{5.1}$$

де

$$H_{int} = J\left(\sum_{i=x,y,z} \sigma_i^1 \sigma_i^2 + 1\right), \tag{5.2}$$

$$H_{mf} = h_z\left(\sigma_z^1 + \sigma_z^2\right). \tag{5.3}$$

Тут $\sigma_i^1 = \sigma_i \otimes 1$, $\sigma_i^2 = 1 \otimes \sigma_i$, σ_i є матрицями Паулі, J задає величину взаємодії між спінами, яка для конкретної системи є постійною величиною і не змінюється під час еволюції, h_z є пропорційним до величини магнітного поля. Важливо зауважити, що гамільтоніан H_{int} комутує з гамільтоніаном H_{mf}. Гамільтоніан (5.1) є частковим випадком гамільтоніану (3.3) розглянутого у розділі 3, тому скористаємося результатами отриманими у цьому розділі. Гамільтоніан (5.1) має чотири власні значення $2\left(J + h_z\right)$, $2\left(J - h_z\right)$, $2J$, $-2J$, що відповідають

таким власним векторам

$$|\uparrow\uparrow\rangle, \tag{5.4}$$

$$|\downarrow\downarrow\rangle, \tag{5.5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right), \tag{5.6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right). \tag{5.7}$$

Варто зауважити, що H_{int} має тричі вироджений енергетичний рівень $2J$ з власними векторами (5.4)-(5.6) (триплет) і енергетичний рівень $-2J$ з власним вектором (5.7) (синглет). Взаємодія магнітного поля із цією системою знімає виродження з рівня $2J$.

Враховуючи, що H_{int} і H_{mf} комутують між собою, оператор еволюції представимо у вигляді

$$U(t) = e^{-iJH_{int}t}e^{-ih_z\sigma_z^1 t}e^{-ih_z\sigma_z^2 t}, \tag{5.8}$$

де

$$e^{-iJH_{int}t} = \cos(2Jt) - \frac{i}{2J}\sin(2Jt)H_{int}. \tag{5.9}$$

Тут ми використали факт, що $H_{int}^2 = (2J)^2$. Ми покладаємо $\hbar = 1$. Це означає, що гамільтоніан вимірюється в одиницях частоти. У базисі, що задається векторами $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ і $|\downarrow\downarrow\rangle$, оператор еволюції $U(t)$ має вигляд

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-i2(h_z+J)t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2Jt) & -i\sin(2Jt) & 0 \\ 0 & -i\sin(2Jt) & \cos(2Jt) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i2(h_z-J)t} \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Розглянемо еволюцію системи (5.1), якщо початковий стан має вигляд $|\psi_i\rangle = a_i|\uparrow\uparrow\rangle + b_i|\uparrow\downarrow\rangle + c_i|\downarrow\uparrow\rangle + d_i|\downarrow\downarrow\rangle$, з умовою нормування

$|a_i|^2 + |b_i|^2 + |c_i|^2 + |d_i|^2 = 1$. Дія оператора еволюції (5.8) на цей стан є наступною

$$|\psi\,(\theta,\phi)\rangle = U(t)|\psi_i\rangle = a_i e^{-i(\phi+\theta)}|\uparrow\uparrow\rangle + (b_i\cos\theta - ic_i\sin\theta)\,|\uparrow\downarrow\rangle$$

$$+\,(-ib_i\sin\theta + c_i\cos\theta)\,|\downarrow\uparrow\rangle + d_i e^{i(\phi-\theta)}|\downarrow\downarrow\rangle, \tag{5.11}$$

де

$$\theta = 2Jt, \quad \phi = 2h_z t. \tag{5.12}$$

Зауважимо, що цей стан визначається двома дійсними параметрами θ і ϕ. Довільний квантовий стан двох кубітів задається шістьма дійсними параметрами. Таким чином, така еволюція не дозволяє досягнути довільного стану на цій системі. Також легко бачити з (5.11), що наступні рівності задовільняються

$$|\psi(\theta+\pi,\phi)\rangle = -|\psi(\theta,\phi)\rangle, \tag{5.13}$$

$$|\psi(\theta,\phi+2\pi)\rangle = |\psi(\theta,\phi)\rangle. \tag{5.14}$$

Отже, цей стан, з точністю до фази, є періодичним з періодом π по θ і періодом 2π по ϕ. Це означає, що параметри θ і ϕ належать до області значень $\theta \in [0,\pi]$ і $\phi \in [0,2\pi]$ відповідно. У наступному підрозділі для того, щоб дослідити властивості многовиду, на якому відбувається еволюція системи, розрахуємо його метрику.

5.3 Метрика многовиду двох взаємодіючих спінів у магнітному полі

Відстань ds між двома близько розташованими чистими квантовими станами $|\psi(\xi^\alpha)\rangle$ і $|\psi(\xi^\alpha + d\xi^\alpha)\rangle$ задається виразом [84, 177, 178]

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta, \tag{5.15}$$

де ξ^α – це набір дійсних параметрів, які визначають стан $|\psi(\xi^\alpha)\rangle$. Компоненти метричного тензора $g_{\alpha\beta}$ можна знайти із формули:

$$g_{\alpha\beta} = \gamma^2 \,\mathrm{Re}\left(\langle\psi_\alpha|\psi_\beta\rangle - \langle\psi_\alpha|\psi\rangle\langle\psi|\psi_\beta\rangle\right), \tag{5.16}$$

де

$$|\psi_\alpha\rangle = \frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}|\psi\rangle. \tag{5.17}$$

Цю метрику можна вивести користуючись означеннями відстані між квантовими станами (для прикладу, див. [84]). Справді, записавши квадрат відстані Фубіні-Студі між двома близькими квантовими станами

$$ds^2 = \gamma^2\left(1 - |\langle\psi(\xi^\alpha)|\psi(\xi^\alpha + d\xi^\alpha)\rangle|^2\right) \tag{5.18}$$

і розклавши $|\psi(\xi^\alpha + d\xi^\alpha)\rangle$ в ряд Тейлора з точністю до другого порядку за $d\xi^\alpha$, отримаємо вираз для квадрату відстані (5.15).

Для прикладу, відстань між двома близько розташованими станами на просторі системи спіну $1/2$ має вигляд [84, 177]

$$ds^2 = \frac{\gamma^2}{4}\left((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\phi)^2\right). \tag{5.19}$$

Кути θ і ϕ відіграють роль параметрів ξ^α. Варто зазначити, що тут метричний тензор описує метрику сфери радіуса $\gamma/2$. При $\gamma = 2$ сфера називається сферою Блоха.

Розрахуємо метрику многовиду, який визначається станом (5.11). Як вже було зауважено, цей стан задається двома дійсними параметрами θ і ϕ. Тому розрахуємо наступні похідні

$$\begin{aligned}
|\psi_\theta\rangle &= -ia_i e^{-i(\phi+\theta)}|\uparrow\uparrow\rangle + (-b_i\sin\theta - ic_i\cos\theta)\,|\uparrow\downarrow\rangle \\
&+ (-ib_i\cos\theta - c_i\sin\theta)\,|\downarrow\uparrow\rangle - id_i e^{i(\phi-\theta)}|\downarrow\downarrow\rangle, \\
|\psi_\phi\rangle &= -ia_i e^{-i(\phi+\theta)}|\uparrow\uparrow\rangle + id_i e^{i(\phi-\theta)}|\downarrow\downarrow\rangle.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Використовуючи ці результати, отримаємо наступні скалярні добутки

$$\langle\psi|\psi_\theta\rangle = -i\left[1-B\right], \quad \langle\psi|\psi_\phi\rangle = -iD,$$

$$\langle\psi_\theta|\psi_\theta\rangle = 1, \quad \langle\psi_\phi|\psi_\phi\rangle = A, \quad \langle\psi_\phi|\psi_\theta\rangle = D, \tag{5.21}$$

де

$$A = |a_i|^2 + |d_i|^2, \quad B = |b_i - c_i|^2, \quad D = |a_i|^2 - |d_i|^2. \tag{5.22}$$

Тепер, підставляючи вираз (5.21) у вираз (5.16), отримаємо квадрат відстані між двома близько розташованих станами

$$ds^2 = \gamma^2\left[B\left(2-B\right)\left(d\theta\right)^2 + \left(A - D^2\right)\left(d\phi\right)^2 + 2DBd\theta d\phi\right]. \tag{5.23}$$

Легко показати, що наступна заміна

$$\phi = \phi' - k\theta', \quad \theta = \theta' \tag{5.24}$$

переводить метрику у діагональну форму

$$ds^2 = \gamma^2\left[\frac{B\left(2A - 2D^2 - BA\right)}{A - D^2}(d\theta')^2 + \left(A - D^2\right)\left(d\phi'\right)^2\right], \tag{5.25}$$

де $k = \frac{DB}{A-D^2}$. У такому разі стан (5.11), переписаний через параметр ϕ', має вигляд

$$|\psi\left(\theta,\phi'\right)\rangle = a_i e^{-i(\phi'+(1-k)\theta')}|\uparrow\uparrow\rangle + \left(b_i\cos\theta' - ic_i\sin\theta'\right)|\uparrow\downarrow\rangle$$

$$+\left(-ib_i\sin\theta' + c_i\cos\theta'\right)|\downarrow\uparrow\rangle + d_i e^{i(\phi'-(1+k)\theta')}|\downarrow\downarrow\rangle. \tag{5.26}$$

Цей стан задовільняє наступні періодичні умови:

$$|\psi(\theta'+\pi, \phi'+k\pi)\rangle = -|\psi(\theta',\phi')\rangle, \tag{5.27}$$

$$|\psi(\theta', \phi'+2\pi)\rangle = |\psi(\theta',\phi')\rangle \tag{5.28}$$

Необхідно зауважити, що компоненти метричного тензора $g_{\theta'\theta'}$ і $g_{\phi'\phi'}$ є додатніми величинами і не залежать від параметрів θ' і ϕ'. Дійсно, підставляючи позначення (5.22) у вираз (5.25), отримаємо, що

$$B\left(2A - 2D^2 - BA\right) = (|a_i|^2 + |d_i|^2)|b_i^2 - c_i^2|^2 + 8|a_i|^2|d_i|^2|b_i - c_i|^2 \geq 0,$$

$$A - D^2 = |a_i|^2(1 - |a_i|^2) + |d_i|^2(1 - |d_i|^2) + 2|a_i|^2|d_i|^2 \geq 0. \tag{5.29}$$

Таким чином, незалежність компонент метричного тензора від параметрів θ і ϕ означає, що метрика є плоскою. Також враховуючи, що ці параметри є періодичні робимо висновок, що вираз (5.24) або (5.25) задає метрику тора. Давайте дослідимо заплутаність станів, які належать до цього многовиду.

5.4 Заплутаність квантових станів на торі

Забезпечення різних алгоритмів для квантових обчислень вимагає приготування максимально заплутаних станів. Для прикладу, для реалізація найпростішої схеми квантової телепортації одного кубіту необхідно створити ЕПР пару [158]. Тому корисно буде дослідити заплутаність станів, які належать до многовиду, що визначається метрикою (5.24).

