ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

**Самар Микола Іванович**

УДК 530.145

# Класичні та релятивістські квантові задачі в просторі з мінімальною довжиною

**01.04.02 — Теоретична фізика**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук,
професор
Ткачук Володимир Михайлович

**ЛЬВІВ — 2016**

# Зміст

# ВСТУП

**Актуальність теми.**

Завдяки широкому спектру описуваних явищ та високій точності передбачень квантова механіка є, мабуть, найбільш успішною фізичною теорією. Однак, високий рівень достовірності не вберіг квантову теорію від постійного переосмислення її основоположних принципів. Однією з причин перегляду основ квантової механіки є не дуже вдалі спроби квантового опису гравітаційної взаємодії, через наявні суперечності між загальною теорією відносності, найточнішою теорією гравітації з відомих сьогодні, та деякими фундаментальними положеннями квантової теорії. Можна сказати, що квантування гравітаційного поля є однією з найбільш важливих проблем сучасної теоретичної фізики. Незважаючи на те, що дослідження в цій галузі ведуться більше ніж 50 років, досі не запропоновано повної теорії квантової гравітації. Невдачі у побудові квантової моделі гравітації лежать на перешкоді об'єднання гравітації з іншими трьома фундаментальними взаємодіями, тобто побудови так званої «теорії всього». Тому з середини 90-их років в рамках таких сучасних варіантів квантового опису гравітації, як теорія струн чи квантова гравітація, з'являються гіпотетичні моделі, які пропонують свій спосіб видозміни деяких ключових співвідношень квантової механіки. Одним із таких способів є введення узагальненого принципу невизначеності, що приводить до цікавих фізичних наслідків, таких як мінімальна довжина чи некомутативність простору. Варто зауважити, що ідея некомутативного простору чи модифікованих співвідношень невизначеностей виникала в фізиці і раніше, та свого часу не викликали значного інтересу. Перша робота, в якій розглядалася модифікація канонічних комутаційних співвідношень, була опублікована ще у 1947 році Снайдером. Однак зацікавленість цією проблемою була відновлена наприкінці минулого століття дослідженнями з теорії струн та квантової гравітації, які передбачали існування ненульової мінімальної невизначеності координат. Кемпфом було показано, що мінімальна невизначеність координати може природно з'явитися у квантовій механіці шляхом незначної зміни канонічних комутаційних співвідношень. Саме роботи Кемпфа стимулювали дослідження традиційних квантово-механічних задач у просторах з мінімальною невизначеністю координати. Ці дослідження і досі залишаються актуальними, оскільки дозволяють визначити вплив квантованості простору на властивості фізичних систем, а також оцінити величину кванта простору.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та згідно держбюджетних тем Фф-55Ф "Теоретичні дослідження нових квантових систем" (2006-2008 рр., номер державної реєстрації №0106U001294), Фф-14Ф "Нові методи дослідження квантових систем декількох і багатьох частинок" (2009-2011 рр., номер державної реєстрації №0109U002096) та Фф-110Ф "Нові ефекти у квантових рідинах і газах та системах з деформованою алґеброю Гайзенберґа” (2012-2014 рр., номер державної реєстрації №0112U001275), проект ДФФД Ф64 «Класичні та квантові системи за межами стандартних підходів» (2016 рр., номер д/р 0116U005055).

**Мета і задачі дослідження.** Основною метою дисертаційної роботи є вивчення впливу деформації комутаційних співвідношень на фізичні властивості одночастинкових систем. Основну увагу приділено знаходженню точних розв'язків квантово-механічних задач в деформованому просторі з мінімальною довжиною, зокрема одновимірної задачі про частинку в кулонівському потенціалі, в дельта-ямі чи подвійній дельта-ямі.

Значну частину роботи присвячено дослідженню впливу деформації комутаційних співвідношень на спектр релятивістського атома водню, що дало змогу провести оцінку верхньої межі для мінімальної довжини на основі порівняння експериментальних даних з теоретичними оцінками.

Отже, *об'єктом дослідження* є точно та наближено розв'язувані задачі квантової механіки у деформованому просторі з мінімальною довжиною. Предметом дослідження є спектри гамільтоніанів та їх власні функції. *Методами дослідження* виступають методи математичної фізики, що пов'язані зі знаходженням точних розв'язків рівняння Шредінґера та теорія збурень, як звичайна так і розроблена у роботі модифікована теорія.

**У першому розділі** проаналізовано передумови виникнення та історію досліджень квантово-механічних задач з деформованими комутаційними співвідношеннями, а також висвітлено сучасний стан цих досліджень.

**Другий розділ** присвячений дослідженню гільбертового простору станів, пов'язаного з деформованим комутаційним співвідношенням з мінімальною довжиною. Записано умову приналежності хвильової функції до множини фізичних станів і розглянуто кілька простих прикладів фізичних хвильових функцій. Показано, що максимально локалізовані стани можуть бути представлені як лінійна комбінація двох власних станів оператора координати, і що це єдина фізична хвильова функція утворена з двох обраних координатних власних станів. Окрім цього доведено, що будь-яка фізична хвильова функція може бути представлена як лінійна комбінація зліченного набору максимально локалізованих станів та запропоновано простий спосіб як це зробити.

**У третьому розділі** запропоновано новий підхід у вирішенні простих квантово-механічних задач в деформованому просторі з мінімальною довжиною. В рамках цього підходу отримано узагальнення рівняння Шредингера в імпульсному представленні на випадок деформованої алґебри Гайзенберґа з мінімальною довжиною. Припустивши, що ядро оператора потенційної енерґії не змінюється у випадку деформації, ми знайшли точний розв'язок задачі про частинку в дельта-ямі, а також подвійній дельта-ямі. Також розглянуто задачу про рух частинки в кулонівському потенціалі та знайдено вирішення проблеми означення оберненого оператора до оператора координати.

**У четвертому розділі** в загальному випадку деформованої алґебри Гайзенберґа, що призводить до мінімальної довжини запропоновано означення лінійного двостороннього оберненого оператора до оператора координати, яке ґрунтується на функціональному аналізі оператора координати. Використовуючи це означення, розглянуто одновимірну задачу Кулона. Знайдено точно енерґетичний спектр та власні функції частинки в одновимірному потенціалі Кулона в деформованому просторі з довільною функцією деформації.

**У п'ятому розділі** в рамках теорії збурень розглянуто релятивістську задачу про атом водню в просторі з лоренц-коваріантною деформованою алґеброю Гайзенберґа з мінімальною довжиною. Звичайна теорія збурень дозволила знайти поправки до всіх енерґетичних рівнів, окрім деяких проблемних станів, для яких отримано розбіжний результат.

**У шостому розділі** для того щоб усунути розбіжності, що виникають у звичайній теорії збурень, запропоновано модифіковану теорію збурень, яка основана на ідеї так званого зсунутого розкладу. Це дозволило отримати аналітичні вирази для поправок до всіх без винятку енерґетичних рівнів. Окрім цього, ґрунтуючись на порівнянні експериментальних та теоретичних даних для енерґії $1s-2s$ переходу зроблено оцінку мінімальної довжини.

Дисертаційна робота завершується **Висновками** та **Списком використаних джерел**.

**Наукова новизна отриманих результатів**. У дисертаційній роботі вперше показано, що довільна хвильова функція, що належить до фізичної області станів, може бути представлена як лінійна комбінація зліченного набору максимально локалізованих станів. Також вперше запропоновано простий рецепт такого представлення.

В роботі також запропоновано новий підхід у вирішенні простих квантово-механічних задач в деформованому просторі з мінімальною довжиною, що базується на узагальненні рівняння Шредингера, записаного в імпульсному представленні на деформований випадок. Користуючись цим підходом вдалося отримати точні розв'язки одновимірних задач про частинку в дельта-ямі та подвійній дельта-ямі. Вперше запропоновано означення для оператора $1/\hat{X}$, при якому цей оператор є лінійним та двостороннім оберненим до оператора координати. Користуючись цим означенням вперше знайдено точний розв'язок одновимірної задачі Кулона в загальному випадку деформованої алґебри Гайзенберґа.

Вперше розглянуто задачу про релятивістський атом водню в рамках теорії Дірака з лоренц-коваріантною деформованою алґеброю Гайзенберґа. Вперше запропоновано в релятивістському випадку модифіковану теорію збурень, що дозволило вперше отримати аналітичні вирази для поправок до всіх без винятку енерґетичних рівнів. Порівняння одержаних поправок з експериментальними результатами дозволило отримати оцінки верхньої межі для мінімальної довжини.

**Практичне значення отриманих результатів.** Результати, представлені у дисертації мають самостійний інтерес, а також можуть бути використані в подальших експериментальних та теоретичних дослідженнях.

Наприклад, отриманий спосіб представлення фізичних станів через максимально локалізовані стани має фундаментальне значення і може стати корисним для різного роду задач у деформованому просторі. Новий підхід до розв'язку квантово-механічних задач, який ми з успіхом використали для знаходження розв'язку одновимірних задач про частинку в дельта-ямі, подвійній дельта-ямі та кулонівському потенціалі, може бути застосований для знаходження енерґетичного спектру та хвильових функцій для інших квантовомеханічних систем. Також цей підхід може бути узагальнений на випадок вищих вимірів. Отримані поправки до спектру атома водню можуть бути використані для подальших оцінок верхньої межі для мінімальної довжини, зважаючи на постійне експериментальне уточнення значення енерґії $1s-2s$ переходу.

**Особистий внесок здобувача.** Постановку завдань дослідження здійснив науковий керівник роботи проф. В. М. Ткачук. Усі викладені в дисертації результати автор отримав самостійно або при своїй безпосередній участі. У роботах, виконаних зі співавторами, здобувачеві належить:

- отримання узагальненого рівняння Шредин́ґера в імпульсному представленні на випадок деформованої алґебри Гайзенберґа з мінімальною довжиною; знаходження точного розв'язку задачі про частинку в дельта-ямі, а також подвійній дельта-ямі в деформованому просторі; точний розв'язок задачі про рух частинки в кулонівському потенціалі та вирішення проблеми означення оберненого оператора до оператора координати [1];
- означення оператора $1/\hat{X}$ в загальному випадку одновимірної деформованої алґебри Гайзенберґа з мінімальною довжиною; зна-

ходження спектру та хвильових функцій для одновимірної задачі Кулона у загальному випадку деформації та аналіз цього результату для окремих конкретних випадків деформованої алґебри [2];

- узагальнення рівняння Дірака на випадок лоренц-коваріантної деформованої алґебри Гайзенберґа з мінімальною довжиною; розрахунок поправок до енерґії релятивістського атома водню, що зумовлені деформацією комутаційних співвідношень [3].

Результати статей, їхню інтерпретацію та застосовність використаних підходів співавтори обговорювали на паритетних засадах.

**Апробація результатів дисертації.** Результати досліджень, що включені до дисертації, здобувач представляв особисто на таких конференціях та семінарах: Міжнародна конференція "Еврика-2007" (Львів, 2007); Міжнародна конференція "Еврика-2008" (Львів, 2008); Workshop on Theoretical Physics (Lviv, 2009); Workshop on Current Problems in Physics(Lviv, 2010); X Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених (Львів, 2010); Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2010 рік (Львів, 2011); $4^{\text{th}}$ Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv (Zielona Góra, 2011); XII Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених (Львів, 2012); IV Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics" (Kyiv, 2012); Різдвяні дискусії 2013 (Львів, 2013); Proceedings of VI International Conference "Physics of Disordered Systems" (Lviv, 2013); Різдвяні дискусії 2014 (Львів, 2014); XXXIII Max Born Symposium "Noncommutative geometry, quantum symmetries and quantum gravity" (Wroclaw, 2014); Workshop on Current Problems in Physics (Lviv, 2014); Різдвяні дискусії 2015 (Львів, 2015); Міжнародна конференція “Еврика-2015” (Львів, 2015 р).

Подані в роботі результати неодноразово обговорювали на наукових семінарах кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка.

**Публікації.** Результати дисертаційної роботи опубліковані в п’яти журнальних статтях [1–5] та шістнадцяти тезах доповідей на конференціях [6–21].

# Розділ 1

# Огляд літератури

Ідея мінімальної довжини має давню історію [22]. Ще в 1930 р. Гайзенберґ першим висунув гіпотезу про некомутативність просторових координат, що приводила до мінімальної довжини [23], як можливий спосіб усунення розбіжностей, що виникали в квантовій електродинаміці та теорії поля. Тільки через 17 років ідея про фундаментальну довжину, подолавши шлях від Гайзенберґа до Пайерлса та Паулі, потім Оппенгеймера та Снайдера [24], врешті знайшла математичне оформлення у роботі останнього [25]. Деформовані комутаційні співвідношення, запропоновані у роботі [25], мають вигляд:

$$[\hat{X}^\mu, \hat{P}^\nu] = -i\hbar[g^{\mu\nu} - \beta' \hat{P}^\mu \hat{P}^\nu],$$

$$[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu] = -i\hbar\beta'(\hat{P}^\mu \hat{X}^\nu - \hat{P}^\nu \hat{X}^\mu),$$

$$[\hat{P}^\mu, \hat{P}^\nu] = 0. \tag{1.1}$$

Зі співвідношення невизначеностей Гайзенберґа, що відповідає деформованій алґебрі (1.1), випливає, що неможливо визначити положення частинки з точністю більшою ніж $\Delta X_0 = \hbar\sqrt{\beta'}$.

Однак в той же час процедура перенормування у квантовій електродинаміці була розроблена і отримала визнання. Тому, зважаючи на значні досягнення цієї техніки, альтернативні підходи до вирішення проблеми розбіжностей, в тому числі й ідея квантованого простору-часу, не набули значної популярності. Протягом тривалого часу опубліковано небагато праць на тему квантованого простору [26–30].

Зацікавленість цією проблемою була відновлена наприкінці минулого століття дослідженнями з теорії струн, квантової теорії чорних дір та в квантовій ґравітації, які передбачали існування ненульової мінімальної невизначеності координат [31–33]. Кемпфом було показано, що мінімальна невизначеність координати може природно з'явитися у квантовій механіці шляхом незначної зміни (деформації) канонічних комутаційних співвідношень (алґебри Гайзенберґа) [34–38]. Саме роботи Кемпфа стимулювали дослідження традиційних квантово-механічних задач у просторах з мінімальною невизначеністю координати. Ці задачі дають можливість виявити вплив квантування простору на спектри та хвильові функції квантових систем.

Найпростішою деформованою алґеброю є запропонована Кемпфом алґебра [35]

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar(1 + \beta\hat{P}^2), \tag{1.2}$$

що призводить до мінімальної невизначеності координати, яку називають мінімальною довжиною. У виразі (1.2) поправка $\beta\hat{P}^2$ є невеликою для малих значень імпульсу, а для великих значень імпульсу суттєво впливає на поведінку частинки. Якщо покласти $\beta = 0$, то отримується канонічна алґебра Гайзенберґа. Для всіх розв'язаних задач в деформованій алґебрі при обчисленні границі $\beta \to 0$ результати переходять в уже відомі результати квантової механіки для недеформованого випадку. Розумно припустити, що відповідність результатів при граничному переході від деформованої до недеформованої алґебри Гайзенберґа буде виконуватися і для інших задач, які ще не є розв'язаними, або щодо розв'язку яких виникають сумніви. Сформований таким чином принцип відповідності, аналог принципу відповідності квантової та класичної механіки, буде слугувати нам одним з методів верифікації отриманих результатів для деформованої алґебри.

Якщо $\beta > 0$, то така деформація спричиняє існування мінімальної довжини $\Delta X_{min} = \hbar\sqrt{\beta}$, тобто, принципово не існує можливості виміряти координату з точністю кращою ніж $\Delta X_{min}$. Відзначимо, що деформоване комутаційне співвідношення призводить до такої ж нерівності Гайзенберґа, яка була запропонована у теорії струн, в теорії чорних дір, і т. п. Бачимо, існують підстави ототожнити оператори, що відповідають фізичним величинам координати та імпульсу з операторами $\hat{X}$ та $\hat{P}$, які задовольняють деформованому комутаційному співвідношенню. Тому, будемо вимагати, щоб ці оператори були ермітовими операторами.

Загальніший випадок одновимірної алґебри розглянуто в роботах [39,40]. Отримано умову на функцію деформації, яка слугує критерієм присутності мінімальної довжини [40].

Зауважимо, що комутаційне співвідношення (1.2) є частковим випадком більш загальної деформованої алґебри, дещо раніше запропонованої тим же Кемпфом [34]

$$[X, \hat{P}] = i\hbar(1 + \alpha\hat{X}^2 + \beta\hat{P}^2). \tag{1.3}$$

Це комутаційне співвідношення приводить до співвідношення невизначеностей, яке дає не тільки мінімальну довжину, але також і мінімальний імпульс. Особливістю алґебри (1.3) є те, що не існує не лише координатного, але також й імпульсного представлення для операторів координати та імпульсу. Як вирішення цієї проблеми було запропоновано перейти до деформованого представлення Бергмана-Фока [41, 42], що суттєво ускладнило опис квантовомеханічних систем у такому деформованому просторі. Робота [36] присвячена дослідженню максимально локалізованих станів у випадку деформації з мінімальною довжиною та максимальним імпульсом. В роботі [43] проаналізовано проблеми квантової теорії поля із деформованим комутаційним співвідношенням (1.3).

Алґебра (1.2) може також бути узагальнена на багатовимірний випадок. Як виявилося, такий простір, взагалі кажучи, стає некомутативним. Найбільш відомим і одним із найпростіших узагальнень одновимірної деформованої алґебри є наступна $D$-вимірна алґебра, яку також запропонував Кемпф [38]

$$\begin{aligned}
[\hat{X}_i, \hat{P}_j] &= i\hbar[(1+\beta\hat{P}^2)\delta_{ij} + \beta'\hat{P}_i\hat{P}_j], \\
[\hat{P}_i, \hat{P}_j] &= 0, \\
[\hat{X}_i, \hat{X}_j] &= i\hbar\frac{2\beta-\beta'+(2\beta+\beta')\beta\hat{P}^2}{1+\beta\hat{P}^2}(\hat{P}_i\hat{X}_j-\hat{P}_j\hat{X}_i).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Тут $\beta$ та $\beta'$ є два малі невід'ємні параметри. Зауважимо, що в цій алґебрі постулюються лише перших два комутаційних співвідношення. Третє комутаційне співвідношення виводиться з умови замкнутості алґебри, тобто виконання тотожності Якобі для довільних операторів $\hat{X}_i$ та $\hat{P}_j$. Алґебра (1.4) приводить до (ізотропної) ненульової мінімальної невизначеності координат $\Delta X_0 = \hbar\sqrt{D\beta+\beta'}$. Деформована алгебра з мінімальною довжиною в багатовимірному випадку також розглядалася в роботах [44, 45].

Подібно як і одновимірна, багатовимірна алґебра (1.4) володіє імпульсним представленням. Однак, оскільки оператори координат не комутують між собою, то неможливо записати навіть формального представлення операторів координати без використання диференціальних операторів, а виключно через операторами множення. Ця особливість алґебри (1.4) приводить до додаткових труднощів при розв'язуванні квантово-механічних задач.

Варто зазначити, що існують також інші узагальнення алґебри (1.2) на багатовимірний випадок [38, 46], однак особливий інтерес до алґебри (1.4) пов'язаний з її достатньо простим виглядом, з існуванням імпульсного представлення для операторів алґебри, а також інваріантністю алґебри відносно поворотів. Досить цікавою є алґебра, що була запропонована в роботах [47, 48]

$$
\begin{aligned}
[\hat{X}_i, \hat{P}_j] &= i\hbar \left[\delta_{ij} - \alpha \left(\hat{P}\delta_{ij} + \frac{\hat{P}_i\hat{P}_j}{\hat{P}}\right) + \alpha^2 \left(\hat{P}^2\delta_{ij} + 3\hat{P}_i\hat{P}_j\right)\right], \\
[\hat{P}_i, \hat{P}_j] &= 0, \quad [\hat{X}_i, \hat{X}_j] = 0, \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

де $\hat{P}^2 = \sum_{i=1}^{D} \hat{P}_i\hat{P}_i$. Алґебра (1.5) є комутативною і володіє формальним координатним представленням, яке має досить простий вигляд

$$\hat{X}_i = \hat{x}_i, \qquad (1.6)$$

$$\hat{P}_j = \hat{p}_j \left(1 - \alpha\hat{p} + \alpha^2\hat{p}^2\right). \qquad (1.7)$$

Тут оператори $\hat{x}_i$ та $\hat{p}_j$ задовольняють недеформовані комутаційні співвідношенння $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$, а також $\hat{p}^2 = \sum_{i=1}^{D} \hat{p}_i\hat{p}_i$.

