Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

РОВЕНЧАК
Андрій Адамович

УДК 530.145 + 531.19 + 538.941

СТАТИСТИКА БОЗЕ І ДРОБОВІ СТАТИСТИКИ В ТЕОРІЇ БАГАТОЧАСТИНКОВИХ СИСТЕМ І СУМІЖНИХ ЗАДАЧАХ

01.04.02 — теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

ЛЬВІВ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор
Вакарчук Іван Олександрович

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
Головач Юрій Васильович,
завідувач лабораторії статистичної фізики складних систем Інституту фізики конденсованих систем НАН України (м. Львів);

доктор фізико-математичних наук, професор
Вільчинський Станіслав Йосипович,
завідувач кафедри квантової теорії поля фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

доктор фізико-математичних наук,
Гаврилик Олександр Михайлович,
завідувач відділу математичних методів у теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова НАН України (м. Київ).

Захист відбудеться “19” жовтня 2016 р. о 15^{30} на засіданні спеціалізованої Вченої ради Д 35.051.09 при Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79005, м. Львів, вул. Кирила і Мефодія, 8, фізичний факультет, Велика фізична аудиторія

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: 79005, м. Львів, вул. Драгоманова, 5

Автореферат розіслано “15” вересня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої Вченої ради
доктор фіз.-мат. наук, професор Павлик Б. В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Квантові багаточастинкові системи посідають важливе місце в сучасній експериментальній і теоретичній фізиці. Одним із напрямків є вивчення макроскопічних квантових явищ, до яких належать, зокрема, надплинність, надпровідність, а також квантовий ефект Голла. Розвиток експериментальних методів досягнення наднизьких температур і техніки керування нейтральними атомами дозволив зрештою отримати в 1995 році новий стан матерії — конденсат Бозе–Айнштайна — в лазерно-охолоджених розріджених газах лужних металів [M. H. Anderson et al., Science **269**, 198 (1995); K. B. Davis et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995)].

Цікавим показником популярності певної тематики може бути кількість опублікованих праць. Можна прослідкувати, наприклад, у виданнях Американського фізичного товариства (серія Physical Review), що до середини 1990-х років в анотаціях терміни ‘бозе-конденсат’, ‘бозе-конденсація’ траплялися 1–2 рази на кожну тисячу статей, у другій половині 1990-х років цей показних майже досягнув значення 8, а після 2000 року стабільно тримається в межах 15–17 статей на 1000.

Першими системами, в яких експериментально досягли стану бозе-конденсації, стали гази ізотопів ^{87}Rb, ^{23}Na та ^{7}Li. Згодом перелік розширився іншими лужними й лужноземельними ізотопами, лантаноїдами та деякими іншими елементами [V. S. Bagnato et al., Rom. Rep. Phys. **67**, 5 (2015)], і сьогодні відомо про бозе-конденсацію в системах атомів калію, цезію, кальцію, хрому, стронцію, ітербію, диспрозію, ербію, а також спін-поляризованого атомарного водню.

Експериментальні успіхи в дослідженні цього макроскопічного квантового явища дали новий поштовх зусиллям, спрямованим на побудову теоретичних моделей опису бозе-систем [C. J. Pethick & H. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge: Cambridge University Press, 2001)]. Для вивчення слабковзаємодіючих бозе-систем застосовують методи квантової теорії поля, які пов’язані з використанням формалізму операторів породження–знищення, а також — набагато ширше — з нелінійним рівнянням Шрьодінґера (відомим як рівняння Ґросса–Пітаєвського). Активно застосовують і числові методи.

Складність і відповідно висока вартість експериментальних установок для дослідження конденсації Бозе–Айнштайна спричинили зацікавлення бозе-системами в нижчих розмірностях — дво- й одновимірних [M. T. Batchelor et al., J. Phys. A **38**, 7787 (2005)].

В окремий напрямок також можна виділити вивчення двокомпонентних [І. О. Вакарчук і В. С. Пастухов, Журн. фіз. досл. **12**, 3002 (2008); J. Li & Y. Qiao, J. Low Temp. Phys. **177**, 165 (2014)] і багатокомпонентних [D. S. Dantas et al., Phys. Rev. A **91**, 023630 (2015)] бозе-конденсатів. Використання цих систем може бути пов’язане з квантовими обчисленнями [T. Byrnes et al., Phys. Rev. A **85**, 040306 (2012)].

Жвавий інтерес як експериментаторів, так і теоретиків різних дослідницьких груп нині викликають дослідження квантових вихорів у конденсатах [B. Villaseñor et al., Phys. Rev. A **89**, 033611 (2014)], а також інших нелінійних явищ, наприклад, квантової турбулентності [И. Гриценко и др., Физ. низк. темп. **41**, 338 (2015)].

Можливість того, що у двовимірному просторі частинки можуть підлягати статистиці, відмінній від бозонної чи ферміонної, було продемонстровано 1977 року [J. M. Leinaas & J. Myrheim, Nuovo Cim. **37B**, 1 (1977)]. Виявляється, що завдяки топологічним особливостям двовимірного руху перестановка двох частинок може спричиняти зміну фазового множника хвильової функції, відмінну від ±1: $\psi(x_2, x_1) = e^{i\pi\alpha}\,\psi(x_1, x_2)$, де α — довільне число. Звідси й походить термін *еніони* (англ. *anyon*, від *any* — ‘будь-який’) [F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **49**, 957 (1982)].

Протягом останніх десятиліть до поняття дробової статистики для опису квантових систем використовують цілу низку підходів [G. S. Canright & M. D. Johnson, J. Phys. A **27**, 3579 (1994); A. Khare, *Fractional Statistics and Quantum Theory*, 2nd ed. (Singapore: World Scientific, 2005)]. Системи з дробовою статистикою набувають щораз ширшого застосування як ефективні моделі в різних галузях фізики, від високотемпературної надпровідності [R. B. Laughlin, Science **242**, 525 (1988)] до космології [R. A. Treumann & W. Baumjohann, Astron. Astrophys. **558**, A40 (2013)]. Такий перелік зокрема включає дробовий квантовий ефект Голла [G. S. Jeon & J. K. Jain, Phys. Rev. B **81**, 035319 (2010)], холодні атомні гази [J. Honer et al., Phys. Rev. A **86**, 051606(R) (2012)], ядерну матерію [D. V. Anghel et al., Physica A **391**, 2313 (2012)] і навіть моделі темної матерії [Z. Ebadi et al., J. Cosmol. Astropart. Phys. **11**, 057 (2013)]. Цікаво, що також існують праці, де темну матерію розглядають як бозе-конденсати різного типу [M. P. Silverman & R. L. Mallett, Gen. Rel. Grav. **34**, 633 (2002); D. Bettoni et al., J. Cosmol. Astropart. Phys. **2014**, No. 02, 004 (2014)].

Так звану виключну статистику (англ. *exclusion statistics*) можна пов’язати із взаємодіями в одновимірних системах [M. T. Batchelor et al., Phys. Rev. Lett. **96**, 210402 (2006)], для опису ультрахолодних газів використовують еніонно-ферміонне відображення [M. D. Girardeau, Phys. Rev. Lett. **97**, 100402 (2006)]. Найновіші дослідження в галузі еніонної та дробової статистики включають вивчення так званих неабелевих еніонів [F. Mancarella et al., Nucl. Phys. B **867[FS]**, 950 (2013)], які є аналогами парастатистики Ґріна [H. S. Green, Phys. Rev. **90**, 270 (1953)], а також застосування виключної статистики до різних систем [D. Lundholm & J. P. Solovej, Phys. Rev. A **88**, 062106 (2013); S. Mandal, Pramana – J. Phys. **81**, 503, (2013)]. В окрему гілку можна виділити неекстенсивні узагальнення статистичної механіки [A. Olemskoi et al. Europhys. Lett. **89**, 50007 (2010); G. Livadiotis & D. J. McComas, Space Sci. Rev. **175**, 183 (2013)].

Вивчення дробових статистик, окрім самостійного теоретичного інтересу, має також важливе практичне значення. Такі статистики дозволяють описувати квантові бозе- та фермі-системи із різними типами взаємодій на досить простому математичному рівні. Самі ж такі квантові системи відіграють важливу роль в галузі сучасних інформаційних технологій [N. S. Ginsberg et al., Nature **445**, 623 (2007)]. Зокрема, на даний час існують пропозиції щодо реалізації квантових обчислень за допомогою еніонів [I. Bloch et al., Nature Phys. **8**, 267 (2012); J. C. Y. Teo et al., Phys. Rev. B **90**, 155111 (2014)]. Серед майбутніх технологій запису інформації також розглядають бозе-конденсати, у яких фактично на макроскопічному рівні проявляються квантові властивості. Також важливою ділянкою застосування бозе-конденсатів є високоточна інтерферометрія [S. van Frank et al., Nature Commun. **5**, 4009 (2014)], яка виявляється на два порядки точнішою за традиційні оптичні методи.

Важливою рисою сучасної науки є міждисциплінарний характер багатьох її галузей. Фізичні методи — насамперед, розвинуті в межах статистичної фізики — активно застосовують не лише в математиці [M. N. Tran et al., Ann. Phys. **311**, 204 (2004); S. Chatterjee & P. Diaconis, J. Phys. A **47**, 085201 (2014)] чи природничих науках, зокрема в біології [Neng-zhi Jin et al., Chin. J. Chem. Phys. **22**, 27 (2009); O. Ogasawara et al., Comptes Rendus Biologies **326**, 1097 (2003)], але й для встановлення закономірностей певних явищ у гуманітарних [K. E. Kechedzhi et al., Phys. Rev. E **72**, 046138 (2005); G. Cocho et al., PLoS ONE **10**, e0121898 (2015), F. Colaiori et al., Phys. Rev. E **91**, 012808 (2015)] і суспільних науках [J. C. Bohorquez et al., Nature **462**, 911 (2009); O. Mryglod et al., Physica A. **419**, 681 (2015)].

Процеси, які є предметом опису гуманітарних і суспільних наук, і макроскопічні квантові явища, окрім можливих спільних підходів на математичному рівні, поєднує також те, що всі вони є проявом емерджентності (від англ. *emergence* ‘виникнення’). Це поняття належить до теорії систем і означає існування в певної системи нових властивостей, що не характерні для її окремих елементів.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та згідно держбюджетних тем Фф-150Ф «Розробка нових математичних методів дослідження квантових систем» (2003–2005 рр., номер держреєстрації 0100U001446), Фф-55Ф «Теоретичні дослідження нових квантових систем» (2006–2008 рр., номер д/р 0106U001294), Фф-14Ф «Нові методи дослідження квантових систем декількох і багатьох частинок» (2009–2011 рр., номер д/р 0109U002096), Фф-110Ф «Нові ефекти у квантових рідинах і газах та системах з деформованою алгеброю Гайзенберґа» (2012–2014 рр., номер д/р 0112U001275), проект ДФФД Ф64 «Класичні та квантові системи за межами стандартних підходів» (2015–16 рр., номери д/р 0115U004838, 0116U005055), Фф-30Ф «Класичні і квантові системи з нестандартними комутаційними співвідношеннями і статистиками» (2016 р., номер д/р 0116U001539); частину міждисциплінарних досліджень зроблено за проектом М/6-2009 «Створення збалансованого текстового банку даних української мови» (2009–2010 рр., номер д/р

0109U001786) в межах програми міжнародного науково-технічного співробітництва між Україною та Австрійською Республікою.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка нових підходів до вивчення систем бозонів та систем із різними типами дробової статистики, дослідження впливу взаємодії на явище бозе-конденсації, встановлення відповідностей зв'язку між параметрами статистики та характеристиками бозе-систем для ефективного вивчення останніх.

Основними завданнями вивчення систем із дробовою статистикою було створення теорії, на підставі якої можна досліджувати простішими методами ефекти в бозонних системах, пов'язані із міжчастинковою взаємодією, впливом скінченності кількості частинок та ефективної зміни вимірності простору внаслідок впливу зовнішнього поля.

Об'єктом досліджень є квантові багаточастинкові системи з різними типами взаємодій та статистики. *Предметом досліджень* є термодинамічні функції та енерґетичний спектр багатобозонних систем, термодинамічні функції систем із дробовою статистикою, властивості складних систем, які можна вивчати фізичними методами. Для досягнення зазначеної мети використано такі методи досліджень: у межах квантової теорії поля — метод функцій Ґріна та наближене вторинне квантування, для вивчення властивостей систем з різними типами статистики — термодинамічний підхід, віріальне і кластерне розвинення, для аналізу суміжних задач теорії чисел та класифікації складних систем застосовано аналогію з відповідними фізичними системами.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі отримано низку нових результатів, що стосуються квантових багаточастинкових систем з різними типами статистики та кількох суміжних задач, для яких може бути встановлена аналогія з фізичними системами.

Для бозонів зі сильною міжчастинковою взаємодією запропоновано нові способи розрахунку спектра елементарних збуджень, зокрема показано можливість коректного відтворення фононної ділянки спектра рідкого гелію-4 без застосування поняття ефективної маси.