Рівень заплутаності двох спінів можна визначити за допомогою узгодженості [179], [180]

$$C = 2|ad - bc|, \tag{5.30}$$

де параметри a, b, c і d визначаються виразом $a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\uparrow\downarrow\rangle + c|\downarrow\uparrow\rangle + d|\downarrow\downarrow\rangle$. Використовуючи це означення, отримаємо узгодженість для стану (5.11)

$$C = 2\left|a_i d_i e^{-i2\theta} - \left(b_i c_i \cos 2\theta - \frac{i}{2}\left(b_i^2 + c_i^2\right)\sin 2\theta\right)\right|. \tag{5.31}$$

Легко бачити, що заплутаність стану (5.11) залежить тільки від параметра θ, що пропорційний до величини взаємодії між спінами. Це означає, що для кожного фіксованого значення θ існують лінії на торі, які містять всі стани із тією самою заплутаністю. Користуючись виразом (5.24) або (5.25), які ми отримали у попередньому підрозділі, отримуємо, що ці лінії є колами із радіусом

$$R = \gamma\sqrt{A - D^2}. \tag{5.32}$$

Застосуємо вище отримані результати для випадку коли початковий стан системи має вигляд

$$|\psi_i\rangle = |+-\rangle, \tag{5.33}$$

де $|+\rangle = \cos\frac{\chi}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\chi}{2}e^{i\eta}|\downarrow\rangle$, $|-\rangle = -\sin\frac{\chi}{2}|\uparrow\rangle + \cos\frac{\chi}{2}e^{i\eta}|\downarrow\rangle$ є власними станами оператора проекції спіну $1/2$ на напрямок $\mathbf{n}$ із додатнім і від'ємним власними значеннями відповідно. Вектор $\mathbf{n}$ можна представити за допомогою сферичних координат наступним чином $\mathbf{n} = (\sin\chi\cos\eta, \sin\chi\sin\eta, \cos\chi)$, де $\chi \in [0, \pi]$ і $\eta \in [0, 2\pi]$ є полярним і азимутальним кутами відповідно. Стан (5.33) є власним станом системи двох спінів поміщених у магнітне поле, яке спрямоване вздовж осі $\mathbf{n}$. Підставляючи параметри, які задають стан (5.33) у вираз (5.24) отримаємо, що у цьому випадку еволюція відбувається на многовиді, який є тором із метрикою

$$ds^2 = \gamma^2\left((d\theta)^2 + \frac{1}{2}\sin^2\chi(d\phi)^2\right). \tag{5.34}$$

З формули (5.31) отримуємо залежність заплутаності від параметру θ на цьому многовиді

$$C = |\sin 2\theta|. \tag{5.35}$$

Легко бачити, що умова $\theta = \frac{\pi}{4}$ відповідає максимально заплутаному станові

$$|\psi_{ENT}(\phi)\rangle = -\cos\frac{\chi}{2}\sin\frac{\chi}{2}e^{-i\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)}|\uparrow\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos^2\frac{\chi}{2} + i\sin^2\frac{\chi}{2}\right)e^{i\eta}|\uparrow\downarrow\rangle$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\cos^2\frac{\chi}{2} + \sin^2\frac{\chi}{2}\right)e^{i(\eta+\pi)}|\downarrow\uparrow\rangle + \cos\frac{\chi}{2}\sin\frac{\chi}{2}e^{i2\eta}e^{i\left(\phi-\frac{\pi}{4}\right)}|\downarrow\downarrow\rangle. \quad (5.36)$$

Іншими словами цей стан може бути отриманий із початкового стану (5.33) за час $\frac{\pi}{8J}$. Для прикладу, розглянемо випадок коли $\chi = 0$, що відповідає наступному початковому стану $|\uparrow\downarrow\rangle$. Тоді, за період часу $\frac{\pi}{8J}$ отримаємо наступний максимально заплутаний стан

$$|\psi_{ENT}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\downarrow\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|\downarrow\uparrow\rangle. \quad (5.37)$$

В цьому випадку еволюція буде відбуватися на многовиді, який є колом із радіусом γ.

Варто зазначити, що якщо початковий стан складається із суперпозиції станів (5.4)-(5.6), то тоді еволюція буде відбуватися на многовиді, який є колом радіуса (5.32). Всі стани, які належать до цього многовиду мають одну і ту саму заплутаність, величина якої визначається параметрами, що визначають початковий стан. Цей факт завдячує тому, що початковий стан є власним станом частини гамільтоніану, що описує взаємодію (5.2) між спінами. Тому еволюція буде відбуватися, тільки, під дією магнітного поля, яке на заплутаність системи ніяк не впливає. Це тому, що унітарні перетворення, які діють окремо на кожен спін, не змінюють заплутаності. Розглянемо приклад. Нехай початковий стан є наступним $\frac{1}{2}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)$, тоді еволюція буде відбуватися на колі радіуса $\frac{\gamma}{\sqrt{2}}$, на якому всі стани є незаплутані. У випадку коли початковий стан має вигляд $\frac{1}{2}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$, тоді система еволюціонує на колі радіуса $\gamma\frac{\sqrt{3}}{4}$ з заплутаністю станів $C = \frac{1}{2}$.

На закінчення цього розділу варто зауважити, що у випадку, коли початковий стан системи має вигляд $|++\rangle$ або $|--\rangle$, тоді еволюція відбувається на многовиді, який є колом із радіусом $\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\sin\chi$. Також, легко переконатися, що всі стани, які належать до цього многовиду є незаплутаними. Це пояснюється тим, що у даному випадку початковий стан є власним станом частини гамільтоніану системи, яка задає взаємодію між спінами. Це означає, що еволюція системи буде відбуватися завдяки магнітному полю.

5.5 Висновки

Ми розглянули систему двох спінів, взаємодія між якими описується ізотропним гамільтоніаном Гайзенберґа. Було досліджено квантову еволюцію цієї системи у зовнішньому магнітному полі, яке спрямоване вздовж осі z. Також показано, що еволюція визначається двома параметрами, а саме, часом і величиною магнітного поля. Ця еволюція є періодичною відносно цих параметрів. Це означає, що вона відбувається на деякому двовимірному многовиді, який є замкнутий. Нами було отримано метрику цього многовиду і показано, що вона описує тор. На закінчення ми порахували заплутаність станів, які лежать на ньому. Також знайдено криві постійної заплутаності. Ці криві є колами із радіусом (5.32), який залежить від параметрів початкового стану системи. Отримані результати ми застосували до випадку, коли початковий стан системи (5.33) є факторизованим і є одним із власних станів системи двох спінів у магнітному полі, яке спрямоване вздовж визначеного напрямку. Також було знайдено умови, які дозволяють досягнути максимально заплутаного стану (5.36) на даному многовиді.

Важливо зазначити, що коли початковий стан складається із суперпозиції власних станів (5.4)-(5.6), які відповідають тричі виродженому рівню ізотропного гамільтоніану Гайзенберґа (5.2), тоді еволюція відбувається на многовиді, який є колом. Всі стани, які належать до цього многовиду мають ту саму заплутаність. У цьому випадку еволюція буде забезпечуватися магнітним полем, яке не змінює заплутаності системи. Це тому, що унітарні оператори, які окремо діють на кожен спін, не змінюють заплутаності системи.

Розділ 6

Задача про брахістохрону для довільного спіну у магнітному полі

6.1 Вступ

Багаторівневі квантові системи є більш ефективніші для проведення квантових обчислень, ніж дворівневі кубіти, тому що на них можна записати більше інформації. В залежності від кількості енергетичних рівнів, які має система, їх називають *кутрітом*, який складається з трьох рівнів, *кукуадом*, що має чотири рівні. У загальному випадку система, яка має d рівнів, називається *кудітом*. Фізичні властивості цих систем забезпечують кращу реалізацію квантових обчислень [144–146] і квантової криптографії [142, 147]. Для прикладу, протокол для квантової криптографії створений на системі кудітів є краще захищений від "підслуховування", ніж протокол, створений на системі кубітів [140–143]. Реалізація квантового комп'ютера на системі кутрітів, які створені на спінах йонів атомів, керованих магнітним полем є описана у роботі [148].

Для реалізації кудітів часто використовують спіни електронів або ядер атомів. Наприклад, як вже було згадано у розділі 4 і показано у роботі [15], що кубіт можна приготувати на ядрі йонізованого атома фосфору. Керування такими системами можна здійснювати за допомогою магнітних полів (наприклад, див. [84]). Наприклад, зада-

ча оптимальної еволюції системи спіну 1/2 у магнітному полі була розглянута у статті [86]. Еволюцію такої системи можна зобразити на сфері Блоха рис. 3.1, яка містить всі можливі стани системи спіну 1/2, а стани, які лежать на діаметрально протилежних точках є ортогональними між собою. Задачу про брахістохрону для системи спіну 1, який знаходиться у магнітному полі, розглянуто у праці [9], де вважалося, що у початковий момент часу система знаходиться в одному з власних станів z-компоненти оператора спіну. У цій роботі було знайдено оптимальний гамільтоніан і час еволюції спіну, але ніде не було описано таку еволюцію з геометричної точки зору. Також немає робіт, де було б досліджено многовиди, на яких відбувається еволюція системи спіну 1 у магнітному полі. Проте, було розглянуто многовиди так званих атомних когерентних станів, які отримуються поворотом власного стану z-компоненти оператора моменту кількості руху з найменшим власним значенням навколо осі, яка знаходиться в площині xy, [137, 138]

$$|\psi_{-s}\rangle = e^{-i\theta(S_x\cos\phi + S_y\sin\phi)}|-s\rangle, \tag{6.1}$$

де θ, ϕ – це кути у сферичній системі координат, S_α – це компоненти оператора моменту кількості руху. Варто зазначити, що у випадку системи спіну s такий стан можна досягнути за допомогою дії магнітного поля на власний стан z-компоненти оператора спіну, який відповідає найменшому власному значенню. Стан (6.1) знаходиться на многовиді, який є сферою радіуса $\gamma\sqrt{\frac{s}{2}}$ і визначається параметрами θ і ϕ [137,138]. Параметр γ вибирається з міркувань зручності і в багатьох задачах його часто ставлять рівним 1, $\sqrt{2}$ або 2. Цікаво розглянути метрику многовиду, який можна отримати подібним чином, як у випадку зі станом (6.1), де початковий стан є будь-яким власним станом z-компоненти

оператора моменту кількості руху. Інформація про вигляд таких многовидів є корисною для дослідження еволюції спіну s у магнітному полі.

6.2 Обертові многовиди спіну 1/2 і спіну 1

Поворот квантового стану системи спіну s $|\psi_i\rangle$ на кут χ навколо деякої осі, що спрямована вздовж одиничного вектора $\mathbf{n}$, можна реалізувати наступним чином:

$$|\psi_f\rangle = e^{-i\chi \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}}|\psi_i\rangle, \tag{6.2}$$

де $\mathbf{S}$ є оператором спіну величиною s. У сферичній системі координат вектор $\mathbf{n}$ має вигляд $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, де θ і ϕ є полярним і азимутальним кутами відповідно. Ми працюємо в системі одиниць виміру, де $\hbar = 1$. Це означає, що енергія вимірюється в одиницях частоти. Розглянемо поворот для спіну 1/2. Оператор спіну 1/2 задається матрицями Паулі $\boldsymbol{\sigma}$ наступним чином $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$. Повертаючи власні стани σ_z на кут θ навколо осі y і на кут ϕ навколо осі z можна досягнути довільного квантового стану системи спіну 1/2 σ_z

$$|\psi^+\rangle = e^{-i\frac{\phi}{2}\sigma_z}e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_y}|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

$$|\psi^-\rangle = e^{-i\frac{\phi}{2}\sigma_z}e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_y}|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Тут ми скористалися наступним представленням оператора повороту

$$e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_\alpha} = \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\sigma_\alpha,$$

де $\alpha = x, y, z$. Варто зазначити, що стани (6.3) і (6.4) є власними станами оператора $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$ з власними значеннями 1 і -1 відповідно. Змінюючи

параметри θ і ϕ у виразі (6.3) чи (6.4), в наступних інтервалах $\theta \in [0, \pi]$ і $\phi \in [0, 2\pi]$ можна досягнути довільного стану спіну 1/2. Іншими словами ці інтервали покривають весь простір станів цієї системи.