На відміну від алґебри Снайдера, алґебра (1.4) не є лоренц-коваріантною. Тому формулювання задач релятивістської квантової механіки у просторі з деформацією (1.4) є не зовсім коректним. Однак $D$-вимірна двопараметрична деформована алґебра (1.4) допускає узагальнення на релятивістський випадок. Мабуть, найпростішим узагальненням є $(D+1)$-вимірна Лоренц-коваріантна алґебра простору-часу, яка була запропонована в роботі [49]. Ця алґебра має наступний вигляд:

$$[\hat{X}^\mu, \hat{P}^\nu] = -i\hbar[(1-\beta\hat{P}_\rho\hat{P}^\rho)g^{\mu\nu} - \beta'\hat{P}^\mu\hat{P}^\nu],$$

$$[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu] = i\hbar\frac{2\beta-\beta'-(2\beta+\beta')\beta\hat{P}_\rho\hat{P}^\rho}{1-\beta\hat{P}_\rho\hat{P}^\rho}(\hat{P}^\mu\hat{X}^\nu-\hat{P}^\nu\hat{X}^\mu),$$

$$[\hat{P}^\mu, \hat{P}^\nu] = 0, \tag{1.8}$$

де $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,\ldots,-1)$ - метричний тензор. Оператори координати та імпульсу, що входять в алґебру (1.8) є ермітовими по відношенню до модифікованого скалярного добутку з ваговою функцією, яка може стати сингулярною, якщо ми дозволимо частинкам володіти дуже великими енергіями. Це означає, що стани з такими енергіями мають бути розглянуті як нефізичні. Іншими словами енергії, що відповідають фізичним станам повинні задовольняти умові

$$(\beta+\beta')\left(\frac{E}{c}\right)^2 < 1. \tag{1.9}$$

В такому випадку вагова функція із модифікованого скалярного добутку буде вільна від сингулярностей.

Алґебра (1.8) є цілком новою алґеброю і не може бути зведеною до алґебри (1.4) в нерелятивістській границі. У частковому випадку $D=3, \beta=0$ алґебра (1.8) є еквівалентна до алґебри Снайдера.

Як ми вже згадували, при вирішенні квантовомеханічних задач виникають деякі труднощі, пов'язані з деформацією комутаційних співвідношень (1.2). Тому точний розв'язок рівняння Шредингера отримано лише для кількох систем. В роботі [35] розглянуто одновимірний гармонічний осцилятор з мінімальною невизначеністю координати. Отримано точні вирази для хвильових функцій в імпульсному представленні та для енергетичного спектру гармонічного осцилятора в просторі з мінімальною довжиною

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4\sqrt{r}}+\sqrt{1+\frac{1}{16\sqrt{r}}}\right)+\frac{\hbar\omega}{4\sqrt{r}}n^2, \tag{1.10}$$

де $r = 1/(2\beta m\hbar\omega)^2$, $m$ та $\omega$ — маса та частота осцилятора. Як бачимо, енергетичні рівні асимптотично, при великих $n$, зростатимуть як $n^2$. Цей результат був узагальнений на багатовимірний випадок у роботах [50, 51]. Було показано, що енергетичні рівні $D$-вимірного ізотропного гармонічного осцилятора при великих квантових числах $n$ зростають пропорційно до $n^2$, подібно як і в одновимірному випадку. Також знайдено точний розв'язок для енергетичного спектру одновимірного гармонічного осцилятора у деформованому просторі з мінімальною невизначеністю координати та імпульсу методами суперсиметрії [52, 53].

В контексті деформованої алґебри (1.4) розглядалося рівняння Дірака для релятивістської задачі про тривимірний осцилятор Дірака [54]. Знайдено точні вирази для енергетичного спектру та хвильових функцій методами суперсиметрії з форм-інваріантністю. Точний розв'язок $(2 + 1)$ вимірного осцилятора Дірака в магнітному полі у просторі з деформованою алґеброю Гайзенберґа з мінімальною довжиною знайдено в [55].

Також знайдено точний розв'язок для $(1+1)$ - вимірного осцилятора Дірака у просторі з лоренц-коваріантною деформованою алґеброю [49]. На відміну від недеформованого випадку енергетичний спектр осцилятора Дірака у деформованому просторі з алґеброю (1.8) є обмеженим зверху.

У просторі з деформованою алґеброю з мінімальною довжиною (1.2) розглядалася одновимірна задача Кулона [56, 57]. Було отримано енергетичний спектр та хвильові функції для частинки в потенціалі $1/\hat{X}$. Однак в згаданих роботах виникла дискусія стосовно питання означення оператора $1/\hat{X}$ та вибору умови квантування. Відповіді на ці питання, що довго залишалися відкритими, пропонується в цій роботі.

Також розглядалася тривимірна задача про частинку в потенціалі $1/\hat{R}^2$ [58, 59] і показано, що в деформованому просторі з мінімальною довжиною потенціал $1/\hat{R}^2$ регуляризується. Для цієї задачі знайдено точний розв'язок рівняння Шредингера для $s$-станів на мові функцій Гойна.

Труднощі в отриманні точних розв'язків квантово-механічних задач у просторі з деформованими комутаційними співвідношеннями змушують застосовувати пертурбативні методи та чисельні обчислення для розв'язування цих задач. Зокрема, в роботі [37] розглянуто $D$-вимірний ізотропний гармонічний осцилятор в рамках теорії збурень. Як виявилося згодом, цю задачу можна розв'язати точно, про що ми вже згадували.

Окремої уваги заслуговує задача про атом водню в просторі з деформованою алґеброю Гайзенберґа в нерелятивістському випадку. Вперше цю задачу в рамках теорії збурень було розглянуто в роботі [60] у частковому випадку $2\beta = \beta'$ деформованої алґебри (1.2). Пізніше в роботі [61] цей результат був узагальнений на випадок довільних значень параметрів деформації. Також робота [61] містить результати для енергетичного спектру атома водню, що були отримані чисельними методами. Як виявилося, вирази для поправок до енергії $s$-рівнів містять розбіжності, тому звична теорія збурень є незастосовною для таких станів. Для вирішення цієї проблеми в роботі [62] була запропонована вільна від розбіжностей модифікована теорія збурень, заснована на ідеї так званого зсунутого розкладу. Це дозволило обчислити поправки до всіх без виключення енергетичних рівнів атома водню в просторі з деформованою алґеброю Гайзенберґа [62, 63]. Також було досліджено вплив деформації простору на магнітний орбітальний момент електрона в атомі водню у деформованому просторі з мінімальною довжиною [64].

Задача розсіяння на центральних потенціалах в деформованому просторі досліджувалася в роботі [65]. Знайдено вирази для амплітуд та диференціальних перерізів розсіяння на потенціалах Кулона та Юкави в борнівському наближенні.

Поправки до енергії частинок, поміщених в гравітаційну квантову яму та скінченну чи нескінченну прямокутну яму були знайдені в [66–68].

Квазікласичне наближення в деформованому просторі з мінімальною довжиною було розвинуте в роботі [69]. Записано узагальнення правила квантування Бора-Зоммерфельда на випадок деформації та знайдено енергетичні спектри для низки одновимірних та тривимірних квантовомеханічних задач, таких як: одновимірні гармонічні та ангармонічні осцилятори та потенціали $1/\hat{X}$ та $1/\hat{X}^2$, а також тривимірний гармонічний осцилятор та атом водню. Згодом деякі з цих результатів було узагальнено на випадок деформованого простору з мінімальною довжиною та імпульсом [70].

У класичній границі

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{A},\hat{B}] \Rightarrow \{A,B\} \tag{1.11}$$

деформована алґебра (1.4) приводить до деформації канонічних дужок Пуассона [71, 72]

$$\begin{aligned} \{X_i,P_j\} &= [(1-\beta P^2)\delta^{ij} - \beta' P_i P_j], \\ \{X_i,X_j\} &= \frac{2\beta-\beta'+(2\beta+\beta')\beta P^2}{1+\beta P^2}(P_i X_j - P_i X_j), \\ \{P_i,P_j\} &= 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Узагальненням означення дужки Пуассона для двох довільних функцій координат та імпульсів $F$ та $G$ є вираз

$$\{F,G\} = \left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\frac{\partial G}{\partial P_j} - \frac{\partial F}{\partial P_i}\frac{\partial G}{\partial X_j}\right)\{X_i,P_j\} + \frac{\partial F}{\partial X_i}\frac{\partial G}{\partial X_j}\{X_i,X_j\}. \tag{1.13}$$

Така загальна форма дужок Пуассона зберігає ті ж властивості дужок Пуассона, що й у недеформованому випадку, а саме: антисиметричність, білінійнійсть, а також виконання правила Лейбніца та тотожності Якобі. На основі деформованих дужок Пуассона (1.12) було досліджено вплив мінімальної довжини на поведінку класичних систем. Зокрема проведено дослідження впливу деформації на рух в центральному полі та отримано рівняння траєкторії частинок в потенціалі гармонічного осцилятора та потенціалі Кулона [72]. Знайдено також узагальнення третього закону Кеплера на випадок деформованих дужок Пуассона (1.12) [73], аналог теореми Ліувілля, вираз для густини станів, скінченну космологічну сталу, а також отримано узагальнений закон Планка для густини випромінювання абсолютно чорного тіла [74].

Автори роботи [75] знайшли модифіковане рівняння Гамільтона-Якобі і на його основі записали рівняння руху частинки в рамках ньютонівської динаміки та загальної теорії відносності. В роботі також було досліджено прецесію планетарних орбіт та отримано оцінку на параметр деформації на основі порівняння теоретичних результатів з експериментальними даними для прецесії Меркурію.

Зауважимо, що кут прецесії кеплерівської орбіти, що пов'язаний з деформацією простору з мінімальною довжиною може бути знайдений іншим (простішим) методом, що оснований на властивостях вектора Гамільтона [76, 77].

Також проводилися дослідження впливу деформації простору з мінімальною довжиною на вигляд перетворень Галілея та Лоренца [78]. Для нерелятивістського випадку виявлено, що деформовані перетворення Галілея є подібними до недеформованих перетворень Лоренца, записаних для евклідового простору з сигнатурою $(+,+,+,+)$. Роль швидкості відіграє величина пов'язана з параметром деформації, яка згідно оцінок проведених у роботі, суттєво більша за швидкість світла. У релятивістському випадку деформація простору приводить до недеформованих перетворень Лоренца, однак з ефективною швидкістю світла.

Статистична механіка в деформованому просторі з мінімальною довжиною досліджувалась у роботах [79–81]. Було запропоновано класичний метод для знаходження статистичної суми, на основі якого було отримано вираз для статистичної суми та теплоємності для ідеального газу та системи гармонічних осциляторів [79]. Вплив деформації на ідеальні бозе та фермі гази знайдено в [80]. Автори [81] розглянули систему гармонічних осциляторів з неекстенсивною статистикою Тсаліса в просторі з мінімальною довжиною.

Окремо варто виділити роботи, в яких було показано, що якщо припустити, що параметр деформації частинки є обернено пропорційний до квадрату її маси, то можна вирішити цілу низку проблем, які виникають в деформованій класичній механіці [82, 83]. Єдина умова $\beta m^2 = const$ приводить до вирішення проблеми порушення принципу еквівалентності в деформованому просторі, забезпечує адитивність кінетичної енергії, незалежність кінетичної енергії системи багатьох частинок від композиції [83], а також пояснює неправдоподібно малий результат для мінімальної довжини, отриманий з порівняння спостережуваної прецесії перигелію Меркурію та теоретичних оцінок для цієї прецесії [82].

Цікаво, що припущення про зв'язок параметра деформації з масою може мати більш фундаментальний характер, оскільки нещодавно подібні співвідношення були отримані для алґебр з некомутативністю [84–89].

Існування мінімальної довжини може мати цікаві наслідки для реґуляризації розбіжностей у квантовій механіці. При наявності таких деформацій не можна локалізувати частинку в як завгодно малому об'ємі (в [90] було показано, що не існує зв'язаних станів для частинки у достатньо вузькій нескінченно високій потенціальній ямі). Було показано, що така деформація спричиняє ефективне зменшення густини високоенерґетичних станів [74, 91]. На прикладі ефекту Казимира було показано, що у квантовій електродинаміці зникають розбіжності, пов'язані з нескінченною енерґією фотонного вакууму [92–94].

Дослідження квантово-механічних систем в деформованому просторі з мінімальною довжиною є цікавим не тільки з математичної точки зору, але також з фізичної, оскільки вони дають можливість врахувати вплив деформації на енергетичні спектри. Порівняння цих результатів з експериментальними даними може дати оцінку величини мінімальної довжини (див, наприклад, [4]).

Таким чином залишається актуальною проблема дослідження простих квантово-механічних систем, для яких відомий точний спектр в недеформованому випадку і для яких можна проаналізувати вплив наявності деформацій на поведінку системи. Той факт, що деформація комутаційних співвідношень передбачає мінімальну довжину, призводить до того, що в деформованому просторі не існує координатного представлення. З огляду на це особливо цікавим є дослідження впливу деформацій на системи з синґулярностями. Однією з таких задач є одновимірна кулонівська задача, яка раніше вже досліджувалася. Однак деякі питання, зокрема ті, що стосуються означення оператора одновимірного потенціалу Кулона, не знайшли відповіді в попередніх роботах. Іншою цікавою задачею є задача про релятивістський атом водню, яка, зважаючи на високий рівень точності її експериментального та теоретичного дослідження, є ідеальним об'єктом на перевірку існування мінімальної довжини.

Незначна модифікація канонічних комутаційних співвідношень може спричинити значні ефекти. Цікаво порівняти як різні види деформації впливають на одну і ту ж квантову систему. В цій роботі ми також дослідимо більш загальний випадок деформації канонічного комутаційного співвідношення з мінімальною довжиною. Серед них також і такі, що приводять до існування верхнього обмеження на значення кінетичної енерґії частинки.

# Розділ 2

# Фізичні стани у деформованому просторі з мінімальною довжиною

## 2.1 Вступ

Важливою особливістю квантової теорії з мінімальною довжиною є те, що власні стани оператора координати більш не є фізичними станами, оскільки для цих станів дисперсія координати $\Delta X = 0 < \Delta X_{min}$. В результаті, ми вже не можемо використовувати координатне представлення. В загальному, стани з $\Delta X < \Delta X_{min}$ не належать до області фізичних станів на відміну від станів з $\Delta X \geq \Delta X_{min}$. Одним з можливих способів просторового опису системи є використання максимально локалізованих станів, для яких $\Delta X = \Delta X_{min}$, як узагальнення власних станів оператора координати на випадок присутності мінімальної довжини. У роботі [35] було запропоновано отримати максимально локалізовані стани як окремі когерентні стани. Однак, як це було показано в [90], цей результат є правильним тільки для кількох окремих випадків деформації. В роботі [90] було запропоновано більш загальне визначення максимально локалізованих станів на основі варіаційного принципу. Максимально локалізовані стани були розглянуті у випадку загальнішої модифікації комутаційного співвідношення між операторами координати та імпульсу, яка залежить від всіх степенів параметра деформації [95–97], у випадку наявності як мінімальної довжини так і максимального імпульсу [98] або мінімальної довжина та імпульсу [36], одночасно поворонто- та трансляційно-інваріантний випадок деформації [38] і, нарешті, в некомутативних квантових теоріях [99].

Однак, критерій приналежності хвильової функції до множини фізичних функцій, а також зв'язок конкретного фізичного стану з максимально локалізованими станами ще не були розглянуті. У даній роботі вивчаються властивості фізичних станів та способи дискретного представлення області фізичних станів в деформованому просторі (1.2).

## 2.2 Про деформовану алґебру

### 2.2.1 Узагальнений принцип невизначеності та представлення деформованої алґебри

Для некомутуючих операторів $\hat{X}$ та $\hat{P}$, які задовольняють деформовану алґебру (1.2), можна записати співвідношення невизначеностей для некомутуючих операторів. В результаті отримуємо співвідношення, яке в літературі отримало назву узагальнений принцип невизначеності ( з англ. Generalized Uncertainty Principle(GUP)). Ось це співвідношення

$$\Delta X \geq \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1+\beta\langle\hat{P}\rangle^2}{\Delta P}+\beta\Delta P\right). \tag{2.1}$$

Тут ми використали позначення $\Delta X = \sqrt{\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle}$ та $\Delta P = \sqrt{\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle}$. З нерівності (2.1) ми отримуємо, що дисперсія координати $\Delta X$ має мінімум

$$\Delta X_0 = \hbar\sqrt{\beta}\sqrt{1+\beta\langle\hat{P}\rangle^2}, \tag{2.2}$$

який досягається коли $\Delta P = \sqrt{\frac{1}{\beta}+\langle\hat{P}\rangle^2}$.

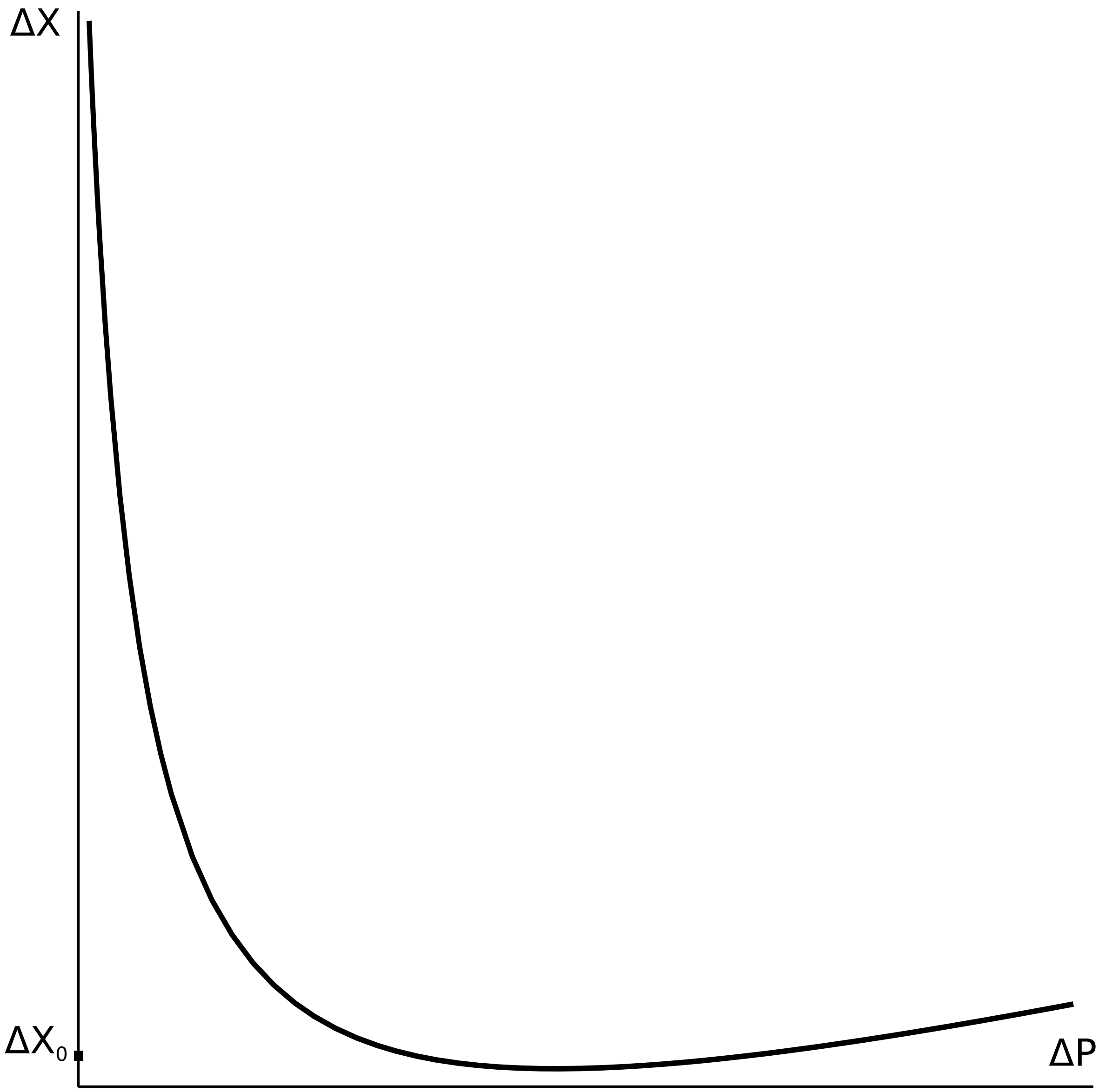


Рис. 2.1: Узагальнений принцип невизначеності

Існують різні представлення для алґебри (1.2). Одне з них це імпульсне представлення, коли оператор імпульсу є оператором множення

$$\hat{X} = i\hbar(1+\beta P^2)\frac{d}{dP}, \tag{2.3}$$

$$\hat{P} = P.$$

Однак в такому записі оператор координати не є ермітовим. Тому, для того щоб забезпечити ермітовість оператора координати скалярний добуток для станів $\Psi(P) = \langle P|\Psi\rangle$ та $\Phi(P) = \langle P|\Phi\rangle$ у гільбертовому просторі станів має бути модифікований через введення вагової функції

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP}{1+\beta P^2}\Psi^*(P)\Phi(P). \tag{2.4}$$

Одиничний оператор тепер запишеться

$$\hat{1} = \int -\infty^{+\infty}\frac{dP}{1+\beta P^2}|P\rangle\langle P|. \tag{2.5}$$

Тоді, для скалярного добутку власних станів оператора імпульсу матимемо

$$\langle P'|P''\rangle = \langle P'|\hat{1}|P''\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP}{1+\beta P^2}\langle P'|P\rangle\langle P|P''\rangle. \tag{2.6}$$

Пригадавши означення для дельта-функції

$$\langle P'|P''\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dP\delta(P-P')e\langle P|P''\rangle, \tag{2.7}$$

знаходимо вираз для власних функцій оператора імпульсу в імпульсному представленні

$$\langle P|P'\rangle = (1+\beta P^2)\delta(P-P'). \tag{2.8}$$

Інше представлення, що також задовольняє алґебрі (1.2) є так зване псевдокоординатне представлення. У цьому представленні оператор координати є оператором диференціювання як і в недеформованому випадку. Квазікоординатне представлення має наступний вигляд:

$$\hat{X} = i\hbar\frac{d}{dp}, \quad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\mathrm{tg}\sqrt{\beta}p. \tag{2.9}$$