Метод наближеного вторинного квантування застосовано для системи бозонів у пастці. Вперше запропоновано процедуру побудови ефективного гамільтоніана у вигляді квадратичної форми, яку легко діагоналізувати стандартними способами. При цьому внески від доданків, вищих за квадратичні, враховано за допомогою наближень із використанням чисел заповнення.

Вперше розраховано термодинамічні функції слабковзаємодіючих гармонічних осциляторів, що підлягають дробовій (проміжній) статистиці Джентіле. Також вперше вдалося встановити відповідність між системою зі статистикою Джентіле і бозе-системою зі скінченною кількістю частинок.

Вперше встановлено зв’язок комплексного параметра дробової статистики Поліхронакоса з дисипативною частиною спектра та розглянуто системи осциляторів, що підкоряються такій статистиці. Для них уперше розраховано термодинамічні функції, передбачено існування фазових переходів зроблено аналітичні та числові оцінки критичних температур та оцінки про можливість експериментального вимірювання передбачених стрибків теплоємності.

Двопараметричні дробові статистики вперше використано для моделювання слабковзаємодіючих та скінченних бозе-систем, а також ідеального газу еніонів. Еквівалентності статистик досягнуто з точністю до третього віріального коефіцієнта.

У межах міждисциплінарних застосувань моделей на основі статистики Бозе уточнено головну асимптотику кількості одновимірних та вперше отримано вираз для кількості плоских розбиттів натуральних чисел з обмеженою кількістю частин.

На підставі аналогії між ранґово-частотним розподілом (на прикладі текстів) і розподілом Бозе запропоновано новий підхід для аналізу і класифікації складних систем.

Практичне значення одержаних результатів. Виконані дослідження мають фундаментальний характер.

Результати розрахунків спектра елементарних збуджень бозонних систем можуть бути використані для інтерпретації експериментів в галузі фізики конденсованих систем. Отримані аналітичні та числові результати щодо властивостей слабковзаємодіючих систем мають перспективи застосування зокрема в дослідженнях бозе-конденсатів у пастках.

Результати, що стосуються дробової статистики Поліхронакоса з комплексним параметром, можна використати для пояснення експериментів у системах з малою дисипативною частиною спектра елементарних збуджень. Двопараметричні дробові статистики дають змогу вивчати квантові системи з різними типами взаємодій на підставі простих математичних моделей. Знаходження квантовомеханічного зображення відповідної наближеної моделі еніонів може бути корисним у галузі квантової інформатики та квантових обчислень.

Розроблені міждисциплінарні застосування статистико-механічних підходів є важливими в дослідженнях складних систем з погляду передбачення їх поведінки чи класифікації за певними ознаками. Так, на даний момент у нас є певні попередні напрацювання щодо можливості класифікації діагнозів на підставі частотних характеристик електрокардіограм, які, однак, ще вимагають додаткового аналізу. Зрозуміло, що результати в таких ділянках можуть мати не лише науковий ефект, але й важливе практичне значення.

Особистий внесок здобувача. Всі викладені в дисертації оригінальні результати отримано автором самостійно або за його безпосередньої участі. У статті [1] автор обговорював результати та їх інтерпретацію, а також здійснював консультування щодо чисельних розрахунків. У решті спільних публікацій авторові дисертації належить постановка задач та вибір методів дослідження. Також у статтях [2–5] автор здійснював перевірку аналітичних і числових розрахунків, а у статтях [6–7] виконував розрахунки та брав участь в інтерпретації результатів. Решту праць написано без співавторів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи автор особисто доповідав на таких конференціях і семінарах: Конференція молодих учених та аспірантів ІЕФ’2003, 10–12 вересня 2003 р. (Ужгород); QFS2004: International Symposium on Quantum Fluids and Solids, 5–10 July 2004 (Trento, Italy); Statistical Physics 2005: Modern Problems and New Applications. Annual Conference in Ukraine. 28–30 August 2005 (Lviv); Різдвяні дискусії 2006, 4–5 січня 2006 р. (Львів); QFS2006: International Symposium on Quantum Fluids and Solids, 1–6 August 2006 (Kyoto, Japan); QFS2007: International Symposium on Quantum Fluids and Solids, 1–6 August 2007 (Kazan, Russia); Різдвяні дискусії 2008, 4–5 січня 2008 р. (Львів); 4th International Conference “Physics of Liquid Matter: Modern Problems”, 23–26 May 2008 (Kyiv); IV Літня школа “Квантова інформація”, 7–8 червня 2008 р. (смт. Верхнє Синьовидне Львівської обл.); Workshop on Theoretical Physics, 5–8 July 2009 (Lviv); Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 19–21 October 2009 (Zielona Góra, Poland); Різдвяні дискусії 2010, 9–10 січня 2010 р. (Львів); 3rd Workshop on Current Problems in Physics, 5–9 July 2010 (Lviv); QFS2010: International Symposium on Quantum Fluids and Solids, 1–7 August 2010 (Grenoble, France); LT26: The 26th International Conference on Low Temperature Physics, 10–17 August 2011 (Beijing, China); Seminarium Instytutu Badań Fizykomedycznych (Puszczykowo / Poznań), 18–20 września 2011 r.; 4th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 24–26 October 2011 (Zielona Góra, Poland); XII Всеукраїнська школа-семінар і Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (30 травня 2012), запрошена лекція; 5th Workshop on Current Problems in Physics, 10–11 July 2012 (Lviv); QFS2012: International Conference on Quantum Fluids and Solids, 15–21 August 2012 (Lancaster University, United Kingdom); Різдвяні дискусії 2013, 3–4 січня 2013 р. (Львів); 6th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 23–25 September 2013 (Zielona Góra, Poland); VI International Conference “Physics of Disordered Systems”, 14–16 October 2013 (Lviv); Різдвяні дискусії 2014, Львів, 9–10 січня 2014 р. (Львів); Семінар Лабораторії статистичної фізики складних систем Інституту фізики конденсованих систем НАНУ (15 січня 2014 р., Львів); 7th Workshop on Current Problems in Physics, 8–9 July 2014 (Lviv); Arithmetic Methods in Mathematical Physics and Biology, 3–8 August 2014 (Banach Center, Będlewo, Poland); International School and Workshop “Anyon Physics of Ultracold Atomic Gases”, 12–15 December 2014 (Technische Universität Kaiserslautern, Germany), запрошені лекції; Різдвяні дискусії 2015, Львів, 12–13 січня 2015 р. (Львів); 20th International Conference on Control Systems and Computer Science CSCS

2015, 27–29 May 2015 (Bucharest, Romania); 8th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 19–22 October 2015 (Zielona Góra, Poland); Seminarium Instytutu Fizyki Uniwersytetu Zielonogórskiego, 12 kwietnia 2016 r.; Звітна конференція ЛНУ (2003–2015). Результати були темами семінарів кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка (2003–2016).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в роботах [1–28]. Цей список робіт, який містить основні положення дисертації, налічує 27 статей та 1 препринт, із яких 23 — у фахових журналах за фізико-математичним напрямком [1–23], а решта відображають результати міждисциплінарних досліджень. Частково матеріали висвітлених у роботі досліджень увійшли також до авторського посібника «Фізика бозе-систем» [29]. Зазначений перелік публікацій включає 17 статей, індексованих у Web of Science [4–6, 9–13, 15, 17–23, 25] та додатково 6, індексованих у Scopus [1–3, 7, 16, 27]. Вибрані тези доповідей на конференціях наведено в [30–34].

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел. Обсяг дисертації становить 333 сторінки, включно зі списком використаних джерел, що містить 500 позицій. Роботу проілюстровано 67 рисунками і 22 таблицями.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** висвітлено актуальність теми досліджень, сформульовано мету роботи та визначено її наукову новизну і практичне значення.

У **першому розділі** «***Становлення і сучасний стан досліджень***» показано, як розвивалися основні підходи до опису статистики квантових систем. Зокрема, проаналізовано два способи узагальнення розподілів Бозе–Айнштайна та Фермі–Дірака — квантовомеханічний та статистико-механічний. У межах першого підходу особливу увагу приділено поняттю *еніонів*, яке пов'язане з симетрійними властивостями хвильової функції. Виявляється, що у двовимірному просторі подвійна перестановка не зводиться до тотожної (одиничної) операції [A. Khare, Op. cit.]. Справді, якщо уявити операцію перестановки як переміщення однієї частинки навколо іншої, то замкнений шлях можна неперервно стиснути в точку лише у просторі з розмірністю 3, а на площині цього зробити не можна, зважаючи на тверду серцевину (частинки не можуть просто проникати одна через одну), див. рис. 1.

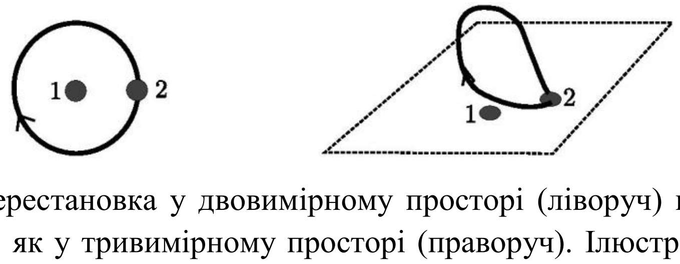

Рис. 1. Подвійна перестановка у двовимірному просторі (ліворуч) не зводиться до одиничної операції, як у тривимірному просторі (праворуч). Ілюстрацію класичних траєкторій можна переформулювати на квантовий випадок шляхом переходу до інтеґралів за траєкторіями.

Іншим прикладом квантовомеханічного узагальнення є q-деформовані комутатори або q-мутатори між операторами породження–знищення $a^{\dagger}$, a. Найпростішою інтерполяцією між ферміонами (антикомутатор) і бозонами (звичайний комутатор) є так звана куонна (англ. ‘quon’) алґебра [O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **64**, 705 (1990)]:

$$[a_j, a_k^{\dagger}] = a_j a_k^{\dagger} - q\, a_k^{\dagger} a_j = \delta_{ij}, \text{ де } -1 \le q \le 1.$$

Серед статистико-механічних узагальнень виділено три типи проміжних розподілів: статистика Джентіле, статистика Голдейна–Ву і статистика Поліхронакоса. У першій статистиці [G. Gentile, Nuovo Cim. **17**, 493 (1940)] максимальна заселеність рівня обмежена якимось числом d. Можна показати, що в результаті отримаємо такий вираз для чисел заповнення рівня з енерґією ε_i при температурі T:

$$n_i^{\mathrm{G}} = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_i/T} - 1} - \frac{d+1}{z^{-(d+1)}e^{(d+1)\varepsilon_i/T} - 1},$$

де активність z і хімічний потенціал μ пов’язані виразом $z = e^{\mu/T}$.

Голдейн [F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **67**, 937 (1991)] фактично спостулював деякий узагальнений принцип Паулі, який може стосуватися не одного, а декількох станів, на підставі чого Ву [Y.-S. Wu, Phys. Rev. Lett. **73**, 922 (1994)] за допомогою простої комбінаторної інтерполяційної формули отримав для чисел заповнення

$$n_i^{\mathrm{HW}} = \frac{1}{w\left(z^{-1}e^{\varepsilon_i/T}\right) + g},$$

де функція w задовольняє трансцендентне рівняння $w^g(x)\,[1 + w(x)]^{1-g} = x$.

У статистиці Поліхронакоса числа заповнення виражаються простим співвідношенням

$$n_i^{\mathrm{P}} = \frac{1}{z^{-1}e^{\varepsilon_i/T} + \gamma},$$

яке можна отримати внаслідок спеціального способу заповнення станів у системі [A. P. Polychronakos, Phys. Lett. B **365**, 202 (1996)].

Окремо виділено так звані неекстенсивні узагальнення статистики, які можуть стосуватися систем із неадитивною ентропією, тобто таких, де суттєво проявляється далекодія, спостерігаються ефекти «пам’яті», суттєво немарківські процеси тощо [C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988)].

Відповідний аналіз дробових статистик переважно відображено в роботі [16]. Завершується перший розділ коротким оглядом сучасних досліджень бозе-систем.

У **другому розділі** «***Однорідні бозе-системи зі взаємодією***» розглянуто задачі розрахунку спектра елементарних збуджень багатобозонної системи та досліджено властивості однорідних бозе-систем зі слабкою взаємодією.

Гамільтоніан системи N бозе-частинок масою m з координатами $\mathbf{r}_j$ в об’ємі V з урахуванням багаточастинкових взаємодій має вигляд:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{N}\Delta_j + \sum_{1\le j<l\le N}\Phi(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l) + \sum_{1\le j<l<s\le N}\Phi_3(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l, \mathbf{r}_l - \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s - \mathbf{r}_j) + \ldots, \tag{1}$$

де Δ_j — оператор Лапласа щодо j-ї координати, $\Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ і $\Phi_3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)$ — парний і тричастинковий потенціали відповідно, а крапки відповідають доданкам з чотиричастинковими й вищими взаємодіями в потенціальній енерґії.