Розглянемо такі самі повороти для спіну 1. У матричному представлені компоненти оператора спіну 1 мають вигляд

$$S_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

Оператор повороту спіну 1 навколо вектора $\mathbf{n}$ можна представити у вигляді [9]

$$e^{-i\chi \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}} = 1 - (\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})^2 \, 2\sin^2\frac{\chi}{2} - i\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\sin\chi. \tag{6.6}$$

Оператор $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$ має три власні значення 1, 0, -1, що відповідають відповідним власним векторам $|\psi_1\rangle$, $|\psi_0\rangle$, $|\psi_{-1}\rangle$. Довільний квантовий стан трирівневої системи можна представити у вигляді лінійної комбінації цих векторів. Очевидно, що рівняння (6.6) виконується. Легко бачити, що для параметру λ, який може приймати лише три значення 1, 0 і -1, виконується рівність

$$e^{\lambda x} = (1-\lambda)(1+\lambda) + \frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)e^{x} + \frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)e^{-x}. \tag{6.7}$$

Тоді скориставшись цією рівністю для оператора повороту спіну 1, отримаємо рівняння (6.6). У загальному випадку, коли параметр λ може приймати n значень, а саме, λ_1, λ_2, ..., λ_n, є справедливий наступний

розклад

$$e^{\lambda x} = \sum_{m=1}^{n} \prod_{k\neq m=1}^{n} \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda_m - \lambda_k} e^{\lambda_m x}. \tag{6.8}$$

Тепер, користуючись рівністю (6.6), можна записати оператори, які здійснюють повороти квантового стану спіну 1 навколо осей x, y і z, у вигляді

$$e^{-i\theta S_\alpha} = 1 - {S_\alpha}^2 2\sin^2\frac{\theta}{2} - iS_\alpha \sin\theta, \tag{6.9}$$

де $\alpha = x, y, z$. Власні стани оператора S_z, що відповідають власним значенням 1, 0, -1, позначимо наступним чином $|1\rangle$, $|0\rangle$, $|-1\rangle$ відповідно. Ці стани грають роль базисних векторів. Подібно, як у випадку системи спіну 1/2, розглянемо повороти цих векторів на кути θ і ϕ навколо осей y і z відповідно. Скориставшись представленням (6.9), отримаємо

$$|\psi_1\rangle = e^{-i\phi S_z} e^{-i\theta S_y} |1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\theta)\, e^{-i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ \frac{1}{2}(1-\cos\theta)\, e^{i\phi} \end{pmatrix}, \tag{6.10}$$

$$|\psi_0\rangle = e^{-i\phi S_z} e^{-i\theta S_y} |0\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta e^{-i\phi} \\ \cos\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta e^{i\phi} \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

$$|\psi_{-1}\rangle = e^{-i\phi S_z} e^{-i\theta S_y} |-1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\cos\theta)\, e^{-i\phi} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ \frac{1}{2}(1+\cos\theta)\, e^{i\phi} \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

Варто зазначити, що ці стани є власними станами оператора $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$ з відповідними власними значеннями 1, 0 і -1. Легко бачити, що стани $|\psi_1\rangle$ і $|\psi_{-1}\rangle$ лежать на одному обертовому многовиді, а стан $|\psi_0\rangle$ належить до іншого обертового многовиду. Щоб охопити весь многовид,

який задається станами $|\psi_1\rangle$ і $|\psi_{-1}\rangle$ є необхідним щоб параметри θ і ϕ пробігали значення в інтервалах $\theta \in [0, \pi]$ і $\phi \in [0, 2\pi]$. У випадку многовиду, що визначається станом $|\psi_0\rangle$ бачимо, що він двічі охоплюється при зміні параметрів θ і ϕ в цих інтервалах. Це тому, що з точністю до фази наступні заміни $\theta \to \pi - \theta$ і $\phi \to \phi + \pi$ переводять стан $|\psi_0\rangle$ в самого себе. У цей самий час ці заміни дозволяють перевести стан $|\psi_1\rangle$ в стан $|\psi_{-1}\rangle$. Проте, не існує такого типу замін щоб перевести стан з одного многовиду на інший. Це означає, що ці многовиди не перетинаються між собою.

На відміну від випадку системи спіну 1/2, де обертовий многовид збігається з двовимірним квантовим простором станів, ні один з многовидів, що задаються станами (6.10)-(6.12) не збігається з простором станів системи спіну 1. Це тому, що кількість параметрів, яка визначає кожен многовид є недостатньою для задання простору станів спіну 1, який має задаватися чотирма дійсними параметрами. Варто зазначити, що лінійна комбінація станів, що лежать на одному з многовидів, не належить до цього многовиду. Цей факт означає, що обертовий многовид не володіє властивостями простору.

6.3 Метрики обертових многовидів спіну 1/2 і спіну 1

Знайдімо метрику обертових многовидів, які задаються станами (6.10)-(6.12), отриманих для спіну $s = 1$. Ці стани також визначаються двома дійсними параметрами θ і ϕ. Як було зазначено у попередньому підрозділі, власні стани (6.10), (6.12) лежать на одному і тому самому многовиді, а стан (6.11) на іншому. Таким чином, для того щоб отримати метрику цих многовидів, достатньо розглянути стани (6.10)

і (6.11). Отже, знайдімо похідні від цих станів по параметрах θ і ϕ

$$|\psi_{1\ \theta}\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin\theta e^{-i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad |\psi_{1\ \phi}\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\left(1+\cos\theta\right)e^{-i\phi} \\ 0 \\ \frac{i}{2}\left(1-\cos\theta\right)e^{i\phi} \end{pmatrix},$$

$$|\psi_{0\ \theta}\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta e^{-i\phi} \\ -\sin\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad |\psi_{0\ \phi}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\theta e^{-i\phi} \\ 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\theta e^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Тепер, користуючись цими виразами, отримаємо наступні скалярні добутки

$$\langle\psi_1|\psi_{1\ \theta}\rangle = 0, \quad \langle\psi_{1\ \theta}|\psi_{1\ \theta}\rangle = \frac{1}{2},$$

$$\langle\psi_1|\psi_{1\ \phi}\rangle = -i\cos\theta, \quad \langle\psi_{1\ \phi}|\psi_{1\ \phi}\rangle = \frac{1}{2}\left(1+\cos^2\theta\right),$$

$$\langle\psi_{1\ \theta}|\psi_{1\ \phi}\rangle = \frac{i}{2}\sin\theta,$$

$$\langle\psi_0|\psi_{0\ \theta}\rangle = 0, \quad \langle\psi_{0\ \theta}|\psi_{0\ \theta}\rangle = 1,$$

$$\langle\psi_0|\psi_{0\ \phi}\rangle = 0, \quad \langle\psi_{0\ \phi}|\psi_{0\ \phi}\rangle = \sin^2\theta,$$

$$\langle\psi_{0\ \theta}|\psi_{0\ \phi}\rangle = 0. \quad (6.14)$$

Підставляючи ці добутки в означення компонент метричного тензора (5.16), отримаємо квадрат відстані між двома близькими станами на обертових многовидах для системи спіну 1

$$ds_1^2 = \frac{\gamma^2}{2}\left((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\phi)^2\right), \quad (6.15)$$

$$ds_0^2 = \gamma^2\left((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\phi)^2\right), \quad (6.16)$$

де індекс біля ds задає власний стан, який лежить на даному многовиді. Легко бачити, що вираз (6.15) задає метрику сфери радіуса $\gamma/\sqrt{2}$. З

властивостей станів (6.10), (6.12) випливає, що ортогональні стани лежать на діаметрально протилежних точках цієї сфери. У випадку другого многовиду маємо іншу ситуацію. Як було згадано раніше, заміни $\theta \to \pi - \theta$ і $\phi \to \phi + \pi$ переводять стан $|\psi_0\rangle$ з точністю до фази в самого себе. Такий многовид називається еліптичною геометрією. Також, важливо зазначити, що ортогональні стани на многовиді (6.16) розділені кутом $\pi/2$. Дійсно, скалярний добуток станів $|\psi_0\rangle \equiv |\psi_0(\theta, \phi)\rangle$ і $|\psi_0'\rangle \equiv |\psi(\theta', \phi')\rangle$, які належать до цього многовиду має вигляд

$$\langle\psi_0|\psi_0'\rangle = \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi - \phi') + \cos\theta \cos\theta'. \tag{6.17}$$

З другого боку це дорівнює скалярному добуткові двох одиничних векторів $\mathbf{n}$ і $\mathbf{n}'$, які визначаються наборами сферичних кутів θ, ϕ і θ', ϕ' відповідно. Цей добуток перетворюється в нуль, коли кут між векторами є рівним $\pi/2$, що й треба було довести.

6.4 Задача про брахістохрону для спіну 1 у магнітному полі

У цьому підрозділі ми розглянемо задачу брахістохрони на обертових многовидах, які задаються виразами (6.15), (6.16), які отримані для спіну 1. Гамільтоніан, який може забезпечити еволюцію на таких многовидах є гамільтоніаном спіну 1, який знаходиться у зовнішньому магнітному полі, що спрямоване вздовж одиничного вектора $\mathbf{n}'$

$$H = \omega \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}', \tag{6.18}$$

де ω – пропорційне до напруженості магнітного поля і вимірюється в одиницях частоти, $\mathbf{n}'$ задається двома сферичними кутами θ' і ϕ'. Нагадаємо, що ми працюємо в системі одиниць, де $\hbar = 1$. Цей гамільтоніан

має три власні значення ω, 0 і $-\omega$, що відповідають наступним власним векторам (6.10)-(6.12), де кути θ і ϕ потрібно замінити на θ' і ϕ' відповідно. Гамільтоніан (6.18) містить тільки два вільні параметри, а саме, два кути θ' і ϕ'. Довільний стан спіну 1 задається чотирма дійсними параметрами. Таким чином, ми не можемо досягнути довільного стану на цій системі, використовуючи оператор еволюції з гамільтоніаном (6.18).

Задачу квантової брахістохрони для спіну 1, який знаходиться у магнітному полі досліджено у роботі [9]. Автори розглядають наступну проблему: "як потрібно спрямувати магнітне поле з фіксованою величиною ω, щоб еволюція від заданого початкового $|\psi_i\rangle$ до заданого кінцевого $|\psi_f\rangle$ станів пройшла за найкоротший час?" У цій роботі задачу досліджено стандартним способом. А саме, було отримано умови, при яких відбувається оптимальна еволюція, діючи оператором еволюції на початковий стан і прирівнюючи його до заданого кінцевого. Ми розв'язали цю задачу, виходячи з геометричних властивостей обертових многовидів спіну 1. Розглянемо цю проблему детальніше.

Використовуючи рівняння (6.7), оператор еволюції з гамільтоніаном (6.18) прийме форму

$$e^{-iHt} = 1 - (\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}')^2\, 2\sin^2\frac{\omega t}{2} - i\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}'\sin\omega t. \tag{6.19}$$

Тепер, використовуючи цей оператор, ми можемо розглянути квантову еволюцію цієї системи, коли початковий стан є одним з власних стані оператора S_z $|1\rangle$, $|0\rangle$ і $|-1\rangle$ [9]

$$\begin{aligned} |\psi_1(t)\rangle &= e^{-iHt}|1\rangle \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \left(1+\cos^2\theta'\right)\sin^2\frac{\omega t}{2} - i\cos\theta'\sin\omega t \\ -\left(\sqrt{2}\cos\theta'\sin\theta'\sin^2\frac{\omega t}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\theta'\sin\omega t\right)e^{i\phi'} \\ -\sin^2\theta'\sin^2\frac{\omega t}{2}e^{i2\phi'} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6.20}$$

$$|\psi_0(t)\rangle = e^{-iHt}|0\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\cos\theta'\sin\theta'\sin^2\frac{\omega t}{2} + i\sin\theta'\sin\omega t\right)e^{-i\phi'} \\ 1 - 2\sin^2\theta'\sin^2\frac{\omega t}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\cos\theta'\sin\theta'\sin^2\frac{\omega t}{2} - i\sin\theta'\sin\omega t\right)e^{i\phi'} \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

$$|\psi_{-1}(t)\rangle = e^{-iHt}|-1\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin^2\theta'\sin^2\frac{\omega t}{2}e^{-i2\phi'} \\ \left(\sqrt{2}\cos\theta'\sin\theta'\sin^2\frac{\omega t}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\theta'\sin\omega t\right)e^{-i\phi'} \\ 1 - \left(1+\cos^2\theta'\right)\sin^2\frac{\omega t}{2} + i\cos\theta'\sin\omega t \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Легко бачити, що ці стани з точністю до фази є власним станами (6.10)-(6.12)

$$|\psi_1(t)\rangle = e^{i\beta}|\psi_1\rangle, \quad (6.23)$$

$$|\psi_0(t)\rangle = |\psi_0\rangle, \quad (6.24)$$

$$|\psi_{-1}(t)\rangle = e^{-i\beta}|\psi_{-1}\rangle, \quad (6.25)$$

де

$$\beta = 2\phi' - \phi + (2k+1)\pi,$$

k є довільним цілим числом. Тут ми ввели наступні позначення:

$$\phi = \phi' - \mathrm{arctg}\frac{\cos\frac{\omega t}{2}}{\cos\theta'\sin\frac{\omega t}{2}},$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\theta'\sin\frac{\omega t}{2}. \quad (6.26)$$

Звідси видно, що якщо початковий стан належить до одного з многовидів, тоді квантова еволюція цієї системи відбувається на цьому многовиді. Іншими словами, як ми згадували раніше, гамільтоніан (6.18)

реалізує еволюцію на двох многовидах окремо і не переводить стан з одного многовиду на інший. Для прикладу, ми не можемо досягнути стану $|0\rangle$, розпочинаючи еволюцію зі стану $|1\rangle$.