Тут параметр $p$ змінюється в скінченному проміжку $\left[-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}, \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\right]$. Скалярний добуток в цьому представленні записується в такому вигляді

$$< \Psi|\Phi >= \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{+\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} dp\Psi^*(p)\Phi(p). \tag{2.10}$$

Легко бачити, що заміна

$$p = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\mathrm{arctg}\sqrt{\beta}P \tag{2.11}$$

в інтегралі (2.10) приводить до виразу (2.4). Одиничний оператор у цьому представленні записується

$$\hat{1} = \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} dp|p\rangle\langle p|, \tag{2.12}$$

а для скалярного добутку власних станів оператора імпульсу матимемо

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p'). \tag{2.13}$$

### 2.2.2 Задача на власні значення для оператора координати

Розглянемо задачу на власні значення та власні функції для оператора координати. Для цього запишемо рівняння на власні значення для оператора координати в представленні (5.9)

$$i\hbar\frac{d}{dp}\Psi_\Lambda(p) = \Lambda\Psi_\Lambda(p). \tag{2.14}$$

Розв'язком цього рівняння є

$$\Psi_\Lambda(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} e^{-i\frac{\Lambda}{\hbar}p}. \tag{2.15}$$

Зауважимо, що цей результат в представленні (2.3) був отриманий в роботі [35]

$$\widetilde{\Psi}_\Lambda(P) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} e^{-i\frac{\Lambda}{\hbar\sqrt{\beta}}\mathrm{arctg}\sqrt{\beta}P}. \tag{2.16}$$

Скалярний добуток двох власних функцій оператора координати має вигляд

$$\begin{aligned} < \Psi_\Lambda|\Psi_{\Lambda^`} > &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{+\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} dp e^{-i\frac{\Lambda-\Lambda^`}{\hbar}p} \\ &= \frac{2\hbar\sqrt{\beta}}{\pi(\Lambda-\Lambda^`)}\sin\left(\frac{\Lambda-\Lambda^`}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi\right). \end{aligned} \tag{2.17}$$

З виразу (2.18) ми робимо висновок, що всю сукупність власних станів оператора координати можна поділити на множини, які нумеруються параметром $\lambda \in [-1, 1)$

$$\{\Psi_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p), n \in Z\}. \tag{2.18}$$

Функції з множини (2.18) є взаємно ортогональними

$$< \Psi_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}|\Psi_{(\lambda+2m)\hbar\sqrt{\beta}} >= \delta_{m,n}. \tag{2.19}$$

Доведемо, що кожна з цих множин утворює повний базис. Якщо це є так, то довільну хвильову функцію можна розкласти в ряд за цією множиною

$$\Psi(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \Psi_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p). \tag{2.20}$$

Коефіцієнти розкладу $C_n$ записуються як

$$C_n = \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{+\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} dp' \Psi^*_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p')\Psi(p'). \tag{2.21}$$

Підставляючи вираз для коефіцієнтів розкладу (2.21) у ряд (2.20), одержимо

$$\Psi(p) = \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{+\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} dp' \Psi(p') \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi^*_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p')\Psi_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p). \tag{2.22}$$

Оскільки функція $\Psi(p)$ вибрана нами довільно, то (2.22) виконується тільки тоді, коли

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Psi^*_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p')\Psi_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p) = \delta(p-p'). \tag{2.23}$$

Отже, якщо множина функцій (2.18) повна, то виконується рівність (2.23), і навпаки, якщо виконується рівність (2.23), то сім'я функцій (2.18) повна.

Доведемо справедливість рівності (2.23). Пригадаємо властивість $\delta$-функції

$$\int_{p-a}^{p+b} f(p)\delta(p-p')dp = f(p'), \tag{2.24}$$

де $a$ та $b$ — довільні додатні числа. Якщо (2.23) виконується, то виконується також і наступне співвідношення

$$\int_{p-a}^{p+b} f(p) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Psi^*_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p')\Psi_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p)dp = f(p'). \tag{2.25}$$

Обчислимо спочатку суму під інтегралом (2.25), замінивши $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ на

$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{+N}$. Одержимо

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Psi^*_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p')\Psi_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p)$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}}\Psi_{\lambda\hbar\sqrt{\beta}}(p-p')\lim_{N\to\infty}\frac{\sin{(2N+1)(p-p')}}{\sin{(p-p')}}.$$

Тепер провівши заміну змінних у інтегралі (2.25)

$$y=(N+1)(p-p'),dp=\frac{dy}{N+1}, \tag{2.26}$$

границю по $N$ можна обчислити. Як результат отримаємо, що

$$\int_{p-a}^{p+b}f(p)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Psi^*_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p')\Psi_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p)dp$$

$$=f(p')\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy. \tag{2.27}$$

Пригадуючи, що інтегральний синус $\mathrm{Si}x=\int_0^x\frac{\sin y}{y}dy$ в границі великих значень $x$ дає $\frac{\pi}{2}$, ми бачимо, що рівняння (2.27) збігається з (2.25). Отже, рівність (2.25) виконується і множина власних функцій оператора координати (2.18) є повною.

Кожна з множин, що задається параметром $\lambda\in[-1,1)$, є множиною власних станів самоспряженого розширення оператора координати $\{\hat{X},D_\lambda(\hat{X})\}$, де

$$D_\lambda(\hat{X})=\left\{\psi(p),\psi'(p)\in L^2\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}},\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\right),\right.$$

$$\left.\psi\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\right)=e^{i\lambda\pi}\psi\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\right)\right\}. \tag{2.28}$$

Множина (2.18) представлена на рис. (2.2).

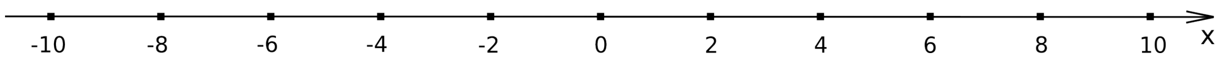


Рис. 2.2: Повна ортогональна множина власних станів оператора координати ($\lambda = 0$). Власні стани з множини позначені чорною точкою. Шкала в одиницях $\hbar\sqrt{\beta}$.

Власні стани оператора координати є нефізичними, тому що не задовольняють співвідношення невизначеності (2.1) і середнє значення кінетичної енерґії на таких станах є розбіжним

$$< \Psi_\Lambda|\hat{P}^2/2m|\Psi_\Lambda >= \infty. \tag{2.29}$$

Але, незважаючи на це, ми можемо використати повний базис (2.18) для представлення хвильових функцій.

### 2.2.3 Максимально локалізовані стани

Як ми бачили в попередньому розділі власні стани оператора координати не є фізичними станами. Як наслідок, ми можемо використати ці стани лише для формального представлення окремих хвильових функцій, але вже не можемо інтерпретувати таке представлення як координатне. Тому, для того щоб мати інформацію про просторовий розподіл системи, ми змушені розглянути максимально локалізовані стани, для яких $\Delta X = \Delta X_{min}$. Ці стани також можна розглядати як узагальнення власних станів оператора координати на деформований випадок.

Стани з максимально дозволеною локалізацією означають як [35]:

$$\langle\Psi_\xi^{ml}|\hat{X}|\Psi_\xi^{ml}\rangle = \xi, \tag{2.30}$$

$$\langle\Psi_\xi^{ml}|(\hat{X}-\xi)^2|\Psi_\xi^{ml}\rangle = \Delta X_0.$$

Для таких станів узагальнене співвідношення невизначеностей (2.1) перетворюється в рівність. Максимально локалізовані стани можуть бути отримані з такого рівняння:

$$\left[\hat{X} - \langle\hat{X}\rangle + \frac{\langle[\hat{X},\hat{P}]\rangle}{2\Delta P^2}\left(\hat{P} - \langle\hat{P}\rangle\right)\right]\Psi(P) = 0. \tag{2.31}$$

У випадку $\langle P\rangle = 0$, $\Delta P = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ рівняння (2.31) може бути записане у вигляді

$$\hat{Q}\Psi_{\xi}^{ml} = \xi\Psi_{\xi}^{ml}, \tag{2.32}$$

де

$$\hat{Q} = \hat{X} + i\hbar\beta\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta\hat{P}^2}}\hat{X}\sqrt{1+\beta\hat{P}^2}. \tag{2.33}$$

З останнього представлення для оператора $\hat{Q}$ ми робимо висновок, що $\hat{Q}$ та $\hat{X}$ є ізоспектральними операторами, незважаючи на те, що $\hat{Q}$ не є ермітовим. Розв'язок рівняння (2.32) в представленні (5.9) запишеться

$$\Psi_{\xi}^{ml} = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}\cos(\sqrt{\beta}p)\exp\left(-\frac{i\xi p}{\hbar}\right). \tag{2.34}$$

Скалярний добуток двох максимально локалізованих станів дорівнює

$$< \Psi_{\xi'}^{ml}|\Psi_{\xi}^{ml} >= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\xi-\xi'}{2\hbar\sqrt{\beta}} - \left(\frac{\xi-\xi'}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right)^3\right]^{-1}\sin\frac{(\xi-\xi')\pi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \tag{2.35}$$

З (2.35) ми робимо висновок, що максимально локалізовані стани можуть бути поділені на ортогональні множини $\Psi_{(\varepsilon+4n)\hbar\sqrt{\beta}}^{ml}(P), n \in Z$, які нумеруються параметром $\varepsilon \in [-2,2)$. Стани з цих множин задовольняють співвідношення

$$\langle\Psi_{(\varepsilon+4n)\hbar\sqrt{\beta}}^{ml}|\Psi_{(\varepsilon+4m)\hbar\sqrt{\beta}}^{ml}\rangle = \delta_{m,n}. \tag{2.36}$$

Подібно чином, як ми доводили повноту ортогональної множини власних функцій оператора координати, можна показати, що жодна з ортогональних множин $\{\Psi^{ml}_{(\varepsilon+4n)\hbar\sqrt{\beta}}(P), n \in Z\}$ не утворює повного базису.

## 2.3 Фізичні вимоги до хвильової функції

З узагальненого принципу невизначеності (2.1) випливає, що середнє значення $\hat{P}^2$ може бути скінченним лише для станів, які належать до дозволеної області $\Delta X \geq \Delta X_{min}$. Тому, скінченність середнього значення оператора кінетичної енерґії є вимогою для фізичної хвильової функції. Розглянемо довільну нормовану хвильову функцію $F(P)$ в імпульсному представленні (2.3), тобто таку, що задовольняє

$$\int_{-\infty}^{\infty} dP \frac{|F(P)|^2}{1+\beta P^2} = 1. \tag{2.37}$$

Ми також припускаємо, що хвильова функція є неперервною, всюди скінченою та достатньо гладкою.

Середнє значення оператора $\hat{P}^2$ в стані, що описується $F(P)$, запишеться

$$\begin{aligned} < F|\hat{P}^2|F > &= \int_{-\infty}^{\infty} dP \frac{P^2}{1+\beta P^2} |F(P)|^2 \\ &= \frac{1}{\beta}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dP |F(P)|^2 - 1\right). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Тому, середнє значення оператора $\hat{P}^2$ є скінченним тоді і тільки тоді, коли функція $F(P)$ задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{\infty} dP |F(P)|^2 < \infty, \tag{2.39}$$

і, отже, прямує до нуля в границі $P$ до нескінченності

$$F(\pm\infty) = 0. \tag{2.40}$$

Однак, остання формула є лише необхідною умовою фізичності функції, оскільки умова (3.29) вимагає, щоб $F(P) \sim P^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ для $P \to \infty$.

Умова (2.40) може бути записаною у вигляді

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n C_n = 0, \tag{2.41}$$

де $C_n$ – коефіцієнти розкладу функції $F(P)$ за повним базисом власних функцій оператора координати, який задається параметром $\lambda \in [-1, 1)$

$$F(P) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \widetilde{\Psi}_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(P). \tag{2.42}$$

Зауважимо, що умова (2.41) не змінюється від вибору $\lambda$.

### 2.3.1 Зв'язок максимально локалізованих станів з власними станами оператора координати

На відміну власних станів оператора координати максимально локалізовані стани є фізичними станами

$$< \Psi_\xi^{ml} | \frac{P^2}{2m} | \Psi_\xi^{ml} >= \frac{1}{2m\beta}, \tag{2.43}$$

що означає, що максимально локалізовані стани мають задовольняти умову (2.41). Щоб показати це, ми представимо максимально локалізовані стани у вигляді розкладу за повною множиною власних станів оператора координати (4.28):

$$\Psi_\xi^{ml} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \Psi_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}, \tag{2.44}$$

$$C_n = \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} \Psi^*_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p)\Psi_\xi^{ml}(p)dp. \tag{2.45}$$

Легко отримати, що

$$< \Psi_x|\Psi_\xi^{ml} >= \frac{2\sqrt{2}}{\pi\left(1-(\frac{x-\xi}{\hbar\sqrt{\beta}})^2\right)}\cos\left(\frac{x-\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi\right). \tag{2.46}$$

Ця залежність зображена на рис. 2.3. Ми бачимо з рис. 2.3, що $<$

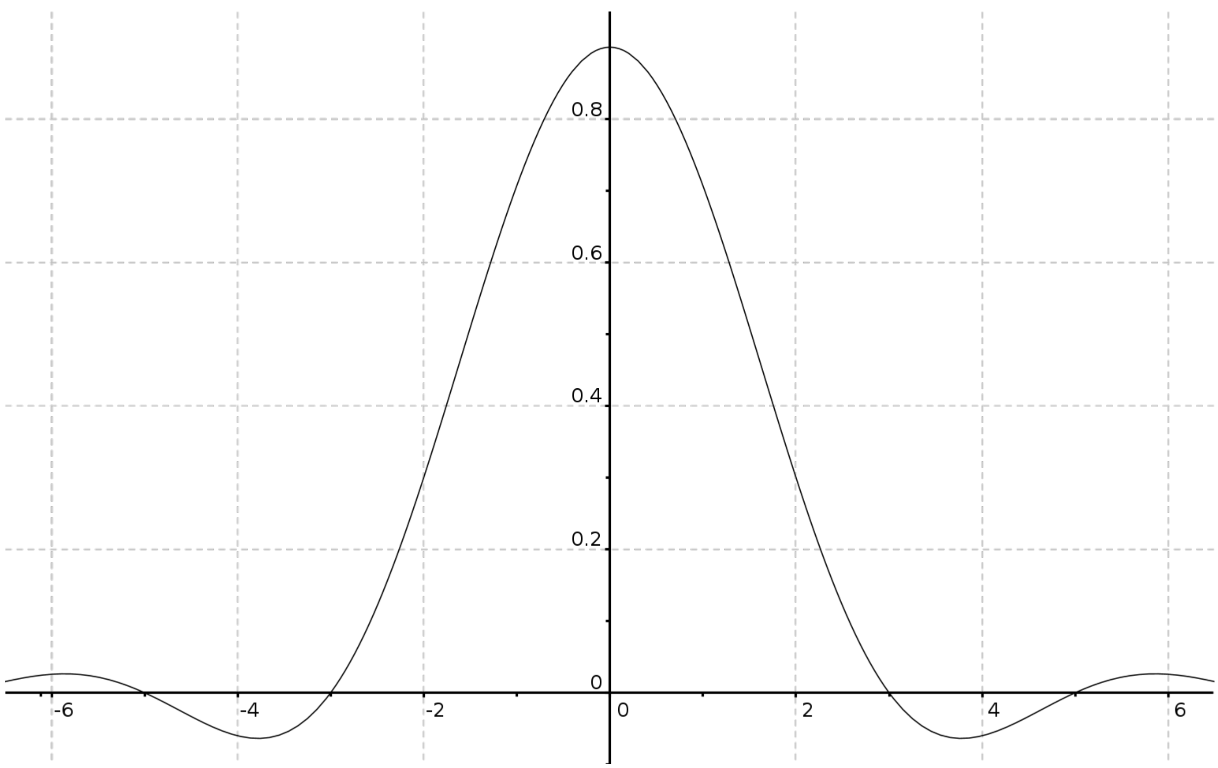


Рис. 2.3: Графік залежності $< \Psi_x|\Psi_\xi^{ml} >$ від $x-\xi$ в одиницях $\hbar\sqrt{\beta}$

$\Psi_x|\Psi_\xi^{ml} >$ дорівнює нулю, коли $x = (\xi + \hbar\sqrt{\beta}) + 2n\hbar\sqrt{\beta}$ з $n \in Z,\ n \neq \pm1$. Це означає, що якщо ми виберемо параметр, який позначає повну множину власних функцій оператора координати, рівним $\lambda=\xi+\hbar\sqrt{\beta}$, ми отримаємо найпростіший розклад для $\Psi_\xi^{ml}$(див рис. 2.4):

$$\Psi_\xi^{ml}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_{\xi-\hbar\sqrt{\beta}}+\Psi_{\xi+\hbar\sqrt{\beta}}\right). \tag{2.47}$$

Цей результат також може бути отриманий з (2.34) представивши косинус через експоненти [57]. Зв'язок ортогональної множини максимально локалізованих станів $\{\Psi^{ml}_{(\varepsilon+4n)\hbar\sqrt{\beta}}(P), n\in Z\}$ із власними функціями оператора координати проілюстровано на рис. 2.4.

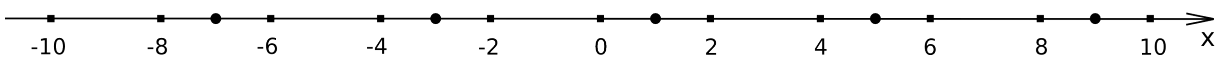


Рис. 2.4: Ортогональна множина максимально локалізованих станів $\Psi^{ml}_{(4n+1)\hbar\sqrt{\beta}}(P), n \in Z$. Максимально локалізовані стани позначені чорним кругом, поміщеним в в точку$(4n+1)\hbar\sqrt{\beta}$. Кожен максимально локалізований стан може бути записаний як нормована сума двох сусідніх власних станів оператора координати, позначених чорними точками. Шкала в одиницях $\hbar\sqrt{\beta}$.

З (2.47) ми бачимо, що максимально локалізовані стани задовольняють необхідну умову фізичності (2.41) і це єдина фізична хвильова функція утворена як лінійна комбінація двох обраних власних станів оператора координати.

### 2.3.2 Власні функції оператора $\hat{X}^2$

Інший простим прикладом фізичних станів є власні функції оператора $\hat{X}^2$. Розглянемо задачу на власні стани оператора $\hat{X}^2$ в представленні (5.9):

$$\hat{X}^2\phi_n(p)=\chi_n\phi_n(p). \tag{2.48}$$

Відповідно до (2.40), ми припускаємо, що власні функції рівні нулю на границях області зміни параметра $p$. Зауважимо, що існує нескінченно багато самоспряжених розширень оператора $\hat{X}^2$ [100], тоді як тільки наступне розширення

$$\hat{X}^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{dp^2}, \tag{2.49}$$

$$D(\hat{X}^2) = \left\{\phi, \phi'' \in L^2\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}, \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\right); \phi\left(\pm\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\right) = 0\right\}$$

має фізичні власні функції.

Тепер розглядувана задача запишеться у вигляді

$$-\hbar^2 \frac{d^2\phi_n(p)}{dp^2} = \chi_n \phi_n(p), \tag{2.50}$$

з умовою $\phi_n(\pm\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}) = 0$. Ця задача є дуже схожою на задачу про частинку в ямі з нескінченно високими стінками в недеформованому випадку. Розв'язок задачі є наступним

$$\chi_n = \hbar^2 \beta n^2, \tag{2.51}$$

$$\phi_n(p) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \sin\left(n\sqrt{\beta}(p + \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}})\right), \tag{2.52}$$

де квантове число $n = 1, 2, \ldots$ . Ненульові матричні елементи оператора $\hat{P}^2$ на власних функціях оператора $\hat{X}^2$ є

$$\langle \phi_n | \hat{P}^2 | \phi_{n+2k} \rangle = \langle \phi_{n+2k} | \hat{P}^2 | \phi_n \rangle = \frac{1}{\beta}\left(2n - \delta_{k,0}\right), \tag{2.53}$$

де $n, m, k = 1, 2, \ldots$ .

## 2.4 Повний базис для фізичних станів

Розглянемо довільну фізичну функцію $F(p)$ в представленні (5.9) і запишемо її у вигляді

$$F(p) = \sqrt{2}\cos(\sqrt{\beta}p) f(p). \tag{2.54}$$

Ми вимагаємо, щоб середнє значення оператора $\hat{P}^2$ було скінченим

$$\begin{aligned}\langle\hat{P}^2\rangle &= \frac{1}{\beta}\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}|F(p)|^2\frac{\sin^2(\sqrt{\beta}p)}{\cos^2(\sqrt{\beta}p)}dp \\ &= \frac{2}{\beta}\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}|f(p)|^2\sin^2(\sqrt{\beta}p)dp < \infty. \qquad (2.55)\end{aligned}$$

Використовуючи умову нормування для $F(p)$, запишемо:

$$\frac{2}{\beta}\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}|f(p)|^2\sin^2(\sqrt{\beta}p)dp = \frac{2}{\beta}\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}|f(p)|^2dp - \frac{1}{\beta} < \infty, \qquad (2.56)$$

З (2.56) ми робимо висновок, що $f(p)$ має бути квадратично інтегровною функцією. Тому кожна фізична хвильова функція може бути записана у вигляді (2.54), де $f(p)$ - квадратично інтегровна функція. Згадана квадратично інтегровна функція може бути записана у вигляді ряду за повною системою власних станів оператора координати (4.28):

$$f(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\Psi_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p), \qquad (2.57)$$

$$A_n = \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}\Psi^*_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p)f(p)dp, \qquad (2.58)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|A_n|^2 < \infty. \qquad (2.59)$$

Підставляючи (2.57) в (2.54), запишемо

$$\begin{aligned}F(p) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\sqrt{2}\cos(\sqrt{\beta}p)\Psi_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\Psi^{ml}_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p). \qquad (2.60)\end{aligned}$$

Тут ми використали, що $\Psi^{ml}_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p) = \sqrt{2}\cos(\sqrt{\beta}p)\Psi_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(p)$.

