Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Самар

Микола Іванович

УДК 530.145

КЛАСИЧНІ ТА РЕЛЯТИВІСТСЬКІ КВАНТОВІ ЗАДАЧІ В ПРОСТОРІ З МІНІМАЛЬНОЮ ДОВЖИНОЮ

01.04.02 — теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ – 2017

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор **Ткачук Володимир Михайлович**, професор кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор **Гаврилик Олександр Михайлович**, завідувач відділу математичних методів в теоретичній фізиці Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник **Пляцко Роман Михайлович,** провідний науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь та теорій функцій Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача.

Захист відбудеться “30” червня 2017 р. о 15 год. 00 хв. на засіданні спеціалізованої Вченої ради Д 35.051.09 при Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79005, м. Львів, вул. Кирила і Мефодія, 8, фізичний факультет, аудиторія Велика Фізична.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: 79005, м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розіслано “____” травня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої Вченої ради
доктор фіз.-мат. наук, доцент Ровенчак А. А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Завдяки широкому спектру описуваних явищ та високій точності передбачень квантова механіка є, мабуть, найбільш успішною фізичною теорією. Однак, високий рівень достовірності не вберіг квантову теорію від постійного переосмислення її основоположних принципів. Однією з причин перегляду основ квантової механіки є не дуже вдалі спроби квантового опису гравітаційної взаємодії через наявні суперечності між загальною теорією відносності, найточнішою теорією гравітації з відомих сьогодні, та деякими фундаментальними положеннями квантової теорії. Можна сказати, що квантування гравітаційного поля є однією з найбільш важливих проблем сучасної теоретичної фізики. Незважаючи на те, що дослідження в цій галузі ведуться більше ніж 50 років, досі не запропоновано повної теорії квантової гравітації. Невдачі у побудові квантової моделі гравітації лежать на перешкоді об'єднання гравітації з іншими трьома фундаментальними взаємодіями, тобто побудови так званої «теорії всього». Тому з середини 90-их років в рамках таких сучасних варіантів квантового опису гравітації як теорія струн чи квантова гравітація з'являються гіпотетичні моделі, які пропонують свій спосіб видозміни деяких ключових співвідношень квантової механіки. Одним із таких способів є введення узагальненого принципу невизначеності, що приводить до цікавих фізичних наслідків, таких як мінімальна довжина чи некомутативність простору.

Варто зауважити, що ідея некомутативного простору чи модифікованих співвідношень невизначеностей виникали в фізиці і раніше, та свого часу не викликали значного інтересу. Перша робота, в якій розглядалася модифікація канонічних комутаційних співвідношень, була опублікована ще у 1947 році Снайдером. Однак зацікавленість цією проблемою була відновлена наприкінці минулого століття дослідженнями з теорії струн та квантової гравітації, які передбачали існування ненульової мінімальної невизначеності координат. Кемпфом було показано, що мінімальна невизначеність координати може природно з’явитися у квантовій механіці шляхом незначної зміни канонічних комутаційних співвідношень. Саме роботи Кемпфа стимулювали дослідження традиційних квантово-механічних задач у просторах з мінімальною довжиною. Ці дослідження і досі залишаються актуальними, оскільки дозволяють визначити вплив квантованості простору на властивості фізичних систем, а також оцінити величину кванта простору.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та згідно держбюджетних тем Фф-55Ф “Теоретичні дослідження нових квантових систем” (2006-2008 рр., номер державної реєстрації №0106U001294), Фф-14Ф

“Нові методи дослідження квантових систем декількох і багатьох частинок” (2009-2011 рр., номер державної реєстрації №0109U002096) та Фф-110Ф “Нові ефекти у квантових рідинах і газах та системах з деформованою алґеброю Гайзенберґа” (2012-2014 рр., номер державної реєстрації №0112U001275), проект ДФФД Ф64 “Класичні та квантові системи за межами стандартних підходів” (2016 рр., номер д/р 0116U005055).

Мета і задачі дослідження. Головною метою дисертаційної роботи є вивчення впливу деформації комутаційних співвідношень на фізичні властивості одночастинкових систем. Основну увагу приділено знаходженню точних розв'язків квантово-механічних задач в деформованому просторі з мінімальною довжиною, зокрема одновимірної задачі про частинку в кулонівському потенціалі, в дельта-ямі чи подвійній дельта-ямі.

Значну частину роботи присвячено дослідженню впливу деформації комутаційних співвідношень на спектр релятивістського атома водню, що дало змогу провести оцінку верхньої межі для мінімальної довжини на основі порівняння експериментальних даних з теоретичними оцінками.

Таким чином, *об'єктом дослідження* є точно та наближено розв'язувані задачі квантової механіки у деформованому просторі з мінімальною довжиною. *Предметом дослідження* є спектри гамільтоніанів та їх власні функції. *Методами дослідження* виступають методи математичної фізики, що пов'язані зі знаходженням точних розв'язків рівняння Шредингера та теорія збурень, як звичайна, так і розроблена у роботі модифікована теорія.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі вперше показано, що довільна хвильова функція, що належить до фізичної області станів, може бути представлена як лінійна комбінація зліченного набору максимально локалізованих станів. Також вперше запропоновано простий рецепт такого представлення.

У роботі також запропоновано новий підхід у вирішенні простих квантово-механічних задач в деформованому просторі з мінімальною довжиною, що базується на узагальненні на деформований випадок рівняння Шредингера, записаного в імпульсному представленні.

Користуючись цим підходом, вдалося отримати точні розв'язки одновимірних задач про частинку в дельта-ямі та подвійній дельта-ямі. Вперше запропоновано означення для оператора $1/X$, при якому цей оператор є лінійним та двостороннім оберненим до оператора координати. Користуючись цим означенням, вперше знайдено точний розв'язок одновимірної задачі Кулона в загальному випадку деформованої алґебри Гайзенберґа.

Вперше розглянуто задачу про релятивістський атом водню в рамках теорії Дірака з лоренц-коваріантною деформованою алґеброю Гайзенберґа.

Вперше запропоновано в релятивістському випадку модифіковану теорію збурень, що дозволило вперше отримати аналітичні вирази для поправок до всіх без винятку енерґетичних рівнів. Порівняння одержаних поправок з експериментальними результатами дозволило провести оцінку верхньої межі для мінімальної довжини.

Практичне значення отриманих результатів. Результати, представлені у дисертації, мають самостійний інтерес, а також можуть бути використані в подальших експериментальних та теоретичних дослідженнях. Наприклад, отриманий спосіб представлення фізичних станів через максимально локалізовані стани має фундаментальне значення і може стати корисним для різного роду задач у деформованому просторі.