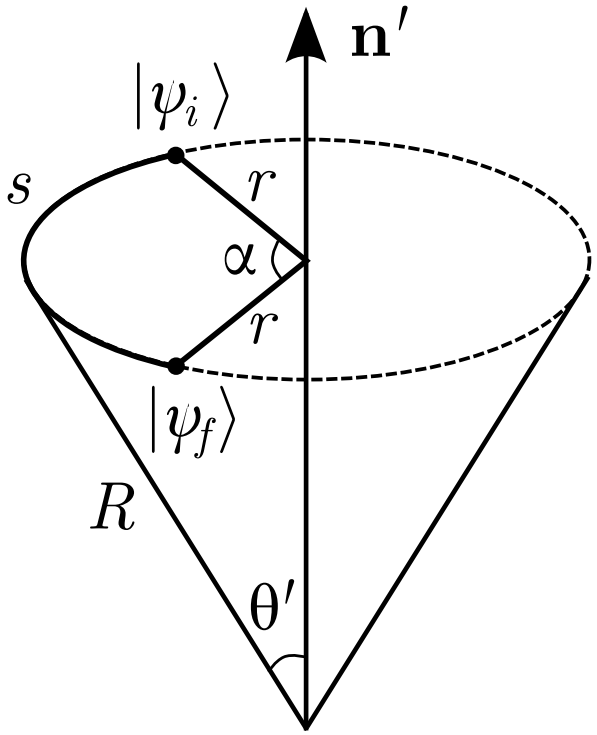

Рис. 6.1: Визначення шляху s, який система спіну у магнітному полі подолала під час еволюції між початковим $|\psi_i\rangle$ і кінцевим $|\psi_f\rangle$ станами. Одиничний вектор $\mathbf{n}$' вказує напрямок магнітного поля.

Час еволюції системи між початковим $|\psi_i\rangle$ і кінцевим $|\psi_f\rangle$ станами визначається виразом

$$t = \frac{s}{v}, \tag{6.27}$$

де s є шляхом, який система подолала під час еволюції між визначеними станами, v є швидкістю, з якою система еволюціонує.

Використовуючи отримані результати дослідимо задачу брахістохрони окремо на многовидах, які задаються виразами (6.15) і (6.16). Спочатку розглянемо оптимальну еволюцію на многовиді, який визначається виразом (6.15). Нехай початковий і кінцевий стани, які нале-

жать до цього многовиду мають вигляд $|\psi_i\rangle = |1\rangle$,

$$|\psi_f\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\cos\theta_f\right)e^{-i\phi_f} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta_f \\ \frac{1}{2}\left(1-\cos\theta_f\right)e^{i\phi_f} \end{pmatrix}. \tag{6.28}$$

Кінцевий стан можна досягнути при умові, що кут між магнітним полем і цим станом є таким самим, як кут між полем і початковим станом рис. 6.1. Тоді квантова еволюція буде відбуватися по дузі кола s навколо вектора $\mathbf{n}'$, який задає напрямок магнітного поля. З аналізу рис. 6.1 випливає, що

$$s = \alpha r. \tag{6.29}$$

Легко бачити, що $r = R\sin\theta'$. Для визначення кута α знайдімо довжину прямої, яка з'єднує початковий і кінцевий стани (хорда кола, на якому знаходиться дуга s). З одного боку вона рівна $2r\sin\frac{\alpha}{2}$, а з іншого боку, користуючись тим, що початковий і кінцевий стани розділені кутом θ_f, рівна $2R\sin\frac{\theta_f}{2}$. Прирівнюючи ці два вирази знаходимо, що $\alpha = 2\arcsin\frac{\sin\frac{\theta_f}{2}}{\sin\theta'}$. Підставляючи знайдені вирази для r і α у вираз (6.29), отримаємо довжину шляху, яку долає система під час еволюції на многовиді (6.15)

$$s = 2R\sin\theta'\arcsin\frac{\sin\frac{\theta_f}{2}}{\sin\theta'}, \tag{6.30}$$

де $R = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$ – це радіус многовиду.

Тепер знайдімо швидкість еволюції між початковим і кінцевим станами. Швидкість еволюції задається формулою Анандана-Ахаронова [181]

$$v = \gamma\sqrt{\langle\psi(t)|\left(\Delta H\right)^2|\psi(t)\rangle}. \tag{6.31}$$

Цю формулу можна отримати з наступних міркувань. Миттєву швидкість еволюції квантового стану можна записати так

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt},$$

де Δs є відстанню між двома близькими квантовими станами (для прикладу, див. [84]). Так як для двох близько розташованих станів всі відстані збігаються, то можна написати

$$\Delta s = d\left(|\psi(t)\rangle, |\psi(t+\Delta t)\rangle\right) = \gamma\sqrt{1 - |\langle\psi(t)|\psi(t+\Delta t)\rangle|^2}.$$

Розклавши $|\psi(t+\Delta t)\rangle$ в ряд Тейлора з точністю до $(\Delta t)^2$ і зробивши відповідні обчислення, отримаємо вираз для швидкості еволюції (6.31).

Щоб знайти швидкість еволюції на многовиді, що описується виразом (6.15), стан (6.20) і гамільтоніан (6.18) підставимо у вираз (6.31), отримаємо

$$v = \gamma\sqrt{\langle\psi_1(t)|\left(\Delta H\right)^2|\psi_1(t)\rangle} = \gamma\sqrt{\langle 1|\left(\Delta H\right)^2|1\rangle} = \omega R\sin\theta'. \quad (6.32)$$

Тут ми скористалися тим, що $|\psi_1(t)\rangle = e^{-iHt}|1\rangle$. Тепер, підставляючи вирази для довжини пройденого шляху (6.30) і швидкості еволюції (6.32) у рівняння (6.27), отримаємо час еволюції між початковим $|\psi_i\rangle = |1\rangle$ і кінцевим (6.28) станами

$$t = \frac{2}{\omega}\arcsin\frac{\sin\frac{\theta_f}{2}}{\sin\theta'}. \quad (6.33)$$

Звідси видно, що мінімальний час еволюції досягається коли $\theta' = \frac{\pi}{2}$

$$t_{min} = \frac{\theta_f}{\omega}. \quad (6.34)$$

Ця умова також відповідає мінімальній довжині пройденого шляху $s_{min} = \gamma\theta_f/\sqrt{2}$ і максимальній швидкості еволюції $v_{max} = \gamma\omega/\sqrt{2}$. Оптимальна еволюція відбувається по дузі великого кола, яка з'єднує два стани на нашому многовиді (геодезична лінія). Для прикладу,

у випадку коли $\theta_f = \pi$, що відповідає еволюції між двома ортогональними станами, мінімальний шлях і мінімальний час мають вигляд $s_{min} = \gamma\pi/\sqrt{2}$ і $t_{min} = \pi/\omega$. З всього вище сказаного можна зробити висновок, що оптимальна еволюція відбувається тоді, коли напрямок магнітного поля є перпендикулярним до початкового і кінцевого станів. Це означає, що одиничний вектор, який задає напрямок магнітного поля можна записати у вигляді $\mathbf{n}'_{opt} = (-\sin\phi_f, \cos\phi_f, 0)$, а гамільтоніан, який забезпечує оптимальну еволюцію приймає вигляд

$$H_{opt} = \omega \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}'_{\mathbf{opt}}. \tag{6.35}$$

Подібну ситуацію маємо у випадку із многовидом, що описується виразом (6.16). Розглянемо еволюцію між станами $|\psi_i\rangle = |0\rangle$ і

$$|\psi_f\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta_f e^{-i\phi_f} \\ \cos\theta_f \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta_f e^{i\phi_f} \end{pmatrix}.$$

Подібно, як у попередньому випадку, отримаємо, що довжина пройденого шляху і швидкість еволюції для даного многовиду визначається формулами (6.30) і (6.32) відповідно. Тільки тут радіус многовиду рівний $R = \gamma$. Легко бачити, що час еволюції визначається рівнянням (6.33). У цьому випадку еволюція по брахістохроні також відповідає перпендикулярній орієнтації магнітного поля відносно початкового і кінцевого станів. Отже, час оптимальної еволюції також визначається рівнянням (6.34), а гамільтоніан, який забезпечує таку еволюцію, задається виразом (6.35). Варто зазначити, що на відміну від еволюції на многовиді з $m = \pm 1$, мінімальний час еволюції між двома ортогональними станами на даному многовиді є наступним $\pi/2\omega$. Це тому, що, як вже було зазначено раніше, на цьому многовиді ортогональні стани є розділені кутом $\pi/2$.

6.5 Узагальнення для довільного спіну

Проблему, яку ми розглянули у попередніх підрозділах для системи спіну 1, можна узагальнити для системи довільного спіну. А саме, розглянемо таку проблему: яка геометрія обертових многовидів, що визначають положення всіх станів, які можна досягнути поворотами власних станів оператора проекції спіну s на напрямок $\mathbf{n}$? Власний стан оператора $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$, що відповідає власному значенню m можна представити у вигляді

$$|\psi_m\rangle = e^{-i\phi S_z} e^{-i\theta S_y} |m\rangle, \tag{6.36}$$

де $\mathbf{S}$ є оператором спіну s, $\mathbf{n}$ – це одиничний вектор, який визначається сферичними кутами θ і ϕ, $|m\rangle$ є власним станом оператора S_z з власним значенням m. Тут власні стани S_z відіграють роль базисних векторів. Як видно, стан (6.36) визначається двома дійсними параметрами θ і ϕ. Доволі тяжко записати у явній формі власні стани оператора $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$ для спіну 3/2 і провести конкретні математичні дії з цими станами щоб почислити їх метрику. Тому, щоб спростити подальші обчислення будемо використовувати представлення власних станів оператора проекції спіну s на напрямок $\mathbf{n}$ у вигляді (6.36).

Щоб отримати метрику многовиду, який визначається станом (6.36), спочатку знайдімо похідні по θ і ϕ

$$|\psi_{m\ \theta}\rangle = e^{-i\phi S_z} \left(-iS_y\right) e^{-i\theta S_y} |m\rangle,$$

$$|\psi_{m\ \phi}\rangle = \left(-iS_z\right) e^{-i\phi S_z} e^{-i\theta S_y} |m\rangle, \tag{6.37}$$

і запишемо наступні скалярні добутки

$$\langle\psi_m|\psi_{m\ \theta}\rangle = -i\langle m|S_y|m\rangle, \tag{6.38}$$

$$\langle\psi_{m\ \theta}|\psi_{m\ \theta}\rangle = \langle m|{S_y}^2|m\rangle, \tag{6.39}$$

$$\langle\psi_m|\psi_{m\ \phi}\rangle = -i\langle m|e^{i\theta S_y}S_z e^{-i\theta S_y}|m\rangle, \tag{6.40}$$

$$\langle\psi_{m\ \phi}|\psi_{m\ \phi}\rangle = \langle m|e^{i\theta S_y}{S_z}^2 e^{-i\theta S_y}|m\rangle, \tag{6.41}$$

$$\langle\psi_{m\ \theta}|\psi_{m\ \phi}\rangle = \langle m|e^{i\theta S_y}S_y S_z e^{-i\theta S_y}|m\rangle. \tag{6.42}$$

Для того щоб почислити ці добутки нагадаємо, що

$$S_x = \frac{S^+ + S^-}{2}, \quad S_y = \frac{S^+ - S^-}{2i}, \tag{6.43}$$

де S^+ і S^- задовільняють наступні властивості

$$S^+|m\rangle = \sqrt{s(s+1) - m(m+1)}|m+1\rangle,$$

$$S^-|m\rangle = \sqrt{s(s+1) - m(m-1)}|m-1\rangle. \tag{6.44}$$

Також використаємо формулу Бакера-Кембела-Гаусдорфа для наступних операторів

$$e^{i\theta S_y}S_z e^{-i\theta S_y} = S_z\cos\theta - S_x\sin\theta,$$

$$e^{i\theta S_y}{S_z}^2 e^{-i\theta S_y} = e^{i\theta S_y}S_z e^{-i\theta S_y}e^{i\theta S_y}S_z e^{-i\theta S_y} = \left(e^{i\theta S_y}S_z e^{-i\theta S_y}\right)^2$$

$$= {S_x}^2\sin^2\theta + {S_z}^2\cos^2\theta - (S_xS_z + S_zS_x)\cos\theta\sin\theta.$$

Тепер, зробивши певні обчислення, отримаємо

$$\langle\psi_m|\psi_{m\ \theta}\rangle = 0, \quad \langle\psi_{m\ \theta}|\psi_{m\ \theta}\rangle = \frac{1}{2}\left(s + s^2 - m^2\right)$$

$$\langle\psi_m|\psi_{m\ \phi}\rangle = -im\cos\theta,$$

$$\langle\psi_{m\ \phi}|\psi_{m\ \phi}\rangle = \frac{1}{2}\left(s + s^2 - m^2\right)\sin^2\theta + m^2\cos^2\theta,$$

$$\langle\psi_{m\ \theta}|\psi_{m\ \phi}\rangle = i\frac{m}{2}\sin\theta. \tag{6.45}$$

Нарешті, підставляючи ці скалярні добутки в означення для компонент метричного тензора (5.16), отримаємо

$$g_{\theta\theta} = \frac{\gamma^2}{2}\left(s + s^2 - m^2\right), \quad g_{\phi\phi} = \frac{\gamma^2}{2}\left(s + s^2 - m^2\right)\sin^2\theta,$$

$$g_{\theta\phi} = 0. \tag{6.46}$$

Таким чином, многовид, який задається станом (6.36), визначається наступним виразом

$$ds_m^2 = \frac{\gamma^2}{2}\left(s + s^2 - m^2\right)\left((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\phi)^2\right). \tag{6.47}$$

Як ми можемо бачити цей многовид має метрику сфери радіуса

$$R = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\sqrt{s + s^2 - m^2}. \tag{6.48}$$

У вступі до цього розділу було зауважено, що у роботах [137, 138] знайдено метрику многовиду, який задається станом (6.1), для якого $m = -s$. На відміну від цих робіт наш результат дозволяє записати метрику для будь-якого значення m.

