

## **Відгук**

офіційного опонента на дисертаційну роботу Кузьмака Андрія Романовича «Задача про брахістохрону в класичній і квантовій механіці», подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.04.02 – теоретична фізика

З часу виникнення задачі про брахістохрону в класичній механіці вона еволюціонувала й розвивалася разом із розвитком науки – від ньютонівської механіки – до релятивістської, а також – до квантової механіки. Поняття квантово-механічної брахістохрони видається парадоксальним. Адже класична брахістохrona є оптимальною траєкторією системи, яку вона описує в просторі під дією прикладених до неї сил і зв'язків. У квантовій механіці з-за принципу Гейзенберга поняття траєкторії відсутнє й тому, на перший погляд, видається дивним питання: про яку брахістохрону може йти мова?!

Поняття квантової брахістохрони стає цілком логічним і зрозумілим, якщо його розглядати за аналогією з класичним у більш широкому розумінні. Справді, задача про класичну брахістохрону є задаючию про пошук оптимальної (за відповідних умов) зміни з часом стану механічної системи, який задається сукупністю її узагальнених координат та імпульсів. Оскільки у квантовій механіці стан системи визначається хвильовою функцією, яка залежить лише від координат за фіксованого часу, то цілком логічно виникає поняття квантової брахістохрони як оптимальної (за певними умовами) зміни з часом стану квантово-механічної системи.

Брахістохронні задачі постійно залишаються в центрі уваги дослідників, оскільки їх актуальність зростає, особливо у зв'язку з реальною перспективою створення квантових комп’ютерів. У дисертації Кузьмака Андрія Романовича «Задача про брахістохрону в класичній і квантовій механіці» детально вивчаються нові різноманітні аспекти релятивістських та квантових брахістохрон, а тому ця робота безумовно актуальна.

Незважаючи на те, що в силу актуальності брахістохронних задач ними займаються багато дослідників у провідних наукових центрах, дисертаційна робота Кузьмака Андрія Романовича відзначається новизною та оригінальністю виконання. Головна увага автора роботи концентрується на двох напрямках досліджень.

У першому напрямку розв'язана задача академічного, фундаментального типу про брахістохрону в метриці Шварцшильда, де отримані рівняння брахістохрони як для спостерігачів, розташованих уздовж неї, так і для віддаленого спостерігача.

У другому напрямку виконано великий об'єм фундаментальних досліджень задач про квантово-механічні брахістохрони, які можуть мати важливе практичне застосування при реалізації квантових комп'ютерів. Автором роботи вперше розв'язано кілька важливих задач з теорії квантової брахістохрони.

Розв'язана задача про квантову брахістохрону системи з двома спінами  $\frac{1}{2}$  з анізотропним гамільтоніаном Гейзенберга при відсутності  $xu$  і  $uz$  компонент взаємодії.

Запропоновано метод приготування довільного стану системи двох спінів ( $\frac{1}{2}$ ), що може експериментально реалізовуватися на атомі зі спіном ядра  $\frac{1}{2}$  і валентним електроном із таким же спіном.

Розв'язано задачу про еволюцію системи двох спінів у магнітному полі на основі ізотропної моделі Гейзенберга і показано, що еволюція відбувається на торі як двопараметричному многовиді.

Виявлено, що многовид, на якому відбувається еволюція системи з поворотами власного стану оператора проекції спіну на певний напрямок, є сферою, радіус якої залежить від величини проекції спіну. Показано, що час еволюції є мінімальним за умови, що вектор напруженості магнітного поля та вектори початкового й кінцевого станів є взаємно-перпендикулярними.

У першому розділі дисертації Кузьмак А.Р. привів детальний огляд і аналіз задач про класичні брахістохрони та методи їх розв'язування протягом усього часу їх існування від першої публікації (1697 р.) до наших днів. Також виконано аналіз постановки задач і методів їх розв'язування для квантових брахістохрон від моменту появи першої роботи (2006 р.) до цього часу.