Таким чином, кожну фізичну функцію можна представити у вигляді ряду за множиною функцій (Рис. 2.5)

$$\{\Psi^{ml}_{(\lambda+2n)\hbar\sqrt{\beta}}(P), n \in Z\},\ \lambda \in [-1, 1), \tag{2.61}$$

де коефіцієнти розкладу задовольняють (2.59).

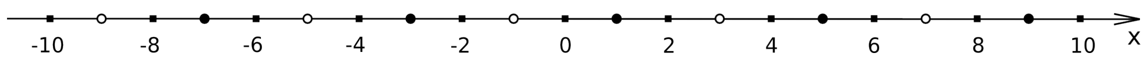


Рис. 2.5: Дві ортогональні множини максимально локалізованих станів $\Psi^{ml}_{(4n+1)\hbar\sqrt{\beta}}(P)$ та $\Psi^{ml}_{(4n-1)\hbar\sqrt{\beta}}(P), n \in Z$, що утворюють повний базис в області фізичних станів. Максимально локалізовані стани позначені чорними та білими кругами, розміщеними в точках $(4n+1)\hbar\sqrt{\beta}$ та $(4n-1)\hbar\sqrt{\beta}$ відповідно. Кожен максимально локалізований стан може бути представлений як нормована сума двох сусідніх власних станів оператора координати, які позначені чорними точками. Шкала в одиницях $\hbar\sqrt{\beta}$.

Множина (2.61) не є ортогональною, бо

$$< \Psi^{ml}_{(\lambda+1+2m)\hbar\sqrt{\beta}}|\Psi^{ml}_{(\lambda+1+2n)\hbar\sqrt{\beta}} >= \delta_{m,n} + \frac{1}{2}(\delta_{m,n+1} + \delta_{m,n-1}), \tag{2.62}$$

де $n, m \in Z$. Цікаво, що матричні елементи операторів $\hat{X}$, $\hat{P}$, $\hat{X}^2$, $\hat{P}^2$

мають тридіагональну структуру:

$$< \Psi^{ml}_{2m\hbar\sqrt{\beta}}|P^2|\Psi^{ml}_{2n\hbar\sqrt{\beta}} >= \frac{1}{\beta}\left(\delta_{m,n} - \frac{1}{2}(\delta_{m,n+1} + \delta_{m,n-1})\right),$$

$$< \Psi^{ml}_{2m\hbar\sqrt{\beta}}|X^2|\Psi^{ml}_{2n\hbar\sqrt{\beta}} >= \hbar^2\beta\left((4n^2+1)\delta_{m,n} + \frac{(2n-1)^2}{2}\delta_{m,n+1}\right.$$

$$\left. + \frac{(2n+1)^2}{2}\delta_{m,n-1}\right),$$

$$< \Psi^{ml}_{2m\hbar\sqrt{\beta}}|P|\Psi^{ml}_{2n\hbar\sqrt{\beta}} >= \frac{i}{2\sqrt{\beta}}\left(\delta_{m,n+1} - \delta_{m,n-1}\right),$$

$$< \Psi^{ml}_{2m\hbar\sqrt{\beta}}|X|\Psi^{ml}_{2n\hbar\sqrt{\beta}} >= \hbar\sqrt{\beta}\left(2n\delta_{m,n} + \frac{2n-1}{2}\delta_{m,n+1} + \frac{2n+1}{2}\delta_{m,n-1})\right),$$

де $n, m \in Z$.

## 2.5 Висновок

Ми дослідили модифіковане комутаційне співвідношення з мінімальною довжиною, запропоноване Кемпфом. З існування мінімальної довжини випливає, що власні стани оператора координати, незважаючи на те, що є квадратично інтегровними, більше не описують фізичну реальність. В загальному, стани з невизначеністю координати меншою за мінімальну довжину $\Delta X < \Delta X_{min}$ також не є фізичними станами. Натомість, фізичними хвильовими функціями є функції, для яких $\Delta X \geq \Delta X_{min}$ та які володіють ще однією ключовою властивістю - скінченністю середнього значення кінетичної енерґії.

Ми вивели необхідну умову фізичності хвильової функції, тобто записали простий критерій, який дозволяє проаналізувати чи у обраному нами стані середнє значення кінетичної енерґії буде скінченним.

Власні стани оператора координати звісно ж не задовольняють цю умову, тоді як максимально локалізовані стани та власні стани оператора $\hat{X}^2$ задовольняють.

Зауважимо, що задача на власні значення та власні функції для операторів $\hat{X}$ та $\hat{X}^2$ в деформованому випадку дуже схожа до такої ж задачі, але для операторів $\hat{P}$ та $\hat{P}^2$ для частинки в ямі з безмежно високими стінками в недеформованій квантовій механіці. Цей факт означає, що частинка в ямі з безмежно високими стінками може бути записана як задача про вільну частинку в просторі з мінімальним імпульсом.

Ми отримали, що максимально локалізовані стани можуть бути записані як лінійна комбінація двох власних станів оператора координати і, що це єдина фізична хвильова функція, яка може бути таким чином утворена з двох координатних власних станів.

Нарешті, ми запропонували просту процедуру запису обраної хвильової функції як лінійну комбінацію зліченної множини максимально локалізованих станів. Ця множина може розглядатися як повний базис для фізичних функцій.

# Розділ 3

# Точно розв'язувані задачі в імпульсному просторі з мінімальною невизначеністю координати

## 3.1 Вступ

Як було згадано раніше, присутність деформації комутаційних співвідношень суттєво ускладнює процедуру знаходження точних розв'язків квантово-механічних задач, для яких такі розв'язки існують у недеформованому випадку. Тому точні енерґетичні спектри та власні функції для задач квантової механіки у деформованому просторі з мінімальною довжиною мають особливу цінність. Крім того, цікавим є розгляд задач з сингулярними потенціалами в деформованому просторі з мінімальною довжиною. Особливістю квантової механіки з мінімальною довжиною є неможливість використання координатного представлення, оскільки таке представлення передбачає розклад за власними функціями оператора координати, які, як було показано раніше, не є фізичними функціями. Тому в деформованому просторі з мінімальною довжиною виникає додаткова проблема означення операторів потенціальної енерґії з сингулярністю.

У цьому розділі пропонується вирішення цієї проблеми шляхом узагальнення рівняння Шредингера в імпульсному представленні на випадок деформованого простору. Цей підхід дозволив розглянути такі одновимірні сингулярні задачі як задача про частинку в дельта-ямі, подвійній дельта-ямі та задачу Кулона у випадку деформованої алгебри Гайзенберга з мінімальною довжиною.

## 3.2 Рівняння Шредингера в імпульсному представленні

У звичайній квантовій механіці рівняння Шредингера можна записати в імпульсному представленні у вигляді наступного інтегрального рівняння

$$\frac{p^2}{2m}\phi(p) + \int_{-\infty}^{\infty} U(p-p')\phi(p')dp' = E\phi(p), \tag{3.1}$$

де

$$U(p-p') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} V(x)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}(p-p')x\right)dx \tag{3.2}$$

є ядром оператора потенціальної енергії. В деформованому випадку оператори імпульсу та координати можуть бути представлені за допомогою недеформованих операторів у формі

$$\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\mathrm{tg}\sqrt{\beta}\hat{p},$$

$$\hat{X} = \hat{x}, \tag{3.3}$$

де $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$.

Ми припускаємо, що рівняння Шредингера в деформованому просторі записується наступним чином

$$\frac{1}{2m\beta}\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\beta}p\right)\phi(p)+\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}U(p-p')\phi(p')dp'=E\phi(p). \qquad (3.4)$$

Зверніть увагу, що рівняння (3.2) тепер тільки формально є справедливим, оскільки не існує координатного представлення у деформованому просторі з мінімальною довжиною.

## 3.3 Задача про частинку в дельта-ямі і мінімальна довжина

У недеформованому випадку притягальний дельта-потенціал в координатному представленні

$$V(x)=-2\pi\hbar U_0\delta(x) \qquad (3.5)$$

відповідає постійному потенціалу в імпульсному просторі відповідно до (3.2)

$$U(p-p')=-U_0. \qquad (3.6)$$

Ми припускаємо, що у випадку деформації дельта-потенціал, як і в недеформованому випадку, виражається постійним потенціалом в імпульсному просторі. Тоді рівняння Шредингера запишеться

$$\frac{1}{2m\beta}\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\beta}p\right)\phi(p)-U_0\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}\phi(p')dp'=E\phi(p). \qquad (3.7)$$

Розв'язок рівняння (3.7) можна легко отримати

$$\phi(p)=\frac{2m\beta U_0\tilde{\varphi}}{\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\beta}p\right)+\beta q^2}. \qquad (3.8)$$

Тут ми використали позначення

$$\tilde{\varphi} = \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} \phi(p')dp', \tag{3.9}$$

та

$$q = \sqrt{-2mE}. \tag{3.10}$$

Інтегруючи (3.8) за змінною $p$ в проміжку $[-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}, \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}]$, ми отримаємо

$$q(1 + \sqrt{\beta}q) = 2\pi m U_0, \tag{3.11}$$

звідки знаходимо

$$q = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\pi m U_0 \sqrt{\beta}}}{2\sqrt{\beta}}. \tag{3.12}$$

Тут ми опускаємо інший корінь квадратного рівняння, оскільки він є від'ємним, тоді як параметр $q$ згідно означення може приймати тільки додатні величини. Енерґетичний спектр, як і в недеформованому випадку, складається з одного енерґетичного рівня.

$$E = -\frac{1 + 4\pi m U_0 \sqrt{\beta} - \sqrt{1 + 8\pi m U_0 \sqrt{\beta}}}{4m\beta}. \tag{3.13}$$

Для малих $\beta$ енерґетичний спектр може бути наближено записаний як

$$E = -2\pi^2 m U_0^2 + 8\pi^3 m^2 U_0^3 \sqrt{\beta} - 40\pi^4 m^3 U_0^4 \beta + o(\beta^{3/2}). \tag{3.14}$$

Відповідні нормовані хвильові функції є

$$\phi(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\beta(1 + \sqrt{\beta}q)}{\sqrt{1 + 2\sqrt{\beta}q}}} \frac{q^{3/2}}{\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\beta}p\right) + \beta q^2}. \tag{3.15}$$

У границі $\beta \to 0$ енерґія $E$ та відповідна хвильова функція прямують до відомого результату в недеформованому просторі.

Зауважимо, що ця проблема розглядалася також в лінійному наближенні за параметром деформації в [101]. Вираз для енерґетичного спектра, отриманого в [101] має інші множники перед $\sqrt{\beta}$ та $\beta$ в порівнянні з (3.14). Причиною такої невідповідності результатів є той факт, що в роботі [101] діапазон зміни параметра $p$ помилково вважався $(-\infty, \infty)$ замість $(-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}, \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}})$.

## 3.4 Подвійна дельта-яма

Частинка поміщена в два однакових, симетрично віддалених від початку координат на відстань $a$, притягальних дельта-потенціали володіє такою потенціальною енерґією

$$V(x) = -\pi\hbar U_0 \left(\delta(x-a) + \delta(x+a)\right). \tag{3.16}$$

Цій задачі відповідно до (3.2) відповідає гармонічний потенціал в імпульсному представленні

$$U(p-p') = -U_0 \cos\left(\alpha(p-p')\right), \tag{3.17}$$

де $\alpha = a/\hbar$.

Ми знову припускаємо, що в деформованому просторі задачі про частинку в подвійній дельта-ямі також відповідатиме гармонічний потенціал в імпульсному представленні. Тому рівняння Шрединґера для цієї задачі запишеться

$$\frac{1}{2m\beta}\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\beta}p\right)\phi(p) - U_0\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} \cos(\alpha(p-p'))\phi(p')dp' = E\phi(p). \tag{3.18}$$

Змінюючи $p$ на $-p$ в рівнянні (3.18) ми можемо показати, що оператор Гамільтона комутує з оператором інверсії. Тому гамільтоніан і оператор інверсії мають спільну систему власних функцій. Таким чином, власні функції розглядуваної системи можуть бути вибрані як парні та непарні по змінній $p$ функції.

Рівняння (3.18) може бути записаним як

$$\phi(p) = \frac{m\beta U_0}{\mathrm{tg}^2\sqrt{\beta}p + \beta q^2}\left(\tilde{\varphi}_- e^{i\alpha p} + \tilde{\varphi}_+ e^{-i\alpha p}\right), \tag{3.19}$$

де $q = \sqrt{-2mE}$ та

$$\tilde{\varphi}_\pm = \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} e^{\pm i\alpha p'}\phi(p')dp'. \tag{3.20}$$

Підставляючи (3.19) в рівняння (3.20), ми отримаємо

$$\tilde{\varphi}_- = m\beta U_0\left(\tilde{\varphi}_- g(0) + \tilde{\varphi}_+ g(\alpha)\right),$$

$$\tilde{\varphi}_+ = m\beta U_0\left(\tilde{\varphi}_- g(\alpha) + \tilde{\varphi}_+ g(0)\right). \tag{3.21}$$

Тут ми використали наступне позначення

$$g(\alpha) = \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} \frac{\cos 2\alpha p}{\mathrm{tg}^2\sqrt{\beta}p + \beta q^2}dp. \tag{3.22}$$

Оскільки власні функції розглядуваної системи можуть бути вибрані як парні та непарні по змінній $p$ функції, ми вимагатимемо, щоб константи $\tilde{\varphi}_\pm$ задовольняли таку рівність

$$\tilde{\varphi}_+ = \pm\tilde{\varphi}_-, \tag{3.23}$$

з верхнім знаком для парних та нижнім для непарних власних функцій. Підставляючи (3.23) в (3.19), ми отримаємо власні функції системи у вигляді

$$\phi_{even}(p) = \frac{A}{\mathrm{tg}^2\sqrt{\beta}p + \beta q^2}\cos\alpha p, \tag{3.24}$$

$$\phi_{odd}(p) = \frac{B}{\mathrm{tg}^2\sqrt{\beta}p + \beta q^2}\sin\alpha p. \tag{3.25}$$

А підставляючи (3.23) в (3.21), ми отримаємо рівняння на енерґетичний спектр

$$\frac{1}{\beta m U_0} - g(0) = \pm g(\alpha). \tag{3.26}$$

Нам не вдалося отримати аналітичний вираз для інтегралу $g(\alpha)$ в загальному вигляді. Але для деяких спеціальних значень параметра $\alpha$ ми отримали

$$g(0) = \frac{\pi}{\beta q(1+\sqrt{\beta}q)}, \tag{3.27}$$

$$g(\sqrt{\beta}n) = \frac{\pi(1-\sqrt{\beta}q)^{n-1}}{\beta q(1+\sqrt{\beta}q)^{n+1}}, \tag{3.28}$$

з $n = 1, 2, \ldots$. Таким чином, якщо відстань між дельта-ямами є $2a = 2n\hbar\sqrt{\beta}$, рівняння на енерґетичний спектр запишеться

$$\frac{1}{mU_0} - \frac{\pi}{q(1+\sqrt{\beta}q)} = \pm\frac{\pi(1-\sqrt{\beta}q)^{n-1}}{q(1+\sqrt{\beta}q)^{n+1}}. \tag{3.29}$$

В границі $\beta \to 0$, зберігаючи відстань між ямами сталою, рівняння на енерґетичний спектр (3.29) зводиться до відомого недеформованого рівняння [102]

$$q = \pi m U_0 \left(1 \pm e^{-\frac{2qa}{\hbar}}\right). \tag{3.30}$$

Зауважимо, що в границі $a \to 0$ ми отримаємо результати отримані в попередньому розділі для дельта потенціалу.

## 3.5 Одновимірна задача Кеплера

В недеформованому просторі рівняння Шредингера для одновимірної задачі Кеплера має вигляд

$$\frac{\hat{p}^2}{2m}\psi(x) - \frac{\alpha}{\hat{x}}\psi(x) = E\psi(x). \tag{3.31}$$

Ми пропонуємо означення для оператора $1/\hat{x}$ в такій формі

$$\frac{1}{\hat{x}} = v.p.\frac{1}{x} + A\pi\delta(x), \tag{3.32}$$

де $A$ - дійсна стала. Таке означення оператора оберненого до оператора координати відповідає наступній границі

$$\frac{1}{\hat{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x+\varepsilon A}{x^2+\varepsilon^2}. \tag{3.33}$$

Зауважимо, що оператор (4.17) є ермітовим, а також є двостороннім оберненим для оператора координати

$$\frac{1}{\hat{x}}\hat{x} = \hat{x}\frac{1}{\hat{x}} = 1. \tag{3.34}$$

Ядро оператора потенціальної енерґії $\hat{V}(x) = -\alpha\hat{x}^{-1}$ в імпульсному представленні має вигляд

$$U(p-p') = -\frac{\alpha}{2\hbar}(2i\theta(p'-p) - i + A). \tag{3.35}$$

Ми традиційно припускаємо, що це ядро залишається незмінним і в деформованому просторі, що дозволяє записати рівняння Шредингера для одновимірної задачі Кулона в деформованому просторі з мінімальною довжиною

$$\frac{1}{2m\beta}\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\beta}p\right)\phi(p) - \frac{\alpha}{2\hbar}\left[(i+A)\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}\phi(p')dp'\right.$$
$$\left. - 2i\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{p}\phi(p')dp'\right] = E\phi(p). \tag{3.36}$$

Диференціюючи це інтегральне рівняння за змінною $p$, ми отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{1}{2m\beta}\left(\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\beta}p\right)\phi(p)\right)' + \frac{i\alpha}{\hbar}\phi(p) = E\phi'(p), \tag{3.37}$$

розв'язком якого є

$$\phi(p) = \frac{C}{\mathrm{tg}^2(\sqrt{\beta}p) + \beta q^2} \times \tag{3.38}$$

$$\exp\left(-\frac{i\alpha_0}{\sqrt{\beta}(1-\beta q^2)}\left[\frac{1}{\sqrt{\beta}q}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}(\sqrt{\beta}p)}{\sqrt{\beta}q} - \sqrt{\beta}p\right]\right).$$

Тут константа нормування $C$ є

$$C = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta(1+\sqrt{\beta}q)q^{3/2}}{\sqrt{1+2\sqrt{\beta}q}}. \tag{3.39}$$

Ми також використали позначення $\alpha_0 = \frac{2m\beta\alpha}{\hbar}$ та $q = \sqrt{-2mE}$.

З рівняння (3.36) ми можемо записати означення оператора $1/\hat{X}$ в деформованому випадку

$$\frac{1}{\hat{X}}\phi(p) = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{p}\phi(p')dp' + c[\phi], \tag{3.40}$$

де $c[\phi]$ позначає такий функціонал

$$c[\phi] = \frac{i+A}{2\hbar}\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}\phi(p')dp'. \tag{3.41}$$

Наше означення забезпечує ермітовість оператора $1/\hat{X}$ та узгоджується з означенням запропонованим в роботі [56], але в нашій роботі ми отримали конкретний вигляд функціоналу $c[\phi]$, тоді як в [56] це питання не розглядалося. Цікаво, що для власних функцій (3.38) виконується така рівність

$$\frac{1}{\hat{X}}\hat{X}\phi(p) = \hat{X}\frac{1}{\hat{X}}\phi(p) = \phi(p). \tag{3.42}$$

Доведемо це. В імпульсному представленні оператор координати має такий вигляд $\hat{X} = i\hbar\frac{d}{dp}$. Використовуючи означення оператора $1/\hat{X}$, яке задається формулою (3.40) , ми знаходимо, що $\hat{X}\frac{1}{\hat{X}}\phi(p)=\phi(p)$. Зауважимо, що константа $A$ зникає внаслідок диференціювання за змінною $p$. Для $\frac{1}{\hat{X}}\hat{X}\phi(p)$ ми отримаємо

$$\frac{1}{\hat{X}}\hat{X}\phi(p)=\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{p}\frac{d\phi(p')}{dp'}dp'+\frac{iA-1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}\frac{d\phi(p')}{dp'}dp'=$$

$$\phi(p)-\phi\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\right)+\frac{iA-1}{2}\left(\phi\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\right)-\phi\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\right)\right). \quad (3.43)$$

Враховуючи в останній формулі те, що $\phi(\pm\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}})=0$, ми знайдемо $\frac{1}{\hat{X}}\hat{X}\phi(p)=\phi(p)$. Константа $A$ зникає через множення на нуль. Таким чином, рівняння (3.42) виконується. Отже, задача про знаходження оберненого оператора до оператора координати в деформованому просторі з мінімальною довжиною є розв'язаною.