У зображенні колективних змінних

$$\rho_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}, \qquad \partial_{-\mathbf{k}} = \frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{k}}}, \qquad \text{де} \quad \mathbf{k} \neq 0,$$

якщо врахувати тричастинкові взаємодії [10], матимемо:

$$H = \sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left\{\varepsilon_k\left(\rho_{\mathbf{k}}\partial_{-\mathbf{k}} - \partial_{\mathbf{k}}\partial_{-\mathbf{k}}\right) + \frac{N}{2V}\tilde{\nu}_k\rho_{\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{k}}\right\} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}\neq 0\\ \mathbf{k}+\mathbf{q}\neq 0}}\left\{\frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{k}\mathbf{q}\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{k}}\partial_{-\mathbf{q}} + \frac{N^2}{6V^2}\nu_3(\mathbf{k}+\mathbf{q}, -\mathbf{k}, -\mathbf{q})\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{q}}\right\}, \tag{2}$$

де $\varepsilon_k = \hbar^2k^2/2m$ — енерґетичний спектр вільної частинки, а ν_k та $\nu_3(\mathbf{k}+\mathbf{q}, -\mathbf{k}, -\mathbf{q})$ — фур’є-зображення відповідно дво- і тричастинкового потенціалу (хвилька над ν_k відповідає ефективному врахуванню тричастинкових ефектів у відповідному доданку). Гамільтоніан системи далі зведемо до вигляду:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\hat{A}_{\mathbf{q}} + \Delta\hat{H}, \tag{3}$$

де $\hat{A}_{\mathbf{q}}, \hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{q}}$ — спряжені оператори, пов’язані з $\rho_{\mathbf{q}}$, $\partial_{\mathbf{q}}$ співвідношеннями

$$\hat{A}_{\mathbf{q}} = u_q\rho_{\mathbf{q}} + v_q\partial_{\mathbf{q}} + \sum_{\substack{\mathbf{q}'\neq 0,\\ \mathbf{q}'+\mathbf{q}\neq 0}}\left[w_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}\rho_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}'} + y_{\mathbf{q}',\mathbf{q}}\rho_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}\partial_{-\mathbf{q}'}\right], \tag{3}$$

з коефіцієнтами u_q, v_q, $w_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$, $y_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$, що виражаються через параметри гамільтоніана (2), зокрема фур’є-зображення міжатомних потенціалів [9].

Спектр елементарних збуджень обчислюватимемо на підставі комутатора

$$\left[\hat{A}_{\mathbf{q}}, \hat{A}^{\dagger}_{\mathbf{q}}\right] = E_q^{(0)} + \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left[W(\mathbf{k},\mathbf{q})\rho_{\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{k}} + Y(\mathbf{k},\mathbf{q})\rho_{\mathbf{k}}\partial_{-\mathbf{k}}\right], \tag{5}$$

у якому коефіцієнти $W(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ та $Y(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ складним чином пов’язані з u_q, v_q, $w_{\mathbf{kq}}$, $y_{\mathbf{kq}}$, а нульове наближення $E_q^{(0)}$ збігається зі спектром Боголюбова

$$E_q^{(0)} = \varepsilon_q\alpha_q, \qquad \alpha_q = \sqrt{1 + \frac{2N}{V}\frac{\nu_q}{\varepsilon_q}}\,. \tag{6}$$

Добутки змінних $\rho_{\mathbf{k}}$, $\partial_{\mathbf{k}}$ під сумою у правій частині замінимо на відповідні середні

$$S_q = \left\langle \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \right\rangle = \frac{1}{\alpha_q}, \qquad D_q = \left\langle \rho_{\mathbf{q}} \partial_{-\mathbf{q}} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_q} - 1 \right), \tag{7}$$

після чого можна безпосередньо здійснити розрахунки спектра елементарних збуджень, результати яких зображено на рис. 2.

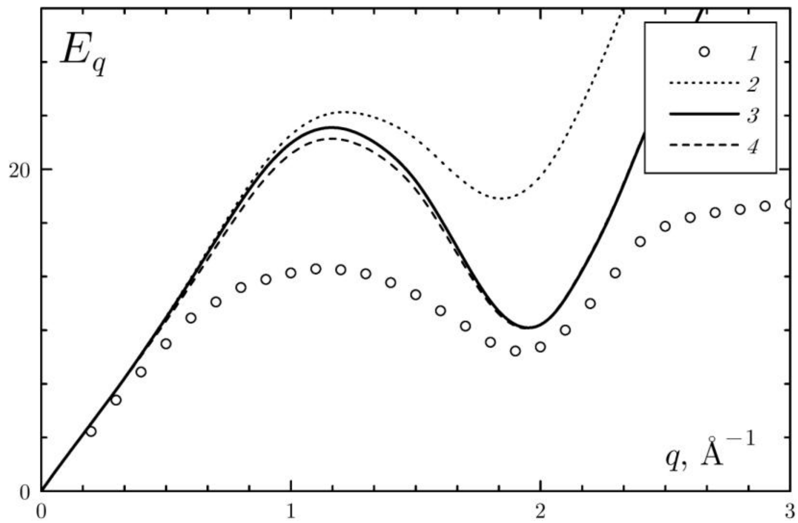

Рис. 2. Енергетичний спектр ^{4}He. *1* — експериментальні значення [R. A. Cowley & A. D. B. Woods, Can. J. Phys. **49**, 177 (1971)]; *2* — наближення хаотичних фаз, або боголюбівське, результат $E_q^{(0)}$; *3* — ця робота, без врахування тричастинкових взаємодій; *4* — ця робота, з урахуванням тричастинкових взаємодій.

Для розрахунку спектра бозе-системи у довгохвильовому наближенні було використано формалізм двочасових температурних функцій Ґріна на колективних змінних. Проаналізовано дві системи: рідкий гелій-4 та бозе-рідина з потенціалом Юкави, що може слугувати моделлю ядерної матерії [22].

З метою замикання системи рівнянь руху для функцій $\langle\langle \rho_{\mathbf{k}} | \rho_{-\mathbf{k}} \rangle\rangle$, $\langle\langle \partial_{\mathbf{k}} | \rho_{-\mathbf{k}} \rangle\rangle$ запропоновано розщеплення триоператорних функцій у загальному вигляді

$$\langle\langle A_1 B_2 | C_3 \rangle\rangle = \lambda(1,2)\, \langle\langle A_{1+2} | C_3 \rangle\rangle + \mu(1,2)\, \langle\langle B_{1+2} | C_3 \rangle\rangle \tag{8}$$

з коефіцієнтами

$$\lambda(1,2) = (1-\eta)\frac{\left\langle C_3 A_1 B_2 \right\rangle}{\left\langle C_3 A_{1+2} \right\rangle}, \qquad \mu(1,2) = \eta \frac{\left\langle C_3 A_1 B_2 \right\rangle}{\left\langle C_3 B_{1+2} \right\rangle}, \tag{9}$$

де параметр $\eta = 0 \div 1$, а числами 1,2,3 позначено для скорочення хвильові вектори $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ відповідно. Для обчислення середніх від добутку трьох операторів було запропоновано два наближення

$$\left\langle C_3 A_1 B_2 \right\rangle_s = \frac{1}{6}\left(\left\langle CA \right\rangle_1 \left\langle CB \right\rangle_2 \left\langle AB \right\rangle_3 + \text{симетризація за індексами} \right),$$

$$\left\langle C_3 A_1 B_2 \right\rangle_f = \frac{1}{4}\left[\left(\left\langle AB \right\rangle_1 \left\langle CA \right\rangle_2 + \left\langle AB \right\rangle_2 \left\langle CA \right\rangle_1 \right) \left\langle CB \right\rangle_3 + \left(\left\langle AB \right\rangle_1 \left\langle CB \right\rangle_2 + \left\langle AB \right\rangle_2 \left\langle CB \right\rangle_1 \right) \left\langle CA \right\rangle_3 \right],$$

Після застосування вказаних розщеплень система рівнянь руху дає змогу розрахувати спектр елементарних збуджень як полюси функцій Ґріна [22]. Результати розрахунків для гелію-4 наведено на рис. 3.

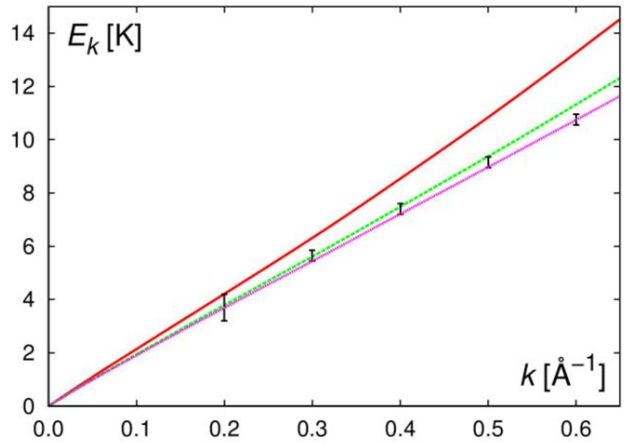

Рис. 3. Спектр елементарних збуджень рідкого гелію-4. Суцільна лінія — результат RPA (спектр Боголюбова); штрихова — спектр із розщепленням *s*-типу, $\eta = 1$; пунктирна — спектр із розщепленням *f*-типу, $\eta = 1$. кружечки (з «вусами») — експериментальні дані [R. A. Cowley & A. D. B. Woods, Can. J. Phys. **49**, 177 (1971)].

Отже, як *s*-, так і *f*-типи розщеплень можна застосовувати для опису довгохвильової поведінки спектра гелію-4, не використовуючи поняття ефективної маси, яка необхідна в RPA, порівн. [A. Rovenchak, Fiz. Nizk. Temp. **29**, 145 (2003)].

Для розрахунку міжатомного потенціалу слабковзаємодіючого бозе-газу було застосовано підхід [I. O. Vakarchuk et al., J. Phys. Stud. **4**, 16 (2000)]. На підставі моделі для функції Маєра отримано потенціал із притягальною частиною [8], тобто кращий за звичайні тверді сфери, у якому присутнє лише відштовхування.

Поведінку слабковзаємодіючого бозе-газу в моделі твердих сфер можна пояснити, використавши енерґетичний спектр Боголюбова [2]

$$\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m}\sqrt{1 + \frac{2N}{V}\frac{\nu_p}{p^2/2m}}, \tag{10}$$

де фур'є-зображення міжатомного потенціалу $\nu_p = \nu_0 = \text{const}$ у борнівському наближенні. Для конкретизації було розглянуто двовимірну задачу, для якої отримано хімічний потенціал у лінійному наближенні $\mu = \mu_0 + \Delta\mu = \mu_0 + \nu_0 N/V$ (де μ_0 — хімічний потенціал ідеального бозе-газу), а температуру бозе-конденсації

$$T_c = -\frac{2\pi\hbar^2 m}{\ln\left(\nu_0 / \frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)}\frac{N}{V}, \tag{11}$$

що збігається з $T_c = 0$ для ідеального двовимірного бозе-газу.

Результати другого розділу опубліковані в роботах [2, 8–10, 22].

У **третьому розділі** «***Системи частинок у зовнішньому потенціалі***» досліджено такі задачі: ідеальний бозе-газ гармонічних осциляторів у просторі з вимірністю $1 < D < 2$, бозони зі слабкою взаємодією в осциляторній пастці у підході наближеного вторинного квантування та система одновимірних слабковзаємодіючих гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле.

Для першої задачі встановлено поправки до результатів квазікласичного наближення, пов'язані зі скінченністю кількості частинок. Квазікласичне наближення відповідає тому, що рух частинок вважаємо обмеженим областю простору між класичними точками повороту. Це веде до того, що в потенціалі $U(r) \sim r^{\eta}$ густина станів D-вимірного ідеального газу змінюється з $g(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D/2-1}$ на $g(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D_{\mathrm{eff}}/2-1}$, де ефективна вимірність простору $D_{\mathrm{eff}} = D\,(1 + 2/\eta)$. Отже, в осциляторній пастці (квадратичному зовнішньому потенціалі) $D_{\mathrm{eff}} = 2D$.

Таким чином, в ізотропному гармонічному потенціалі з частотою ω кількість частинок пов'язана з температурою T й активністю z співвідношенням

$$N = N_0 + \left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^D \mathrm{Li}_D(z), \tag{12}$$

де $\mathrm{Li}_D(z)$ — полілогарифм

$$\mathrm{Li}_D(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^D}. \tag{13}$$

Для енергії маємо

$$E = \hbar\omega D\left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^{D+1} \mathrm{Li}_{D+1}(z), \tag{14}$$

а критична температура переходу в стан бозе-конденсату дорівнює

$$T_c = \hbar\omega\left(\frac{N}{\zeta(D)}\right)^{1/D}. \tag{15}$$

Врахування дискретності енерґетичних рівнів дає змогу встановити поправки до квазікласичного наближення у вигляді розкладів за степенями кількості частинок N. Так, для критичної температури отримаємо [13]

$$\begin{gathered} T_c^{(N)} = \hbar\omega\left(\frac{N}{\zeta(D)}\right)^{1/D} \left[1 - B_D N^{1/D-1} + o(N^{1/D-1})\right], \\ B_D = \left(\frac{1}{\zeta(D)}\right)^{1/D} \frac{1}{2\Gamma(D+1)}\left[1 - \frac{2}{D-1} + D(D-1)\zeta(3-D) + \ldots\right]. \end{gathered} \tag{16}$$

Числові розрахунки проведено для випадку килимка Серпінського, фрактального об'єкта з гаусдорфівською вимірністю $D = \ln 8 \,/\, \ln 3 = 1.892789\ldots$. Результати обчислення конденсатної фракції N_0/N наведено на рис. 4.