Другий розділ роботи присвячений вивченню задачі про брахістохрону в загальній теорії відносності в метриці Шварцшильда – у сферично-симетричному гравітаційному полі. Перший параграф містить короткий огляд праць, у яких вивчалися брахістохрони у спеціальній (перша робота опублікована в 1986 р.) і

наступні праці в загальній теорії відносності.

Решта параграфів цього розділу є викладом оригінальних робіт автора, в яких розв'язується задача про оптимальну траекторію частинки в метриці Шварцшильда в загальному випадку. Послідовно отримані рівняння брахістохрони – як для «рухомого» разом із матеріальною точкою, так і «нерухомого» у віддаленій точці – спостерігачів. Знайдено розв'язки цих рівнянь для обох спостерігачів, тобто отримано як траекторію руху, так і його тривалість. При цьому автор акуратно впорався з розрахунком сингулярних інтегралів, що дало можливість отримати коректні висновки про характерні властивості брахістохрони у ЗТВ й показати їх кореляцію з властивостями класичної брахістохрони.

Починаючи з третього розділу в дисертації розглядаються задачі про квантові брахістохрони. Так, у третьому розділі вивчається брахістохона двоспінової системи в магнітному полі, що описується відомим гамільтоніаном із роботи [87] розширеним урахуванням  $J_{xy}$  та  $J_{yx}$  взаємодії. Ця постановка й розв'язок задачі виявилися важливим кроком уперед, оскільки на відміну від цитованої роботи, де генерування логічного елемента  $U_{ENT}$  не відбувалося за мінімальний час, на запропонованому автором розширеному гамільтоніані такий мінімальний час генерування логічного елемента існує, і в дисертації він визначений. Виявилося, що на обох підпросторах, що задаються векторами  $(|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$  і  $(|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle)$ , за певних заданих умов часи переходу з початкових у кінцеві стани є мінімальними й однаковими. Отже, існує можливість створення квантових логічних елементів, що заплутують два спіни в обох підпросторах, а також логічні елементи, що міняють місцями стани двох спінів – (SWAP) та (iSWAP). Отриманий результат є важливим для реалізації різних алгоритмів у квантовій інформації.

Четвертий розділ дисертації присвячений дослідженню цікавої й надважливої задачі, що стосується пошуку методів створення довільного квантового стану на двокубітових системах, керованих магнітним полем. Хоча практичне керування окремими спінами магнітним полем поки що неможливе, тим більш цікаво: як це можна було б реалізовувати з теоретичної точки зору. Така задача вперше формулюється й винахідливо розв'язується автором у двох

підходах. Перший – це шлях двокрокового приготування довільного квантового стану двох спінів  $\frac{1}{2}$ . Уважається, що протягом часу  $t_1$  взаємодія між спінами без поля описується ізотропним гамільтоніаном Гейзенберга, а при  $t > t_1$  обидва спіни перебувають у різних імпульсних магнітних полях. У другому підході магнітне поле вважається однаковим для обох спінів і з-за цього міжспінова взаємодія не може бути занехтувана й тому міститься в гамільтоніані системи (4.22).

Перевага першого підходу полягає в тому, що він дає можливість із вихідного стану системи перейти до довільного стану, але недолік – у необхідності прикладання сильних і локалізованих у просторі й часі магнітних полів. Другий підхід не дає можливості досягнути довільного стану на системі двох спінів, однак якщо початковий стан спроектовано на вісь  $Oz$ , то можна отримати довільний стан на підпросторі векторів  $|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle$ .

Важливою видається реалістична оцінка величини магнітного поля й часу переходу між спіновими станами атома фосфору, оточеного атомами кремнію. Адже така система має велику тривалість когеренції спіна валентного електрона  $i$ , як виявлено, може з великою точністю та за короткий час отримати квантовий логічний елемент  $W$ , який зі стану  $|\uparrow\downarrow\rangle$  переводить її у стан

$|T_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$ . У результаті автор робить переконливий висновок про те,

що атом фосфору, оточений атомами кремнію, може слугувати «будівельним» блоком квантового комп’ютера.