Інтеграли з рівняння (4.55) можна обчислити. Отримаємо

$$\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}\phi(p')dp'=\frac{2C}{\alpha_0}\sin\varphi_0, \quad (3.44)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{p}\phi(p')dp'=\frac{iC}{\alpha_0}\left(\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\beta}p\right)\phi(p)-e^{i\varphi_0}\right), \quad (3.45)$$

де $\varphi_0=\frac{\pi\alpha_0}{2\beta q(1+\sqrt{\beta}q)}$. Підставляючи отримані результати в рівняння (4.55), ми знаходимо

$$\sin(\varphi_0-\delta\pi)=0, \quad (3.46)$$

або

$$\frac{m\alpha}{\hbar q(1+\sqrt{\beta}q)}=n+\delta, \quad n=0,1,2..., \quad (3.47)$$

де

$$\delta=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arccot}\,A, \quad 0\leq\delta\leq 1. \quad (3.48)$$

Граничні значення $\delta = 0$ та $\delta = 1$ досягаються в границі $A \to +\infty$ та $A \to -\infty$ відповідно. Енергетичний спектр одновимірної задачі Кулона записується

$$E_n = -\frac{1}{8m\beta}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m\alpha}{\hbar(n+\delta)}\sqrt{\beta}}\right). \tag{3.49}$$

Спрямовуючи $\delta$ до нуля для $n = 0$, ми отримаємо, що енерґія прямує до $-\infty$ і відповідна власна функція зникає всюди. Це означає, що для $\delta = 0$ квантове число $n = 1, 2, \ldots$ і енерґетичні спектри для $\delta = 0$ та $\delta = 1$ співпадають. Таким чином, ми отримали сім'ю спектрів, що є такими ж як ті, що представлені в [56]. Кожен з цих спектрів характеризується значенням параметра $\delta$ чи еквівалентно $A$. Значення згаданих параметрів можуть бути отримані з результатів експерименту.

Для того, щоб пояснити, що відбувається в границі $\beta \to 0$, розглянемо значення власної функції в координатному представленні в початку координат. Отже, для $\psi_n(x)$, що відповідає $E_n$, в початку координат ми маємо

$$\psi_n(x)|_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} \phi_n(p')dp' = \frac{\sqrt{2}C}{\alpha_0\sqrt{\pi\hbar}}\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+A^2}}. \tag{3.50}$$

В границі $\beta \to 0$ значення хвильової функції $\psi_n(x)$ в початку координат може бути записаним наступним чином

$$\psi_n(x)\,|_{\substack{x=0\\ \beta=0}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(p')dp' = \frac{\sqrt{\hbar m}}{\pi}\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+A^2}}\left(\frac{\alpha}{\hbar(n+\delta)}\right)^{3/2} \tag{3.51}$$

Остання формула дає зв'язок константи $A$ зі значенням хвильової функції в початку координат. Отже, значення константи $A$ визначається значенням власної функції в координатному представленні в початку координат. Найчастіше вважається, що в недеформованому просторі $\psi_n(x)$ рівна нулю в початку координат, що відповідає границі $A$ до нескінченості. В такій границі значення функціоналу $c[\phi_n(p)]$ є скінченим

$$\lim_{A\to\infty} c[\phi_n(p)] = \frac{(-1)^n\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\alpha}{\hbar n}\right)^{3/2}. \tag{3.52}$$

Зауважимо, що цей результат узгоджується з тими, що отримані в роботі [103].

Крім того, що наш результат для енерґетичного спектра збігається з отриманим в [56], він також узгоджується з результатом, отриманим в [57], де розглядалося інше означення оператора $1/\hat{X}$ . Однак наш результат для спектру не збігається з результатом отриманим в [104] з використанням інтегралів за траєкторіями.

## 3.6 Висновок

У даній роботі ми вивчали рівняння Шредингера в імпульсному представленні в деформованому просторі з мінімальною довжиною. Припустивши, що ядро потенціальної енерґії не змінюється у випадку деформованого комутаційного співвідношення, ми розглянули одновимірні задачі про частинку в дельта-ямі, подвійній дельта-яма та кулонівському потенціалі в деформованому просторі з мінімальною довжиною.

У випадку дельта-потенціалу Дірака ми отримали, що система має один зв'язаний стан так само, як і в недеформованому просторі. Ця система має цікаву властивість в деформованому просторі. А саме, перша поправка до рівня енерґії пропорційна $\sqrt{\beta}$, що робить її досить чутливою до деформації простору. Для раніше розв'язаних задач отримано поправки пропорційні $\beta$ для гармонічного осцилятора, $\beta$ або $\beta \ln \beta$ ($s$ - стани) для атома водню та $\sqrt{\beta}$ для $1D$ потенціалу $1/X$. Цей факт також дає нову можливість отримати відповідь на питання про існування мінімальної довжини для меншого параметра деформації.

У випадку подвійної дельта-ями ми отримали хвильові функції і рівняння для енерґетичних рівнів. У границі параметра деформації до нуля наш результат збігається з добре відомими результатами в недеформованому просторі . Спрямовуючи відстань між дельта-ямами до нуля, отримаємо результат для однієї дельта-ями.

Ми також запропонували означення оберненого для оператора координати $1/\hat{X}$ у вигляді, який забезпечує ермітовість оператора та виконання умови

$$\frac{1}{\hat{X}}\hat{X} = \hat{X}\frac{1}{\hat{X}} = 1. \tag{3.53}$$

Наше визначення оператора $1/\hat{X}$ містить один довільний дійсний параметр. Це означає, що існують різні розширення оператора $1/\hat{X}$. Ми отримуємо те ж сімейство спектрів для частинки в одновимірному кулонівському потенціалі $1/\hat{X}$, як в роботі [56]. Кожен спектр характеризується значенням вільного параметра. Різні значення цього параметра відповідають різним розширенням оператора $1/\hat{X}$.

# Розділ 4

# Одновимірна задача Кулона у загальному випадку деформованого простору з мінімальною довжиною

## 4.1 Вступ

В цьому розділі ми розглядаємо одновимірну задачу Кулона

$$\frac{\hat{P}^2}{2m}\psi - \frac{\alpha}{\hat{X}}\psi = E\psi \tag{4.1}$$

в загальному випадку деформації одновимірної алґебри Гайзенберґа, коли права її частина є деякою функцією імпульсу. В роботі [40] знайдено відповідь на питання існування мінімальної довжини в загальному випадку деформації. Тому, використовуючи результати [40], ми можемо розглядати тільки такі функції деформації, що призводять до мінімальної довжини.

Потенціал $-\alpha/\hat{X}$ може мати застосування в дослідженнях масового спектру мезонів в підході осциляторів Дірака [105], а також у фізиці напівпровідників та діелектриків [106]. Тому, одновимірне рівняння Шредингера з потенціалом Кулона вивчалось у недеформованій квантовій механіці і точні розв'язки цієї задачі вже отримано [103, 105, 106].

Як ми вже згадували, знаходження розв'язку одновимірної задачі Кулона, як і інших квантовомеханічних задач з сингулярними потенціалами, в деформованому просторі не є тривіальним завданням, оскільки деформація комутаційних співвідношень вносить труднощі в означення оператора $1/\hat{X}$. В статтях [56, 57, 107] автори презентують означення оператора $1/\hat{X}$ для окремих випадків деформованого простору, яке задовольняє

$$\hat{X}\frac{1}{\hat{X}} = 1 \neq \frac{1}{\hat{X}}\hat{X}. \tag{4.2}$$

Тому, оператор $1/\hat{X}$ з [56, 57, 107] є всього лиш правим оберненим і, отже, не задовольняє умов двосторонньої оберненості. Більше того, оператор $1/\hat{X}$, що запропонований в статтях [57, 107] має іншу особливість, а саме є нелінійним. Тому, проблема означення лінійного та двостороннього оберненого оператора $1/\hat{X}$ є відкритою в деформованому просторі з мінімальною довжиною. В нашій попередній роботі в деформованому просторі, запропонованому Кемпфом, ми представили означення оператора $1/\hat{X}$, який є лінійним двостороннім оберненим оператора координати. Це означення було отримане з узагальнення рівняння Шредингера для одновимірної задачі Кулона на випадок деформованого простору з мінімальною довжиною. В цьому розділі ми розглядаємо загальний випадок деформації і пропонуємо означення лінійного та двостороннього оберненого оператора до оператора координати. Це означення основане на функціональному аналізі оператора координати. Використовуючи це означення ми отримали точно енерґетичний спектр та хвильові функції одновимірної задачі Кулона в загальному випадку деформованої алґебри Гайзенберґа.

## 4.2 Деформовані алґебри та мінімальна довжина

Розглянемо модифіковану одновимірну алґебру Гайзенберґа, утворену ермітовими операторами координати $\hat{X}$ та імпульсу $\hat{P}$, що задовольняють наступне комутаційне співвідношення

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar f(\hat{P}), \tag{4.3}$$

де $f$ називають функцією деформації. Ми припускаємо, що ця функція є строго додатною ($f > 0$), парною функцією. Оператори координати та імпульсу в імпульсному представленні діють на квадратично інтегровну функцію $\phi(P) \in L^2(-a, a; f), (a \leq \infty)$ як

$$\hat{P}\phi(P) = P\phi(P), \tag{4.4}$$

$$\hat{X}\phi(P) = i\hbar f(P)\frac{d}{dP}\phi(P). \tag{4.5}$$

Скалярний добуток в гільбертовому просторі станів визначений наступним чином

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int_{-a}^{a} \frac{dP}{f(P)}\psi^*(P)\phi(P). \tag{4.6}$$

З таким означенням скалярного добутку оператори $\hat{X}$ та $\hat{P}$ є ермітовими. Як було показано в [40] мінімальна невизначеність координати для функції деформації $f(P)$ запишеться

$$l_0 = \frac{\pi\hbar}{2}\left(\int_0^a \frac{dP}{f(P)}\right)^{-1}. \tag{4.7}$$

Тож, якщо згаданий інтеграл є скінченний, то мінімальна довжина є ненульовою, а коли інтеграл розбігається, то мінімальна довжина рівна нулеві.

Можна розглянути й інше представлення для алґебри (4.3), що залишає оператор координати недеформованим

$$\hat{P}\varphi(p) = g(p)\varphi(p), \tag{4.8}$$

$$\hat{X}\varphi(p) = i\hbar\frac{d}{dp}\varphi(p).$$

З того факту, що оператори $\hat{X}$ та $\hat{P}$, записані в представленні (4.8), мають задовольняти комутаційне співвідношення (4.3), ми отримаємо наступне диференціальне рівняння для $g(p)$

$$\frac{dg(p)}{dp} = f(P), \tag{4.9}$$

де $P = g(p)$. Розв'язуючи останнє рівняння, запишемо вираз для $g^{-1}(P)$, що позначає обернену функцію до $g(p)$ як

$$g^{-1}(P) = \int_0^P \frac{dP'}{f(P')}. \tag{4.10}$$

Функція $g(p)$ є непарною функцією, яка означена на проміжку $[-b, b]$, де $b = g^{-1}(a)$. Використовуючи (4.10) ми запишемо для $b$ наступний вираз

$$b = \int_0^a \frac{dP}{f(P)} \leq \infty. \tag{4.11}$$

Оператори координати та імпульсу в представленні (4.3) діє на квадратично інтегровну функцію $\varphi(p) \in L^2(-b, b), (b \leq \infty)$. Скалярний добуток в цьому представленні заданий як

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-b}^{b} dp\psi^*(p)\varphi(p). \tag{4.12}$$

В представленні (4.8) рівняння (4.7) може бути записане як

$$l_0 = \frac{\pi\hbar}{2b}. \tag{4.13}$$

Таким чином, якщо $b < \infty$, то існує ненульова мінімальна довжина, а коли $b = \infty$, то мінімальна довжина рівна нулю.

## 4.3 Означення оператора $1/\hat{X}$ в загальному випадку деформованого простору

Для того щоб означити оператор $1/\hat{X}$ в загальному випадку деформованої алґебри Гайзенберґа з мінімальною довжиною, розглянемо спочатку одновимірне рівняння Шредінґера для потенціалу Кулона

$$\hat{V} = -\frac{\alpha}{\hat{x}}, \alpha > 0 \tag{4.14}$$

в звичайній квантовій механіці ($f(\hat{P}) = 1$). В імпульсному представленні рівняння Шредінґера розглядуваної проблеми може бути записаним як наступне інтегральне рівняння

$$\frac{p^2}{2m}\phi(p) + \int_{-\infty}^{\infty} U(p-p')\phi(p')dp' = E\phi(p), \tag{4.15}$$

де

$$U(p-p') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} V(x)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}(p-p')x\right)dx \tag{4.16}$$

є ядром оператора потенціальної енерґії, а $V(x)$ — оператор потенціальної енерґії (4.14) в координатному представленні. Оператор $1/\hat{x}$ в координатному представленні може бути означений в наступному вигляді

$$\frac{1}{\hat{x}} = v.p.\frac{1}{x} + A\pi\delta(x), \tag{4.17}$$

де $A$ позначає дійсну сталу. Це означення оператора $1/\hat{x}$ відповідає границі

$$\frac{1}{\hat{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x+\varepsilon A}{x^2+\varepsilon^2}. \tag{4.18}$$

Зауважимо, що оператор (4.17) задовольняє умови двосторонньої оберненості, а саме

$$\frac{1}{\hat{x}}\hat{x} = \hat{x}\frac{1}{\hat{x}} = 1. \tag{4.19}$$

Легко бачити, що оператор $1/\hat{x}$ є ермітовим. Використовуючи (4.17), ми можемо отримати ядро оператора потенціальної енерґії в імпульсному представленні (4.16) у вигляді

$$U(p - p') = -\frac{\alpha}{2\hbar}(2i\theta(p' - p) - i + A), \tag{4.20}$$

де $\theta(p' - p)$ позначає функцію Хевісайда. Використовуючи вираз для ядра (4.20), ми можемо записати дію оберненого оператора координати на хвильову функцію $\phi(p)$ в імпульсному представленні як

$$\frac{1}{\hat{x}}\phi(p) = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{p}\phi(p')dp' + \frac{i + A}{2\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(p')dp'. \tag{4.21}$$

Рівняння Шредингера в загальному випадку деформованого простору в представленні (4.8) запишеться

$$\frac{1}{2m}g(p)^2\phi(p) + \int_{-b}^{b}U(p - p')\phi(p')dp' = E\phi(p). \tag{4.22}$$

Ми припускаємо, що ядро оператора потенціальної енерґії залишається незмінним в деформованому просторі. Це означає, що оператор $1/\hat{X}$ записується

$$\frac{1}{\hat{X}}\phi(p) = -\frac{i}{\hbar}\int_{-b}^{p}\phi(p')dp' + \frac{i + A}{2\hbar}\int_{-b}^{b}\phi(p')dp'. \tag{4.23}$$

Згідно цього означення, оператор $1/\hat{X}$ є лінійним, а також в границі $b \to \infty$ збігається з відповідним виразом для недеформованого випадку(4.21). Таким чином, рівняння Шредингера для одновимірної задачі Кулона в деформованому просторі з мінімальною довжиною записується

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}g(p)^2\phi(p) &- \frac{\alpha}{2\hbar}\left[(i+A)\int_{-b}^{b}\phi(p')dp\right.\\ &- \left. 2i\int_{-b}^{p}\phi(p')dp'\right] = E\phi(p). \qquad (4.24)\end{aligned}$$

Важливо зазначити, що означення оператора (4.23) може бути отриманим з функціонального аналізу оператора координати. Покажемо це. Розглянемо задачу на власні функції та власні значення для оператора координати в представленні (4.8)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\psi_\lambda(p) = \lambda\psi_\lambda(p). \qquad (4.25)$$

Розв'язком цього рівняння є

$$\psi_\lambda(p) = \frac{1}{\sqrt{2b}}e^{-i\frac{\lambda}{\hbar}p}, \qquad (4.26)$$

з дійсним власним значенням $\lambda$.

Зауважимо, що власні стани оператора координати є нефізичними, тому що вони не задовольняють узагальненому принципу невизначеності, що слідує з (4.3). Скалярний добуток двох власних функцій оператора координати запишеться

$$\begin{aligned}\langle\Psi_\lambda|\Psi_{\lambda'}\rangle &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi}\int_{-b}^{+b}dp e^{-i\frac{\lambda-\lambda'}{\hbar}p} \qquad (4.27)\\ &= \frac{\hbar}{b(\lambda-\lambda')}\sin\left(\frac{(\lambda-\lambda')b}{\hbar}\right).\end{aligned}$$

Розглянемо підмножини координатних власних станів

$$\{\psi_{\lambda_{n,\delta}}(p), n\in Z\}, \qquad (4.28)$$

з відповідними власними значеннями $\lambda_{n,\delta} = 2(n+\delta)l_0$. Ці підмножини визначаються параметром $\delta \in [0,1)$. Кожна функція з підмножини задовольняє граничній умові

$$\psi_{\lambda_{n,\delta}}(-b) = e^{2i\pi\delta}\psi_{\lambda_{n,\delta}}(b). \tag{4.29}$$

З (4.27) ми бачимо, що власні функції з підмножини (4.28) є взаємно ортогональними

$$\langle\psi_{\lambda_{n,\delta}}(p)|\psi_{\lambda_{n,\delta}}(p)\rangle = \delta_{m,n}. \tag{4.30}$$

Можна також показати, що кожна з цих підможин є повною. Таке доведення еквівалентне до доведення наступної рівності

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi^*_{\lambda_{n,\delta}}(p')\psi_{\lambda_{n,\delta}}(p) = \delta(p-p'), \tag{4.31}$$

яка виконується. Оператор $\hat{X}$ є лише ермітовим, але не самоспряженим оператором, тому що області визначення операторів

$$D(\hat{X}) = \left\{\psi(p), \psi'(p) \in L^2\left(-b,b\right),\ \psi\left(-b\right) = \psi(b) = 0\right\} \tag{4.32}$$

та

$$D(\hat{X}^+) = \left\{\psi(p), \psi'(p) \in L^2\left(-b,b\right)\right\} \tag{4.33}$$

є різними. Індекси дефекту $(n_+, n_-)$ оператора координати є (1,1). Відповідно до теореми фон Неймана для самоспряжених розширень ермітового оператора це означає, що існує однопараметрична сім'я самоспряжених розширень оператора координати. Кожне розширення може бути представлене через відповідні підмножини власних станів оператора координати як

$$\hat{X}_\delta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\psi_{\lambda_{n,\delta}}\rangle\lambda_{n,\delta}\langle\psi_{\lambda_{n,\delta}}|. \tag{4.34}$$

Оператор $\hat{X}_\delta = i\hbar\frac{d}{dp}$ діє на щільній області визначення

$$D(\hat{X}_\delta) = \left\{\psi(p), \psi'(p) \in L^2\left(-b, b\right),\ \psi\left(-b\right) = e^{2i\pi\delta}\psi(b)\right\}. \tag{4.35}$$

Означимо обернений оператор до оператора $\hat{X}_\delta$ як

$$\frac{1}{\hat{X}_\delta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\psi_{\lambda_{n,\delta}}\rangle \frac{1}{\lambda_{n,\delta}} \langle\psi_{\lambda_{n,\delta}}|. \tag{4.36}$$

Таке означення забезпечує виконання умови двосторонньої оберненості

$$\frac{1}{\hat{X}_\delta}\hat{X}_\delta = \hat{X}_\delta\frac{1}{\hat{X}_\delta} = 1. \tag{4.37}$$

З цього означення (4.36) ми бачимо, що оператор $1/\hat{X}_\delta$ є ермітовим, тому що

$$\langle\psi|\frac{1}{\hat{X}_\delta}\phi\rangle = \langle\frac{1}{\hat{X}_\delta}\psi|\phi\rangle \tag{4.38}$$

і він є самоспряженим, бо його індекси дефекту є $(0, 0)$. Найцікавішим є той факт, що дія оператора (4.36) на довільну функцію $\phi(p)$ з його області визначення може бути записаною як

$$\frac{1}{\hat{X}_\delta}\phi(p) = -\frac{i}{\hbar}\int_{-b}^{p}\phi(p')dp' + c_\delta[\phi], \tag{4.39}$$

де $c_\delta[\phi]$ позначає такий функціонал

$$c_\delta[\phi] = \frac{i + \cot(\pi\delta)}{2\hbar}\int_{-b}^{b}\phi(p')dp'. \tag{4.40}$$

Останній вираз для оператора $1/\hat{X}_\delta$ збігається з (4.23), де $A = \cot(\pi\delta)$, $\delta \in [0, 1)$. Як можна бачити з (4.36), в границі $A$ до $+\infty$, чи відповідно $\delta$ до 0, ми отримуємо таке ж означення оператора $1/\hat{X}$ як і в границі $A$ до $-\infty$, чи $\delta$ до 1.

Таким чином, кожне самоспряжене розширення оператора координати, що визначається параметром $\delta \in [0, 1)$, має свій самоспряжений оператор $1/\hat{X}_\delta$. Тому, ми можемо розглянути множину самоспряжених гамільтоніанів

$$\hat{H}_\delta = \frac{\hat{P}^2}{2m} - \frac{\alpha}{\hat{X}_\delta}, \tag{4.41}$$

що нумерується параметром $\delta$.