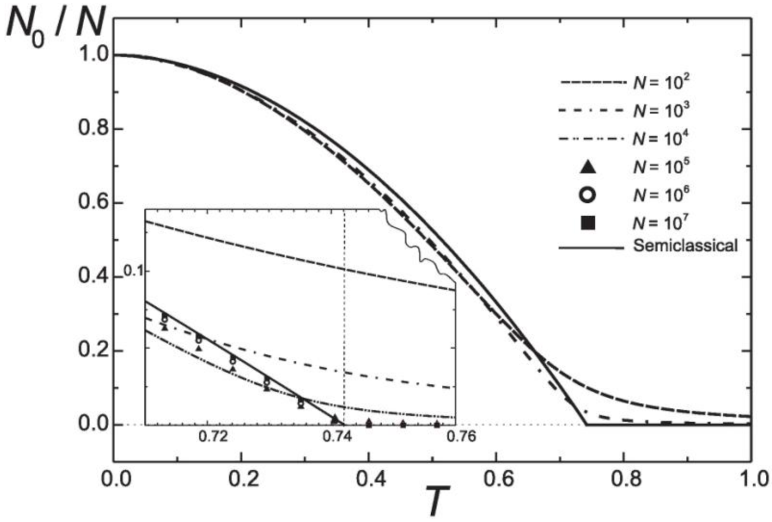

Рис. 4. Конденсатна фракція системи бозонів у просторі з дробовою вимірністю $D = 1.892789\ldots$. Суцільною лінією показано результати напівкласичного наближення. На врізці подано окіл температури фазового переходу T_c. Одиниці вимірювання зафіксовано умовою $\hbar\omega N^{1/D} = 1$.

Бозе-систему зі слабкою міжчастинковою взаємодією в гармонічній пастці можна досліджувати за допомогою підходу, який узагальнює метод наближеного вторинного квантування Боголюбова. При цьому задача діагоналізації вихідного гамільтоніана, переписаного через оператори породження–знищення

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{n}\neq 0}\varepsilon_{\mathbf{n}}\hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{n}} + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{m},\mathbf{m}',\mathbf{n},\mathbf{n}'}\left\langle \mathbf{mn}\middle|U\middle|\mathbf{m}'\mathbf{n}'\right\rangle \hat{a}_{\mathbf{m}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{m}'}\hat{a}_{\mathbf{n}'}, \qquad \text{де} \quad \left[\hat{a}_{\mathbf{n}'},\hat{a}_{\mathbf{n}}^{\dagger}\right] = \delta_{\mathbf{n}'\mathbf{n}}, \tag{17}$$

зводиться до діагоналізації квадратичної форми, яку можна записати в такому матричному вигляді

$$\hat{H} = \hat{\mathbf{a}}^{\dagger}\mathcal{E}\hat{\mathbf{a}} + 2\lambda\sqrt{N_0}\left(\hat{\mathbf{a}}^{\dagger}\mathbf{d} + \hat{\mathbf{a}}^{T}\mathbf{d}\right) + \lambda\left(4\hat{\mathbf{a}}^{\dagger}C\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}}^{\dagger}C\hat{\mathbf{a}}^{\dagger T} + \hat{\mathbf{a}}^{T}C\hat{\mathbf{a}}\right), \tag{18}$$

потенціал взаємодії $U(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r})$, $\lambda = gN_0/2$ (N_0 — кількість частинок у конденсаті), $\mathcal{E}$ — діагональна матриця, складена з рівнів $\varepsilon_{\mathbf{n}}$, елементами матриці C є матричні елементи оператора взаємодії $gc_{\mathbf{mn}} = \langle\, \mathbf{mn}\,|U|\,\mathbf{00}\,\rangle$, вектор $\mathbf{d}$ складається з елементів $gd_{\mathbf{n}} = \langle\, \mathbf{n0}\,|U|\,\mathbf{00}\,\rangle$, а вектор $\hat{\mathbf{a}}^{T} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots)$. До діагонального вигляду

$$\hat{H} = \sum_{n}\epsilon_n\hat{\alpha}_n^{\dagger}\hat{\alpha}_n = \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\dagger}\mathfrak{E}\,\hat{\boldsymbol{\alpha}}$$

гамільтоніан зводиться після застосування узагальнень відомих u–v перетворень Боголюбова

$$\hat{\mathbf{a}} = X\hat{\boldsymbol{\alpha}} + Y\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\dagger T} + \mathbf{z}, \qquad \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\dagger}X + \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{T}Y + \mathbf{z}^{\dagger}, \tag{19}$$

де вектор $\mathbf{z} = -2\lambda\sqrt{N_0}\,(\mathcal{E} + 6\lambda C)^{-1}\mathbf{d}$, а матриці X, Y задовольняють рівняння

$$XAY + XBX + YBY = 0, \qquad YAX + XBX + YBY = 0, \qquad X^2 - Y^2 - I = 0, \tag{20}$$

у яких $A = \mathcal{E} + 4\lambda C$, $B = \lambda C$. Це — система нелінійних матричних рівнянь Ріккаті.

Матриця, власні значення якої дають шуканий енерґетичний спектр, дорівнює [11]

$$\mathfrak{E} = X\mathcal{E}X + Y\mathcal{E}Y + 4\lambda(XCX + YCY) + 2\lambda(XCY + YCX)\,. \tag{21}$$

У загальному випадку чисельне розв'язування системи (20) вимагає спеціальних підходів [B. Meini, Lin. Alg. Appl. **413**, 440 (2006)], однак можна застосувати пертурбативний розв'язок, який дає [11]

$$\mathfrak{E} = \mathcal{E} + 4\lambda C + \frac{\lambda^2}{2}\left\{\left(\mathcal{E}^{-1}C\right)^2\mathcal{E} - 3\,C\mathcal{E}^{-1}C - 2\mathcal{E}^{-1}C^2\right\}. \tag{22}$$

З метою спрощення задачі було також запропоновано спосіб отримання певного ефективного гамільтоніана з (17). Після послідовного виокремлення операторів з нульовими індексами матимемо

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{\mathbf{j}\neq 0}\varepsilon_{\mathbf{j}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{j}} + \frac{N_0}{2}\sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}\neq 0}c_{\mathbf{jk}}(4\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{k}}) + \\ &+ N_0^{1/2}\sum_{\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{l}\neq 0}c_{\mathbf{jkl}}(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{l}} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{l}}) + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{l},\mathbf{m}\neq 0}c_{\mathbf{jklm}}\,\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{l}}\hat{a}_{\mathbf{m}}\,.\end{aligned} \tag{23}$$

Зважаючи на те, що числа заповнення $n_{\mathbf{i}} = \left\langle \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{j}}\right\rangle$, замінимо в доданках з трьома і чотирма операторами $\hat{a}_{\mathbf{j}} \to \sqrt{n_{\mathbf{j}}} = h_{\mathbf{j}}$, $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}} \to h_{\mathbf{j}}$. Після цієї процедури отримаємо задачу про діагоналізацію квадратичної форми за операторами $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}, \hat{a}_{\mathbf{j}}$. Певного математичного спрощення вдається досягти, застосовуючи подальші наближення, а саме, пов'язуючи оператори породження–знищення з різними індексами деяким множником, $\hat{a}_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{kj}}\hat{a}_{\mathbf{j}}$, який можна виразити через числа заповнення, $f_{\mathbf{kj}} \to \sqrt{n_{\mathbf{k}}/n_{\mathbf{j}}}$. Після низки таких перетворень остаточно матимемо досить просту задачу з ефективним гамільтоніаном [23]

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{\mathbf{j}\neq 0}\left[(\varepsilon_{\mathbf{j}} + 4Q_{\mathbf{j}})\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{j}} + Q_{\mathbf{j}}(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{j}} + \hat{a}_{\mathbf{j}}\hat{a}_{\mathbf{j}})\right], \tag{24}$$

де $Q_{\mathbf{j}} = \gamma_{\mathbf{j}} + \eta_{\mathbf{j}} + \varphi_{\mathbf{j}}$, а

$$\gamma_{\mathbf{j}} = \frac{N_0}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq 0}f_{\mathbf{kj}}c_{\mathbf{jk}}, \qquad \eta_{\mathbf{j}} = \frac{\sqrt{N_0}}{3}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{l}\neq 0}f_{\mathbf{kj}}c_{\mathbf{jkl}}h_{\mathbf{l}}, \qquad \varphi_{\mathbf{j}} = \frac{1}{12}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{l},\mathbf{m}\neq 0}f_{\mathbf{kj}}c_{\mathbf{jklm}}h_{\mathbf{l}}h_{\mathbf{m}}, \tag{25}$$

який зводиться до діагонального вигляду

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{\mathbf{j}\neq 0}E_{\mathbf{j}}\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{j}}\hat{b}_{\mathbf{j}}, \tag{26}$$

зі спектром елементарних збуджень

$$E_{\mathbf{j}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{j}}^2 + 8\varepsilon_{\mathbf{j}}Q_{\mathbf{j}} + 12Q_{\mathbf{j}}^2}\,. \tag{26}$$

Чисельні розрахунки у роботі продемонстровано на прикладі одновимірної системи [23]. Також коротко обговорено застосування пропонованого методу до двосортової бозе-суміші.

Для системи одновимірних гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле отримано низку аналітичних і числових результатів [3]. Спектр елементарних збуджень запишемо у вигляді $\varepsilon_n = \hbar\omega n + \lambda c_n$. Будемо вважати, що в системі N частинок, а максимальне заповнення рівня обмежене числом M. Поправку до хімічного потенціалу від взаємодії порівняно з ідеальною системою визначає вираз

$$\Delta\mu = \lambda\left(\sum_n c_n h_M(n)\right)\left(\sum_n h_M(n)\right)^{-1}, \tag{27}$$

де функція

$$h_M(n) = e^{(n-\mu_{\mathrm{id}})/T}\left[\frac{1}{\left(e^{(n-\mu_{\mathrm{id}})/T}-1\right)^2} - \frac{(M+1)^2 e^{M(n-\mu_{\mathrm{id}})/T}}{\left(e^{(M+1)(n-\mu_{\mathrm{id}})/T}-1\right)^2}\right]. \tag{28}$$

При $T = 0$ хімічний потенціал ідеального газу буде $\mu_{\mathrm{id}}(T = 0) = N/M - 1/2$, а поведінку хімічного потенціалу системи зі взаємодією при наближенні до абсолютного нуля показано на рис. 5.

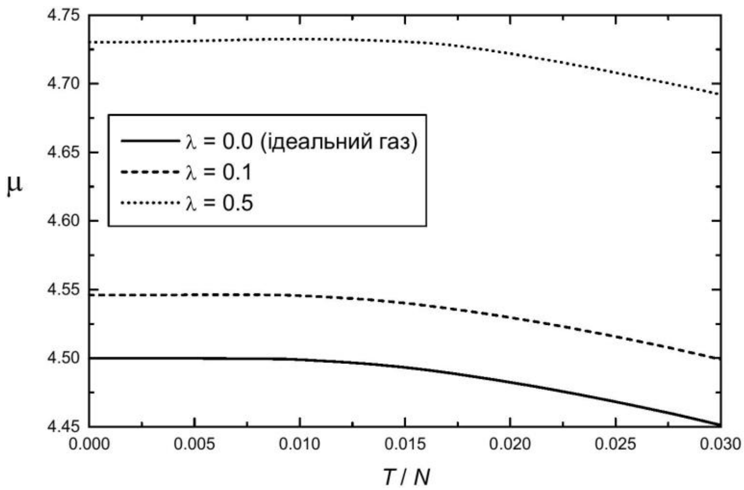

Рис. 5. Температурні залежності хімічного потенціалу μ для $\lambda = 0.1$ (штрихова лінія), $\lambda = 0.5$ (пунктирна лінія) та $\lambda = 0$ (суцільна лінія) в області низьких температур.

Відповідні результати можна застосовувати при аналізі фізичних систем, для яких дробова статистика Джентіле виникає ефективно, зокрема внаслідок скінченної кількості частинок або врахування міжчастинкових взаємодій

Результати третього розділу опубліковані в роботах [3, 11, 13, 23].