Новий підхід до розв'язку квантово-механічних задач, який ми з успіхом використали для знаходження розв'язку одновимірних задач про частинку в дельта-ямі, подвійній дельта-ямі та кулонівському потенціалі, може бути застосований для знаходження енерґетичного спектру та хвильових функцій для інших квантово-механічних систем. Також цей підхід може бути узагальнений на випадок вищих вимірів.

Отримані поправки до спектру атома водню можуть бути використані для подальших оцінок верхньої межі для мінімальної довжини, зважаючи на постійне експериментальне уточнення значення енерґії 1*s*-2*s* переходу.

Особистий внесок здобувача. Постановку завдань дослідження здійснив науковий керівник роботи проф. В. М. Ткачук. Усі викладені в дисертації результати автор отримав самостійно або при своїй безпосередній участі.

У роботах, виконаних зі співавторами, здобувачеві належить:

- отримання узагальненого рівняння Шредінґера в імпульсному представленні у випадку деформованої алґебри Гайзенберґа з мінімальною довжиною; знаходження точного розв'язку задачі про частинку в дельта-ямі, а також у подвійній дельта-ямі в деформованому просторі; точний розв'язок задачі про рух частинки в кулонівському потенціалі та вирішення проблеми означення оберненого оператора до оператора координати [4];
- означення оберненого оператора координати в загальному випадку одновимірної деформованої алґебри Гайзенберґа з мінімальною довжиною; знаходження спектру та хвильових функцій для одновимірної задачі Кулона у загальному випадку деформації та аналіз цього результату для окремих конкретних випадків деформованої алгебри [5];

- узагальнення рівняння Дірака на випадок лоренц-коваріантної деформованої алґебри Гайзенберґа з мінімальною довжиною; розрахунок поправок до енерґії релятивістського атома водню, що зумовлені деформацією комутаційних співвідношень [1, 2].

Результати статей, їхню інтерпретацію та застосовність використаних підходів співавтори обговорювали на паритетних засадах.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включені до дисертації, здобувач представляв особисто на таких конференціях та семінарах: Міжнародна Конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2007" (Львів, 2007) [6], Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2008" (Львів 2008) [7], Workshop on Theoretical Physics (Lviv 2009) [8], Workshop on Current Problems in Physics (Lviv, 2010) [9], X Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2010) [10], 4th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, (Zielona Góra, 2011) [11], IV Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics" (Kyiv, 2012) [12], Різдвяні дискусії 2013 (Львів, 2013) [13], VI International Conference "Physics of Disordered Systems" (Lviv, 2013) [14], Різдвяні дискусії 2014 (Львів, 2014) [15], XXXIII Max Born Symposium "Noncommutative geometry, quantum symmetries and quantum gravity" (Wroclaw, 2014) [16], Workshop on Current Problems in Physics (Lviv, 2014) [17], Різдвяні дискусії 2015 (Львів, 2015) [18], Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2015" (Львів, 2015) [19], Різдвяні дискусії 2016 (Львів, 2016) [20], Workshop on Current Problems in Physics (Lviv, 2016) [21].

Подані в роботі результати неодноразово обговорювали на наукових семінарах кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка.

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано в п’яти журнальних статтях [1-5] та шістнадцяти тезах доповідей на конференціях [6-21].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, шести розділів, висновків та списку використаних джерел. Обсяг дисертації становить 127 сторінок включно зі списком використаних джерел, що містить 110 найменувань. Результати роботи проілюстровано на 5 рисунках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність досліджень, які становлять зміст дисертації, висвітлено новизну одержаних результатів, подано зв’язок досліджень із науковими темами, у виконанні яких брав участь автор, окреслено мету роботи.

У **першому розділі** подається історія дослідження ідеї про деформований простір з мінімальною довжиною, починаючи від статті Снайдера, а також висвітлюється сучасний стан досліджень впливу деформації простору на властивості класичних та релятивістських квантових систем.

Другий розділ присвячений дослідженню гільбертового простору станів, пов'язаного з деформованим комутаційним співвідношенням з мінімальною довжиною.

Для некомутуючих операторів X та P, які задовольняють деформовану алґебру

$$[\mathrm{X}, \mathrm{P}] = i\hbar(1 + \beta\, \mathrm{P}^2), \tag{1}$$

можна записати співвідношення невизначеностей. У результаті отримуємо співвідношення, яке в літературі отримало назву узагальнений принцип невизначеності (з англ. Generalized Uncertainty Principle (GUP)):

$$\Delta \mathrm{X} \geq \frac{\hbar}{2}\left(1 + \frac{\beta\langle \mathrm{P}\rangle^2}{\Delta \mathrm{P}} + \beta\Delta \mathrm{P}\right). \tag{2}$$

Тут ми використали позначення $\Delta\mathrm{X}=\sqrt{\langle(\Delta\mathrm{X})^2\rangle}$ та $\Delta\mathrm{P}=\sqrt{\langle(\Delta\mathrm{P})^2\rangle}$. З нерівності (2) ми отримуємо, що дисперсія координати $\Delta\mathrm{X}$ має мінімум

$$\Delta \mathrm{X}_0 = \hbar\sqrt{\beta}\sqrt{1+\beta\langle \mathrm{P}\rangle^2}, \tag{3}$$

який досягається, коли $\Delta\mathrm{P}=\sqrt{\frac{1}{\beta} + \langle \mathrm{P}\rangle^2}$. Мінімальну довжину $\Delta\mathrm{X}_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$ отримаємо у випадку $\langle \mathrm{P}\rangle = 0$.

Власні функції оператора координати в псевдокоординатному представленні $\mathrm{P}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\tan\left(\sqrt{\beta}\mathrm{p}\right)$, $\mathrm{X}=i\hbar\frac{d}{dp}$, де $\mathrm{p} \in \left[-\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}, \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}\right]$ мають вигляд:

$$\Psi_\Lambda(\mathrm{p}) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}}\, e^{-i\frac{\Lambda}{\hbar}\mathrm{p}}. \tag{4}$$

Важливою особливістю квантової теорії з мінімальною довжиною є те, що власні стани оператора координати вже не є фізичними станами, оскільки для цих станів дисперсія координати $\Delta\mathrm{X}=0<\Delta\mathrm{X}_{\min}$, а також середнє значення кінетичної енерґія частинки є розбіжним.