## 4.4 Виведення виразу для оператора $1/\hat{X}_\delta$

Доведемо, що означення оберненого до оператора координати (4.36) може бути представлена як (4.39). З виразу (4.36) ми бачимо, що дія оберненого до оператора координати $1/\hat{X}_\delta$ на довільну функцію, що належить до його області визначення може бути представлена як

$$\frac{1}{\hat{X}_\delta}\phi(p) = \int_{-b}^{b} dp'\phi(p')K(p, p'). \tag{4.42}$$

де

$$K(p, p') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_{\lambda_{n,\delta}}(p)\frac{1}{\lambda_{n,\delta}}\psi^*_{\lambda_{n,\delta}}(p') \tag{4.43}$$

є ядром оператора (4.36). Обчислимо ядро $K(p, p')$. Підставляючи вираз для власних функцій $\psi_{\lambda_{n,\delta}}$ та власних значень $\lambda_{n,\delta}$ у (4.43), ми запишемо

$$K(p, p') = \frac{1}{2\pi\hbar}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\pi(n+\delta)(p'-p)/b}}{n+\delta}. \tag{4.44}$$

Вираз під знаком суми може бути представлений як

$$\frac{e^{-i\pi(n+\delta)(p-p')/b}}{n+\delta} = -\frac{i\pi}{b}\int_{-b}^{p} e^{-i\pi(n+\delta)(p''-p')/b}dp'' - \frac{e^{i\pi(n+\delta)(b+p')/b}}{n+\delta}. \tag{4.45}$$

Якщо в останній вираз підставити наступну рівність

$$\frac{e^{i\pi(n+\delta)}}{n+\delta} = -\frac{\pi(i+\cot\pi\delta)}{2b}\int_{-b}^{b} e^{-i\pi(n+\delta)p''/b}dp'', \tag{4.46}$$

то в результаті отримаємо

$$\frac{e^{-i\pi(n+\delta)(p-p')/b}}{2\pi\hbar(n+\delta)} = -\frac{i}{2b\hbar}\int_{-b}^{p} e^{-i\pi(n+\delta)(p''-p')/b}dp''$$

$$+\frac{(i+\cot\pi\delta)}{4b\hbar}\int_{-b}^{b} e^{-i\pi(n+\delta)(p''-p')/b}dp''. \tag{4.47}$$

Підставляючи (4.47) в (4.44) і використовуючи наступне представлення для дельта функції Дірака

$$\frac{1}{2b}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\pi n(p''-p')/b} = \delta(p''-p'), \quad p', p'' \in [-b, b], \tag{4.48}$$

отримаємо

$$K(p,p') = -\frac{i}{\hbar}\int_{-b}^{p} \delta(p''-p')e^{-i\delta\pi(p''-p')/b}dp''$$

$$+\frac{(i+\cot\pi\delta)}{2\hbar}\int_{-b}^{b} \delta(p''-p')e^{-i\delta\pi(p''-p')/b}dp''. \tag{4.49}$$

В першому доданку з (4.49) інтегрування за дельта функцією дає функцію Хевісайда, тоді як інтегрування другому доданку дає одиницю. Остаточно, ядро $K(p,p')$ має вигляд

$$K(p,p') = -\frac{i}{\hbar}\theta(p-p') + \frac{(i+\cot\pi\delta)}{2\hbar} \tag{4.50}$$

Підставляючи вираз для ядра у (4.42), ми легко отримуємо (4.39).

Нарешті, покажемо, що оператор $1/\hat{X}_\delta$, визначений як (4.39), є двостороннім оберненим оператора координати $\hat{X}_\delta = i\hbar d/dp$. Зауважимо, що $\hat{X}_\delta$ визначений на функціях, що належать до області

$$D(\hat{X}_\delta) = \left\{\psi(p), \psi'(p) \in L^2\left(-b, b\right),\ \psi\left(-b\right) = e^{2i\delta\pi}\psi(b)\right\}. \tag{4.51}$$

Очевидно, що співвідношення $\hat{X}_\delta \cdot 1/\hat{X}_\delta = 1$ виконується. Тепер покажемо, що $1/\hat{X}_\delta \cdot \hat{X}_\delta = 1$ виконується. Розглянемо $\phi(p) = \hat{X}_\delta \psi(p)$ і знайдемо $1/\hat{X}_\delta \phi(p)$

$$\frac{1}{\hat{X}_\delta}\phi(p) = \frac{1}{\hat{X}_\delta}\hat{X}_\delta\psi(p) = \int_{-b}^{p} \frac{d\psi(p')}{dp'}dp' + \frac{i\cot(\pi\delta) - 1}{2}\int_{-b}^{b}\frac{d\psi(p')}{dp'}dp'.$$

Інтеграли з останнього рівняння можна легко обчислити. Запишемо

$$\frac{1}{\hat{X}_\delta}\hat{X}_\delta\psi(p) = \psi(p) - \psi(-b) + \frac{i\cot(\pi\delta) - 1}{2}(\psi(b) - \psi(-b)). \quad (4.52)$$

Враховуючи, що

$$\psi\left(-b\right) = e^{2i\pi\delta}\psi(b), \quad (4.53)$$

ми отримаємо

$$\frac{1}{\hat{X}_\delta}\hat{X}_\delta\psi(p) = \psi(p). \quad (4.54)$$

Таким чином, проблема оберненості оператора координати в деформованому просторі з мінімальною довжиною є розв'язаною.

## 4.5 Точний розв'язок задачі Кулона

Розглянемо рівняння Шредингера для гамільтоніану $\hat{H}_\delta$, що задається виразом (4.41), в представленні (4.8)

$$\frac{1}{2m}g(p)^2\phi(p) - \frac{\alpha}{2\hbar}\left[(i + \cot(\pi\delta))\int_{-b}^{b}\phi(p')dp' \right.$$
$$\left. -2i\int_{-b}^{p}\phi(p')dp'\right] = E\phi(p). \quad (4.55)$$

Для зв'язаних станів розглянемо розв'язки з негативною енерґією $E < 0$. Диференціюючи останнє інтегральне рівняння, ми отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{1}{2m}\left(g(p)^2\phi(p)\right)' + \frac{i\alpha}{\hbar}\phi(p) = E\phi'(p), \tag{4.56}$$

розв'язок якого

$$\phi(p) = \frac{C}{g^2(p) + q^2} e^{-i\varphi(p)}. \tag{4.57}$$

Тут константа нормування рівна

$$C = \left(\int_{-b}^{b} \frac{dp'}{(g^2(p') + q^2)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.58}$$

Ми використали позначення $q = \sqrt{-2mE}$ та

$$\varphi(p) = \frac{2m\alpha}{\hbar}\int_0^p \frac{dp'}{g^2(p') + q^2}. \tag{4.59}$$

Власна функція (4.57) є розв'язком рівняння (4.56), але не обов'язково (4.55). Тільки хвильові функції (4.57), що відповідають деяким окремим значенням енерґії $E$, задовольнятимуть рівняння (4.55). Щоб знайти ці енерґії, обчислимо інтеграли з рівняння (4.55). Отримаємо

$$\int_{-b}^{b} \phi(p')dp' = \frac{\hbar C}{m\alpha}\sin\varphi(b), \tag{4.60}$$

$$\int_{-b}^{p} \phi(p')dp' = \frac{i\hbar C}{2m\alpha}\left(e^{-i\varphi(p)} - e^{i\varphi(b)}\right). \tag{4.61}$$

Підставляючи отримані результати (4.57), (4.60) та (4.61) в рівняння (4.55), ми знайдемо

$$\sin(\varphi(b) - \delta\pi) = 0. \tag{4.62}$$

В результаті, енерґетичний спектр може бути знайдений з

$$\frac{2m\alpha}{\hbar}\int_0^b \frac{dp}{g^2(p)+q^2} = \pi(n+\delta), \tag{4.63}$$

де $n = 0, 1, \ldots$. Ця умова в імпульсному представленні може бути записана як

$$\frac{2m\alpha}{\hbar}\int_0^a \frac{dP}{f(P)(P^2+q^2)} = \pi(n+\delta). \tag{4.64}$$

Отож, ми отримали співвідношення (4.63) (чи відповідно (4.64)), що дозволяє отримати точні розв'язки для енерґетичного спектру одновимірної задачі Кулона в загальному вигляді деформованого простору з мінімальною довжиною. З (4.39) ми бачимо, що завдяки параметру $\delta$ є невизначеність в означенні оператора $1/\hat{X}$. Ця неоднозначність з'являється також і в недеформованому випадку і приводить до різних значень в початку координат власних функції задачі Кулона в координатному представленні [103,106]. В границі недеформованої алґебри Гайзенберґа ($b \to \infty$) значення власної функції в координатному представленні в початку координат повязаний з параметром $\delta$

$$\psi_n(x)\Big|_{\substack{x=0\\ b=\infty}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n(p')dp' \sim \sin(\pi\delta). \tag{4.65}$$

Тому, розгляд проблеми в деформованому просторі з мінімальною довжиною дозволяє параметризувати неоднозначність в означенні оператора $1/\hat{X}$ через вибір самоспряженого розширення оператора $\hat{X}$.

Цікаво також дослідити вплив деформованих комутаційних співвідношень на неперервний спектр гамільтоніана $\hat{H}_\delta$. Для цього розглянемо випадок позитивних енерґії $E > 0$ в рівнянні Шрединґера (4.55), оскільки розв'язки для негативних енерґій мають вклад лише в дискретний спектр. Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\phi(p) = \frac{C}{g^2(p) - k^2} e^{-i\varphi(p)}. \tag{4.66}$$

Тут ми використали позначення $k = \sqrt{2mE}$ та

$$\varphi(p) = \frac{2m\alpha}{\hbar} \int_0^p \frac{dp'}{g^2(p') - k^2}. \tag{4.67}$$

Для того щоб бути розв'язком рівняння (4.55), функція $\varphi(p)$ повинна задовольняти

$$\sin(\varphi(b) - \delta\pi) = 0. \tag{4.68}$$

Підінтегральна функція в (4.67) має полюси на дійсній осі, на відміну від випадку розв'язків з негативними енерґіями, де полюси лежать у верхній та нижній півплощинах. Полюсами є $p_k$ та $-p_k$, де $p_k$ позначає розв'язок наступного рівняння

$$g(p_k) = k. \tag{4.69}$$

Тому інтеграл $\varphi(b)$ в (4.68) потрібно переозначити, виключивши полюси з області інтегрування

$$\varphi(b) = \frac{2m\alpha}{\hbar} \lim_{\epsilon_1 \to 0} \int_0^{p_k - \epsilon_1} \frac{dp'}{g^2(p') - k^2} + \frac{2m\alpha}{\hbar} \lim_{\epsilon_2 \to 0} \int_{p_k + \epsilon_2}^{b} \frac{dp'}{g^2(p') - k^2}.$$

В околі полюса $p' = p_k$ функція $g^2(p') - k^2$ веде себе як

$$g^2(p') - k^2 = 2kg'(p_k)(p' - p_k) + O\left((p' - p_k)^2\right). \tag{4.70}$$

Цей факт дозволяє записати для $\varphi(b)$ наступний вираз

$$\varphi(b) = \Phi(b) - \Phi(0) + \frac{m\alpha}{\hbar k g'(p_k)} \lim_{\substack{\epsilon_1 \to 0 \\ \epsilon_2 \to 0}} \ln \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \tag{4.71}$$

де $\Phi(p)$ позначає неозначений інтеграл

$$\Phi(p) = \frac{2m\alpha}{\hbar}\int^{p}\frac{dp'}{g^2(p') - k^2}. \tag{4.72}$$

Тому, $\varphi(b)$ залежить від того, як $\epsilon_1$ та $\epsilon_2$ прямує до нуля. У випадку $\epsilon_1 = \epsilon_2$ інтеграл $\varphi(b)$ записаний в сенсі головного значення, але в загальному він може бути рівним довільній сталі. Ця додаткова ступінь свободи усуває обмеження на енерґетичний спектр (4.68). Тому, неперервний спектр, подібно як і в недеформованому просторі, утворений усіма додатними енерґіями $E > 0$, що дозволені алґеброю (4.3). Детальний аналіз цієї проблеми в контексті задачі тунелювання через кулонівський потенціал заслуговує окремого дослідження.

Нарешті, ми зробимо кілька ремарок стосовно симетрійних властивостей гамільтоніану $\hat{H}_\delta$. Можна показати, що оператор інверсії $\hat{I}\phi(p) = \phi(-p)$ задовольняє наступну умову

$$\hat{I}\hat{X}_{1-\delta} + \hat{X}_\delta\hat{I} = 0. \tag{4.73}$$

Природно вимагати, що інверсія рівняння Шредингера (4.55) не змінює енерґетичного спектру розглядуваної проблеми. Ця вимога означає, що оператор $\hat{H}_\delta$ та

$$\hat{I}\hat{H}_\delta\hat{I} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{\alpha}{\hat{X}_{1-\delta}} \tag{4.74}$$

мають однаковий спектр. Легко показати, що останнє твердження виконується.

## 4.6 Енергетичний спектр одновимірної задачі Кулона для різних типів деформації

Ми отримали енерґетичний спектр одновимірної задачі Кулона для деяких окремих прикладів функції деформації $f(P), P \in [-a, a]$.

**Приклад 1.** Розглянемо наступну функцію деформації

$$f(P) = (1 + \beta P^2)^k, \quad P \in (-\infty, \infty). \tag{4.75}$$

В цьому випадку мінімальна довжина існує для $k > 1/2$ (див. [40]). Зауважимо, що у випадку $k = 1$ функція деформації відповідатиме тій, що запропонував Кемпф [35]. Поправка до енерґетичного спектру спричинена деформацією може бути отриманою з наступного співвідношення

$$\frac{\partial q^2}{\partial \beta} = \frac{1}{2\beta} \frac{\int_0^a \frac{(P^2 - q^2)dP}{(P^2+q^2)^2 f(P)}}{\int_0^a \frac{dp}{(P^2+q^2)^2 f(P)}}, \tag{4.76}$$

яке було отримане диференціюванням (4.64) за $\beta$. З (4.76) головна поправка до енерґетичного спектру одновимірної задачі Кулона у випадку функції деформації (4.75) має вигляд

$$\Delta E_n = \frac{2\sqrt{\beta}\Gamma(k + 1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k)} \frac{\alpha^3 m^2}{\hbar^3 (n + \delta)^3}. \tag{4.77}$$

Енергетичний спектр може бути знайдений точно для окремих випадків $k = 1$ та $k = 3/2$. У випадку $k = 1$ функція деформації була запропонована Кемпфом [35] і має вигляд

$$f(P) = 1 + \beta P^2, \quad P \in (-\infty, \infty). \tag{4.78}$$

В цьому випадку з (4.10) та (4.11) ми отримаємо

$$g(p) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \mathrm{tg}(\sqrt{\beta} p), \quad p \in \left[-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}, \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\right]. \tag{4.79}$$

Беручи до уваги (4.63), енерґетичний спектр має вигляд

$$E_n = -\frac{1}{8m\beta}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m\alpha}{\hbar(n+\delta)}\sqrt{\beta}}\right)^2. \tag{4.80}$$

Для малих $\beta$ енерґетичний спектр може бути наближено записаним як

$$E_n = -\frac{\alpha^2 m}{2\hbar^2(n+\delta)^2} + \sqrt{\beta}\frac{\alpha^3 m^2}{\hbar^3(n+\delta)^3} + o(\beta). \tag{4.81}$$

Варто зауважити, що наш результат збігається з відповідним результатом отриманим у [56], де оператор $1/\hat{X}$ був запропонований у вигляді (4.39) без задання виразу для функціоналу $c_\delta[\psi]$. Точний розв'язок для одновимірної задачі Кулона може також бути знайденим у випадку $k = 3/2$, а саме коли функція деформації є

$$f(P) = (1+\beta P^2)^{3/2}, \quad P \in (-\infty, \infty); \tag{4.82}$$

$$g(p) = \frac{p}{\sqrt{1-\beta p^2}}, \quad p \in \left[-\frac{1}{\sqrt{\beta}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right]. \tag{4.83}$$

Використовуючи рівність (4.63), рівняння на енерґетичний спектр запишеться

$$\frac{1}{1-\beta q^2}\left(\frac{1}{q\sqrt{1-\beta q^2}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\beta q^2}}{\sqrt{\beta}q} - \sqrt{\beta}\right) = \frac{\pi\hbar}{\alpha m}(n+\delta). \tag{4.84}$$

Розклад виразу для енерґетичного спектру за малими $\beta$ має вигляд

$$E_n = -\frac{\alpha^2 m}{2\hbar^2(n+\delta)^2} + \frac{4\sqrt{\beta}}{\pi}\frac{\alpha^3 m^2}{\hbar^3(n+\delta)^3} + o(\beta). \tag{4.85}$$

Тож, поправки до енерґетичного спектру спричинені деформацією (4.75) пропорційні до $\sqrt{\beta}$ і є завжди додатними.

**Приклад 2.** Розглянемо інший приклад функції деформації

$$f(P) = (1-\beta P^2)^k, \quad P \in \left[-\frac{1}{\sqrt{\beta}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right]. \tag{4.86}$$

В цьому випадку мінімальна довжина існує для $k < 1$ (див. [40]). Зауважмо, що деформація (4.86) призводить не тільки до мінімальної довжини, але також до максимального імпульсу. Головна поправка до енерґії може бути отримана з (4.76) і рівна

$$\Delta E_n = \frac{2\sqrt{\beta}\Gamma(1-k)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-k)}\frac{\alpha^3 m^2}{\hbar^3(n+\delta)^3}. \tag{4.87}$$

Зауважимо, що поправка до енергії є додатна для $k < \frac{1}{2}$, тоді як у випадку $\frac{1}{2} < k < 1$ вона є від'ємною. Енергетичний спектр можна отримати точно для окремих випадків деформації, а саме для $k = -1$ та $k = 1/2$.

Випадок $k = -1$ відповідає деформації, яка розглядалась раніше у [107].

$$f(P) = \frac{1}{1-\beta P^2}, \quad P \in \left[-\frac{1}{\sqrt{\beta}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right]. \tag{4.88}$$

З (4.64) отримуємо рівняння на енерґетичний спектр

$$\frac{1+\beta q^2}{q}\operatorname{arccot}\sqrt{\beta}q - \sqrt{\beta} = \frac{\hbar\pi}{2m\alpha}(n+\delta). \tag{4.89}$$

Розклад енерґетичного спектру за малими $\beta$ має вигляд

$$E_n = -\frac{\alpha^2 m}{2\hbar^2(n+\delta)^2} + \frac{4\sqrt{\beta}}{\pi}\frac{\alpha^3 m^2}{\hbar^3(n+\delta)^3} + o(\beta). \tag{4.90}$$

Зауважимо, що наш результат для енерґетичного спектру з $\delta = 0$ збігається з тим, що отримано в [107]. У згаданій статті оператор $1/\hat{X}$ визначено як нелінійний та лише правий обернений, тоді як у цій роботі ми запропонували лінійних двосторонній обернений до оператора координати.

Ми також знаходимо точний розв'язок одновимірної задачі Кулона для $k = 1/2$, коли функція деформації може бути записана у формі

$$f(P)=\sqrt{1-\beta P^2},\quad P\in\left[-\frac{1}{\sqrt{\beta}},\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right]; \tag{4.91}$$

$$g(p)=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\sin(\sqrt{\beta}p),\quad p\in\left[-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}},\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\right]. \tag{4.92}$$

Ця алґебра може також бути розглянута в альтернативному сценарії, який веде до нульової мінімальної довжини, але дискретних власних значень оператора координати. Вибір сценарію залежить від вигляду граничних умов для хвильової функції [40].

З умови (4.63) знаходимо енерґетичний спектр

$$E_n=\frac{1}{4m\beta}\left(1-\sqrt{1+\frac{4m^2\alpha^2}{\hbar^2(n+\delta)^2}\beta}\right). \tag{4.93}$$

Розкладаючи вираз для енерґетичних рівнів за малими $\beta$ ми отримаємо

$$E_n=-\frac{\alpha^2 m}{2\hbar^2(n+\delta)^2}+\beta\frac{\alpha^4 m^3}{2\hbar^4(n+\delta)^4}+o(\beta^2). \tag{4.94}$$

Таким чином, поправки до енерґетичного спектру спричинені деформацією (4.86) є пропорційними до $\sqrt{\beta}$ чи в частковому випадку (4.91) деформації (4.86) — до $\beta$. Поправки до енерґетичного спектру, що пов'язані з деформацією (4.86) є додатніми для $k<\frac{1}{2}$, тоді як для $\frac{1}{2}<k<1$ поправки є від'ємними.

**Приклад 3.** Ми також можемо отримати більш екзотичні залежності енерґетичних поправок від параметру деформації $\beta$. Для прикладу, для функцій деформацій

$$f(P)=\exp(\sqrt{\beta P^2}),\quad P\in(-\infty,\infty) \tag{4.95}$$

та

$$f(P) = \exp(^3\sqrt{\beta P^2}), \quad P \in (-\infty, \infty) \tag{4.96}$$

з (4.76) ми маємо

$$\Delta E_n = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha^3 m^2 \sqrt{\beta}}{\hbar^3 (n+\delta)^3} \ln \left( \frac{\alpha m \sqrt{\beta}}{\hbar} \right) \tag{4.97}$$

та

$$\Delta E_n = \frac{2\alpha^2 m}{\hbar^2 (n+\delta)^2} \left( \frac{\alpha m \sqrt{\beta}}{\hbar (n+\delta)} \right)^{\frac{2}{3}} \tag{4.98}$$

відповідно.

Підсумовуючи вище сказане, зазначимо, що в різних випадках функції деформації ми можемо отримати різний знак поправок до енерґетичних рівнів одновимірної кулонівської задачі, а також різну аналітичну залежність від параметру деформації. Тому, зсув енерґетичних рівнів, спричинений деформацією сильно залежить від вибору функції деформації.

## 4.7 Висновки

В цьому розділі розглянуто загальний випадок деформованої алґебри Гайзенберґа, що приводить до мінімальної довжини та досліджено проблему означення оберненого оператора до оператора координати. Запропоновано означення оператора (4.23), що забезпечує лінійність та двосторонню оберненість цього оператора. Ба більше, таке ж означення оператора (4.36) було отримано з функціонального аналізу оператора координати у просторі з деформованою алґеброю Гайзенберґа з мінімальною довжиною. Використовуючи означення оберненого оператора координати (4.36), знайдено точний розв'язок для одновимірної задачі Кулона в загальному випадку деформованої алґебри Гайзенберґа з мінімальною довжиною.