У **четвертому розділі** «***Статистика Поліхронакоса з комплексним параметром***» запропоновано узагальнення дробової статистики Поліхронакоса, параметр якої вважатимемо комплексним числом [15]. Взагалі кажучи, комплекснозначні фізичні величини можуть ефективно виникати в різних фізичних системах, насамперед у зв’язку з дисипативними процесами, що найкраще демонструє комплексний показник заломлення у класичній фізиці.

Автори праці [A. M. Gavrilik & A. P. Rebesh, Mod. Phys. Lett. B **25**, 1150030 (2012)], вивчаючи деформований газ p,q-бозонів, запропонували пов’язати комплексні параметри деформації з міжчастинковими взаємодіями. Переважно саме параметри дробових статистик, пов’язаних із q-деформованими алґебрами, покладають комплексними [R. K. Gupta et al., J. Phys. A **27**, 1427 (1994); A. Algin, J. Stat. Mech. P04007 (2009)]. За певних умов такі статистики [Y. Yang et al., Mod. Phys. Lett. A **13**, 879 (1998)] безпосередньо пов’язані зі статистикою Джентіле, в якій числа заповнення обмежені деяким скінченним числом $d > 1$. Отже, розмаїття реальних систем, для яких використовують комплекснозначні фізичні величини, дає підстави розвивати й інші підходи. Дозволивши параметрові статистики вийти за межі дійсних значень, ми також суттєво збагатимо розмаїття явищ у таких системах.

З метою узагальнення параметр статистики $\alpha = e^{i\pi\nu} = \alpha' + i\alpha''$ вважатимемо комплексним числом. Зміна в діапазоні значень $\nu = 0 \div 1$ забезпечує гладкий перехід між бозонною та ферміонною границями, водночас дозволяючи уникнути точки $\alpha = 0$, що відповідає класичній статистиці Больцмана, див. рис. 6 [15]. У границі малих ν система з такою статистикою відповідає бозонам із малою дисипативною частиною спектра $\gamma_j \sim \pi\nu T$.

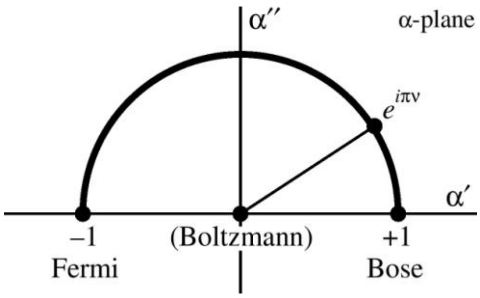

Рис. 6. Ілюстрація значень комплексного параметра статистики.

В системі одновимірних гармонічних осциляторів, які підкоряються означеній статистиці, при розрахунку термодинамічних функцій внаслідок умови $\mathrm{Im}(z\alpha) = 0$ виникають синґулярності за температур, які визначає рівняння

$$T_c^{(k)} = \hbar\omega N \frac{\sin \pi\nu}{(2k+1)\pi}. \tag{29}$$

У критичних точках теплоємність зазнає стрибків (див. рис. 7), які в границі $\nu \to 0$ дорівнюють [17]

$$\frac{1}{N}\Delta C(T_c) = \frac{4\pi^2\nu^2}{(2k+1)} e^{-(2k+1)/\nu}. \tag{30}$$

Вони скінченні для всіх $\nu > 0$, однак найвиразнішим є той, якому відповідає $k = 0$, а наступні значення дуже швидко спадають при $k > 0$, як показано в табл. 1.

Оскільки вже енерґія як функція температури має розриви, то можна стверджувати, що точки $T_c^{(k)}$ відповідають фазовим переходам першого роду. Цікаво оцінити принципову можливість експериментальної перевірки цього ефекту.

Комплексний параметр статистики можна отримати внаслідок зовнішнього впливу на систему лазером або через ефективне врахування дисипації елементарних збуджень. Це означає, що варто очікувати малих значень ν, тобто $\nu \ll 1$. Отже, лише найбільша критична температура, що відповідає $k = 0$,

$$T_c = \hbar\omega N \frac{\sin \pi\nu}{\pi}, \tag{31}$$

виявляється релевантною, оскільки стрибки теплоємності стають експериментально неспостережуваними, якщо $k > 1$, див. табл. 1. Припустимо, що точність експериментального вимірювання теплоємності становить 0.01%, що відповідає $\nu = 0.10 \div 0.15$ (див. табл. 1). Нехай також частота зовнішнього гармонічного потенціалу дорівнює $\omega = 1$ кГц, а кількість частинок $N = 10^4$. За таких параметрів отримаємо критичну температуру $T_c \sim 10^{-5}$ К. Це означає, що відповідний ефект можна буде спостерігати експериментально, щойно вдасться приготувати систему, яку можна описувати статистикою Поліхронакоса з комплексним параметром.

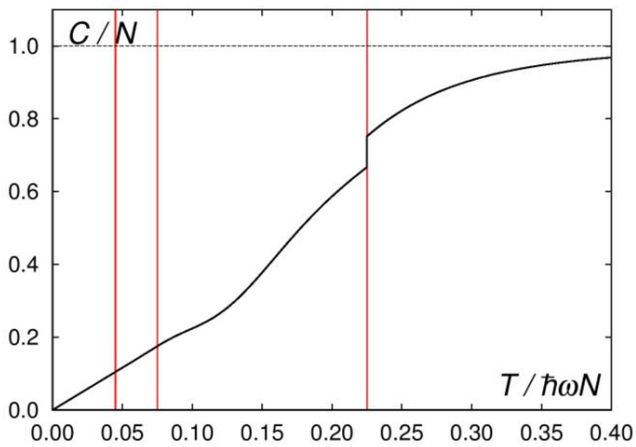

Рис. 7. Дійсна частина питомої теплоємності C/N при $\nu = 0.25$. Вертикальними лініями показано критичні температури. Крайня права лінія відповідає $k = 0$.

Табл. 1. Стрибки питомої теплоємності C/N при критичних температурах.

ν	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
0.01	1.5×10^{-46}	7.5×10^{-134}	6.6×10^{-221}
0.05	2.4×10^{-10}	4.7×10^{-28}	1.7×10^{-45}
0.10	2.4×10^{-5}	3.2×10^{-14}	7.7×10^{-23}
0.15	1.7×10^{-3}	2.6×10^{-9}	6.7×10^{-15}
0.20	1.8×10^{-2}	1.1×10^{-6}	1.1×10^{-10}
0.25	8.5×10^{-2}	5.4×10^{-5}	6.0×10^{-8}
0.30	2.5×10^{-1}	9.3×10^{-4}	5.8×10^{-6}

У випадку D-вимірних осциляторів критична температура також визначається умовою $\mathrm{Im}(z\alpha) = 0$, однак це рівняння вже не має простих аналітичних розв'язків. У роботі отримано низку наближень, які дають змогу розрахувати відповідні температури з задовільною точністю [18].

Можна показати, що у границі малих ν уявна частина $\mathrm{Im}(z\alpha)$ залишається додатною для всіх значень температури, тобто не спостерігаємо ніякої критичної точки T_c в цьому разі [18]. Розв'язки відповідних рівнянь вказують на існування певного критичного значення статистичного параметра ν_c, такого, що при $\nu < \nu_c$ не існує T_c, натомість для $\nu > \nu_c$ можна знайти температуру, при якій $\mathrm{Im}(z\alpha)$ перетворюється в нуль. Якщо параметр статистики менший за ν_c, то енергія й теплоємність залишаються неперервними за умови скінченності N, а вище за ν_c існують розриви, які відповідають за фазові переходи. За фіксованою вимірності простору D значення ν_c прямує до нуля, коли кількість частинок N зростає. З іншого боку, за фіксованого N значення ν_c збільшується зі зменшенням D, див. табл. 2.

Табл. 2. Критичні значення параметра статистики ν_c
для різної кількості частинок N та вимірності простору D.

D	$N=10^2$	$N=10^3$	$N=10^4$	$N=10^5$	$N=10^6$
3.0	0.07355	0.02340	0.007241	0.001510	0.0002819
2.0	0.1013	0.03592	0.01256	0.004326	0.001471
1.5	0.1508	0.06674	0.03026	0.01389	0.006413
1.4	0.1687	0.07994	0.03936	0.01982	0.01012
1.3	0.1912	0.09781	0.05279	0.02947	0.01680
1.2	0.2199	0.1223	0.07280	0.04538	0.02915
1.1	0.2566	0.1560	0.1028	0.07171	0.05198

У заключній частині розділу проведено аналіз поведінки теплоємності систем осциляторів залежно від параметра статистики ν та вимірності простору в широкому інтервалі температур.

Результати четвертого розділу опубліковані в роботах [15, 17, 18].

У **п'ятому розділі** «***Двопараметричні дробові статистики***» запропоновано кілька типів узагальнення відомих дробових статистик. Такі моделі дають змогу описувати ідеальний газ еніонів, а також скінченні бозе-системи зі слабкою взаємодією.

У дробових статистиках Поліхронакоса та Голдейна–Ву числа заповнення мають вигляд відповідно

$$n_i^{\mathrm{P}} = \frac{1}{z^{-1}X(\varepsilon_i) - \gamma}, \qquad n_i^{\mathrm{HW}} = \frac{1}{w\left(z^{-1}X(\varepsilon_i)\right) + g}, \tag{32}$$

де стандартним є використання ґіббсівського фактора $X(\varepsilon_j) = e^{\varepsilon_i/T}$. Такі статистики мають один параметр (γ для статистики Поліхронакоса та g для Голдейна–Ву). Другий параметр можна додати у задачу, розглядаючи певні деформації у виразі для функції $X(\varepsilon_j)$. Було розглянуто моделі так званої неповної статистики, які відповідають $X(\varepsilon_j) = e^{q\varepsilon_i/T}$ $(q \neq 1)$, а також неадитивної статистики із $X(\varepsilon_j) = e_q^{\varepsilon_i/T}$, де e_q^x позначає q-експоненту Цалліса

$$e_q^x = \left[1+(1-q)x\right]^{1/(1-q)} \quad \text{для} \quad 1+(1-q)x \geq 0$$
$$\text{і} \quad e_q^x = 0 \quad \text{в іншому випадку.} \tag{33}$$

Відповідність між статистиками можна встановити на підставі виразів для віріальних коефіцієнтів. У випадку еніонів маємо

$$b_2^{\text{anyon}}(\alpha) = -\frac{1}{4}(1-4\alpha+2\alpha^2), \qquad b_3^{\text{anyon}}(\alpha) = \frac{1}{36} + \frac{\sin^2 \pi\alpha}{12\pi^2} + \mathcal{O}(\alpha^4), \tag{34}$$

де параметр $\alpha \in [0; 1]$. Для прикладу наведемо результати, що відповідають неадитивній модифікації статистики Голдейна–Ву:

$$b_2^{\text{NAHW}}(g,q) = \frac{2g-1}{2}\frac{q^2}{1+q}, \qquad b_3^{\text{NAHW}}(g,q) = q^4\left[\frac{(2g-1)^2}{(1+q)^2} - \frac{(3g-2)(3g-1)}{3q(2+q)}\right]. \tag{35}$$

Прирівнюючи відповідні вирази,

$$b_2^{\text{anyon}}(\alpha) = b_2^{\text{NAHW}}(g,q), \qquad b_3^{\text{anyon}}(\alpha) = b_3^{\text{NAHW}}(g,q), \tag{36}$$

будемо мати залежність параметрів g і q від α. Отже, отримані таким способом двопараметричні статистики моделюють еніони з точністю до третього віріального коефіцієнта. При цьому, наприклад, для модифікацій статистики Поліхронакоса розв'язки існують не у всьому діапазоні $\alpha \in [0; 1]$, на відміну від статистики Голдейна–Ву [20]. Низку інших двопараметричних моделей також досліджено в роботі [5].

Розрахувавши 4-й віріальний коефіцієнт (див. рис. 8), зауважимо, що запропоновані статистики не дають правильного відтворення цієї величини. Однак відповідні поправки, наприклад, у теплоємність будуть значно меншими за 1%, що є на межі точності експериментальних вимірювань.

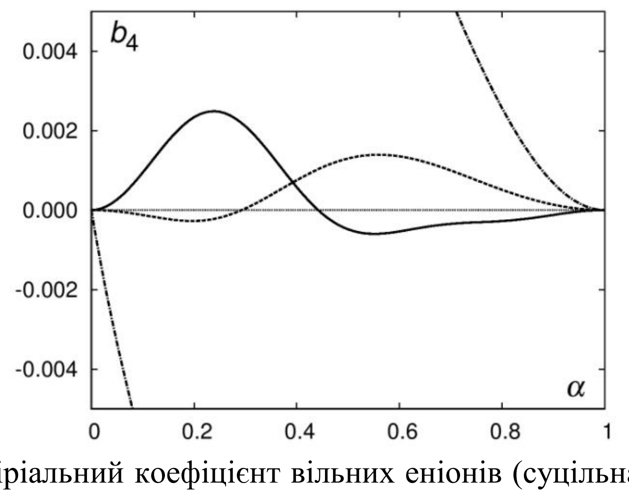

Рис. 8. Четвертий віріальний коефіцієнт вільних еніонів (суцільна лінія) порівняно з неадитивними модифікаціями статистик Поліхронакоса (штрих-пунктирна лінія) та Голдейна–Ву (штрихова лінія).