З узагальненого принципу невизначеності (2) випливає, що середнє значення P^2 може бути скінченним лише для станів, які належать до дозволеної області $\Delta\mathrm{X} \geq \Delta\mathrm{X}_{\min}$. Тому фізичними станами називатимемо стани, для яких дисперсія координати більша за мінімальну довжину. Фізичні функції з максимальною локалізацією координати в псевдокоординатному представленні мають вигляд

$$\Psi_{\xi}^{ml}(p) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}\cos\left(\sqrt{\beta}p\right)e^{-i\frac{\xi}{\hbar}p}, \tag{5}$$

де ξ позначає середнє значення координати в цьому стані. Можна показати, що максимально локалізований стан може бути представлений як лінійна комбінація двох власних станів оператора координати

$$\Psi_{\xi}^{ml} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_{\xi-\hbar\sqrt{\beta}}+\Psi_{\xi+\hbar\sqrt{\beta}}\right). \tag{6}$$

Окрім цього доведено, що будь-яка фізична хвильова функція може бути представлена як лінійна комбінація зліченного набору максимально локалізованих станів та запропоновано простий спосіб як це зробити, а саме

$$F(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \Psi_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}^{ml}(p),$$

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} \bar{\Psi}_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p)\,\frac{F(p)}{\cos\left(\sqrt{\beta}p\right)}\,dp, \tag{7}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|A_n|^2 < \infty.$$

У **третьому розділі** запропоновано новий підхід у вирішенні простих квантово-механічних задач в деформованому просторі з мінімальною довжиною, що базується на узагальненні рівняння Шредингера в імпульсному представленні на випадок деформованої алґебри Гайзенберґа з мінімальною довжиною.

В недеформованому випадку рівняння Шредингера в імпульсному представленні має вигляд

$$\frac{p^2}{2m}\varphi(p) + \int_{-\infty}^{\infty} U\,(p-p')\varphi(p')dp' = E\varphi(p), \tag{8}$$

де

$$U(p-p') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} V\,(x)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,(p-p')x\right)dx \tag{9}$$

є ядром оператора потенціальної енерґії.

В деформованому випадку рівняння Шредингера (8) узагальнюється до вигляду

$$\frac{tg^2\left(\sqrt{\beta}p\right)}{2m\beta}\varphi(p) + \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} U\,(p-p')\varphi(p')dp' = E\varphi(p). \tag{10}$$

Для частинки в дельта-ямі $V(x) = -2\pi\hbar U_0\delta(x)$ ядро оператора потенціальної енерґії відповідно до (9) є сталим $U(p-p') = -U_0$. Припустивши, що це ядро не змінюються у випадку деформації, ми знайшли точний вираз для спектру, який складається з одного рівня

$$E=-\frac{1+4\pi mU_0\sqrt{\beta}-\sqrt{1+8\pi mU_0\sqrt{\beta}}}{4m\beta}, \tag{11}$$

та відповідну хвильову функцію

$$\varphi(p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta\left(1+\sqrt{\beta}q\right)}{\sqrt{1+2\sqrt{\beta}q}}\frac{q^{3/2}}{tg^2\left(\sqrt{\beta}p\right)+\beta q^2}, \tag{12}$$

де $q=\sqrt{-2mE}$.

Частинка, поміщена в два однакових, симетрично віддалених від початку координат на відстань a, притягальних дельта-потенціали, володіє такою потенціальною енергією $V(x)=-\pi\hbar U_0\left(\delta(x-a)+\delta(x+a)\right)$. Цій задачі відповідно до (9) відповідає гармонічний потенціал в імпульсному представленні

$$U(p-p')=-U_0\cos\left(\alpha(p-p')\right), \tag{13}$$

де $\alpha=a/\hbar$. Власні функції цієї системи мають вигляд

$$\phi_{\text{even}}(p)=\frac{A}{tg^2\sqrt{\beta}p+\beta q^2}\cos(\alpha p), \tag{14}$$

$$\phi_{\text{odd}}(p)=\frac{B}{tg^2\sqrt{\beta}p+\beta q^2}\sin(\alpha p). \tag{15}$$

Рівняння на енерґетичний спектр записується

$$\frac{1}{\beta mU_0}-g(0)=\pm g(\alpha), \tag{16}$$

де

$$g(\alpha)=\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}\frac{\cos(2\alpha p)}{tg^2\sqrt{\beta}p+\beta q^2}dp\,. \tag{17}$$

У випадку, коли відстань між дельта-ямами рівна $2a=2n\hbar\sqrt{\beta}$, рівняння на енерґетичний спектр матиме вигляд

$$\frac{1}{mU_0}-\frac{\pi}{q\left(1+\sqrt{\beta}q\right)}=\pm\frac{\pi\left(1-\sqrt{\beta}q\right)^{n-1}}{q\left(1+\sqrt{\beta}q\right)^{n+1}}. \tag{18}$$

В границі $\beta\to 0$, зберігаючи відстань між ямами сталою, рівняння на енерґетичний спектр зводиться до відомого недеформованого рівняння

$$q=\pi mU_0\left(1\pm e^{\frac{-2qa}{\hbar}}\right). \tag{19}$$

Зауважимо, що в границі $a\to 0$ ми отримаємо результати отримані для дельта-потенціалу.

В цьому ж розділі розглянуто задачу про частинку в одновимірному потенціалі

Кулона. Ми пропонуємо означення для оператора $1/\mathrm{x}$ у недеформованому випадку в такій формі

$$\frac{1}{\mathrm{x}} = \mathrm{v.\,p.}\frac{1}{\mathrm{x}} + \mathrm{A}\pi\delta(\mathrm{x}), \tag{20}$$

де A –дійсна стала. Таке означення оператора оберненого до оператора координати відповідає наступній границі

$$\frac{1}{\mathrm{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{x}+\varepsilon\mathrm{A}}{\mathrm{x}^2+\varepsilon^2}. \tag{21}$$

Зауважимо, що оператор $1/\mathrm{x}$ є ермітовим, а також є двостороннім оберненим для оператора координати

$$\frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{x} = \mathrm{x}\frac{1}{\mathrm{x}} = 1. \tag{22}$$

Ядро оператора потенціальної енергії $\mathrm{V(x)} = -\alpha\mathrm{x}^{-1}$ в імпульсному представленні має вигляд

$$\mathrm{U}(\mathrm{p}-\mathrm{p}') = -\frac{\alpha}{2\hbar}(2\mathrm{i}\theta(\mathrm{p}'-\mathrm{p}) - \mathrm{i} + \mathrm{A}). \tag{23}$$

В деформованому випадку припускаємо, що ядро оператора потенціальної енерґії не змінилося. Енерґетичний спектр та відповідні хвильові функції одновимірної задачі Кулона записуються

$$\mathrm{E_n} = -\frac{1}{8\mathrm{m}\beta}\left(1-\sqrt{1+\frac{4\mathrm{m}\alpha}{\hbar(\mathrm{n}+\delta)}\sqrt{\beta}}\right), \tag{24}$$

$$\phi(\mathrm{p}) = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\beta}\mathrm{p}\right)+\beta\mathrm{q}^2}\exp\left(\frac{-\mathrm{i}\alpha_0}{\sqrt{\beta}(1-\beta\mathrm{q}^2)}\left[\frac{1}{\sqrt{\beta}\mathrm{q}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\left(\sqrt{\beta}\mathrm{p}\right)}{\sqrt{\beta}\mathrm{q}}\right)-\sqrt{\beta}\mathrm{p}\right]\right). \tag{25}$$

Тут C – константа нормування.