З аналізу (6.47) випливає, що для цілого спіну існує $s+1$ обертовий многовид, а для півцілого $s + 1/2$. Для прикладу, у випадку спіну $3/2$ будемо мати два многовиди, один із радіусом $\gamma\sqrt{3}/2$, а другий із радіусом $\gamma\sqrt{7}/2$, які відповідають власним значенням $m = \pm 3/2$ і $m = \pm 1/2$ відповідно. Такий самий результат отримаємо, використовуючи явну форму власних станів оператора $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$ для спіну $3/2$.

На завершення цього підрозділу розглянемо еволюцію на обертових многовидах для системи спіну s. Гамільтоніан, який забезпечує таку еволюцію є гамільтоніаном системи спіну s у магнітному полі. Цей гамільтоніан має вигляд (6.18), де $\mathbf{S}$ є оператором спіну s. Покладімо початковий і кінцевий стани у вигляді

$$|\psi_i\rangle = |m\rangle, \quad |\psi_f\rangle = e^{-i\phi_f S_z} e^{-i\theta_f S_y}|m\rangle.$$

Зробивши такі самі кроки, як для спіну 1, отримаємо, що довжина шляху, який система долає у магнітному полі від початкового до кінцевого стану визначається виразом (6.30), де радіус многовиду задається

формулою (6.48). Швидкість еволюції визначаємо із формули (6.31), де H – це гамільтоніан спіну s у магнітному полі. Використовуючи вирази (6.43) і (6.44), отримаємо, що швидкість еволюції на обертовому многовиді залежить від радіуса цього многовиду і від напрямку магнітного поля наступним чином

$$v = \gamma\sqrt{\langle\psi_m(t)|\,(\Delta H)^2\,|\psi_m(t)\rangle} = \gamma\sqrt{\langle m|\,(\Delta H)^2\,|m\rangle}$$

$$= \omega R\sin\theta'. \tag{6.49}$$

Таким чином, бачимо, що так само як у випадку спіну 1, час еволюції визначається формулою (6.33) і не залежить від радіусу многовиду, а визначається кутом між початковим і кінцевим станом та напрямком магнітного поля. Оптимальна еволюція відбувається, коли напрямок магнітного поля є перпендикулярним відносно початкового і кінцевого станів. Найкоротший шлях є дугою великого кола, яка з'єднує початковий і кінцевий стани на многовиді, і його довжина визначається за формулою

$$s_{min} = \theta_f R = \theta_f\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\sqrt{s + s^2 - m^2}, \tag{6.50}$$

а максимальна швидкість еволюції за формулою

$$v_{max} = \omega R = \omega\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\sqrt{s + s^2 - m^2}. \tag{6.51}$$

Поділивши s_{min} на v_{max}, отримаємо, що мінімальний час еволюції визначається з виразу (6.34). Зауважимо, що гамільтоніан, який забезпечує цю еволюцію має вигляд (6.35), де $\mathbf{S}$ є оператором спіну s.

6.6 Висновки

Повороти власного стану оператора S_z із власним значенням m, спочатку на кут θ навколо осі y, а потім на кут ϕ навколо осі z, дозволяє

отримати власний стан оператора проекції спіну s на напрямок $\mathbf{n}(\theta, \phi)$ з тим самим власним значенням. Цей стан лежить на деякому многовиді, який називається обертовим многовидом, що характеризується двома дійсними параметрами θ і ϕ. Для спіну $1/2$ існує один обертовий многовид, який збігається з двовимірним квантовим простором цієї системи. У загальному випадку існує $s + 1$ многовид для цілого спіну і $s + 1/2$ многовид для півцілого спіну. Також варто зауважити, що обертові многовиди для довільного спіну (виключаючи спін $1/2$) не збігаються з квантовим простором цієї системи, тому що кількість параметрів, якими характеризується ці многовиди, не є достатня щоб задати квантовий простір спіну s. Простір такої системи визначається $4s$ дійсними параметрами. Варто зауважити, що обертові многовиди для спіну більшого за $1/2$ не мають властивостей лінійних просторі. Лінійна комбінація будь-яких двох станів, які лежать на одному з цих многовидів не належить до останнього.

Показано, що для спіну 1 існує два обертові многовиди, які відповідають власним значенням $m = \pm 1$ і $m = 0$ оператора $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$. Метрика многовиду з $m = \pm 1$ є метрикою сфери радіусу $\gamma/\sqrt{2}$. Ортогональні стани лежать на діаметрально протилежних точках цієї сфери. Метрика іншого многовиду (з $m = 0$) є метрикою сфери радіусу γ. Було показано, що останній многовид володіє властивостями еліптичної геометрії, тому що на діаметрально протилежних точках цієї сфери з точністю до фази знаходиться один і той самий стан. Ортогональні стани на цьому многовиді розділені кутом $\pi/2$. Ці результати були узагальнені для довільного спіну s. Отримано, що в загальному метрика обертового многовиду, що відповідає власному значенню m є метрикою сфери із радіусом, який залежить від величини спіну s і від величини проекції спіну m (6.48). У працях [137, 138] було отримано

метрику обертового многовиду з $m = -s$. Результат отриманий нами є набагато ширший і дозволяє записати метрику многовиду з довільним значенням m.

На завершення ми розглянули квантову еволюцію для системи спіну 1 у магнітному полі на обертових многовидах і розв'язали задачу квантової брахістохрони, використовуючи геометричні властивості цих многовидів. Було показано, що оптимальна еволюція відбувається, коли магнітне поле має перпендикулярну орієнтацію відносно початкового і кінцевого станів. Гамільтоніан, який забезпечує цю еволюцію має вигляд (6.35). Найкоротший шлях, який з'єднує два фіксовані стани на обертовому многовиді, є дуга великого кола (геодезична лінія). Мінімальний час еволюції прямо пропорційний до кута, який розділяє початковий і кінцевий стани і обернено пропорційний до величини магнітного поля (6.34). Ми отримали подібні результати у загальному випадку для спіну s у магнітному полі. А саме, що мінімальний час еволюції між двома станами на будь-якому обертовому многовиді задається рівнянням (6.34). Гамільтоніан, який забезпечує таку еволюцію має такий самий вигляд, як для спіну 1 (6.35), тільки тут оператор $\mathbf{S}$ є оператором спіну s. Зауважимо, що гамільтоніан спіну s у магнітному полі не має достатньої кількості параметрів (не враховуючи випадок спіну 1/2), щоб забезпечити еволюцію між двома довільними станами. Таким чином, цей факт не дозволяє розглянути задачу квантової брахістохрони на всьому гільбертовому просторі, а саме, знайти оптимальну еволюцію спіну s між двома довільними його станами.

ВИСНОВКИ

Метою дисертаційної роботи було дослідження оптимальної еволюції класичних і квантових систем.

У роботі розв'язано такі основні завдання:

1. Розв'язано задачу про брахістохрону для частинки, яка рухається у сферично-симетричному ґравітаційному полі, що описується метрикою Шварцшільда. Зокрема, розраховано рівняння оптимальної траєкторії відносно нерухомих спостерігачів, які знаходяться вздовж траєкторії, а також знайдено рівняння такої траєкторії відносно віддаленого спостерігача. Подібно до того, як було зроблено у випадку ньютонівського поля, було знайдено рівняння брахістохрони у однорідному ґравітаційному полі Шварцшільда. Показано, що на великих відстанях від гравітаційного центру отримані рівняння перетворюються у рівняння, які раніше були отримані для ньютонівського представлення поля. Також було знайдено час руху по брахістохроні. Як приклад, для різних положень початкової і кінцевої точок було побудовано форми траєкторій і знайдено часи, які необхідно частинці затратити при русі по них.

2. Розглянуто задачу про брахістохрону для системи двох спінів з анізотропним гамільтоніаном Гайзенберґа без xz і xy компонент взаємодії. Отримано умови для її оптимальної еволюції у магнітному полі, яке спрямовано вздовж осі z. Показано, що така ево-

люція відбувається окремо на двох підпросторах, які задаються базисними векторами $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ і $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ відповідно. Також показано, що на такій системі можна побудувати квантові логічні елементи, які заплутують два спіни на одному і другому підпросторі, квантовий логічний елемент, який обмінює стани між двома спінами ($SWAP$) і подібний до останнього логічний елемент, який отриманий стан домножує на уявну одиницю ($iSWAP$). Розраховано умови для оптимальної реалізації цих операторів.

3. Вперше отримано двокроковий метод, який дозволяє приготувати довільний квантовий стан на системі двох спінів, взаємодія між якими описується ізотропною моделлю Гайзенберґа. Розглянуто спрощену версію цього методу, яка є застосовною до такої фізичної системи як атом зі спіном ядра $1/2$ і одним валентним електроном. Показано, що простіша версія методу не дозволяє досягнути довільного квантового стану двох спінів, проте дозволяє приготувати будь-який стан на підпросторі, що задається векторами $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$. Знайдено умови для створення довільного максимально заплутаного стану на цьому підпросторі. Як приклад, розглянуто приготування стану на системі атома фосфору в оточені атомів кремнію.

4. Вперше показано, що еволюція двоспінової системи, що описується ізотропним гамільтоніаном Гайзенберґа, яка знаходиться у магнітному полі, відбувається на многовиді, який є тором. Досліджено заплутаність станів, які належать до цього многовиду. Також на цьому многовиді знайдено лінії, що містять стани із однаковою заплутаністю, а також умови, які дозволяють системі еволюціонувати вздовж них. Отримано умови, які дозволяють

досягнути максимально заплутаного стану, коли початковий стан системи є факторизованим.

5. Розраховано метрику многовиду, який містить стани, що досягаються під час поворотів власного стану оператора проекції довільного спіну на визначений напрямок. Показано, що такий многовид є сферою із радіусом, який залежить від параметрів, що задають початковий стан спіну, а саме, від величини спіну і величини його проекції. Вперше розглянуто задачу брахістохрони на такому многовиді. Показано, що гамільтоніан, який задає еволюцію стану на даному многовиді є гамільтоніаном довільного спіну у магнітному полі. Доведено, що еволюція буде відбуватися за мінімально можливий час у випадку, коли поле буде спрямовано перпендикулярно до початкового і кінцевого станів, а траєкторія, що відповідає цій еволюції буде дугою великого кола, що з'єднує два стани на сфері.

ПОДЯКИ

Насамперед автор щиро вдячний науковому керівнику, доктору фіз.-мат. наук професору В. Ткачуку за постановку цікавих задач та за корисні консультації під час наукових досліджень.

Також велика подяка кандидату фіз.-мат. наук, доценту А. Ровенчаку та старшому викладачу Ю. Криницькому за корисні поради та за участь в обговоренні результатів.

Окрема подяка доктору фіз.-мат. наук старшому науковому співробітнику Інституту фізичної оптики Б. Падляку за корисні поради щодо експериментальної реалізації отриманих результатів.

Велику подяку автор висловлює колективу кафедри теоретичної фізики за цікаві і плідні дискусії та за допомогу і корисні зауваження під час оформлення цієї роботи, а особливо доктору фіз.-мат. наук професору І. Вакарчуку, кандидату фіз.-мат. наук, доценту В. Мигалю, кандидату фіз.-мат. наук, доценту С. Піх, кандидату фіз.-мат. наук, доценту М. Стецку, кандидату фіз.-мат. наук, доценту Р. Притулі, кандидату фіз.-мат. наук асистенту В. Пастухову, асистенту М. Самару, асистенту О. Григорчаку, викладачу Г. Паночко, інженеру О. Кіктєвій, старшому лаборанту В. Яремі, а також аспірантам В. Васюті та Х. Гнатенко.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Bernoulli J.* Supplementum defectus geometriæ Cartesiana circa inventionem Locorum / J. Bernoulli // Acta Eruditorum Lipsiae. — 1696. — Vol. 15. — P. 264-269.