Модель, яка ґрунтується на статистиці Поліхронакоса (32), було використано для опису ефектів взаємодій та скінченності кількості частинок у системі бозонів. Звичайну експоненту в ґіббсівському факторі замінимо на q-експоненту Цалліса. Як і в моделі еніонів, така заміна — чисто феноменологічна. При цьому, хоча й ефекти взаємодій можна враховувати через неекстенсивність/неадитивність [S. Abe & Y. Okamoto (eds.), *Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications* (Berlin: Springer, 2001)], а параметр статистики Поліхронакоса пов'язаний зі способом обчислення кількості мікростанів, не потрібно очікувати, що ефекти взаємодій та скінченності системи можна буде легко розділити, віднісши їх до різних модифікацій статистики. Зокрема, як згадувалося вище, саме у статистиці Поліхронакоса мала уявна частина параметра дає змогу моделювати слабку дисипативну частину спектра бозе-системи [17, 18].

Отже, для чисел заповнення j-го рівня системи зі спектром елементарних збуджень ε_j матимемо вираз

$$n_j = \frac{1}{z^{-1} e_q^{\varepsilon_j/T} - \gamma},$$

де T — температура, а z — активність. Надалі розглядатимемо малі відхилення від розподілу Бозе, тому зобразимо параметри q та γ у вигляді:

$$q = 1 - b, \qquad \gamma = 1 + a,$$

де a та b — малі поправки. Відповідну статистику називатимемо *слабко-неадитивною статистикою Поліхронакоса* (СНАСП).

Порівнюючи розклади за малими поправками щодо ідеального бозе-газу для кількості частинок та енергії системи зі СНАСП та скінченної бозе-системи зі взаємодією, отримаємо зв'язок параметрів a та b з відхиленнями активності Δz та спектра $\Delta\varepsilon_j$ від значень в ідеальній системі [19]. Для оцінки значень a та b потрібне ще одне рівняння, оскільки невідома поправка до активності Δz_1 модельної системи зі СНАСП. З цією метою можна використати вирази для критичної температури обох систем. Для системи зі СНАСП поправка порівняно з безмежною бозе-системою

$$\frac{\Delta T_c}{T_c^{\mathrm{B}}} = \frac{a}{3} - b\frac{2\zeta(4)}{\zeta(3)}, \tag{37}$$

а в бозе-системі поправки на скінченність кількості частинок та взаємодію дорівнюють відповідно [S. Giorgini et al., Phys. Rev. A **54**, R4633 (1996)]

$$\frac{\Delta T_c^{\mathrm{fin}}}{T_c^{\mathrm{B}}} = -\frac{1}{2}\frac{\zeta(2)}{[\zeta(3)]^{3/2}} N^{-1/3}, \qquad \frac{\Delta T_c^{\mathrm{int}}}{T_c^{\mathrm{B}}} = -1.33\frac{a_s}{a_{\mathrm{ho}}} N^{1/6}, \tag{38}$$

де a_s — довжина розсіяння s-хвилі, а $a_{\mathrm{ho}} = (\hbar/m\omega)^{1/2}$. Для системи 5000 атомів Rb-87 відношення $a_s/a_{\mathrm{ho}} \simeq 2.6 \cdot 10^{-3}$. Відповідні розрахунки дають [19]

$$a = -0.16, \qquad b = 0.0027.$$

Цікаво, що вважаючи параметр a повністю відповідальним за ефекти скінченності кількості частинок, а параметр b — за вплив міжчастинкових взаємодій, з виразів (37)–(38) будемо мати такі значення:

$$a = -0.13, \qquad b = 0.022.$$

Таким чином, ми отримали порядок значень параметрів статистики, що відповідає реальним фізичним задачам. У роботі зроблено розрахунки теплоємностей систем зі СНАСП, що відповідають двом випадкам: у першому параметри a, b вважаємо сталими, а в другому параметр b лінійно змінюється з температурою. Цікаво відзначити, що друга модель відповідає зокрема задачам, пов'язаним з деформованими алґебрами Гайзенберґа. З іншого боку, поведінка теплоємності при $b \sim T$ якісно відтворює результати для гелію-4 [1].

Результати п'ятого розділу опубліковані в роботах [1, 5, 16, 19, 20].

У **шостому розділі** «***Підхід статистичної механіки до задачі про розбиття натуральних чисел***» розглянуто теоретико-числову задачу про т. зв. розбиття, до якої можна застосувати фізичні методи. Розбиттям натурального числа n називають спосіб його запису як суми натуральних чисел (їх називають частинами), де порядок доданків несуттєвий. Кількість розбиттів називають *функцією розбиття* і позначають $p(n)$. Наприклад, число $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, тобто $p(5) = 7$.

Такі розбиття цілих чисел називають *необмеженими*. Однак, на частини розбиття можна накладати різні обмеження: вимагати, щоб вони були парними/непарними, перебували в певному інтервалі значень тощо. Найпростішим є обмеження на кількість частин $\leq N$, і саме такі *обмежені розбиття* ми далі позначатимемо $p_N(n)$.

Щоби пов'язати статистико-механічну задачу з її відповідником у теорії чисел, використовуватимемо такий метод [M. N. Tran et al., Ann. Phys. **311**, 204 (2004)]. Статистична сума $Z(\beta)$ виражається через кількість мікростанів $\Gamma(E)$ як перетворення Лапласа:

$$Z(\beta) = \int_0^\infty \Gamma(E) e^{-\beta E}\, dE, \qquad \Gamma(E) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} Z(\beta) e^{\beta E}\, d\beta,$$

де $\beta = 1/T$ — обернена температура.

Після низки перетворень, використовуючи метод перевалу, для кількості мікростанів отримаємо

$$\Gamma(E) = \frac{e^{S(\beta_0)}}{\sqrt{2\pi S''(\beta_0)}},$$

де ентропія дорівнює $S(\beta) = \beta E + \ln Z(\beta)$, а β_0 — стаціонарна точка, $S'(\beta_0) = 0$.

Із цього виразу можна отримати оцінку кількості розбиттів натурального числа n, розглядаючи статистичні суми відповідної фізичної системи з подальшою заміною енерґії E на n, тобто $\Gamma(E) \to p(n)$. Зокрема, в одновимірному випадку $\beta_0 = \pi / \sqrt{6E}$, і маємо асимптотичний вираз Гарді–Рамануджана для кількості одновимірних розбиттів

$$\Gamma(E) = \frac{1}{4\sqrt{3}\,E} e^{\pi\sqrt{2E/3}}, \qquad p(n) = \frac{1}{4\sqrt{3}\,n} e^{\pi\sqrt{2n/3}}\,. \tag{39}$$

Взявши більше доданків у ряді для ентропії, отримаємо такий результат [4]:

$$\Gamma(E) = \frac{e^{S(\beta_0)}}{2\pi} \frac{2S''(\beta_0)}{\sqrt{3}\,|\,S'''(\beta_0)\,|} \exp\left\{\frac{[S''(\beta_0)]^3}{3[S'''(\beta_0)]^2}\right\} K_{1/3}\left(\frac{[S''(\beta_0)]^3}{3[S'''(\beta_0)]^2}\right), \tag{40}$$

де $K_\nu(x)$ — функція Макдоналда (модифікована функція Бесселя другого роду). Звідси зокрема для одновимірних розбиттів матимемо

$$p_{\mathrm{corr}}(n) = \frac{1}{18\sqrt[4]{6}n^{3/4}} \exp\left\{\frac{28}{27}\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right\} K_{1/3}\left(\frac{1}{27}\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right). \tag{41}$$

Порівняно з головною асимптотикою Гарді–Рамануджана (39), цей вираз у компактному вигляді забезпечує кращу оцінку (з відхиленням < 1%) навіть для малих значень $n > 20$. Потрібно однак зазначити, що у задачі про двовимірні розбиття вираз (40) дає точніші оцінки лише для $n < 17$ [28].

Розглядаючи задачу про скінченну кількість бозонів, можна отримати результати для обмежених розбиттів на скінченну кількість частин. Статистична сума Z_N скінченної системи N бозонних гармонічних осциляторів з частотою ω у D-вимірному просторі задовольняє таке рекурентне співвідношення [P. Borrmann & G. Franke, J. Chem. Phys. **98**, 2484 (1993)]:

$$Z_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} B_k(x) Z_{N-k}(x), \quad Z_0(x) \equiv 1, \quad B_k(x) = \frac{1}{\left(1 - x^k\right)^D}, \quad x = e^{-\beta\hbar\omega}. \tag{42}$$

В одновимірному випадку вираз для Z_N отримуємо точно, внаслідок чого після нескладних перетворень вдається відтворити класичний результат про обмежені одновимірні розбиття [P. Erdös & J. Lehner, Duke Math. J. **8**, 335 (1941)]. У загальному ж випадку до рівняння (42) можна застосувати так зване Z-перетворення, яке є дискретним аналогом перетворення Лапласа. Зіставляючи відповідні розв'язки в одновимірній та двовимірній задачах, отримаємо для обмежених двовимірних розбиттів числа n на щонайбільше N частин такий вираз [21]:

$$p_N^{\mathrm{2D}}(n) = p^{\mathrm{2D}}(n) \exp\left\{-\frac{Nn^{1/3}}{[2\zeta(3)]^{1/3}} e^{-N[2\zeta(3)/n]^{1/3}}\right\}, \tag{43}$$

де $p^{\mathrm{2D}}(n)$ задає кількість необмежених двовимірних розбиттів [E. M. Wright, Quart. J. Math. **2**, 177 (1931)].

У цьому розділі також отримано низку оцінок для розбиттів на суму s-тих степенів. Зокрема, головну асимптотику D-вимірних розбиттів визначає залежність [14]:

$$p^D(s\,|\,n) \sim \exp\left[\mathrm{const}\, n^{D/(s+D)}\right]. \tag{44}$$

Розглядаючи скінченні розбиття, які відповідають бозе-системі зі скінченною кількістю частинок N та системі зі статистикою Джентіле, де максимальне заповнення рівня обмежене числом M, можна показати, що в головному наближенні справджується еквівалентність між такими системами за умови [12]

$$M \sim e^{sN^s/T}. \tag{45}$$

Результати шостого розділу опубліковані в роботах [4, 12, 14, 21, 28].

У **сьомому розділі** «***Статистика Бозе в задачі класифікації складних систем***» показано, як підходи статистичної фізики можна застосовувати для різних систем, що складаються з багатьох одиниць, і тексти для таких досліджень виявляються добрим матеріалом, зважаючи на доступність та високе розмаїття. Проаналізовано кількісну поведінку текстів на підставі виявленої аналогії з бозе-системою в підході великого канонічного ансамблю. Продемонстровано можливість присвоєння текстові певного нового набору параметрів, які характеризують його частотну структуру, причому один із них можна умовно назвати «температурою».

Тексти було досліджено на рівні слів. Щоб отримати ранґово-частотний розподіл, потрібно спочатку укласти частотний список із заданої вибірки (тексту). Далі, слово із найбільшою частотою отримує *ранґ 1*, наступне за частотою — *ранґ 2* і так далі. Словам із однаковими частотами присвоюють послідовні значення ранґів, у межах яких упорядкування може бути довільним — це відразу стає натяком на аналогію з тим, як заповнюють квантовий стан бозони. Щоб продемонструвати аналогію, зіставмо номер енерґетичного рівня j з абсолютною частотою слова у певному тексті. Тобто слова з частотою 1 займатимуть перший рівень $j = 1$, слова з частотою 2 — другий рівень $j = 2$ і т. д. Заселеність рівня N_j буде відповідати кількості різних слів із частотою j. Оскільки таке число може набувати будь-яких значень (зокрема як завгодно великих), то можна використати для опису частотної структури тексту функції розподілу Бозе. Найнижчий енерґетичний рівень відповідає *hapax legomena* — словам, що трапилися в досліджуваному тексті лише один раз (їх кількість — N_1).

Як показали наші дослідження [6–7], для опису низькочастотної структури текстів добре підходить степеневий спектр

$$\varepsilon_j = (j-1)^{\alpha}. \tag{46}$$

Одиницю віднімаємо з міркувань зручності, забезпечуючи нульове значення енерґії першого рівня. Параметри функції розподілу визначатимемо за таким алгоритмом. Спочатку обчислюємо z, виходячи з кількості *hapax legomena*:

$$z = \frac{N_1}{N_1 + 1}, \tag{47}$$

«Температуру» T й показник степеня α далі обчислюємо одночасно, зіставляючи розраховані для реального тексту значення N_j із теоретичною моделлю

$$N_j = \frac{1}{z^{-1}e^{(j-1)^{\alpha}/T} - 1}. \tag{48}$$

Порівняння результатів розрахунків зі спостережуваними даними подано на рис. 9.