У **четвертому розділі** розглядається одновимірна задача Кулона у загальному випадку деформованої алґебри Гайзенберґа, що призводить до мінімальної довжини

$$[\mathrm{X},\mathrm{P}] = \mathrm{i}\hbar f(\mathrm{P}), \tag{26}$$

де f називають функцією деформації. Ми припускаємо, що ця функція є строго додатньою ($f > 0$), парною функцією. Оператори координати та імпульсу в імпульсному представленні діють на квадратично інтегровну функцію $\phi(\mathrm{P}) \in L^2(-a, a; f), (a < \infty)$.

У псевдокоординатному представленні дія операторів координати та імпульсу запишеться

$$\mathrm{P}\varphi(\mathrm{p}) = g(\mathrm{p})\varphi(\mathrm{p}), \qquad \mathrm{X}\varphi(\mathrm{p}) = \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dp}}\varphi(\mathrm{p}). \tag{27}$$

Функція $g(\mathrm{p})$є непарною функцією, яка означена на проміжку $[-b, b]$, де $b =$

$g^{-1}(a)$, може бути знайденим з виразу для оберненої функції $g^{-1}(\mathrm{P})$

$$g^{-1}(\mathrm{P}) = \int_0^P \frac{\mathrm{dP'}}{f(\mathrm{P'})}. \tag{28}$$

Використовуючи (28), ми запишемо для b наступний вираз

$$b = \int_0^a \frac{\mathrm{dP}}{f(\mathrm{P})} \leqslant \infty. \tag{29}$$

Мінімальна довжина, що відповідає деформованій алґебрі (26) рівна

$$l_0 = \frac{\pi\hbar}{2b}. \tag{30}$$

Таким чином, якщо $b<\infty$, то існує ненульова мінімальна довжина, а коли $b=\infty$, то мінімальна довжина рівна нулю.

Означення оператора $1/\mathrm{X}$ може бути отриманим з функціонального аналізу оператора координати. Рівняння на власні значення оператора координати

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \mathrm{p}} \psi_\lambda(\mathrm{p}) = \lambda \psi_\lambda(\mathrm{p}). \tag{31}$$

Розв'язком цього рівняння є

$$\psi_\lambda(\mathrm{p}) = \frac{1}{\sqrt{2b}} e^{-i\frac{\lambda}{\hbar}\mathrm{p}} \tag{32}$$

з дійсним власним значенням λ. У дисертаційній роботі показано, що кожна з підмножин координатних власних станів $\psi_{\lambda_{\mathrm{n},\delta}}(\mathrm{p})$, $\mathrm{n} \in Z$, з відповідними власними значеннями $\lambda_{\mathrm{n},\delta} = 2(\mathrm{n}+\delta)l_0$, $\delta \in [0,1)$ утворює повний базис. Кожна функція з підмножини задовольняє граничній умові

$$\psi_{\lambda_{\mathrm{n},\delta}}(-b) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\delta} \psi_{\lambda_{\mathrm{n},\delta}}(b). \tag{33}$$

Оператор X є лише ермітовим, але не є самоспряженим оператором. Однак, відповідно до теореми фон Неймана для самоспряжених розширень ермітового оператора, існує однопараметрична сім'я самоспряжених розширень оператора координати. Кожне розширення може бути представлене через відповідні підмножини власних станів оператора координати як

$$X_\delta = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \left|\psi_{\lambda_{\mathrm{n},\delta}}\right\rangle \lambda_{\mathrm{n},\delta} \left\langle\psi_{\lambda_{\mathrm{n},\delta}}\right|. \tag{34}$$

Оператор $X_\delta = \mathrm{i}\hbar \frac{d}{\mathrm{dp}}$ діє на щільній області визначення

$$D(X_\delta) = \{\psi(\mathrm{p}), \psi'(\mathrm{p}) \in L^2(-\mathrm{b},\mathrm{b}), \psi(b) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\delta}\psi(b)\}. \tag{35}$$

Означимо обернений оператор до оператора X_δ як

$$\frac{1}{X_\delta} = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{+\infty} \left|\psi_{\lambda_{\mathrm{n},\delta}}\right\rangle \frac{1}{\lambda_{\mathrm{n},\delta}} \left\langle\psi_{\lambda_{\mathrm{n},\delta}}\right|. \tag{36}$$

Таке означення забезпечує виконання умови двосторонньої оберненості та самоспряженості оператора. Найцікавішим є той факт, що дія оператора $1/X_\delta$ на довільну функцію $\phi(\mathrm{p})$ з його області визначення може бути записаною як

$$\frac{1}{X_\delta}\phi(\mathrm{p}) = -\frac{i}{\hbar}\int_{-b}^{p}\phi\,(\mathrm{p}')\mathrm{dp}' + \mathrm{c}_\delta[\phi], \tag{37}$$

де $c_\delta[\phi]$ позначає функціонал

$$c_\delta[\phi] = \frac{\mathrm{i+ctg(\pi\delta)}}{2\hbar}\int_{-b}^{b}\phi\,(\mathrm{p}')\mathrm{dp}'. \tag{38}$$

Таким чином, кожне самоспряжене розширення оператора координати, що задається параметром $\delta \in [0,1)$, має свій самоспряжений оператор $1/X_\delta$. Тому існує множина самоспряжених гамільтоніанів $H_\delta = \frac{\mathrm{P}^2}{2\mathrm{m}} - \frac{\alpha}{X_\delta}$.

Розглянемо рівняння Шредингера для гамільтоніану H_δ

$$\frac{1}{2m}g(\mathrm{p})^2\phi(\mathrm{p}) - \frac{\alpha}{2\hbar}\left[\left(\mathrm{i+ctg(\pi\delta)}\right)\int_{-b}^{b}\phi\,(\mathrm{p}')\mathrm{dp}' - 2i\int_{-b}^{p}\phi\,(\mathrm{p}')\mathrm{dp}'\right] = \mathrm{E}\phi(\mathrm{p}). \tag{39}$$

Для зв'язаних станів розглянемо розв'язки з негативною енерґією $\mathrm{E}<0$.

$$\phi(\mathrm{p}) = \frac{C}{g^2(\mathrm{p})+\mathrm{q}^2}e^{-\mathrm{i}\varphi(\mathrm{p})}. \tag{40}$$

Тут константа нормування рівна

$$\mathrm{C} = \left(\int_{-b}^{b}\frac{\mathrm{dp}'}{(g^2(\mathrm{p}')+\mathrm{q}^2)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{41}$$

Ми використали позначення $\mathrm{q}=\sqrt{-2\mathrm{mE}}$ та

$$\varphi(\mathrm{p}) = \frac{2\mathrm{m}\alpha}{\hbar}\int_{0}^{\mathrm{p}}\frac{\mathrm{dp}'}{g^2(\mathrm{p}')+\mathrm{q}^2}. \tag{42}$$

Енерґетичний спектр може бути знайдений із

$$\frac{2\mathrm{m}\alpha}{\hbar}\int_{0}^{b}\frac{\mathrm{dp}}{g^2(\mathrm{p})+\mathrm{q}^2} = \pi(\mathrm{n}+\delta), \tag{43}$$

де $\mathrm{n}=0,1,\ldots$.