[2] *Zermelo E.* Über das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung / E. Zermelo // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 1931. — Vol. 11. — P. 114–124.

[3] *Zlobec Sanjo.* Zermelo's navigation problems / Sanjo Zlobec // Stable Parametric Programming. — Springer US, 2001. — Vol. 57 of *Applied Optimization.* — P. 213-223.

[4] *Singh B.* Brachistochrone problem in nonuniform gravity / B. Singh, R. Kumar // Indian J. Pure Appl. Math. — 1988. — Vol. 19. — P. 575-585.

[5] *Gómez-Aíza S.* A simplified approach to the brachistochrone problem / S. Gómez-Aíza, R. W. Gómez, V. Marquina // Eur. J. Phys. — 2006. — Vol. 27. — P. 1091-1096.

[6] *Perlick V.* The brachistocrone problem in a stationary spacetime / V. Perlick // J. Math. Phys. — 1991. — Vol. 32. — P. 3148-3157.

[7] Time-optimal quantum evolution / A. Carlini, A. Hosoya, T. Koike, Y. Okudaira // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96. — Art. 060503. — 4 p.

[8] *Brody Dorje C.* On optimum Hamiltonians for state transformations / Dorje C. Brody, Daniel W. Hook // J. Phys. A. — 2006. — Vol. 39. — P. L167–L171.

[9] *Frydryszak A. M.* Quantum brachistochrone problem for a spin-1 system in a magnetic field / A. M. Frydryszak, V. M. Tkachuk // Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 77. — Art. 014103. — 4 p.

[10] *Giovannetti V.* Quantum limits to dynamical evolution / V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone // Phys. Rev. A. — 2003. — Vol. 67. — Art. 052109. — 8 p.

[11] Entanglement and the quantum brachistochrone problem / A. Borras, C. Zander, A. R. Plastino et al. // EPL. — 2008. — Vol. 81. — Art. 30007. — ?? p.

[12] Quantum brachistochrone evolution of systems of two identical particles: The role of entanglement / A. Borras, A. R. Plastino, M. Casas, A. Plastino // Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 78. — Art. 052104. — 7 p.

[13] *Фейнман Р. Ф.* Квантовомеханические ЭВМ / Р. Ф. Фейнман // УФН. — 1986. — Т. 149. — С. 671–688.

[14] *Kane B. E.* A silicon-based nuclear spin quantum computer / B. E. Kane // Nature. — 1998. — Vol. 393. — P. 133-137.

[15] Room-Temperature Quantum Bit Storage Exceeding 39 Minutes Using Ionized Donors in Silicon-28 / K. Saeedi, S. Simmons, J. Z. Salvail et al. // Science. — 2013. — Vol. 342. — P. 830-833.

[16] High-fidelity readout and control of a nuclear spin qubit in silicon / J. J. Pla, K. Y. Tan, J. P. Dehollain et al. // Nature. — 2013. — Vol. 496. — P. 334-338.

[17] *Kuzmak A. R.* The quantum brachistochrone problem for two spins-1/2 with anisotropic Heisenberg interaction / A. R. Kuzmak, V. M. Tkachuk // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2013. — Vol. 46. — Art. 155305. — 12 p.

[18] *Kuzmak A. R.* Preparation of quantum states of two spin-$\frac{1}{2}$ particles in the form of the Schmidt decomposition / A. R. Kuzmak, V. M. Tkachuk // Phys. Lett. A. — 2014. — Vol. 378. — P. 1469–1474.

[19] *Kuzmak A. R.* Quantum evolution on torus for two spins with isotropic Heisenberg interaction / A. R. Kuzmak, V. M. Tkachuk // Visnyk of the Lviv University. Series Physics. — 2013. — Vol. 48. — P. 279-284.

[20] *Kuzmak A. R.* The quantum brachistochrone problem for an arbitrary spin in a magnetic field / A. R. Kuzmak, V. M. Tkachuk // Phys. Lett. A. — 2015. — Vol. 379. — P. 1233–1239.

[21] *Кузьмак А.* Рівняння брахістохрони в полі чорної діри Шварцшільда / А. Кузьмак // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2010". — Львів, 19-21 травня 2010: Тези доповідей. — С. В8.

[22] *Кузьмак А.* Рівняння брахістохрони в полі чорної діри Шварцшільда / А. Кузьмак // X Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсо-

ваної речовини. — Львів, 3-4 червня 2010. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 45.

[23] *Kuzmak A. R.* Brachistochrone problem in the Schwarzschild metric / A. R. Kuzmak // Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics". — Kyiv, Ukraine, December 22-24, 2010: Program and Abstracts. — P. 71.

[24] *Кузьмак А.* Ефекти, які виникають для брахістохрони в метриці Шварцшільда / А. Кузьмак // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2011". — Львів, 18-20 травня 2011: Тези доповідей. — С. В10.

[25] *Кузьмак А.* Ефекти, які виникають для брахістохрони в метриці Шварцщільда / А. Кузьмак // 11-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, 1-3 червня 2011. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 37.

[26] *Kuzmak A. R.* Brachistochrone problem for two spin-1/2 particles in a 2-dimensional basis / A. R. Kuzmak // III Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics". — Kyiv, Ukraine, December 21-23, 2011: Program and Abstracts. — P. 128.

[27] *Кузьмак А.* Задача брахістохрони для системи двох спінів-1/2 / А. Кузьмак // 12-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, 30 травня-1 червня 2012. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 32.

[28] *Kuzmak A. R.* Quantum brachistochrone problem for two spin-1/2 / A. R. Kuzmak // Workshop on Current Problems in Physics, Lviv, 10-11 July, 2012. — J. Phys. Stud. — Vol. 16. — P. 3998.

[29] *Kuzmak A. R.* Quantum gates realized by two interacting spins / A. R. Kuzmak // IV Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics". — Kyiv, Ukraine, October 23-26, 2012: Program and Abstracts. — P. 44.

[30] *Кузьмак А. Р.* Геометрія многовиду власних станів спіну-1 в магнітному полі / А. Р. Кузьмак // Різдвяні дискусії 2013, Львів, 3-4 січня 2013. — Журн. фіз. дослідж., 2013. — Т. 17. — С. 1998-4.

[31] *Кузьмак А.* Геометрія многовиду власних станів спіну-j в магнітному полі / А. Кузьмак // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2013". — Львів, 15-17 травня 2013: Тези доповідей. — С. F6.

[32] *Kuzmak A. R.* Preparation of quantum states of two spins-1/2 in the Schmidt decomposition / A. R. Kuzmak // 6th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra - Lviv, 23-25 September 2013. — Zielona Góra, Poland, Book of abstracts. — P. 16.

[33] *Kuzmak A. R.* Preparation of a quantum states of two spin-1/2 / A. R. Kuzmak // Proceedings of VI International Conference "Physics of Disordered Systems". — Lviv, Ukraine, October 14-16, 2013. — P. 31.

[34] *Kuzmak A. R.* Preparation of quantum states of two spins-1/2 in the Schmidt decomposition / A. R. Kuzmak // V Young Scienti-

sts Conference "Problems of Theoretical Physics". — Kyiv, Ukraine, December 24-27, 2013: Program and Proceedings. — P. 31.

[35] *Кузьмак А. Р.* Геометрія многовиду власних станів спіну s у мігнітному полі / А. Р. Кузьмак // Різдвяні дискусії 2014, Львів, 9-10 січня 2014. — Журн. фіз. дослідж., 2014. — Т. 18. — С. 1998-5.

[36] *Кузьмак А.* Створення квантових логічних елементів на системі двох спінів 1/2 / А. Кузьмак // 14-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, 4-6 червня 2014. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 46.

[37] *Kuzmak A. R.* Geometry of the manifold of eigenstates of the operator of projection of spin-s on an arbitrary direction / A. R. Kuzmak // Workshop on Current Problems in Physics, Lviv, 08-09 July, 2014. — J. Phys. Stud. — Vol. 18. — P. 2998.

[38] *Kuzmak A. R.* The quantum brachistochrone problem on the rotational manifolds / A. R. Kuzmak // VI Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics" dedicated to the 105-th anniversary of M. M. Bogolyubov. — Kyiv, Ukraine, November 25-27, 2014: Program and Proceedings. — P. 30.

[39] *Кузьмак А. Р.* Рівняння брахістохрони в метриці Шварцшільда / А. Р. Кузьмак // Журн. фіз. досл. — 2011. — Т. 15. — Ст. 3002. — 9 с.

[40] *Erlichson Herman.* Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principle of least time / Herman Erlichson // Eur. J. Phys. — 1999. — Vol. 20. — P. 299-304.

[41] *Broer Henk W.* Bernoulli's light ray solution of the brachistochrone problem through Hamilton's eyes / Henk W. Broer // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2014. — Vol. 24. — Art. 1440009. — 15 p.

[42] *Іро Гарольд.* Класична механіка / Гарольд Іро. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 1999. — 464 с.

[43] *Desaix M.* The brachistochrone problem – an introduction to variational calculus for undergraduate students / M. Desaix, D. Anderson, M. Lisak // Eur. J. Phys. — 2005. — Vol. 26. — P. 857-864.

[44] *Rodgers Eric.* Brachistochrone and tautochrone curves for rolling bodies / Eric Rodgers // Am. J. Phys. — 1946. — Vol. 14. — P. 249-252.

[45] *Akulenko L. D.* An analog of the classical brachistochrone for a disk / L. D. Akulenko // Doklady Physics. — 2008. — Vol. 53. — P. 156-159.

[46] *Akulenko L. D.* The brachistochrone problem for a disk / L. D. Akulenko // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2009. — Vol. 73. — P. 371-378.

[47] *Legeza V. P.* Conditions for pure rolling of a heavy cylinder along a brachistochrone / V. P. Legeza // International Applied Mechanics. — 2010. — Vol. 46. — P. 730-735.

[48] *Stork David G.* The unrestrained brachistochrone / David G. Stork, Juxing Yang, Chris Stover // Am. J. Phys. — 1986. — Vol. 54. — P. 992-997.

[49] *Stork David G.* The general unrestrained brachistochrone / David G. Stork, Juxing Yang // Am. J. Phys. — 1988. — Vol. 56. — P. 22-26.

[50] *Atanackovic T. M.* The brachistochrone for a material point with arbitrary initial velocity / T. M. Atanackovic // Am. J. Phys. — 1978. — Vol. 46. — P. 1274-1275.

[51] *Yang Juxing.* The rolling unrestrained brachistochrone / Juxing Yang, David G. Stork, David Galloway // Am. J. Phys. — 1987. — Vol. 55. — P. 844-847.

[52] *Yamani H. A.* A cylindrical variation on the brachistochrone problem / H. A. Yamani, A. A. Mulhem // Am. J. Phys. — 1988. — Vol. 56. — P. 467-469.

[53] *Mertens Stephan.* Brachistochrones with loose ends / Stephan Mertens, Sebastian Mingramm // Eur. J. Phys. — 2008. — Vol. 29. — P. 1191-1199.

[54] An experimental study of the brachistochrone / F. M. Phelps III, F. M. Phelps IV, Ben Zorn, J Gormley // Eur. J. Phys. — 1982. — Vol. 3. — P. 1-4.

[55] *Gluck P.* Motion on cycloid path: a project / P. Gluck // Phys. Educ. — 2010. — Vol. 45. — P. 270-277.

[56] *Mungan Carl E.* Complementary curves of descent / Carl E. Mungan, Trevor C. Lipscombe // Eur. J. Phys. — 2013. — Vol. 34. — P. 59-65.

[57] *Van Dooren Rene.* A new look at the brachistochrone problem / Rene Van Dooren, Jacques Vlassenbroeck // Journal of Applied Mathematics and Physics. — 1980. — Vol. 31. — P. 785-790.

[58] *Anderson N.* Hamilton-Jacobi results for the brachistochrone / N. Anderson, A. M. Arthurs // Eur. J. Phys. — 1999. — Vol. 20. — P. 101-104.

[59] *Djukic Dj. S.* A note on the classical brachistochrone / Dj. S. Djukic, T. M. Atanackovic // Journal of Applied Mathematics and Physics. — 1976. — Vol. 27. — P. 677-681.

[60] *Roomany Hamzeh H.* A graph theoretic approach to the brachistochrone problem / Hamzeh H. Roomany // Computers in Physics. — 1990. — Vol. 4. — P. 303-306.

[61] *Alipanah A.* Nonclassical pseudospectral method for the solution of brachistochrone problem / A. Alipanah, M. Razzaghi, M Dehghan // Chaos, Solitons and Fractals. — 2007. — Vol. 34. — P. 1622-1628.