Отримані результати проаналізовано для часткових випадків функції деформації. Розглянуто функцію деформації (4.75), що в окремому випадку відповідає алґебрі Кемпфа [35]. Також вивчався клас функцій деформації (4.86), що ведуть до мінімальної довжини та максимального імпульсу. Нарешті, проведено дослідження впливу функцій деформації (4.95) та (4.96) на енерґетичний спектр одновимірної задачі Кулона. В цих часткових випадках (4.75), (4.86), (4.95), (4.96) поправки до енерґетичних рівнів одновимірної задачі Кулона були отримані та проаналізовані. Як висновок можна стверджувати, що змінюючи функцію деформації, можна отримати різноманітну аналітичну залежність поправок до енерґетичного спектру від параметру деформації $\beta$, для прикладу, пропорційних до $\beta$, $\sqrt{\beta}$, $\beta^{1/3}$ та $\sqrt{\beta}\ln\sqrt{\beta}$. Також знак поправки може бути різним в залежності від вибору деформаційної функції. Таким чином, зсув енерґетичних рівнів, що спричинений деформацією, сильно залежить від вибору функції деформації.

# Розділ 5

# Поправки до енерґетичних рівнів атома водню у просторі з лоренц-коваріантною алґеброю Гайзенберґа з мінімальною довжиною

## 5.1 Вступ

В цьому розділі ми розглядаємо задачу про атом водню в деформованому просторі з лоренц-коваріантною алґеброю Гайзенберґа (1.8), що приводить до мінімальної довжини. Ця алґебра була отримана як узагальнення $D$-вимірної двопараметричної деформованої алґебри (1.4) до $(D+1)$-вимірної лоренц-коваріантної алґебри простору-часу. Цікавим є вивчення впливу гіпотези мінімальної довжини на поведінку квантових систем. Деформовані комутаційні співвідношення були застосовані до вивчення різноманітних квантовомеханічних систем. У випадку деформованої алґебри (1.8) єдиною вивченою задачею є $(1+1)$-вимірний осцилятор Дірака, точний розв'язок якої отримано в роботі [49] для простого випадку, коли один з параметрів деформації рівний нулеві. Тож цей напрямок досліджень залишається майже невивченим.

Через найбільш точні експериментальні результати та високого рівня теоретичний прогноз атом водню є унікальною квантовомеханічною системою. Подальше вивчення цієї системи можуть значно вплинути на наше розуміння основ будови всесвіту. Вивчаючи задачу про атом водню в деформованому просторі з мінімальною довжиною ми зможемо підійти ближче до відповіді на питання про існування ненульової невизначеності координати.

В цій роботі ми застосовуємо теорію збурень для обчислення поправок до енерґетичного спектру атома водню у просторі з деформованими Лоренц-коваріантними комутаційними співвідношеннями (1.8) у випадку $\beta' = 0$.

## 5.2 Представлення деформованої алґебри

Дуже часто буває корисним представити оператори координати $\hat{X}^\mu$ та імпульсу $\hat{P}^\mu$, що задовольняють деформованій алґебрі (1.8) через оператори $\hat{x}^\mu$ і $\hat{p}^\nu$, комутатор яких має звичний канонічний вигляд

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu] = -i\hbar g^{\mu\nu}. \tag{5.1}$$

Представлення, що не змінює оператор імпульсу, має вигляд:

$$\begin{cases} \hat{X}^\mu = (1 - \beta\hat{p}_\rho\hat{p}^\rho)\hat{x}^\mu - \beta'\hat{p}^\mu\hat{p}_\rho\hat{x}^\rho + i\hbar\gamma p^\mu, \\ \hat{P}^\mu = \hat{p}^\mu, \end{cases} \tag{5.2}$$

де $\gamma$ — довільна дійсна константа, що не змінює комутаційних співвідношень. В імпульсному представленні $\hat{x}^\mu = -i\hbar g^{\mu\nu}\partial/\partial p^\nu, \hat{p}^\mu = p^\mu$ ми повинні переозначити скалярний добуток, ввівши ваговий фактор

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int \frac{d^D p}{[1-(\beta+\beta')p_\nu p^\nu]^\alpha}\psi^*(p^\mu)\phi(p^\mu), \tag{5.3}$$

$$\alpha = \frac{2\beta+\beta'(D+2)-2\gamma}{2(\beta+\beta')}. \tag{5.4}$$

Це забезпечить ермітовість оператора координати. Якщо ми покладемо $\gamma=\beta+\beta'(D+2)/2$, то вагова функція зведеться до 1. При такому виборі значення $\gamma$ ми зможемо записати оператор координати у ермітовій формі:

$$\begin{cases} \hat{X}^\mu = \hat{x}^\mu - \dfrac{\beta}{2}\left[\hat{p}_\rho\hat{p}^\rho\hat{x}^\mu + \hat{x}^\mu\hat{p}_\rho\hat{p}^\rho\right] - \dfrac{\beta'}{2}\left[\hat{p}^\mu\hat{p}_\rho\hat{x}^\rho + \hat{x}_\rho\hat{p}^\rho\hat{p}^\mu\right], \\ \hat{P}^\mu = \hat{p}^\mu. \end{cases} \tag{5.5}$$

Використовуючи "псевдокоординатне" представлення

$$\begin{cases} \hat{x}^\mu = x^\mu, \\ \hat{p}^\mu = i\hbar g^{\mu\nu}\dfrac{\partial}{\partial x^\nu} \end{cases} \tag{5.6}$$

ми обчислили квадрат оператора відстані в $(3+1)$-вимірному випадку $\hat{R}^2=\sum_{i=1}^{3}(\hat{X}^i)^2$ в лінійному наближенні за параметрами деформації $\beta,\beta'$:

$$\begin{aligned} R^2 &= r^2 + (\beta+\beta')[\hat{p}^2r^2 + r^2\hat{p}^2] - 2\beta(\hat{p}^0)^2r^2 + 3\hbar^2\beta \\ &- 2\beta'\hat{L}^2 - \frac{\beta'}{2}(\hat{p}^0ct + ct\hat{p}^0)(\mathbf{r}\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Тут $\hat{\mathbf{L}}$ - оператор моменту кількості руху. Розклад оператора оберненої відстані в ряд за малими параметрами деформації до першого порядку малості має вигляд

$$\hat{R}^{-1} = \frac{1}{r} - \frac{\beta+\beta'}{2}\left(\frac{1}{r}\hat{p}^2 + \hat{p}^2\frac{1}{r}\right) + \beta(\hat{p}^0)^2\frac{1}{r} - \frac{2\beta-\beta'}{2}\frac{\hbar^2}{r^3}$$
$$+ \beta'\frac{\hat{L}^2}{r^3} - \beta'\frac{(\hat{p}^0ct + ct\hat{p}^0)}{4}\left(\frac{1}{r}\hat{p}^2 - \hat{p}^2\frac{1}{r}\right). \quad (5.8)$$

Інше представлення, що задовольняє алґебру (1.8) в лінійному наближенні за параметрами $\beta, \beta'$ , на відміну від точного представлення (6.24), можна записати

$$\begin{cases} \hat{X}^\mu = \hat{x}^\mu - \dfrac{2\beta-\beta'}{4}(\hat{x}^\mu\hat{p}_\rho\hat{p}^\rho + \hat{p}_\rho\hat{p}^\rho\hat{x}^\mu), \\ \hat{P}^\mu = \hat{p}^\mu - \dfrac{\beta'}{2}\hat{p}^\mu\hat{p}_\rho\hat{p}^\rho. \end{cases} \quad (5.9)$$

Аналогічно, квадрат оператора відстані і оператор оберненої відстані в представленні (5.9), (5.6) запишеться:

$$R^2 = r^2 + \frac{(2\beta-\beta')}{2}\left(\left(\hat{p}^2 - (\hat{p}^0)^2\right)r^2\right.$$
$$\left. + r^2\left(\hat{p}^2 - (\hat{p}^0)^2\right) + 3\hbar^2\right), \quad (5.10)$$

$$\hat{R}^{-1} = \frac{1}{r} - \frac{(2\beta-\beta')}{4}\left(\frac{1}{r}\left(\hat{p}^2 - (\hat{p^0})^2\right)\right.$$
$$\left. + \left(\hat{p}^2 - (\hat{p}^0)^2\right)\frac{1}{r} + \frac{2\hbar^2}{r^3}\right). \quad (5.11)$$

Варто відмітити, що представлення (6.24) і (5.9) збігаються коли $\beta' = 0$.

## 5.3 Атом водню в теорії Дірака

Для того щоб домовитись про позначення, що будуть використовуватися в цьому розділі, ми пригадаємо розв'язок задачі про атом водню в теорії Дірака зі стандартною недеформованою алґеброю.

Запишемо гамільтоніан Дірака для частинки в центральному полі

$$\hat{H} = c\hat{\rho}_a\hat{P} + mc^2\hat{\rho}_c + U(r), \tag{5.12}$$

де

$$\hat{P} = \hat{\sigma}_x\hat{p}^x + \hat{\sigma}_y\hat{p}^y + \hat{\sigma}_z\hat{p}^z. \tag{5.13}$$

Вибір матриць $\sigma_i, i = x, y, z;\ \ \rho_j, j = a, b, c$ може бути здійснений у різний спосіб. Наступне представлення цих матриць є більш зручним для нашого розгляду.

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_x &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x^0 & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_x^0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_y^0 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_y^0 \end{pmatrix}, \\
\hat{\sigma}_z &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_z^0 & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_z^0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_a &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \hat{\rho}_b = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_y^0 \\ \hat{\sigma}_y^0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\hat{\rho}_c &= \begin{pmatrix} 0 & -i\hat{\sigma}_y^0 \\ i\hat{\sigma}_y^0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Тут $\hat{\sigma}_x^0, \hat{\sigma}_y^0, \hat{\sigma}_z^0$ позначають матриці Паулі.

Як було запропоновано Фоком [108], проведемо перетворення рівняння

$$\left[c\hat{\rho}_a\hat{P} + mc^2\hat{\rho}_c + U(r)\right]\psi = \hat{p}^0 c\psi \tag{5.16}$$

до сферичних координат разом із канонічними перетвореннями. Будь-який оператор і хвильова функція задовольняє наступним законам перетворення:

$$\hat{A} \to \hat{A}^* = r\sqrt{\sin(\theta)}U\hat{A}U^{-1}\frac{1}{r\sqrt{\sin(\theta)}}, \tag{5.17}$$

$$\psi \to \psi^* = r\sqrt{\sin(\theta)}U\psi, \tag{5.18}$$

де $U = \left(\hat{I}\cos\frac{\theta}{2} + i\hat{\sigma}_y \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\hat{I}\cos\frac{\varphi}{2} + i\hat{\sigma}_z \sin\frac{\varphi}{2}\right)$ є унітарним перетворенням. Тепер стаціонарне рівняння Дірака запишеться

$$\left[c\hat{\rho}_a\hat{P}^* + mc^2\hat{\rho}_c + U(r)\right]\psi^* = E^0\psi^* \tag{5.19}$$

Розв'язок рівняння (5.19) для $\psi^* = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)^T$ має вигляд

$$\begin{aligned} \psi_1^* &= f(r)Y(\theta,\varphi), \qquad \psi_2^* = g(r)Z(\theta,\varphi), \\ \psi_3^* &= f(r)Z(\theta,\varphi), \qquad \psi_4^* = -g(r)Y(\theta,\varphi), \end{aligned} \tag{5.20}$$

з умовою нормування

$$\int_0^\infty dr\,(|f|^2 + |g|^2) = 1, \tag{5.21}$$

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\,(|Y|^2 + |Z|^2) = 1. \tag{5.22}$$

Тут $Y(\theta,\varphi), Z(\theta,\varphi)$ позначають сферичні функції. Функції $f(r)$ і $g(r)$ відповідають вигляду потенціалу $U(r)$. Для кулонівського потенціалу $U(r) = -\frac{e^2}{r}$

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{F_{pk}\left(\frac{2r}{an^*}\right) - G_{pk}\left(\frac{2r}{an^*}\right)}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}} + i\frac{F_{pk}\left(\frac{2r}{an^*}\right) + G_{pk}\left(\frac{2r}{an^*}\right)}{2\cos\frac{\varepsilon}{2}} \right],$$

$$g(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{F_{pk}\left(\frac{2r}{an^*}\right) - G_{pk}\left(\frac{2r}{an^*}\right)}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}} - i\frac{F_{pk}\left(\frac{2r}{an^*}\right) + G_{pk}\left(\frac{2r}{an^*}\right)}{2\cos\frac{\varepsilon}{2}} \right],$$

$$F_{pk}(x) = C(p,k) x^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{x}{2}} Q_p^s(x), \tag{5.23}$$

$$G_{pk}(x) = C(p,k)\,(n^* - k)\, x^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{x}{2}} Q_{p-1}^s(x).$$

Тут $Q_p^s(x) = \frac{\Gamma(s+p+1)}{\Gamma(s+1)}\ {}_1F_1(-p, s+1, x)$ позначають поліноми Лаґерра; $p = 0, 1, 2, \ldots$; число $k$ зв'язане з власним значенням оператора повного моменту кількості руху співвідношенням $j = |k| - \frac{1}{2}$, $k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$; $C(p,k) = \sqrt{\frac{(n^*+k)}{p!\Gamma(p+s+1)} \frac{\alpha^2}{n^{*4}}}$ — константа нормування; $\alpha$ позначає сталу тонкої структури; $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$ — радіус Бора; $\varepsilon$ залежить від енерґії $E^0$ наступним чином

$$E^0 = mc^2 \cos\varepsilon. \tag{5.24}$$

Квантові числа, що з'являються в формулах (5.23) пов'язані між собою через наступні співвідношення

$$s = 2\sqrt{k^2 - \alpha^2}, \qquad p + s/2 = \alpha \cot\varepsilon. \tag{5.25}$$

Ми також позначили $\frac{\alpha}{\sin\varepsilon}$ через $n^*$, бо ця величина мало відрізняється від цілого головного квантового числа $n = p + |k|$. Нарешті, енерґетичний спектр атома водню, як функція квантових чисел $p$ та $k$ має вигляд

$$E^0_{pk} = mc^2 \frac{p + \sqrt{k^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\left(p + \sqrt{k^2 - \alpha^2}\,\right)^2 + \alpha^2}}\ . \tag{5.26}$$

## 5.4 Поправки до спектру

В цьому підрозділі ми обчислимо поправки до енерґетичного спектру атома водню у теорії Дірака з лоренц-коваріантною деформованою алґеброю, що приводить до мінімальної довжини, використовуючи теорію збурень.

Запишемо рівняння Дірака в $(3+1)$-вимірному випадку у вигляді

$$\left[c\hat{\rho}_a(\hat{\sigma}_x\hat{P}^x+\hat{\sigma}_y\hat{P}^y+\hat{\sigma}_z\hat{P}^z)+mc^2\hat{\rho}_c-\frac{e^2}{R}\right]\psi=\hat{P}^0c\,\psi, \tag{5.27}$$

де оператори координат $\hat{X}^\mu$ та компонент імпульсу $\hat{P}^\mu$ задовольняють деформованим комутаційним співвідношенням (1.8).

Легко бачити, що у випадку деформації оператори $\hat{P}^0$ і $\hat{R}^{-1}$ вже не комутують. Тому, на відміну від недеформованого випадку, ми не знайдемо функцій, які б одночасно були власними функціями операторів $\hat{P}^0$ та $\hat{H}$. Незрозуміло, як записати стаціонарне рівняння в таких умовах. Тому ми розглянемо випадок, коли один із параметрів деформації рівний нулю, а інший залишається додатним, тобто $\beta' = 0$ та $\beta > 0$. Це припущення на параметри деформації забезпечує комутативність операторів $\hat{P}^0$ і $\hat{R}^{-1}$. Цікаво, що при такому виборі параметрів деформації представлення (6.24) і (5.9) збігаються.

Ми перепишемо рівняння (6.1) беручи до уваги тільки лінійні члени за параметром $\beta$

$$\left(\hat{H}_0+\hat{V}_\beta\right)\psi=\hat{p}^0c\psi. \tag{5.28}$$

Гамільтоніан незбуреної задачі і оператор збурення мають вигляд відповідно

$$\hat{H}_0=c\hat{\rho}_a\hat{P}+mc^2\hat{\rho}_c-\frac{e^2}{r}, \tag{5.29}$$

$$\hat{V}_\beta = \frac{\beta}{2}e^2\left(\left(\hat{p}^2 - (\hat{p}^0)^2\right)\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\left(\hat{p}^2 - (\hat{p}^0)^2\right) + \frac{2\hbar^2}{r^3}\right). \qquad (5.30)$$

Ми проведемо перехід до стаціонарного рівняння приймаючи, що хвильова функція матиме вигляд:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi(\mathbf{r}). \qquad (5.31)$$

Подібно як і у недеформованому випадку, ми здійснюємо перехід до сферичної системи координат разом з канонічними перетвореннями. В результаті отримаємо

$$\left(\hat{H}_0^* + \hat{V}_\beta^*\right)\psi^* = E\psi^*, \qquad (5.32)$$

з

$$\hat{H}_0^* = c\hat{\rho}_a\hat{P}^* + mc^2\hat{\rho}_c - \frac{e^2}{r}, \qquad (5.33)$$

$$\hat{V}_\beta^* = \frac{\beta}{2}e^2\left(\left((\hat{p}^*)^2 - (p^0)^2\right)\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\left((\hat{p}^*)^2 - (p^0)^2\right) + \frac{2\hbar^2}{r^3}\right) \qquad (5.34)$$

і

$$(\hat{p}^*)^2 = (\hat{P}^*)^2 = \hat{p}_r^2 - \frac{\hbar\hat{M}^*}{r^2} + \frac{(\hat{M}^*)^2}{r^2}, \qquad (5.35)$$

$$\hat{M}^*\psi^* = \hbar k\rho_c\psi^*, \qquad (5.36)$$

$$p^0 = \frac{E^0}{c}. \qquad (5.37)$$

Тепер ми можемо обчислити поправки до енерґетичного спектру проводячи усереднення оператора збурення на власних функціях недеформованого релятивістського атома водню.

$$\Delta E_{pk}^{(1)} = mc^2\frac{\hbar^2\beta}{a^2}\Bigg(\frac{12\alpha^2\big(2p+s\big)\big(2n^*k(\alpha^2+1)+k^4(2p+s)\big)}{s(s^2-1)(s^2-4)n^{*5}}+$$

$$+\frac{\alpha^2(-3n^{*2}+4n^*k(2p+s)-4k^2\alpha^2)}{s(s^2-1)n^{*5}}+\frac{\alpha^2-n^{*2}+p^2-k^2}{sn^{*3}}\Bigg). \quad (5.38)$$

Поправка до енерґетичного спектру $\Delta E_{pk}^{(1)}$ залежить від двох квантових чисел $p$ і $k$ пов'язаних з головним квантовим числом $n$ та квантовим числом оператора повного моменту кількості руху $j$ співвідношеннями

$$n = p + |k|, \qquad j = |k| - \frac{1}{2}. \quad (5.39)$$

Формула (5.38) справедлива для всіх дозволених значень $p$ і $k$, окрім $k = \pm 1$. Для станів з такими значеннями квантових чисел $k$ ми отримали розбіжний вклад в поправку до енерґії від доданків пропорційних до $\frac{1}{r}(\hat{p}^*)^2 + (\hat{p}^*)^2\frac{1}{r}$ і $\frac{1}{r^3}$. Для прикладу, для основного стану ми маємо

$$\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle \sim \int_0^\infty dx\, x^{s-3}e^{-x} = \infty, \quad (5.40)$$

бо $s = 2\sqrt{1-\alpha^2}$ є менше ніж 2. Подібні проблеми спостерігалася при обчисленні поправок до нерелятивістського атома водню у випадку деформованої алґебри, запропонованої Кемпфом, і були вирішені шляхом модифікації теорії збурень [62].

Важливо зауважити, що якщо ми опустимо вклад в поправку до енерґії $\Delta E_{pk}^{(1)}$ від середнього значення оператора $\frac{(p^0)^2}{r}$, ми отримаємо поправки до енерґетичного спектру атома водню в теорії Дірака в просторі з деформацією Кемпфа. В нерелятивістській границі $c \to \infty$ ця поправка збігається з результатами отриманими в [61], як і має бути.

## 5.5 Висновки

Ми дослідили атом водню у просторі із лоренц-коваріантною деформованою алґеброю у припущенні, що $\beta \neq 0, \beta' = 0$. Використовуючи звичайну теорію збурень, ми обчислили поправки до усіх енерґетичних рівнів за винятком станів із $|k| = 1$. Винятки зумовлені доданками, які пропорційні до $1/r^3$ та $\frac{1}{r}\hat{p}^2 + \hat{p}^2\frac{1}{r}$, які входять у оператор збурення. Ці доданки приводять до розбіжних внесків у поправках до енерґії. Зауважимо, що подібна трудність виникала і у нерелятивістському випадку, при розрахунку поправок до $s$-рівнів для атома водню [61, 62]. Тому пошук поправок до рівнів з квантовим числом $|k| = 1$ вимагає інших підходів, відмінних від класичної теорії збурень. Натхненні ідеєю зсунутого розкладу, яка була запропонована для вирішення проблеми розбіжностей в теорії збурень в нерелятивістській задачі про атом водню в деформованому просторі з мінімальною довжиною, в наступному розділі ми узагальнимо цю методику на релятивістський випадок.