Неперервний спектр, подібно як і в недеформованому просторі, утворений усіма додатними енерґіями $\mathrm{E}>0$, що дозволені алґеброю (25).

Отож, ми отримали співвідношення, що дає точні розв'язки для енерґетичного спектру одновимірної задачі Кулона в загальному вигляді деформованого простору з мінімальною довжиною.

У дисертаційній роботі знайдено енерґетичний спектр одновимірної задачі Кулона для деяких окремих прикладів функції деформації $f(\mathrm{P})$, $\mathrm{P} \in [-a, a]$.

У випадку деформації $f(\mathrm{P}) = (1+\beta\mathrm{P}^2)^{\mathrm{k}}$, $\mathrm{P} \in (-\infty, \infty)$ мінімальна довжина існує для $\mathrm{k} > 1/2$ (див. [Maslowski et al., J. Phys. A **45**, 075309 (2012)]). Зауважимо, що у випадку $\mathrm{k}=1$ функція деформації відповідатиме тій, що запропонував Кемпф

[Kempf et al., Phys. Rev. D **52**, 1108 (1995)]. Головна поправка до енерґетичного спектру спричинена деформацією має вигляд

$$\Delta E_n = \frac{2\sqrt{\beta}\Gamma(k+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k)}\frac{\alpha^3 m^2}{\hbar^3(n+\delta)^3}. \tag{44}$$

В роботі показано, що енерґетичний спектр може бути знайдений точно для окремих випадків деформації, а саме $k=1$ та $k=3/2$.

Розглянемо інший приклад функції деформації

$$f(P) = (1-\beta P^2)^k,\ P \in \left[-\frac{1}{\sqrt{\beta}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right]. \tag{45}$$

В цьому випадку мінімальна довжина існує для $k<1$ (див. [Maslowski et al., J. Phys. A **45**, 075309 (2012)]). Зауважимо, що ця деформація призводить не тільки до мінімальної довжини, але також до максимального імпульсу. Головна поправка до енергії рівна

$$\Delta E_n = \frac{2\sqrt{\beta}\Gamma(1-k)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k)}\frac{\alpha^3 m^2}{\hbar^3(n+\delta)^3}. \tag{46}$$

Поправка до енергії є додатною для $k<\frac{1}{2}$, тоді як у випадку $\frac{1}{2}<k<1$ вона є від'ємною. Енерґетичний спектр можна отримати точно для окремих випадків деформації, а саме для $k=-1$ та $k=1/2$.

Ми також можемо отримати більш екзотичні залежності енерґетичних поправок від параметру деформації β. Для прикладу, для функцій деформацій $f(P) = \exp\left(\sqrt{\beta P^2}\right)$, $P \in (-\infty,\infty)$ та $f(P) = \exp\left(\sqrt[3]{\beta P^2}\right)$, $P \in (-\infty,\infty)$ ми маємо:

$$\Delta E_n = \frac{2}{\pi}\frac{\alpha^3 m^2\sqrt{\beta}}{\hbar^3(n+\delta)^3}\ln\left(\frac{\alpha m\sqrt{\beta}}{\hbar}\right) \tag{47}$$

та

$$\Delta E_n = 2\alpha^2 m\hbar^2(n+\delta)^2\left(\frac{\alpha m\sqrt{\beta}}{\hbar(n+\delta)}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{48}$$

відповідно.

Підсумовуючи вище сказане, зазначимо, що в різних випадках функції деформації ми можемо отримати різний знак поправок до енерґетичних рівнів одновимірної кулонівської задачі, а також різну аналітичну залежність від параметру деформації. Тому зсув енерґетичних рівнів, спричинений деформацією, сильно залежить від вибору функції деформації.

У п'ятому розділі в рамках теорії збурень розглянуто релятивістську задачу про атом водню в просторі з лоренц-коваріантною деформованою алґеброю Гайзенберґа з мінімальною довжиною.

Розглядається (D+1)- вимірна лоренц-коваріантна алґебра простору-часу, яка була запропонована в роботі [Quesne and Tkachuk, J.Phys. A **39**, 10909 (2006)]:

$$[X^{\mu},P^{\nu}] = -i\hbar\left[\left(1-\beta P_{\rho}P^{\rho}\right)g^{\mu\nu}-\beta' P^{\mu}P^{\nu}\right], [P^{\mu},P^{\nu}] = 0,$$
$$[X^{\mu},X^{\nu}]=i\hbar\frac{2\beta-\beta'-(2\beta+\beta')\beta P_{\rho}P^{\rho}}{1-\beta P_{\rho}P^{\rho}}(P^{\mu}X^{\nu}-P^{\nu}X^{\mu}), \tag{49}$$

де $g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,\dots,-1)$ – метричний тензор, а β та β' є двома малими невід'ємними параметрами. Вона отримана як узагальнення на релятивістський випадок D-вимірної нерелятивістської алґебри, яка була запропонована Кемпфом

$$\left[X_i,P_j\right]=i\hbar\left[(1+\beta P^2)\delta_{ij}+\beta' P_iP_j\right], \left[P_i,P_j\right] = 0,$$
$$\left[X_i,X_j\right]=i\hbar\frac{2\beta-\beta'+(2\beta+\beta')\beta P^2}{1+\beta P^2}\left(P_iX_j-P_jX_i\right). \tag{50}$$

Узагальнене рівняння Дірака на деформований випадок в (3+1)-вимірному просторі-часі записується у вигляді

$$\left[c\rho_a\left(\sigma_xP^x+\sigma_yP^y+\sigma_zP^z\right)+mc^2\rho_c-\frac{e^2}{R}\right]\psi=P^0c\psi, \tag{51}$$

де оператори координат X^{μ} та компонент імпульсу P^{μ} задовольняють деформованим комутаційним співвідношенням (48). Вигляд матриць $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ та ρ_a,ρ_c наведено в дисертаційній роботі.

Легко бачити, що у випадку деформації оператори P^0 і R^{-1} не комутують. Тому, на відміну від недеформованого випадку, ми не знайдемо функцій, які б одночасно були власними функціями операторів P^0 та H. Тому ми розглянемо випадок, коли один із параметрів деформації рівний нулеві, а інший залишається додатним, тобто $\beta'=0$ та $\beta>0$. Це припущення на параметри деформації забезпечує комутативність операторів P^0 і R^{-1}.