[62] *Criado C.* Solving the brachistochrone and other variational problems with soap films / C. Criado, N. Alamo // Am. J. Phys. — 2010. — Vol. 78. — P. 1400-1405.

[63] Brachistochrone with Coulomb friction / N. Ashby, W. E. Brittin, W. F. Love, W. Wyss // Am. J. Phys. — 1975. — Vol. 43. — P. 902-906.

[64] *Hayen Jeffrey C.* Brachistochrone with Coulomb friction / Jeffrey C. Hayen // Int. J. Non-Linear Mechanics. — 2005. — Vol. 40. — P. 1057-1075.

[65] *Covic Vukman.* Brachistochrone on a surface with Coulomb friction / Vukman Covic, Miroslav Veskovic // Int. J. Non-Linear Mechanics. — 2008. — Vol. 43. — P. 437-450.

[66] *Jones S. E.* Remarks on the brachistochrone with viscous friction / S. E. Jones, T. M. Atanackovic, M. Dehn // Am. J. Phys. — 1988. — Vol. 56. — P. 758-759.

[67] *Vratanar B.* On the analytical solution of the brachistochrone problem in a non-conservative field / B. Vratanar, M. Saje // Int. J. Non-Linear Mechanics. — 1998. — Vol. 33. — P. 489-505.

[68] *Cooper Paul W.* Through the Earth in forty minutes / Paul W. Cooper // Am. J. Phys. — 1966. — Vol. 34. — P. 68-70.

[69] *Kirmser Philip G.* Terrestrial brachistochrone / Philip G. Kirmser // Am. J. Phys. — 1966. — Vol. 34. — P. 701.

[70] *Patel Jashbhai.* Solution of the second-order nonlinear differential equation for the terrestrial brachistochrone / Jashbhai Patel // Am. J. Phys. — 1967. — Vol. 35. — P. 436-437.

[71] *Despautz J. F.* Nonlinear differential equations and the terrestrial brachistochrone / J. F. Despautz, R. A. Lerman // AIAA Journal. — 1969. — Vol. 7. — P. 1173-1174.

[72] *Mitchell David R.* Brachistochrone of a spherical uniform mass distribution / David R. Mitchell // eprint arXiv:math-ph/0611055. — 2008.

[73] *Aravind P. K.* Simplified approach to brachistochrone problems / P. K. Aravind // Am. J. Phys. — 1981. — Vol. 49. — P. 884-886.

[74] *Prussing J. E.* Brachistochrone-tautochrone problem in a homogeneous sphere / J. E. Prussing // Am. J. Phys. — 1976. — Vol. 44. — P. 304-305.

[75] *Klotz Alexander R.* The gravity tunnel in a non-uniform Earth / Alexander R. Klotz // eprint arXiv:1308.1342 [physics.class-ph]. — 2013.

[76] *Dziewonski Adam M.* Preliminary reference Earth model / Adam M. Dziewonski, Don L. Anderson // Physics of the Earth and Planetary Interiors. — 1981. — Vol. 25. — P. 297-356.

[77] *McKinley John M.* Brachistochrones, tautochrones, evolutes and tesselations / John M. McKinley // Am. J. Phys. — 1979. — Vol. 47. — P. 81-86.

[78] *Goldstein Harris F.* Relativistic brachistocrone / Harris F. Goldstein, Carl M. Bender // J. Math. Phys. — 1986. — Vol. 27. — P. 507-511.

[79] *Kamath S. G.* Classical radiation from a relativistic charge accelerated along a brachistochrone / S. G. Kamath, V. V. Sreedhar // Phys. Rev. A. — 1987. — Vol. 36. — P. 2478–2481.

[80] *Kamath S. G.* The brachistocrone in almost flat space / S. G. Kamath // J. Math. Phys. — 1988. — Vol. 29. — P. 2268-2272.

[81] Faster than Hermitian quantum mechanics / Carl M. Bender, Dorje C. Brody, Hugh F. Jones, Bernhard K. Meister // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 98. — Art. 040403. — 4 p.

[82] *Bender Carl M.* Optimal time evolution for Hermitian and non-Hermitian Hamiltonians / Carl M. Bender, Dorje C. Brody // Time in Quantum Mechanics - Vol. 2 / edited byGonzalo Muga, Andreas Ruschhaupt, Adolfo Campo. — Springer Berlin Heidelberg, 2009. — Vol. 789 of *Lecture Notes in Physics*. — P. 341-361.

[83] *Bender Carl M.* Faster than Hermitian time evolution / Carl M. Bender // SIGMA. — 2007. — Vol. 3. — Art. 126. — 10 p.

[84] *Ткачук В. М.* Фундаментальні проблеми квантової механіки / В. М. Ткачук. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2011. — 144 с.

[85] *C. Brody Dorje.* Elementary derivation for passage times / Brody Dorje C. // J. Phys. A. — 2003. — Vol. 36. — P. 5587-5593.

[86] *Boscain Ugo.* Time minimal trajectories for a spin 1/2 particle in a magnetic field / Ugo Boscain, Paolo Mason // J. Math. Phys. — 2006. — Vol. 47. — Art. 062101. — 29 p.

[87] Time-optimal unitary operations / Alberto Carlini, Akio Hosoya, Tatsuhiko Koike, Yosuke Okudaira // Phys. Rev. A. — 2007. — Vol. 75. — Art. 042308. — 8 p.

[88] *Khaneja Navin.* Sub-riemannian geometry and time optimal control of three spin systems: Quantum gates and coherence transfer / Navin Khaneja, Steffen J. Glaser, Roger Brockett // Phys. Rev. A. — 2002. — Vol. 65. — Art. 032301. — 11 p.

[89] *Reissa Timo O.* Broadband geodesic pulses for three spin systems: time-optimal realization of effective trilinear coupling terms and indirect swap gates / Timo O. Reissa, Navin Khaneja, Steffen J. Glaser // J. Magn. Reson. — Vol. 165. — P. 95–101.

[90] *Yuan Haidong.* Time optimal control of coupled qubits under nonstationary interactions / Haidong Yuan, Navin Khaneja // Phys. Rev. A. — 2005. — Vol. 72. — Art. 040301. — 4 p.

[91] *Childs Andrew M.* Lower bounds on the complexity of simulating quantum gates / Andrew M. Childs, Henry L. Haselgrove, Mi-

chael A. Nielsen // Phys. Rev. A. — 2003. — Vol. 68. — Art. 052311. — 6 p.

[92] *Zeier Robert.* Gate simulation and lower bounds on the simulation time / Robert Zeier, Markus Grassl, Thomas Beth // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 70. — Art. 032319. — 16 p.

[93] *Ashhab S.* Speed limits for quantum gates in multiqubit systems / S. Ashhab, P. C. de Groot, Franco Nori // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 85. — Art. 052327. — 7 p.

[94] *Khaneja Navin.* Time optimal control in spin systems / Navin Khaneja, Roger Brockett, Steffen J. Glaser // Phys. Rev. A. — 2001. — Vol. 63. — Art. 032308. — 13 p.

[95] Spin dynamics: a paradigm for time optimal control on compact Lie groups / G. Dirr, U. Helmke, K. Hüper et al. // J. Glob. Opt. — 2006. — Vol. 35. — P. 443-474.

[96] *Vidal G.* Interaction cost of nonlocal gates / G. Vidal, K. Hammerer, J. I. Cirac // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 88. — Art. 237902. — 4 p.

[97] *Hammerer K.* Characterization of nonlocal gates / K. Hammerer, G. Vidal, J. I. Cirac // Phys. Rev. A. — 2002. — Vol. 66. — Art. 062321. — 13 p.

[98] *Masanes Ll.* Time–optimal hamiltonian simulation and gate synthesis using homogeneous local unitaries / Ll. Masanes, G. Vidal, J.I. Latorre // Quantum Inf. Comput. — 2002. — Vol. 2. — P. 285–296.

[99] Geometric theory of nonlocal two-qubit operations / Jun Zhang, Jiri Vala, Shankar Sastry, K. Birgitta Whaley // Phys. Rev. A. — 2003. — Vol. 67. — Art. 042313. — 18 p.

[100] *Giovannetti V.* The role of entanglement in dynamical evolution / V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone // EPL. — 2003. — Vol. 62. — P. 615-621.

[101] Connection between entanglement and the speed of quantum evolution / J. Batle, M. Casas, A. Plastino, A. R. Plastino // Phys. Rev. A. — 2005. — Vol. 72. — Art. 032337. — 5 p.

[102] Entanglement and the lower bounds on the speed of quantum evolution / A. Borrás, M. Casas, A. R. Plastino, A. Plastino // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 74. — Art. 022326.

[103] Genuine tripartite entanglement in quantum brachistochrone evolution of a three-qubit system / Bao-Kui Zhao, Fu-Guo Deng, Feng-Shou Zhang, Hong-Yu Zhou // Phys. Rev. A. — 2009. — Vol. 80. — Art. 052106. — 6 p.

[104] Entanglement and the speed of evolution of multi-partite quantum systems / C. Zander, A. R. Plastino, A. Plastino, M. Casas // J. Phys. A. — 2007. — Vol. 40. — P. 2861-2872.

[105] *Divincenzo D. P.* The Physical Implementation of Quantum Computation / D. P. Divincenzo // Fortschritte der Physik. — 2000. — Vol. 48. — P. 771-783.

[106] *Loss Daniel.* Quantum computation with quantum dots / Daniel Loss, David P. DiVincenzo // Phys. Rev. A. — 1998. — Vol. 57. — P. 120–126.

[107] *Burkard Guido*. Coupled quantum dots as quantum gates / Guido Burkard, Daniel Loss, David P. DiVincenzo // Phys. Rev. B. — 1999. — Vol. 59. — P. 2070–2078.

[108] *Rohling Niklas*. Tomography scheme for two spin-$\frac{1}{2}$ qubits in a double quantum dot / Niklas Rohling, Guido Burkard // Phys. Rev. B. — 2013. — Vol. 88. — Art. 085402. — 11 p.

[109] Coherent Manipulation of Coupled Electron Spins in Semiconductor Quantum Dots / J. R. Petta, A. C. Johnson, J. M. Taylor et al. // Science. — 2005. — Vol. 309. — P. 2180-2184.

[110] Electric field-driven coherent spin reorientation of optically generated electron spin packets in ingaas / S. Kuhlen, K. Schmalbuch, M. Hagedorn et al. // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 109. — Art. 146603. — 5 p.

[111] Electron-spin-resonance transistors for quantum computing in silicon-germanium heterostructures / Rutger Vrijen, Eli Yablonovitch, Kang Wang et al. // Phys. Rev. A. — 2000. — Vol. 62. — Art. 012306. — 10 p.

[112] Dephasing time of GaAs electron-spin qubits coupled to a nuclear bath exceeding 200μs / H. Bluhm, S. Foletti, I. Neder et al. // Nature Physics. — 2011. — Vol. 7. — P. 109-113.

[113] Driven coherent oscillations of a single electron spin in a quantum dot / F. H. L. Koppens, C. Buizert, K. J. Tielrooij et al. // Nature. — 2006. — Vol. 442. — P. 766-771.

[114] Coherent Control of a Single Electron Spin with Electric Fields / K. C. Nowack, F. H. L. Koppens, Y. V. Nazarov,

L. M. K. Vandersypen // Science. — 2007. — Vol. 318. — P. 1430-1433.

[115] Coherent singlet-triplet oscillations in a silicon-based double quantum dot / B. M. Maune, M. G. Borselli, B. Huang et al. // Nature. — 2012. — Vol. 481. — P. 344-347.

[116] *Wei L. F.* Quantum computation with josephson qubits using a current-biased information bus / L. F. Wei, Yu-xi Liu, Franco Nori // Phys. Rev. B. — 2005. — Vol. 71. — Art. 134506. — 12 p.

[117] Josephson Persistent-Current Qubit / J. E. Mooij, T. P. Orlando, L. Levitov et al. // Science. — 1999. — Vol. 285. — P. 1036-1039.

[118] *Makhlin Yuriy.* Quantum-state engineering with josephson-junction devices / Yuriy Makhlin, Gerd Schön, Alexander Shnirman // Rev. Mod. Phys. — 2001. — Vol. 73. — P. 357–400.

[119] Coupling superconducting qubits via a cavity bus / J. Majer, J. M. Chow, J. M. Gambetta et al. // Nature. — 2007. — Vol. 449. — P. 443-447.

[120] A single-atom electron spin qubit in silicon / J. J. Pla, K. Y. Tan, J. P. Dehollain et al. // Nature. — 2012. — Vol. 489. — P. 541-545.