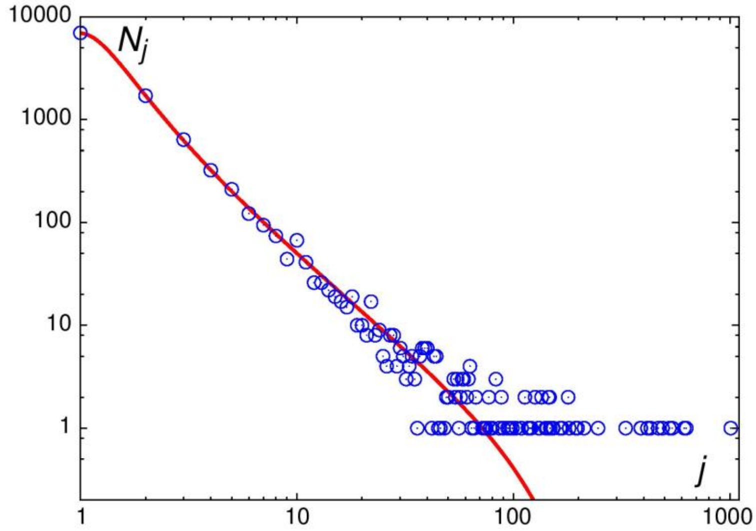

Рис. 9. Зіставлення теоретичної моделі зі спостережуваним значенням заповнення рівнів. Кружечки відповідають даним, отриманим на підставі перших 40 розділів роману Івана Франка «Перехресні стежки». Суцільна лінія — функція (48), розрахована за першими 20 значеннями чисел заповнення N_j.

Як показує практика, величина $\tau = \ln T \,/\, \ln N$ виявляє слабку залежність від довжини тексту N, тому її використаємо для порівняльного аналізу разом з показником α.

Одним із об’єктів для дослідження було обрано переклади новели-казки Антуана де Сент-Екзюпері «Маленький принц» [7], яку перекладено понад 200 мовами.

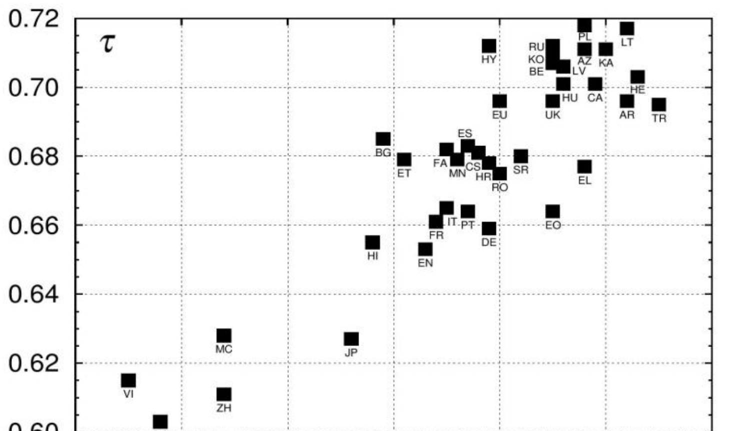

Рис. 10. Положення перекладів новели-казки «Маленький принц» різними мовами на площині (α; τ). Мови позначено кодами ISO.

На рис. 10 показано результати розрахунків для перекладів «Маленького принца». Можна зауважити досить сильну кореляцію між значеннями запропонованих параметрів α,τ та типом граматики мови: менші значення відповідають вищому рівню аналітичності (менш розвинена словозміна). Ці висновки було підтверджено й на прикладі інших текстів [25–26]; вони відповідають оцінкам іншими методами, порівн. [J. H. Greenberg, Int. J. Am. Ling. **26**, 178 (1960)].

Показано, що розвинутий підхід можна застосовувати як допоміжний для вивчення еволюції мов на прикладі перекладів Євангелія від Івана, серед яких кілька версій давніми мовами [25]. Також запропоновано моделювати ранґово-частотні розподіли у текстах мовами з високим рівнем аналітичності розподілом Бозе для осциляторів у просторі з дробовою вимірністю $D < 1$ та моделями зі статистикою Поліхронакоса [27].

Результати сьомого розділу опубліковані в роботах [6, 7, 24–27].

ВИСНОВКИ

Основні результати роботи можна підсумувати у вигляді таких тверджень.

1. Показано, як енерґетичний спектр сильновзаємодіючої бозе-системи можна отримати за допомогою діагоналізації гамільтоніана. На підставі формалізму двочасових температурних функцій Ґріна у довгохвильовій границі для гелію-4 отримано правильний нахил фононної гілки без застосування поняття ефективної маси. Відповідні аналітичні вирази можна застосовувати насамперед для систем із відомим фур’є-зображенням потенціалу міжатомних взаємодій

2. У випадку слабковзаємодіючого бозе-газу отримано вирази для парного міжчастинкового потенціалу, що уточнюють δ-подібну залежність у борнівському наближенні теорії розсіяння. У моделі твердих сфер обчислено густину станів, критичну температуру та хімічний потенціал із використанням теорії ідеального газу на підставі спектра Боголюбова. За допомогою розкладу для двовимірного газу за параметром взаємодії v_0 отримано результати, які можна узагальнити для довільної вимірності. Показано, що критична температура $T_c \sim -1 / \ln v_0$ і прямує до нуля, а хімічний потенціал газу в пастці з точністю до лінійних за v_0 доданків дорівнює хімічному потенціалові ідеального газу й відрізняється від нього доданками типу $\rho^2 v_0^2 \ln \rho v_0$.

3. Ідею Боголюбова про наближене вторинне квантування узагальнено на випадок слабковзаємодіючого бозе-газу в гармонічній пастці. У результаті цього отримано систему рівнянь, що дають змогу діагоналізувати гамільтоніан і розрахувати спектр елементарних збуджень. Застосовуючи пертурбативний розв’язок, обчислено конденсатну фракцію та енерґію модельної системи як функції температури. Вперше запропоновано процедуру побудови ефективного гамільтоніана цієї задачі, що дозволяє здійснити просту діагоналізацію.

4. Для бозе-системи у просторі з дробовою вимірністю (що відповідає пористому середовищу) проаналізовано відхилення від напівкласичного підходу та знайдено поправки, пов’язані з дискретністю енерґетичних рівнів. Знайдені аналітичні залежності критичної температури корисні для вивчення впливу скінченності кількості частинок на фізичні властивості бозонної системи. Числовий аналіз показує, що дискретність енерґетичних рівнів треба враховувати, аналізуючи безпосередній температурний окіл точки бозе-конденсації.

5. Розглянуто систему одновимірних гармонічних осциляторів, що підпорядковуються дробовій статистиці Джентіле. З використанням відомої функції розподілу для модельної системи зі слабкою взаємодією вперше розраховано температурні залежності хімічного потенціалу, енергії та теплоємності. Проаналізовано вплив на них максимального заповнення рівня — параметра, що характеризує статистику.

6. Дробову статистику Поліхронакоса вперше узагальнено з використанням комплекснозначного параметра, який у бозонній та ферміонній границі можна пов'язати з дисипативною гілкою енерґетичного спектра. Для одновимірної системи гармонічних осциляторів у такій статистиці розраховано термодинамічні функції, передбачено існування фазового переходу та зроблено оцінки про можливість експериментального вимірювання стрибків теплоємності. У випадку *D*-вимірної системи з'ясовано природу фазових переходів і зроблено аналітичні та числові оцінки критичних температур.

7. Двопараметричні дробові статистики вперше використано для моделювання ідеальної системи еніонів. Показано, що за допомогою модифікацій статистики Голдейна–Ву можна відтворити рівняння стану еніонів з точністю до третього віріального коефіцієнта включно в усьому інтервалі значень еніонного параметра $\alpha \in [0; 1]$, тоді як модифікації статистики Поліхронакоса дозволяють коректний опис лише на обмежених відрізках з боку бозонної і ферміонної границь. На підставі проведеного аналізу запропоновано продовжити пошуки моделей еніонів серед модифікацій статистики Голдейна–Ву. За допомогою слабконеадитивної дробової статистики Поліхронакоса також вперше вдалося врахувати вплив міжчастинкової взаємодії та скінченності кількості частинок у бозонних системах.

8. Методи аналізу бозонних систем поширено на суміжні задачі, що відкрило шлях до міждисциплінарних досліджень. Зокрема, розглянуто теоретико-числові задачі, відомі як розбиття натуральних чисел. Мікроканонічний розгляд бозе-системи зі степеневим спектром дав змогу оцінити кількість багатовимірних розбиттів на суму довільних степенів, причому отримані оцінки збігаються з відомими асимптотиками, розрахованими різними методами теорії чисел. Для одновимірних розбиттів отримано у простому компактному вигляді поправку до головної асимптотики Гарді–Рамануджана. Також вперше оцінено кількість обмежених двовимірних (плоских) розбиттів натуральних чисел зі скінченною кількістю частин.

9. Вперше вдалося встановити відповідність між дробовою (проміжною) статистикою Джентіле і бозе-системою зі скінченною кількістю частинок у випадку одновимірної гармонічної пастки. Запропонований підхід розширено на загальний степеневий енерґетичний спектр.

10. На підставі аналогії між ранґово-частотним розподілом (на прикладі текстів) і функцією розподілу у статистиці Бозе–Айнштайна запропоновано підхід для аналізу і класифікації складних систем. Запропоновано нові параметри для дослідження текстів та встановлено їх співвідношення з певними характеристиками мов. Такий набір параметрів має також перспективи застосування в біології (наприклад, при ви-

вченні геномів) та суспільних науках у задачах, які дозволяють кількісний аналіз.

Результати роботи та подальші дослідження у відповідних напрямках важливі для інтерпретації експериментів у галузі фізики конденсованих систем, розробки нових технологій запису інформації та високоточних вимірювань, а також для отримання нових математично простих способів опису бозе- та фермі-систем із різними типами взаємодій, які є предметом інтенсивних експериментальних і теоретичних досліджень, які проводять у сучасних світових наукових центрах і лабораторіях.

Основні результати дисертації опубліковано в таких роботах:

[1] *Вакарчук І. О.* Кінетична енергія і теплоємність рідкого ^{4}He / І. О. Вакарчук, Р. О. Притула, А. А. Ровенчак // Журн. фіз. досл. — 2007. — Т. 11, №3. — С. 259–267.

[2] *Ільків І. М.* Вплив слабкої взаємодії на властивості бозе-газу / І. М. Ільків, А. А. Ровенчак // Журн. фіз. досл. — 2007. — Т. 11, №1. — С. 122–131.

[3] *Топілко М. І.* Термодинамічні функції одновимірних слабковзаємодіючих гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле / М. І. Топілко, А. А. Ровенчак // Журн. фіз. досл. — 2009. — Т. 13, №2. — Ст. 2004. — 8 с.

[4] *Prokhorov D.* Asymptotic formulas for integer partitions within the approach of microcanonical ensemble / D. Prokhorov, A. Rovenchak // Condens. Matter Phys. — 2012. — Vol. 15, No. 3. — Art. 33001. — 9 p.

[5] *Горнецька М. Я.* Двопараметричні модифікації статистик еніонів / М. Я. Горнецька, А. А. Ровенчак // Укр. фіз. журн. — 2016. — Т. 61, №2. — С. 174–183; *Hornetska M. Ya.* Two-parameter modifications of anyonic statistics / M. Ya. Hornetska, A. A. Rovenchak // Ukr. J. Phys. — 2016. — Vol. 61, No. 2. — P. 168–177.

[6] *Rovenchak A.* Application of a quantum ensemble model to linguistic analysis / A. Rovenchak, S. Buk // Physica A. — 2011. — Vol. 390, No. 7. — P. 1326–1331.

[7] *Rovenchak A.* Defining thermodynamic parameters for texts from word rank-frequency distributions / A. Rovenchak, S. Buk // J. Phys. Stud. — 2011. — Vol. 15, No. 1. — Art. 1005. — 6 p.

[8] *Ровенчак А. А.* Міжатомні потенціали розрідженої багатобозонної системи / А. А. Ровенчак // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. Фізика. — 2003. — №14. — С. 16–19.

[9] *Rovenchak A. A.* Energy spectrum of an interacting Bose-system / A. A. Rovenchak // J. Low Temp. Phys. — 2005. — Vol. 138, No. 1/2. — P. 49–54.

[10] *Rovenchak A. A.* Extraction of interatomic potentials from structure of liquids / A. A. Rovenchak // Centr. Eur. J. Phys. — 2005. — Vol. 3, No. 1. — P. 47–60.

[11] *Rovenchak A. A.* Weakly-interacting bosons in a trap within approximate second quantization approach / A. A. Rovenchak // J. Low Temp. Phys. — 2007. — Vol. 148, No. 3/4. — P. 411–416.