Ми використовуватимемо представлення оператора координати X^{μ} та імпульсу P^{μ}, що задовольняють деформованій алґебрі (48) через оператори x^{μ} і p^{ν}, комутатор яких має звичний канонічний вигляд

$$[x^{\mu},p^{\nu}] = -i\hbar g^{\mu\nu}. \tag{52}$$

Одне з таких представлень має вигляд

$$X^{\mu} = 1-\frac{\beta}{2}\left(p_{\rho}p^{\rho}x^{\mu}+x^{\mu}p_{\rho}p^{\rho}\right), P^{\mu}=p^{\mu}. \tag{53}$$

Розклад оператора оберненої відстані в ряд за малим параметром деформації до першого порядку малості має вигляд:

$$R^{-1} = \frac{1}{r}-\frac{\beta}{2}\left(\frac{1}{r}p^2+p^2\frac{1}{r}\right)+\beta(p^0)^2\frac{1}{r}-\beta\frac{\hbar^2}{r^3}. \tag{54}$$

Запишемо рівняння Дірака для атома водню беручи до уваги тільки лінійні члени за параметром β

$$\left(H_0+V_\beta\right)\psi=p^0c\psi. \tag{55}$$

Гамільтоніан незбуреної задачі і оператор збурення мають вигляд відповідно

$$H_0=c\rho_a P+mc^2\rho_c-\frac{e^2}{r}, \tag{56}$$

$$V_\beta=\frac{\beta}{2}e^2\left((p^2-(p^0)^2)\frac{1}{r}+\frac{1}{r}(p^2-(p^0)^2)+\frac{2\hbar^2}{r^3}\right). \tag{57}$$

Тут $P=\sigma_x p_x+\sigma_y p_y+\sigma_z p_z$. Тепер ми можемо обчислити поправки до енерґетичного спектру, проводячи усереднення оператора збурення на власних функціях недеформованого релятивістського атома водню. Отримаємо:

$$\begin{aligned}\Delta E_{pk}^{(1)}=mc^2\frac{\hbar^2\beta}{a^2}&\left(\frac{12\alpha^2(2p+s)\left(2n^*k(\alpha^2+1)+k^4(2p+s)\right)}{s(s^2-1)(s^2-4)n^{*5}}\right.\\&\left.+\frac{\alpha^2\left(-3n^{*2}+4n^*k(2p+s)-4k^2\alpha^2\right)}{s(s^2-1)n^{*5}}+\alpha^2-n^{*2}+p^2-k^2sn^{*3}\right).\end{aligned} \tag{58}$$

Поправка до енерґетичного спектру $\Delta E_{pk}^{(1)}$ залежить від двох квантових чисел $p=0,1,2,\dots$ та $k=\pm1,\pm2,\dots$ пов'язаних з головним квантовим числом n та квантовим числом оператора повного моменту кількості рухуj співвідношеннями

$$n=p+|k|,\ j=|k|-\frac{1}{2}. \tag{59}$$

Також зауважимо, що $s=2\sqrt{k^2-\alpha^2}$ та $n^*=\sqrt{n^2+p^2+2ps}$, де α – стала тонкої структури.

Формула (58) справедлива для всіх дозволених значень p і k, окрім $k=\pm1$. Для станів з такими значеннями квантових чисел k ми отримали розбіжний вклад в поправку до енерґії від доданків пропорційних до $\frac{1}{r}p^2+p^2\frac{1}{r}$ та $\frac{1}{r^3}$. Для прикладу, для основного стану ми маємо

$$\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle\sim\int_0^\infty dx\,x^{s-3}e^{-x}=\infty, \tag{60}$$

бо $s=2\sqrt{1-\alpha^2}$ є менше ніж 2. Подібні проблеми спостерігалася при обчисленні поправок до нерелятивістського атома водню у випадку деформованої алґебри, запропонованої Кемпфом, і були вирішені шляхом модифікації теорії збурень.

Таким чином, звичайна теорія збурень дозволяє знайти поправки до всіх енерґетичних рівнів, окрім деяких проблемних станів, для яких отримано розбіжний результат.

У шостому розділі для того щоб усунути розбіжності, що виникають при розрахунку поправок до енерґії до релятивістського атома водню в рамках звичайної теорії збурень, запропоновано модифіковану теорію збурень, яка, базується на ідеї так званого зсунутого розкладу [Stetsko and Tkachuk, Phys. Rev.

А**74**, 012101(2006)]. Використавши представлення (53), перепишемо вираз для оператора відстані від початку координат R у вигляді:

$$R = \sqrt{r^2 + b^2 - \beta\left(r^2 p_\nu p^\nu + p_\nu p^\nu r^2 - \hbar^2 D + \bar{b}^2\right)}, \qquad (61)$$

де $\beta\bar{b}^2 = b^2$. Подібно до нерелятивістського атома водню, виконуємо зсунутий розклад в околі точки $\sqrt{r^2+b^2}$. Ведений параметр b вважатимемо достатньо малим, а отже у розкладі в ряд за параметром деформації β будемо нехтувати доданками вищих порядків за згаданим параметром, врахувавши їх лише в доданку нульового порядку. Отримаємо вираз для оператора $1/R$ з точністю до першого порядку за β:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2+b^2}} + \frac{\beta}{2}\left(\frac{r^2}{r^2+b^2} p_\nu p^\nu \frac{1}{\sqrt{r^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2+b^2}} p_\nu p^\nu \frac{r^2}{r^2+b^2}\right) - \frac{2\hbar^2\beta - b^2}{2(r^2+b^2)^{3/2}} - \frac{\hbar^2\beta b^4}{2(r^2+b^2)^{7/2}}. \qquad (62)$$

Поправки для довільних рівнів з k$= \pm 1$ записуються

$$\widetilde{\Delta E}^{(1)}_{pk} = \Delta E^{(1)}_{pk} + \Theta^{(1)}_{pk}. \qquad (63)$$

Тут

$$\Theta^{(1)}_{pk} = \frac{e^2}{48a}\left(\frac{2\sqrt{2}\hbar\sqrt{\beta}}{an^*}\right)^s \frac{sk(n^*+k) + 2pk^2}{n^{*3}} \frac{\pi^{\frac{3}{2}} 4^{-s}(s^3 + 4s^2 - 12sk^2 - 24)\Gamma(p+s)}{p!\,\Gamma(s/2+1)^3\Gamma(s/2+1/2)\sin\left(\pi/2\,(s+2)\right)}, \qquad (64)$$

а вираз $\Delta E^{(1)}_{pk}$ записано вище. Зауважимо, що вибір параметра b не впливає на вигляд ведучого доданку поправки до енерґетичного спектру атома водню.