[121] Single-shot readout of an electron spin in silicon / A. Morello, J. J. Pla, F. A. Zwanenburg et al. // Nature. — 2010. — Vol. 467. — P. 687-691.

[122] Electron spin coherence exceeding seconds in high-purity silicon / A. M. Tyryshkin, S. Tojo, J. J. L. Morton et al. // Nature Materials. — 2012. — Vol. 11. — P. 143-147.

[123] Solid-state quantum memory using the ^{31}P nuclear spin / J. J. L. Morton, A. M. Tyryshkin, R. M. Brown et al. // Nature. — 2008. — Vol. 455. — P. 1085-1088.

[124] Quantum information storage for over 180 s using donor spins in a ^{28}Si "semiconductor vacuum" / M. Steger, K. Saeedi, M. L. W. Thewalt et al. // Science. — 2012. — Vol. 336. — P. 1280-1283.

[125] Electrical detection of coherent 31P spin quantum states / A. R. Stegner, C. Boehme, H. Huebl et al. // Nature Physics. — 2006. — Vol. 2. — P. 835-838.

[126] Spin echoes in the charge transport through phosphorus donors in silicon / Hans Huebl, Felix Hoehne, Benno Grolik et al. // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 100. — Art. 177602. — 4 p.

[127] Long-lived spin coherence in silicon with an electrical spin trap readout / G. W. Morley, D. R. McCamey, H. A. Seipel et al. // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101. — Art. 207602. — 4 p.

[128] Spin-dependent recombination between phosphorus donors in silicon and Si/sio$_2$ interface states investigated with pulsed electrically detected electron double resonance / Felix Hoehne, Hans Huebl, Bastian Galler et al. // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 104. — Art. 046402. — 4 p.

[129] Optimal control, geometry, and quantum computing / Michael A. Nielsen, Mark R. Dowling, Mile Gu, Andrew C. Doherty // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 73. — Art. 062323. — 7 p.

[130] *Nielsen Michael A.* A geometric approach to quantum circuit lower bounds / Michael A. Nielsen // Quantum Inf. Comput. — Vol. 6. — P. 213–262.

[131] Quantum Computation as Geometry / M. A. Nielsen, M. R. Dowling, M. Gu, A. C. Doherty // Science. — 2006. — Vol. 311. — P. 1133-1135.

[132] Quantum Gate Design Metric / N. Khaneja, B. Heitmann, A. Spoerl et al. // eprint arXiv:quant-ph/0605071. — 2006.

[133] *Li B.* Geometry of Quantum Computation with Qutrits / B. Li, Z.-H. Yu, S.-M. Fei // Scientific Reports. — 2013. — Vol. 3. — Art. 2594. — 6 p.

[134] Bloch space structure, the qutrit wavefunction and atom-field entanglement in three-level systems / S. Sen, M. R. Nath, T. K. Dey, G. Gangopadhyay // Annals of Physics. — 2012. — Vol. 327. — P. 224-252.

[135] *Bertlmann R. A.* Bloch vectors for qudits / R. A. Bertlmann, P. Krammer // J.Phys. A. — 2008. — Vol. 41. — Art. 235303. — 21 p.

[136] *Brody D. C.* Geometric quantum mechanics / D. C. Brody, L. P. Hughston // J. Geom. Phys. — 2001. — Vol. 38. — P. 19-53.

[137] *Provost J. P.* Riemannian structure on manifolds of quantum states / J. P. Provost, G. Vallee // Commun. Math. Phys. — 1980. — Vol. 76. — P. 289-301.

[138] *Brody D. C.* Coherent states and rational surfaces / D. C. Brody, E.-M. Graefe // J. Phys. A. — 2010. — Vol. 43. — Art. 255205. — 14 p.

[139] Exceeding the classical capacity limit in a quantum optical channel / Mikio Fujiwara, Masahiro Takeoka, Jun Mizuno, Masahide Sasaki // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 90. — Art. 167906. — 4 p.

[140] Triggered qutrits for quantum communication protocols / G. Molina-Terriza, A. Vaziri, J. Řehá ček et al. // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Vol. 92. — Art. 167903. — 4 p.

[141] Security of quantum key distribution using d-level systems / Nicolas J. Cerf, Mohamed Bourennane, Anders Karlsson, Nicolas Gisin // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 88. — Art. 127902. — 4 p.

[142] *Bruß D.* Optimal eavesdropping in cryptography with three-dimensional quantum states / D. Bruß, C. Macchiavello // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 88. — Art. 127901. — 4 p.

[143] Security of quantum key distribution with entangled qutrits / Thomas Durt, Nicolas J. Cerf, Nicolas Gisin, Marek Żukowski // Phys. Rev. A. — 2003. — Vol. 67. — Art. 012311. — 6 p.

[144] *Hillery Mark.* Probabilistic implementation of universal quantum processors / Mark Hillery, Vladimír Buzek, Mário Ziman // Phys. Rev. A. — 2002. — Vol. 65. — Art. 022301. — 7 p.

[145] Quantum computation based on d -level cluster state / D. L. Zhou, B. Zeng, Z. Xu, C. P. Sun // Phys. Rev. A. — 2003. — Vol. 68. — Art. 062303. — 11 p.

[146] *Bullock Stephen S.* Asymptotically optimal quantum circuits for d-level systems / Stephen S. Bullock, Dianne P. O'Leary, Gavin K. Brennen // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 94. — Art. 230502. — 4 p.

[147] Experimental quantum cryptography with qutrits / Simon Gröblacher, Thomas Jennewein, Alipasha Vaziri et al. // New J. Phys. — 2006. — Vol. 8. — Art. 75. — 8 p.

[148] *Hugh D. Mc.* Trapped-ion qutrit spin molecule quantum computer / D. Mc. Hugh, J. Twamley // New J. Phys. — 2005. — Vol. 7. — Art. 174. — 9 p.

[149] *Mintert Florian.* Ion-trap quantum logic using long-wavelength radiation / Florian Mintert, Christof Wunderlich // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 87. — Art. 257904. — 4 p.

[150] *Figger Hartmut.* Laser Physics at the Limits / Hartmut Figger, Dieter Meschede, Claus Zimmermann. — Berlin : Springer-Verlag, 2002. — 522 p.

[151] *Mc Hugh D.* Quantum computer using a trapped-ion spin molecule and microwave radiation / D. Mc Hugh, J. Twamley // Phys. Rev. A. — 2005. — Vol. 71. — Art. 012315. — 6 p.

[152] Qutrit state engineering with biphotons / Yu. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, S. P. Kulik et al. // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Vol. 93. — Art. 230503. — 4 p.

[153] Polarization state of a biphoton: Quantum ternary logic / A. V. Burlakov, M. V. Chekhova, O. A. Karabutova et al. // Phys. Rev. A. — 1999. — Vol. 60. — P. R4209–R4212.

[154] *Zhukov A.A.* Operationalistic orthogonality condition for single-mode biphotons (qutrits) / A.A. Zhukov, G.A. Maslennikov, M.V. Chekhova // JETP Letters. — 2002. — Vol. 76. — P. 596-599.

[155] *Burlakov A.V.* Polarization optics of biphotons / A.V. Burlakov, M.V. Chekhova // JETP Letters. — 2002. — Vol. 75. — P. 432-438.

[156] *Chekhova M. V.* The Schmidt modes of biphoton qutrits: Poincare-sphere representation / M. V. Chekhova, M. V. Fedorov // J. Phys. B. — 2013. — Vol. 46. — Art. 095502. — 10 p.

[157] *Ландау Л. Д.* Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Москва : Издательство “Наука”, 1967. — 460 с.

[158] Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels / Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau et al. // Phys. Rev. Lett. — 1993. — Vol. 70. — P. 1895–1899.

[159] Elementary gates for quantum computation / Adriano Barenco, Charles H. Bennett, Richard Cleve et al. // Phys. Rev. A. — 1995. — Vol. 52. — P. 3457–3467.

[160] *Schuch Norbert.* Natural two-qubit gate for quantum computation using the XY interaction / Norbert Schuch, Jens Siewert // Phys. Rev. A. — 2003. — Vol. 67. — Art. 032301. — 8 p.

[161] Analysis of quantum coherence in bismuth-doped silicon: A system of strongly coupled spin qubits / M. H. Mohammady, G. W. Morley, A. Nazir, T. S. Monteiro // Phys. Rev. B. — 2012. — Vol. 85. — Art. 094404. — 16 p.

[162] *Skinner A. J.* Hydrogenic spin quantum computing in silicon: A digital approach / A. J. Skinner, M. E. Davenport, B. E. Kane // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 90. — Art. 087901. — 4 p.

[163] Controlled remote state preparation of arbitrary two and three qubit states via the brown state / Xiu-Bo Chen, Song-Ya Ma, Yuan Su et al. // Quantum Information Processing. — 2012. — Vol. 11. — P. 1653-1667.

[164] Joint remote preparation of an arbitrary two-qubit state via GHZ-type states / Kui Hou, Yi-Bao Li, Gou-Hong Liu, Shou-Qi Sheng // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2011. — Vol. 44. — Art. 255304. — 12 p.

[165] Manipulation of mobile spin coherence using magnetic-field-free electron spin resonance / H. Sanada, Y. Kunihashi, H. Gotoh et al. // Nature Physics. — 2013. — Vol. 9. — P. 280-283.

[166] *Schweiger A.* Principles of pulse electron paramagnetic resonance / A. Schweiger, G. Jeschke. — Oxfors : Oxford University Press, 2001. — 578 p.

[167] Electrical detection and magnetic-field control of spin states in phosphorus-doped silicon / H. Morishita, L. S. Vlasenko, H. Tanaka et al. // Phys. Rev. B. — 2009. — Vol. 80. — Art. 205206. — 6 p.

[168] *Feher G.* Electron spin resonance experiments on donors in silicon. i. Electronic structure of donors by the electron nuclear double resonance technique / G. Feher // Phys. Rev. — 1959. — Vol. 114. — P. 1219–1244.

[169] Optically-detected NMR of optically-hyperpolarized ^{31}P neutral donors in ^{28}Si / M. Steger, T. Sekiguchi, A. Yang et al. // Journal of Applied Physics. — 2011. — Vol. 109. — Art. 102411. — 6 p.

[170] Ultrafast precessional magnetization reversal by picosecond magnetic field pulse shaping / T. Gerrits, H. A. M. van den Berg, J. Hohlfeld et al. // Nature. — 2002. — Vol. 418. — P. 509-512.

[171] *Jehenson P.* Analytical method for the compensation of eddy-current effects induced by pulsed magnetic field gradients in NMR systems / P. Jehenson, M. Westphal, N. Schuff // Journal of Magnetic Resonance. — 1990. — Vol. 90. — P. 264-278.

[172] Suppression of magnetic-field pulse-induced magnetization precession by pulse tailoring / M. Bauer, R. Lopusnik, J. Fassbender, B. Hillebrands // Applied Physics Letters. — 2000. — Vol. 76. — P. 2758-2760.

[173] Fidelity between unitary operators and the generation of robust gates against off-resonance perturbations / Renan Cabrera, Ofer M. Shir, Rebing Wu, Herschel Rabitz // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2011. — Vol. 44. — Art. 095302. — 13 p.

[174] *Chruściński Dariusz.* Geometric aspects of quantum mechanics and quantum entanglement / Dariusz Chruściński // Journal of Physics: Conference Series. — 2005. — Vol. 30. — P. 9-16.

[175] *Ashtekar Abhay.* Geometrical Formulation of Quantum Mechanics / Abhay Ashtekar, Troy A. Schilling // eprint arXiv:gr-qc/9706069. — 1997.

[176] *Anandan J.* A geometric approach to quantum mechanics / J. Anandan // Foundations of Physics. — 1991. — Vol. 21. — P. 1265-1284.

[177] *Bengtsson I.* Geometry of Quantum States / I. Bengtsson, K. Zyczkowski. — Cambridge : Cambridge University Press, 2006. — 418 p.

[178] *Kobayashi Shoshichi.* Foundations of Differential Geometry, Volume 2 / Shoshichi Kobayashi, Katsumi Nomizu. — Genéve : Interscience Publishers, 1969. — 488 p.

[179] *Wootters William K.* Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits / William K. Wootters // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 80. — P. 2245–2248.

[180] *Hill Scott.* Entanglement of a pair of quantum bits / Scott Hill, William K. Wootters // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78. — P. 5022–5025.

[181] *Anandan J.* Geometry of quantum evolution / J. Anandan, Y. Aharonov // Phys. Rev. Lett. — 1990. — Vol. 65. — P. 1697–1700.