[12] *Rovenchak A.* The relation between fractional statistics and finite bosonic systems in one-dimensional case / A. Rovenchak // Fiz. Nizk. Temp. — 2009. — Vol. 35, No. 5. — P. 510–513; Low Temp. Phys. — 2009. — Vol. 35, No. 5. — P. 400–403.
[13] *Rovenchak A.* Harmonically trapped bosons on the Sierpiński carpet / A. Rovenchak // Acta Phys. Pol. A. — 2010. — Vol. 118, No. 4. — P. 531–533.
[14] *Rovenchak A.* Partition function formalism in the problem of multidimensional integer partitions / A. Rovenchak // Computat. Meth. Sci. Technol. — 2010. — Vol. 16, No. 2. — P. 187–190.
[15] *Rovenchak A.* Polychronakos fractional statistics with a complex-valued parameter / A. Rovenchak // J. Phys.: Conf. Ser. — 2012. — Vol. 400. — Art. 012064. — 4 p.
[16] *Ровенчак А.* Дробові статистики: погляд з боку статистичної фізики / А. Ровенчак // Журн. фіз. досл. — 2013. — Т. 17, №2. — Ст. 2001. — 15 с.
[17] *Rovenchak A.* Phase transition in a system of 1D harmonic oscillators obeying Polychronakos statistics with a complex parameter / A. Rovenchak // Fiz. Nizk. Temp. — 2013. — Vol. 39, No. 10. — P. 1141–1145; Low Temp. Phys. — 2013. — Vol. 39, No. 10. — P. 888–892.
[18] *Rovenchak A.* Complex-valued fractional statistics for *D*-dimensional harmonic oscillators / A. Rovenchak // Phys. Lett. A. — 2014. — Vol. 378, No. 3. — P. 100–108.
[19] *Rovenchak A.* Weakly nonadditive Polychronakos statistics / A. Rovenchak // Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 89, No. 5. — Art. 052116. — 7 p.
[20] *Rovenchak A.* Two-parametric fractional statistics models for anyons / A. Rovenchak // Eur. Phys. J. B. — 2014. — Vol. 87, No. 8. — Art. 175. — 6 p.
[21] *Rovenchak A. A.* Enumeration of plane partitions with a restricted number of parts / A. A. Rovenchak // Theor. Math. Phys. — 2014. — Vol. 181, No. 2. — P. 1428–1434.
[22] *Rovenchak A.* A note on the calculation of the long-wavelength limit of the bosonic excitation spectrum / A. Rovenchak // Z. Naturforsch. A. — 2015. — Vol. 70, No. 1. — P. 73–78.
[23] *Rovenchak A.* Effective Hamiltonian and excitation spectrum of harmonically trapped bosons / A. Rovenchak // Fiz. Nizk. Temp. — 2016. — Vol. 42, No. 1. — P. 49–55; Low Temp. Phys. — 2016. — Vol. 42, No. 1. — P. 36–41.
[24] *Rovenchak A.* A naïve conception of the uncertainty principle in the multiparametric attribution of texts / A. Rovenchak // Glottometrics. — 2011. — No. 21. — P. 65–72.
[25] *Rovenchak A.* Trends in language evolution found from the frequency structure of texts mapped against the Bose-distribution / A. Rovenchak // J. Quant. Ling. — 2014. — Vol. 21, No. 3. — P. 281–294.
[26] *Rovenchak A.* Where Alice meets Little Prince: Another approach to study language relationships / A. Rovenchak // Sequences in Language and Text / Ed. by George K. Mikros, Ján Mačutek. — Berlin ; Boston : Walter de Gruyter GmbH, 2015. — P. 217–230.

[27] *Rovenchak A.* Models of frequency spectrum in texts based on quantum distributions in fractional space dimensions / A. Rovenchak // 20th International Conference on Control Systems and Computer Science CSCS 2015: Proceedings, 27–29 May 2015, Bucharest, Romania / Ed. by I. Dumitrache, A. M. Florea, F. Pop, A. Dumitraşcu. — Vol. 2. — Los Alamitos, CA : IEEE Computer Society, 2015. — P. 645–649.

[28] *Rovenchak A.* Statistical mechanics approach in the counting of integer partitions. — E-print arXiv:1603.01049. — 2016. — 18 p.; to appear in Banach Center Publications.

[29] *Ровенчак А. А.* Фізика бозе-систем / А. А. Ровенчак. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2015. — 128 с.

Вибрані тези доповідей:

[30] *Rovenchak A.* An approximate second quantization approach for trapped weakly-interacting bosons / *A. Rovenchak* // International Symposium on Quantum Fluids and Solids QFS2006, Kyoto University, Kyoto, Japan, August 1-6, 2006. — PC16.

[31] *Rovenchak A.* Fractional Statistics and Finite-size Bosonic System / A. Rovenchak // International Symposium on Quantum Fluids and Solids QFS2007, 01-06 August 2007. Kazan, Russia : Program and Abstracts. — P. 170.

[32] *Rovenchak A.* Polychronakos fractional statistics with a complex-valued parameter / A. Rovenchak // LT26: The 26th International Conference on Low Temperature Physics, August 10-17, 2011, Beijing International Convention Center, Beijing, China. — P. 264.

[33] *Rovenchak A.* Finite systems of 1D and 2D harmonic oscillators obeying fractional statistics with a complex parameter / A. Rovenchak // International Conference on Quantum Fluids and Solids 2012, 15th-21st August 2012, Lancaster University, UK : Conference Handbook. — P. 135.

[34] *Rovenchak A.* Enumeration of plane partitions with a restricted number of parts / A. Rovenchak // 6th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 23-25 September 2013, Zielona Góra, Poland : Book of abstracts. — P. 29.

Анотація

Ровенчак А. А. Статистика Бозе і дробові статистики в теорії багаточастинкових систем і суміжних задачах. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 — теоретична фізика, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2016.

У дисертаційній роботі розроблено низку підходів до аналізу багатобозонних систем та систем із дробовими статистиками. Аналогії з фізичними моделями використано для міждисциплінарних досліджень.

Запропоновано способи розрахунку спектра бозе-систем і на прикладі гелію-4 показано можливість отримання правильної довгохвильової поведінки без уведення

ефективної маси. Розраховано міжчастинковий потенціал слабковзаємодіючої бозонної системи та зроблено оцінки впливу взаємодій на термодинамічні функції.

Для бозонів у пастках досліджено вплив скінченності кількості частинок на термодинамічні функції. Запропоновано спосіб ефективного врахування в гамільтоніані доданків із трьома й чотирма операторами породження–знищення. Розраховано термодинамічні функції гармонічних осциляторів зі статистикою Джентіле.

Запропоновано нові типи дробових статистик: статистику Поліхронакоса з комплексним параметром та двопараметричні статистики, які дозволяють моделювати еніони та слабковзаємодіючі скінченні бозе-системи. У випадку комплексного параметра в системі осциляторів передбачено існування фазових переходів та оцінено можливості їх експериментальної перевірки.

Аналогії з розподілом Бозе застосовано для кількох задач із суміжних галузей науки. Низку результатів отримано для задачі про розбиття з теорії чисел, зокрема вперше оцінено кількість обмежених плоских розбиттів. Запропоновано нові параметри для класифікації текстів, що пов’язано з дослідженнями складних систем.

Ключові слова: бозе-система, бозони в пастках, спектр елементарних збуджень, дробова статистика, еніон, статистика Джентіле, статистика Голдейна–Ву, статистика Поліхронакоса, розбиття натуральних чисел, ранґово-частотний розподіл.

Аннотация

Ровенчак А. А. Статистика Бозе и дробные статистики в теории многочастичных систем и смежных задачах. — Рукопись.
Диссертация на соискание научной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика, Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2016.

В диссертационной работе разработан ряд подходов к анализу многобозонных систем и систем с дробными статистиками. Аналогии с физическими моделями использованы для междисциплинарных исследований.

Предложены способы расчёта спектров бозе-систем и на примере гелия-4 показана возможность получения правильной длинноволновой асимптотики без введения эффективной массы. Рассчитан межчастичный потенциал слабовзаимодействующей бозонной системы и сделаны оценки влияния взаимодействия на термодинамические функции.

Для бозонов в ловушках исследовано влияние конечности количества частиц на термодинамические функции. Предложен способ эффективного учета в гамильтониане слагаемых с тремя и четырьмя операторами рождения–уничтожения. Рассчитаны термодинамические функции гармонических осцилляторов, подчиняющихся статистике Джентиле.

Предложены новые типы дробных статистик: статистика Полихронакоса с комплексным параметром и двухпараметрические статистики, которые позволяют моделировать энионы и слабовзаимодействующие конечные бозе-системы. В случае комплексного параметра в системе осцилляторов предсказано существование фазовых переходов и оценены возможности их экспериментальной проверки.

Аналогии с распределением Бозе применены для задач из смежных областей науки. Ряд результатов получен для задачи о разбиении в теории чисел, в частности впервые оценено количество ограниченных плоских разбиений. Предложены новые параметры для классификации текстов, что связано с исследованиями сложных систем.

Ключевые слова: бозе-система, бозоны в ловушках, спектр элементарных возбуждений, дробная статистика, энион, статистика Джентиле, статистика Холдейна–Ву, статистика Полихронакоса, разбиение натуральных чисел, рангово-частотное распределение.

Abstract

A. A. Rovenchak. Bose-statistics and fractional types of statistics in the many-body theory and related problems. — A Manuscript.

Thesis for the Degree of Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, specialty 01.04.02 – Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv, 2016.

The thesis concerns the study of phenomena occurring in many-body systems obeying Bose-statistics and some fractional types of statistics.

The elementary excitation spectrum of a strongly-interacting bosonic system is calculated from a diagonalized Hamiltonian, while the two-time temperature Green’s function approach is used to obtain the phonon branch of the helium-4 liquid without involving the notion of the effective mass.

Several results are obtained for a weakly-interacting Bose-gas. First of all, the corrections to the δ-like interatomic potential in the Born approximation are calculated. The hard sphere bosons are modeled by an ideal Bose-gas with Bogoliubov’s spectrum. For this system, the density of states is obtained and thermodynamic functions are calculated. The critical temperature as a function of the interaction parameter ν_0 is studied for a two-dimensional gas, with the dependence $T_c \sim -1/\ln \nu_0$ reflecting the expected behavior.

The approximate quantization approach is extended for harmonically trapped bosons. In a simplified model, the diagonalization problem leading to a set of matrix equations is solved perturbatively providing data for the calculations of thermodynamic properties. The possibility to obtain an effective Hamiltonian taking into account higher corrections (with products of three and four creation–annihilation operators) is also discussed.

A finite bosonic system is studied in a space with fractional space dimensionality corresponding to a porous medium confined to a harmonic trap. A detailed numerical analysis shows that the discreteness of the energy levels must be taken into consideration only in an immediate vicinity of the critical point, while for other temperatures the semi-classical approach yields a good description.

Thermodynamic properties of weakly-interacting one-dimensional harmonic oscillators obeying the fractional Gentile statistics are calculated. The behavior of the chemical potential, energy, and specific heat is studied with respect to the maximal level occupation.

The fractional Polychronakos statistics is generalized with its parameter being complex-valued. In the bosonic and fermionic limit such a system corresponds to bosons or fermions with a small dissipative branch in the excitation spectrum. For a one-dimensional harmonic oscillator system in this statistics some phase transitions are predicted and estimations towards the possibility of experimental observations of the respective specific heat jumps are made. For a D-dimensional system, the nature of phase transitions is clarified and both analytical and numerical estimations for critical temperatures are given.

Several types of two-parametric fractional statistics are proposed to model ideal anyons. It is shown that modifications of the Haldane–Wu statistics can reproduce the equation of state up to the third virial coefficient in the whole domain of the anyonic parameter $\alpha \in [0; 1]$. It is suggested that this very statistics should be further considered as a background for modifications to describe anyons with a higher accuracy. The weakly-nonadditive Polychronakos statistics is applied to account for interparticle interactions and finiteness of a bosonic system.

Methods of the analysis of the bosonic systems are applied to some related problems of the interdisciplinary nature. The problem of integer partitions originating from the number theory is studied on the basis of the microcanonical treatment of bosons. A simple closed expression is obtained for the correction to the main asymptotics of one-dimensional partitions known as the Hardy–Ramanujan formula. The expression is conjectured for the numbers of restricted plane partitions yielding a good agreement with the exact values. Some other results for multidimensional partitions on the sum of powers of integers are also obtained. Within this approach, the analogy between the Gentile statistics and a finite Bose-system is established.

From the analogy between the rank–frequency distribution and the distribution function in the Bose-statistics an approach is suggested for the analysis and classification of complex systems (with text used as examples). A new set of parameters is proposed for studies of texts and the correlation between these parameters and some language properties is established. The proposed approach seems prospective in biology (e.g., in the study of genomes) as well as in social sciences with respect to problems allowing for quantitative formulation.

The results of the preset work and further studies in the respective domains are important for the interpretation of experiments in the condensed matter physics, for new information processing technologies and high-accuracy measurements, and for obtaining new mathematically simpler techniques to describe interacting Bose- and Fermi-systems being presently under intensive theoretical and experimental studies.

Key words: Bose-system, trapped bosons, elementary excitation spectrum, fractional statistics, anyon, Gentile statistics, Haldane–Wu statistics, Polychronakos statistics, integer partitions, rank–frequency distribution.