Порівнявши отримані результати з експериментальними даними для частоти переходу $1s - 2s$ можемо зробити оцінку верхньої межі для мінімальної довжини. У статті [Parthey et al., Phys. Rev. Lett. **107**, 203001(2011)] представлено такий результат для частоти переходу $f_{1s-2s} = 2466061413187035(10)$ Гц. Точність згаданого експерименту дорівнює 4.2×10^{-15}. Припустивши, що поправки до енерґетичних рівнів атома водню, зумовлені деформацією комутаційних співвідношень не перевищують точності вимірювання частоти переходу, одержуємо $\Delta X < 10^{-19}$м.

Дисертаційна робота завершується **Висновками** та **Списком використаних джерел**.

Основні результати та висновки дисертації можна викласти у вигляді таких тверджень:

- Показано, що довільна хвильова функція, що належить до фізичної області станів, може бути представлена як лінійна комбінація зліченного набору максимально локалізованих станів. Запропоновано простий спосіб такого представлення.

- На основі узагальнення рівняння Шредингера в імпульсному представленні на випадок деформованого простору з мінімальною довжиною, запропоновано новий підхід у вирішенні квантово-механічних задач в деформованому просторі. Користуючись цим підходом вдалося розглянути одновимірні задачі про частинку в дельта-ямі та подвійній дельта-ямі. Отримано точні вирази для енерґетичного спектру та хвильових функцій для згаданих задач.
- Ґрунтуючись на функціональному аналізі оператора координати в загальному випадку деформованої алґебри Гайзенберґа, що призводить до мінімальної довжини, запропоновано означення для оператора 1/X, при якому цей оператор є лінійним та двостороннім оберненим до оператора координати. Користуючись цим означенням, вперше знайдено точний розв'язок одновимірної задачі Кулона в загальному випадку деформованої алґебри Гайзенберґа. Проаналізовано вирази для енерґетичного спектру та власних функції частинки в одновимірному потенціалі Кулона для різноманітних часткових випадків деформацій, в тому числі і таких, що окрім мінімальної довжини приводять до максимального імпульсу.
- Запропоновано узагальнення рівняння Дірака на випадок лоренц-коваріантної деформованої алґебри Гайзенберґа з мінімальною довжиною та розглянуто задачу про релятивістський атом водню з такою деформацією. Отримано поправки до енерґії атома водню спричинені деформованою алґеброю. Вперше запропоновано в релятивістському випадку модифіковану теорію збурень, що дозволило вперше отримати аналітичні вирази для поправок до всіх без винятку енерґетичних рівнів. Порівняння одержаних поправок з експериментальними результатами дозволило отримати оцінки верхньої межі для мінімальної довжини.

Основні результати дисертації опубліковано в таких роботах:

[1] Samar M. I., Tkachuk V. M. Perturbation hydrogen-atom spectrum in a space with the Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length // J. Phys. Stud.— 2010.— Vol. 14, No. 1.— 1001.— 5 p.

[2] Samar M. I. Modified perturbation theory for hydrogen atom in space with Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length // J. Phys. Stud.— 2011.— Vol. 15, No. 1.— 1007.— 7 p.

[3] Samar M. I. Physical states in deformed space with minimal length // Visnyk Lviv Univ. Ser. Phys.— 2015.— Issue 50.— P. 72-83.

[4] Samar M. I., Tkachuk V. M. Exactly solvable problems in the momentum space with a minimum uncertainty in position // J. Math. Phys.— 2016.— Vol. 57, No. 4.— Art. 042102.— 8 p.
[5] Samar M. I., Tkachuk V. M. One-dimensional Coulomb-like problem in general case of deformed space with minimal length // J. Math. Phys.— 2016.— Vol. 57, No. 8.— Art. 082108.— 12 p.
[6] Самар М. Максимально локалізовані стани в деформованому просторі // Міжнародна Конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2007", Львів, 22-24 травня 2007 р.: Тези доповідей.— С. A33.
[7] Самар М. Релятивістський атом водню в деформованому просторі // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2008", Львів, 19-21 травня 2008 р.: Тези доповідей.— С. A22.
[8] Samar M. Perturbation hydrogen-atom spectrum in deformed space with Lorentz-covariant deformed algebra [Workshop on Theoretical Physics, Lviv, 5-8 July 2009] // J. Phys. Stud.— 2009.— Vol. 13, No. 3.— 3998.— P. 2.
[9] Samar M. Modified perturbation theory for hydrogen atom in a space with the Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length [Workshop on Current Problems in Physics, Lviv, 5-9 July 2010] // J. Phys. Stud.— 2010.— Vol. 14, No. 3.— P. 3998-3.
[10] Самар М. Теорія збурень для атома водню в просторі з Лоренц-коваріантною деформованою алґеброю Гайзенберґа // X Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 3-4 червня 2010. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез.— С. 34.
[11] Samar M. Relativistic mechanics with the Lorentz-covariant deformed Poisson brackets // 4th Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 24-26 October 2011, Zielona Góra, Poland: Book of abstracts.— P. 23.
[12] Samar M. I. Relativistic particle in a space with the deformed Lorentz-covariant Poisson brackets // IV Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics", October 23-26, 2012, Kyiv, Ukraine: Program&Abstracts.— P. 41.
[13] Самар М. І. Релятивістська динаміка та деформована Пуанкаре-симетрія [Різдвяні дискусії 2013, Львів, 3-4 січня 2013] // Журн. фіз. дослідж.— 2013.— Т. 17, №1.— С. 1998-4.

[14] Samar M. Relativistic particle dynamics and deformed Poincaré symmetry// Proceedings of VI International Conference "Physics of Disordered Systems", Lviv, Ukraine, 14-16 October, 2013.— P. 34.

[15] Самар М. Деформована Пуанкаре-симетрія та вільна релятивістська частинка [Різдвяні дискусії 2014, Львів, 9-10 січня 2014] // Журн. фіз. дослідж.— 2014.— Т. 18, №1.— С. 1998-4.

[16] Samar M. Relativistic particle dynamics and deformed Poincaré symmetry // XXXIII Max Born Symposium "Noncommutative geometry, quantum symmetries and quantum gravity", Wroclaw, 6-10 July 2014: List of talks with abstracts.— [P. 5].

[17] Samar M. A dynamical model for the origin of Lorentz-covariant noncommutative space time [Workshop on Current Problems in Physics, Lviv, 08-09 July 2014] // J. Phys. Stud.— 2014.— Vol. 18, No. 2/3.— P. 2998-8.

[18] Самар М. Максимально локалізовані стани в деформованому просторі [Різдвяні дискусії 2015, Львів, 12-13 січня 2015] // Журн. фіз. дослідж.— 2015.— Т. 19, №1/2.— С. 1998-7-8.

[19] Самар М. Дія релятивістської частинки у лоренц-коваріантному деформованому просторі // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2015", Львів, 13-15 травня 2015 р.: Тези доповідей.— С. Е3.