**П’ятий** і **шостий** розділи дисертації присвячені вивченню еволюції спінових систем на многовидах. Виконано аналіз метрики многовидів двох систем: двоспінової  $(\frac{1}{2})$  в магнітному полі, що паралельне осі  $z$ , та односпінової – у магнітному полі. Для першої системи, що описується ізотропним гамільтоніаном Гейзенберга, встановлено, що многовид є тором. Для другої – з гамільтоніаном довільного спіну в магнітному полі – многовид є сферою, радіус якої залежить від величини спіна і від його проекції на виділену вісь. Доведено, що мінімальний час еволюції з початкового до кінцевого стану системи буде за умови, що напруженість магнітного поля перпендикулярна до площини, в якій

перебувають обидва стани.

Результати наукових досліджень Кузьмака Андрія Романовича викладені в дисертації у логічній послідовності. Вони добре обґрутовані, оскільки базуються на адекватних моделях досліджуваних систем, до аналізу яких застосовується належний математичний апарат. Висновки роботи переконливі й будуть корисними як теоретикам, так, можливо, й експериментаторам, які наважаться практично конструювати квантові комп'ютери...

Результати роботи опубліковані у п'яти журнальних статтях та у 18 тезах доповідей на міжнародних та українських конференціях і семінарах, які дисертант представляв особисто.

Хоча високий рівень дисертації Кузьмака Андрія Романовича не викликає жодного сумніву, однак залишається декілька запитань і зауважень.

1. При розрахунку форми траєкторії й часу руху матеріальної точки вздовж брахістохрони в полі Шварцшільда, доводиться розраховувати сингулярні інтеграли (з однією й двома сингулярностями, відповідно). Спосіб їх розрахунку зрозумілий і виглядає надійним, однак виникає запитання: чи вибір розміру інтервалу  $\eta$ , в межах якого змінюється  $\delta$ , при виході шуканого інтегралу на насичення, не приводить до такої величини  $\delta$ , при якій критерій  $R_s - R_c > \delta$  порушується? Було б переконливіше, якби були наведені числові оцінки.
2. Було б добре, якби було сказано: яким числовим методом і з якою точністю розраховувалися нерозбіжні інтеграли в задачі про брахістохрону в ЗТВ.
3. Точність отримання логічного елемента  $W$  автор оцінює певною функцією  $F(U(t))$  з посиланням на роботу [173], не коментуючи, чому так можна діяти – це по-перше; а по-друге, неясно: чому в формулі (4.44) фігурує  $W^+$ , а в дисертації –  $W$ . Це описка, чи  $W^+$  переходить у  $W$  за умов, накладених на оператор еволюції, коли  $B_z = A/(\gamma_e + \gamma_n)$  і  $t = \pi/\sqrt{2}A$ ? Також неясно, звідки винikли (з яких міркувань) саме такі умови?
4. У роботі трапляються кілька описок, а інколи – оригінальна стилістика.

Автореферат дисертації повною мірою відображає зміст її основних положень та ідей.

Зауваження до дисертації не носять принципового характеру й не знижують загального високого рівня роботи, яка повністю відповідає вимогам чинних нормативних документів до дисертацій на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.04.02 – теоретична фізика, а сам дисертант, Кузьмак Андрій Романович, безумовно заслуговує на присудження йому цього ступеня.

*Завідувач кафедри теоретичної фізики  
та комп'ютерного моделювання  
Чернівецького національного університету  
імені Юрія Федьковича,  
доктор фізико-математичних наук, професор*

*12.10.2015 р.*



*M.B. Tkach*

*"Підпис М.В. Ткача засвідчує"  
Вчений секретар  
Чернівецького національного університету  
імені Юрія Федьковича*

*Курбай*

*I.M. Kubay*