[20] Samar M. I., Tkachuk V. M. One-dimensional Coulomb-like problem and minimal length [Різдвяні дискусії 2016, Львів, 11-12 січня 2016] // Журн. фіз. дослідж.— 2016.— Т. 20, №1/2.— С. 1998-8.

[21] Samar M. I. Singular potentials in general case of deformed space with minimal length// Workshop on Current Problems in Physics: Program and Abstracts, Lviv, 05–07 July 2016.— P. 16.

АНОТАЦІЯ

Самар М. І. Класичні та релятивістські квантові задачі в просторі з мінімальною довжиною. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2017.

Дисертацію присвячено дослідженню впливу деформованих комутаційних співвідношень з мінімальною довжиною на класичні та релятивістські квантові системи. У роботі запропоновано простий спосіб представлення довільної хвильової функції, що належить до фізичної області станів, як лінійної комбінації зліченного набору максимально локалізованих станів. На основі узагальнення

рівняння Шредингера в імпульсному представленні на випадок деформованої алгебри Гайзенберга з мінімальною довжиною знайдено точний розв'язок задачі про частинку в дельта-ямі, подвійній дельта-ямі та кулонівському потенціалі. В загальному випадку деформованої алгебри Гайзенберга, що призводить до мінімальної довжини вирішено проблему означення оберненого оператора до оператора координати та знайдено точний розв'язок одновимірної задачі Кулона.

Для релятивістської задачі про атом водню в просторі з лоренц-коваріантною деформованою алгеброю Гайзенберга з мінімальною довжиною запропоновано модифіковану теорію збурень. Це дозволило отримати аналітичні вирази для поправок до всіх без винятку енергетичних рівнів. Ґрунтуючись на порівнянні експериментальних та теоретичних даних для енергії 1*s*-2*s* переходу зроблено оцінку мінімальної довжини.

Ключові слова: мінімальна довжина, деформовані комутаційні співвідношення, максимально локалізовані стани, потенціал Кулона, дельта-яма, релятивістський атом водню, теорія збурень.

АННОТАЦИЯ

Самар Н. И. Классические и релятивистские квантовые задачи в пространстве с минимальной длиной. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика, Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2017.

Диссертация посвящена исследованию влияния деформированных коммутационных соотношений с минимальной длиной на классические и релятивистские квантовые системы. В работе предложен простой способ представления произвольной волновой функции, относящейся к физической области состояний, как линейной комбинации счетного набора максимально локализованных состояний. На основании обобщения уравнения Шредингера в импульсном представлении на случай деформированной алгебры Гейзенберга с минимальной длиной найдено точное решение задачи о частице в дельта-яме, двойной дельта-яме и кулоновском потенциале. В общем случае деформированной алгебры Гейзенберга, приводящей к существованию минимальной длины, решена проблема определения обратного оператора к оператору координаты и найдено точное решение одномерной задачи Кулона.

Для релятивистской задачи об атоме водорода в пространстве с лоренц-ковариантной деформированной алгеброй Гейзенберга с минимальной длиной предложена модифицированная теория возмущений. Это позволило получить

аналитические выражения для поправок ко всем без исключения энергетическим уровням. Основываясь на сравнении экспериментальных и теоретических данных для энергии 1*s*–2*s* перехода, произведена оценка минимальной длины.

Ключевые слова: минимальная длина, деформированные коммутационные соотношения, максимально локализованные состояния, потенциал Кулона, дельта-яма, релятивистский атом водорода, теория возмущений.

ABSTRACT

Samar M. I. Classical and relativistic quantum problems in space with minimal length. – Manuscript.

A thesis for a Candidate of Sciences degree on the specialty 01.04.02 – theoretical physics, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2017.

The thesis is devoted to the study of the influence of the deformed commutation relations with minimal length on classical and relativistic quantum systems.

An important feature of quantum theory with minimal length is that the eigenstates of the position operator are no longer physical states, since for these states uncertainties in position are less that minimal one $\Delta x = 0 < \Delta x_{min}$. As a result, we cannot work with the position representation anymore. One of the possible ways to proceed is to consider a set of maximally localized states, for which $\Delta x = \Delta x_{min}$, as the generalization of position eigenstates to the case of deformed space with minimal length. In this approach we suggest a simple way of representation of an arbitrary physical wave function as a linear combination of the countable set of maximally localization states. Also we show that maximally localization state can be represented as a linear combination of the two eigenstates of position operator.

We present the generalization of the Schrödinger equation in the momentum representation in a case of the deformed Heisenberg algebra with minimal length and find the exact solution of the problem of particle in delta well, double delta well and the Coulomb-like potential. In the case of the Dirac delta potential, we obtained that system has one bound state similarly as in the undeformed case. We concluded that this system has an interesting property in deformed space. Namely, the first correction to the energy level is proportional to $\sqrt{\beta}$. This fact brings a new possibility to uncover the existence of deformed commutation relations for smaller parameter of deformation. In case of double delta-potential, we obtained the wave functions and the equations for energy levels. In the limit of parameter of deformation to zero, these results coincide with well known undeformed ones. Tending the distance between delta wells to zero, we yield results for the delta potential. In case of Coulomb-like potential we solve the problem of definition of linear two-sided inverse of position operator.

In general case of deformed Heisenberg algebra leading to minimal length we present

the definition of linear two-sided inverse of position operator, which is based on functional analysis of position operator. Using this definition we obtain the exact energy spectrum and eigenfunctions of a particle in one-dimensional Coulomb-like potential in deformed space with arbitrary function of deformation. Particular cases of the deformation function have been studied. We have concluded that varying the deformation function, we can obtain different dependence of leading correction to the energy spectrum of deformation β, for example, proportional to β, $\sqrt{\beta}$, $\beta^{1/3}$, or $\beta\ln\beta$. Also the sign of the correction term is different in the different cases of deformation. Therefore, the shift of the energy level of 1D Coulomb-like problem highly depends on the deformation function.

Within the framework of perturbation theory we consider the problem of relativistic hydrogen atom in space with a Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length. Usual perturbation theory allows finding all the correction to the energy levels besides some problem states, for which we obtain divergent results. In order to eliminate these divergences we propose a modified perturbation theory that is based on the idea of the so-called shifted expansion of distance operator. Using it we obtain analytical expressions for corrections to any and all energy levels. We calculate a correction to the ground state energy of the hydrogen atom in Dirac theory with Lorentz-covariant deformed algebra with the minimal length using conventional perturbation theory and an expansion of the ground state wave function over eigenfunctions of the distance operator. These results are in agreement with the ones obtained in modified perturbation theory, which ensures that our calculation is correct. In addition, comparing the experimental and theoretical data for the energy of 1*s*-2*s* transition we provide an estimation of the value of minimal length.

Key words: minimal length, deformed commutation relations, maximally localization states, Coulomb potential, delta well, relativistic hydrogen atom, perturbation theory.