# Розділ 6

# Модифікована теорія збурень для атома водню в просторі з лоренц-коваріантною алґеброю Гайзенберґа з мінімальною довжиною

## 6.1 Вступ

Як ми бачили в попередньому розділі, застосування стандартної теорії збурень до рівняння Дірака для атома водню у просторі із лоренц-коваріантною деформованою алґеброю (1.8) приводить до розбіжних поправок для деяких енергетичних рівнів, а саме тих, що відповідають станам із квантовим числом $|k| = 1$. В основі звичайної теорії збурень міститься припущення про аналітичність енергетичної поправки за малим параметром теорії збурень, в нашому випадку параметром деформації. Якщо ж залежність поправки до енергії від параметра деформації міститиме неаналітичність, то така теорія буде давати хибні результати, оскільки в такому випадку поправки з вищих порядків теорії збурень можуть бути співмірними з поправками нижчих порядків. Тому знаходження поправок до енергій у випадку неаналітичної залежності поправки до енергії від параметра деформації вимагає нестандартних підходів, які б дозволили виділити цю неаналітичність. Одним із таких підходів є модифікована теорія збурень заснована на ідеї зсунутого розкладу оператора відстані. Ця ідея вперше була запропонована в [62] для усунення розбіжностей, що виникали в стандартній теорії збурень для атома водню в деформованому просторі з мінімальною довжиною (1.4). У цьому розділі ми проведемо верифікацію цього методу та узагальнимо його для задачі про релятивістський атом водню в просторі з лоренц-коваріантною алґеброю Гайзенберґа з мінімальною довжиною (1.8).

## 6.2 Поправки до енергії основного стану

У цьому параграфі ми обчислюємо поправки до енергії основного стану атома водню у теорії Дірака із лоренц-коваріантною деформованою алґеброю, що приводить до мінімальної довжини, використовуючи стандартну теорію збурень і розклад функцій основного стану за власними функціями оператора відстані. Запишемо рівняння Дірака для атома водню в $(3+1)$-вимірному просторі у вигляді

$$\left[c\hat{\rho}_a(\hat{\sigma}_x\hat{P}^x+\hat{\sigma}_y\hat{P}^y+\hat{\sigma}_z\hat{P}^z)+mc^2\hat{\rho}_c-\frac{e^2}{R}\right]\psi=\hat{P}^0c\psi, \qquad (6.1)$$

де оператори координати $\hat{X}^\mu$ та компоненти імпульсу $\hat{P}^\mu$ задовольняють деформованій алґебрі (1.8) у випадку $\beta\neq 0, \beta'=0$.

Алгебри (1.4) та (1.8) є дуже подібні. Тому, зручно перевіряти запропонований нами метод на простішій задачі, а саме для нерелятивістського атома водню у просторі з деформованою алґеброю Кемпфа.

Обчислимо поправку до основного стану атома водню в просторі з деформованою алґеброю (1.4), використовуючи матричний підхід. Скористаємося таким представлення для алґебри у випадку, коли $\beta \neq 0, \beta' = 0$:

$$\hat{X}_i = \hat{x}_i + \frac{\beta}{2}(\hat{p}^2\hat{x}_i + \hat{x}_i\hat{p}^2); \tag{6.2}$$

$$\hat{P}_i = \hat{p}_i,$$

з $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$. Для недеформованої алґебри Гайзенберґа обираємо звичайне координатне представлення : $\hat{x}_i = x_i, \quad \hat{p}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}$. Можна показати, що для $s$-станів оператор відстані має дуже простий вигляд:

$$\hat{R} = r + \frac{\beta}{2}\left(\hat{p}^2 r + r\hat{p}^2 + \frac{2\hbar^2}{r}\right), \tag{6.3}$$

з $r = \sqrt{x_i^2}$. Власні функції і власні значення такого оператора:

$$l_n = (2n+3)\hbar\sqrt{\beta}, \tag{6.4}$$

$$\phi_n(r) = \sqrt{\frac{2}{\hbar\sqrt{\beta}}}\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}\varrho e^{-\frac{\varrho}{2}}Q_n^2(\varrho).$$

Тут $\varrho = \frac{2r}{\hbar\sqrt{\beta}}$ і умова нормування для $\phi_n(r)$ має вигляд

$$\int_0^\infty dr|\phi_n(r)|^2 = 1. \tag{6.5}$$

Варто зауважити, що наші результати збігаються з результатами, отриманими в [61], де розглядалася задача на власні значення та власні функції для квадрату оператора відстані в імпульсному представленні без жодних обмежень на величини параметрів деформації та величину орбітального квантового числа.

Тепер обчислимо поправку до основного стану атома водню. Для цього розкладемо хвильову функцію основного стану

$$\psi_{1s}(r) = \sqrt{\frac{4}{a^3}} r e^{-\frac{r}{a}} \tag{6.6}$$

за власними функціями оператора відстані $\hat{R}$:

$$\psi_{1s}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \phi_n(r), \tag{6.7}$$

причому коефіцієнти розкладу визначаються за формулою

$$Y_n = 8\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \left(a\hbar\sqrt{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{(\hbar\sqrt{\beta}-a)^n}{(\hbar\sqrt{\beta}+a)^{n+3}}. \tag{6.8}$$

Запишемо гамільтоніан системи, яку ми розглядаємо, у вигляді:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_\beta. \tag{6.9}$$

Тут $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$ — гамільтоніан незбуреної задачі, $\hat{V}_\beta = \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\hat{R}}$ — оператор збурення.

Середнє значення оператора оберненої віддалі буде мати вигляд:

$$\langle\psi_{1s}(r)|\hat{R}^{-1}|\psi_{1s}(r)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n^2}{(2n+3)\hbar\sqrt{\beta}}$$

$$= \frac{8\sqrt{\hbar\sqrt{\beta}}}{3(a+\hbar\sqrt{\beta})^3}\ {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; -\frac{(a-\hbar\sqrt{\beta})^2}{4a\hbar\sqrt{\beta}}\right),$$

де ${}_2F_1\left(a, b; c; z\right)$ — гіпергеометрична функція. Розкладаючи останній вираз за малим параметром $\beta$, одержуємо:

$$\begin{aligned}\langle\psi_{1s}(r)|\hat{R}^{-1}|\psi_{1s}(r)\rangle &= \frac{1}{a} + \frac{\hbar^2\beta}{a^3}\left(4\ln\frac{\hbar\sqrt{\beta}}{a} + 3\right) \\ &+ O(\beta^2).\end{aligned} \tag{6.10}$$

Таким чином, поправка до енергії основного стану буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}\Delta E_{1s} &= \langle\psi_{1s}(r)|e^2\hat{r}^{-1} - e^2\hat{R}^{-1}|\psi_{1s}(r)\rangle \\ &= -\frac{\hbar^2\beta e^2}{a^3}\left(4\ln\frac{\hbar\sqrt{\beta}}{a} + 3\right) + O(\beta^2).\end{aligned} \tag{6.11}$$

Подібний результат отримано у роботі [62] за допомогою так званого зсунутого розкладу

$$\begin{aligned}\Delta E_{1s} &= -\frac{\hbar^2\beta e^2}{a^3}\left(4\ln\frac{\hbar\sqrt{\beta}}{a} + 2\ln 2 + 4\gamma - 1)\right) \\ &+ o(\beta).\end{aligned} \tag{6.12}$$

Обидва результати приводять до подібних виразів і різниця між ними буде лінійним доданком за параметром $\beta$, який дає достатньо малий внесок при оцінці мінімальної довжини.

Подібну процедуру можна застосувати і для деформованої алґебри (1.8). Для цієї алґебри користуватимемося наступним зображенням

$$\hat{X}^\mu = \hat{x}^\mu + \frac{\beta}{2}\left(\hat{x}^\mu(\hat{p}^2 - (\hat{p}^0)^2) + (\hat{p}^2 - (\hat{p}^0)^2)\hat{x}^\mu\right); \tag{6.13}$$

$$\hat{P}^\mu = \hat{p}^\mu,$$

де $\hat{x}^\mu = x^\mu$, $\hat{p}^\mu = i\hbar g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}$. Легко переконатися у тому, що для станів із нульовим орбітальним квантовим числом оператор віддалі матиме вигляд:

$$\hat{R} = (1 - \beta(\hat{p}^0)^2)r + \frac{\beta}{2}\left(\hat{p}^2 r + r\hat{p}^2 + \frac{2\hbar^2}{r}\right). \tag{6.14}$$

Власні функції та власні значення знаходимо із рівняння

$$\hat{R}e^{-iEt/\hbar}\varphi_n(r) = \lambda_n e^{-iEt/\hbar}\varphi_n(r). \tag{6.15}$$

Таким чином, отримуємо:

$$\lambda_n = (2n+3)\hbar\sqrt{\theta}(1-\beta E^2/c^2), \tag{6.16}$$

$$\varphi_n(r) = \sqrt{\frac{2}{\hbar\sqrt{\theta}}}\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}\rho e^{-\frac{\rho}{2}}Q_n^2(\rho).$$

Де $Q_n^2(\rho)$ — поліноми Лаґерра. Тут ми позначили $\theta = \frac{\beta}{1-\beta E^2/c^2}$ та $\rho = \frac{2r}{\hbar\sqrt{\theta}}$.

Для основного стану релятивістського атома водню можна відділити радіальну частину хвильової функції від кутової та спінорної частин. Таким чином, радіальна частина хвильової функції буде рівна

$$\psi_{01}(r) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(s+1)}}\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{s+1}{2}} r^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{r}{a}} \tag{6.17}$$

з умовою нормування

$$\int_0^\infty dr|\psi_{01}(r)|^2 = 1 \tag{6.18}$$

і $s = 2\sqrt{1-\alpha^2}$, $\alpha$ — стала тонкої структури. Розкладаючи радіальну частину хвильової функції основного стану $\psi_{01}(r)$ за власними функціями оператора відстані від початку координат $\varphi_n(r)$

$$\psi_{01}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \Upsilon_n \varphi_n(r), \tag{6.19}$$

отримуємо коефіцієнти розкладу

$$\begin{aligned} \Upsilon_n &= 2^{\frac{s+2}{2}}\sqrt{(n+1)(n+2)}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+2\right)}{\sqrt{\Gamma(s+1)}}\frac{a^{\frac{3}{2}}\left(\hbar\sqrt{\theta}\right)^{\frac{s+1}{2}}}{\left(a+\hbar\sqrt{\theta}\right)^{\frac{s+4}{2}}} \\ &\times \ {}_2F_1\left(-n, \frac{s+4}{2}; 3; \frac{2a}{a+\hbar\sqrt{\theta}}\right). \end{aligned} \tag{6.20}$$

Середнє значення для оператора оберненої віддалі у цьому випадку буде мати вигляд:

$$\langle\psi_{01}(r)|\hat{R}^{-1}|\psi_{01}(r)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Upsilon_n^2}{(2n+3)\hbar\sqrt{\theta}(1-\beta E^2/c^2)}. \qquad (6.21)$$

На жаль, нам не вдалося провести підсумовування для цього виразу точно, однак зберігаючи ведучі за параметром деформації $\beta$ та сталою $\alpha$ доданки ми одержали:

$$\langle\psi_{01}(r)|\hat{R}^{-1}|\psi_{01}(r)\rangle = \langle\psi_{01}(r)|r^{-1}|\psi_{01}(r)\rangle + \frac{\hbar^2\beta}{a^3}\left(4\ln\frac{\hbar\sqrt{\beta}}{a}+\frac{1}{\alpha^2}\right) \qquad (6.22)$$

Таким чином, поправки до основного стану атома водню у просторі із лоренц-коваріантною деформованою алґеброю матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\Delta E_{01} &= \langle\psi_{01}(r)|e^2\hat{r}^{-1} - e^2\hat{R}^{-1}|\psi_{01}(r)\rangle \\ &= -\frac{\hbar^2 e^2\beta}{a^3}\left(4\ln\frac{\hbar\sqrt{\beta}}{a}+\frac{1}{\alpha^2}\right). \qquad (6.23)\end{aligned}$$

## 6.3 Модифікована теорія збурень

У попередньому розділі ми обрали таке представлення для деформованої алґебри (1.8):

$$\begin{cases} \hat{X}^\mu = \hat{x}^\mu - \frac{\beta}{2}\left[\hat{p}_\rho\hat{p}^\rho\hat{x}^\mu + \hat{x}^\mu\hat{p}_\rho\hat{p}^\rho)\right], \\ \hat{P}^\mu = \hat{p}^\mu, \\ \hat{x}^\mu = x^\mu, \\ \hat{p}^\mu = i\hbar g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} \end{cases} \qquad (6.24)$$

та отримали розклад для оператора оберненої віддалі з точністю до першого порядку за параметром деформації

$$\hat{R}^{-1} = \frac{1}{r} - \frac{\beta}{2}\left(\frac{1}{r}(\hat{p}^2 - (\hat{p^0})^2 + (\hat{p}^2 - (\hat{p^0})^2\frac{1}{r} + \frac{2\hbar^2}{r^3}\right). \qquad (6.25)$$

Ми обчислили поправки до енергетичних рівнів за винятком деяких "проблемних"станів у частковому випадку деформованої алґебри, коли один із параметрів деформації рівний нулю $\beta' = 0, \beta \neq 0$. Для станів із $k = \pm 1$ ($j = |k| - 1/2 = 1/2$) одержуємо розбіжний вираз для середнього значення доданка, який стоїть у квадратних дужках у виразі (6.25). Це означає, що такий розклад не є коректним для уже згаданих станів і необхідно враховувати усі члени розкладу в ряд.

У цьому розділі розглянемо модифіковану теорію збурень, яка була запропонована у роботі [62] для того, щоб обійти проблему розбіжностей поправок до енергій $s$-рівнів нерелятивістського атома водню у просторі з деформованими комутаційними співвідношеннями, запропонованих Кемпфом. Як нам вдалося показати в попередньому параграфі, результати, отримані в роботі [62] мало відрізняються від точних результатів. Тому модифіковану теорію збурень можна розглядати як надійний інструмент для обчислення поправок до енергії атома водню. У нашому випадку за допомогою модифікованої теорії збурень ми сподіваємось отримати поправки до енергетичного спектру розглядуваної задачі для станів з $k = \pm 1$. Звернемо увагу на те, що ми розглядаємо лише частковий випадок для деформації, коли $\beta \neq 0, \quad \beta' = 0$.

Використавши представлення (6.24), перепишемо вираз для $\hat{R}$ у формі:

$$\hat{R} = \sqrt{r^2 + b^2 - \beta(r^2 \hat{p}_\nu \hat{p}^\nu + \hat{p}_\nu \hat{p}^\nu r^2 - \hbar^2 D + \overline{b}^2)}, \tag{6.26}$$

де $\beta \overline{b}^2 = b^2$. Подібно до нерелятивістського атома водню, виконуємо зсунутий розклад в околі точки $\sqrt{r^2 + b^2}$. Ведений параметр $b$ є достатньо малим, а отже у розкладі в ряд можна знехтувати доданками вищих порядків за згаданим параметром, врахувавши їх лише в доданку нульового порядку.

Таким чином, представимо результат розкладу квадратного кореня (6.26) у вигляді

$$\hat{R} = \sqrt{r^2 + b^2} + \hat{C}(\beta), \tag{6.27}$$

де

$$\hat{C}(\beta) = \beta\hat{C}_1 + \beta^2\hat{C}_2 + \beta^3\hat{C}_3 + \dots. \tag{6.28}$$

Прирівнявши квадрати правих частин рівностей(6.26) і (6.27), одержуємо рівняння для операторів $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots$. Для $\hat{C}_1$ отримуємо:

$$\hat{C}_1\sqrt{r^2 + b^2} + \sqrt{r^2 + b^2}\hat{C}_1 = -\beta(r^2\hat{p}_\nu\hat{p}^\nu + \hat{p}_\nu\hat{p}^\nu r^2 - \hbar^2 D + \bar{b}^2). \tag{6.29}$$

і

$$\hat{C}_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{\sqrt{r^2+b^2}}\hat{p}^2 + \hat{p}^2\frac{r^2}{\sqrt{r^2+b^2}} - \frac{2p_0^2 r^2}{\sqrt{r^2+b^2}} + \frac{2\hbar^2 - \bar{b}^2}{\sqrt{r^2+b^2}} + \frac{\hbar^2 b^4}{(r^2+b^2)^{5/2}}\right) \tag{6.30}$$

Розкладаючи обернену віддаль $R^{-1}$ у ряд за параметром деформації з точністю до першого порядку за $\beta$ одержуємо:

$$\hat{R}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{r^2+b^2}} + \frac{\beta}{2}\left(\frac{r^2}{r^2+b^2}\hat{p}_\nu\hat{p}^\nu\frac{1}{\sqrt{r^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2+b^2}}\hat{p}_\nu\hat{p}^\nu\frac{r^2}{r^2+b^2}\right)$$

$$- \frac{2\hbar^2\beta - b^2}{2(r^2+b^2)^{3/2}} - \frac{\hbar^2\beta b^4}{2(r^2+b^2)^{7/2}}. \tag{6.31}$$

Тепер оператор збурення буде мати вигляд:

$$\hat{V}_\beta = \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\sqrt{r^2+b^2}} - \frac{e^2\beta}{2}\left(\frac{r^2}{r^2+b^2}\hat{p}_\nu\hat{p}^\nu\frac{1}{\sqrt{r^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2+b^2}}\hat{p}_\nu\hat{p}^\nu\frac{r^2}{r^2+b^2}\right)$$

$$+ \frac{e^2(2\hbar^2\beta - b^2)}{2(r^2+b^2)^{3/2}} + \frac{e^2\hbar^2\beta b^4}{2(r^2+b^2)^{7/2}}. \tag{6.32}$$

Обчислимо поправку до енергії основного стану ($p=0, k=1$), зумовлену збуренням $\hat{V}_\beta$

$$\Delta E_{01}^{(1)}(b) = -\frac{s\beta\hbar^2 e^2}{a^3\alpha^2} + \frac{8\beta\hbar^2 e^2}{a^3}\frac{1}{s(s-1)(s-2)} - \frac{e^2\beta\hbar^2}{a^3}\frac{2}{s(s-1)} \quad (6.33)$$

$$+\frac{e^2}{a}\frac{2^{1-s}\pi}{\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(\frac{s}{2})^2}\left(\frac{2}{a}\right)^s\left(\frac{2\beta\hbar^2 b^{s-2}}{s} + \frac{2-s}{s^2}b^s + \frac{2\beta\hbar^2 b^{s-2}(2-s)(s+6)}{12s}\right).$$

Тут $s = 2\sqrt{1-\alpha^2}$ і $\alpha$ — стала тонкої структури.

Розклавши (6.33) у ряд за малим параметром $\alpha$, одержуємо:

$$\begin{aligned}\Delta E_{01}^{(1)} &= -\frac{e^2\hbar^2\beta}{a^3\alpha^2} - \frac{2e^2\hbar^2\beta}{a^3}\ln\frac{\hbar^2\beta}{a^2} \\ &+ \frac{e^2\hbar^2\beta}{a^3}\left(-\frac{25}{12} - 4\gamma + q^2 - 2\ln q\right) + O(\alpha^0), \qquad (6.34)\end{aligned}$$

де $b = q\hbar\sqrt{\beta}$.

Як бачимо, обчислена поправка (6.34) залежить від невідомого параметра $q$. Якщо ми обчислимо середні значення для точного оператора збурення $\hat{V}_\beta = e^2\left(r^{-1} - \hat{R}^{-1}\right)$, то не отримаємо жодної залежності від параметра $q$ (див. (6.23)) . Однак, якщо припустити, що $q$ не залежить від параметра $\beta$, тоді можна знехтувати внеском до поправки до енергії від третього доданку у виразі (6.34) у порівнянні із попередніми двома доданками. Порівняння результату для енергії основного атома водню, отриманого нами за допомогою модифікованої теорії збурень (6.34), з відповідним результатом (6.23), обчисленим іншим методом, дає підстави стверджувати, що запропонований метод зсунутого розкладу дозволяє "вловити"головний член розкладу за параметром деформації поправки до енергії релятивістського атома водню. А це означає, що ми можемо використати цей метод для знаходження цих поправок.

Обчислимо поправки для довільних збуджених рівнів з $k = \pm 1$ (див. *наступний розділ*). Отриманий результат представимо у вигляді:

$$\widetilde{\Delta E}^{(1)}_{pk} = \Delta E^{(1)}_{pk} + \Theta^{(1)}_{pk}. \tag{6.35}$$

Тут

$$\Theta^{(1)}_{pk} = \frac{e^2}{48a}\left(\frac{2\sqrt{2}\hbar\sqrt{\beta}}{an^*}\right)^s \frac{sk(n^*+k)+2pk^2}{n^{*3}}$$

$$\times\frac{\pi^{\frac{3}{2}}4^{-s}(s^3+4s^2-12sk^2-24)\Gamma(p+s)}{p!\Gamma(s/2+1)^3\Gamma(s/2+1/2)\sin(\pi/2(s+2))}$$

і вираз $\Delta E^{(1)}_{pk}$ можна знайти у попередньому розділі. Квантове число $p$ пов'язане із головним квантовим числом $n$ таким чином: $p = n - k$ і квантове число $k$ пов'язане із повним орбітальним квантовим числом співвідношенням $|k| = j + 1/2$ і $s = 2\sqrt{k^2-\alpha^2}$, $n^* = \sqrt{p^2+2ps+k^2}$. Як ми зауважували, поправка до енергії слабко залежить від параметра $q$, таким чином, вибираємо $q = \sqrt{2}$ для того, щоб занулити доданок, пропорційний $(r^2+b^2)^{-3/2}$ в (6.32).

Для того, щоб перевірити правильність наших обчислень розглянемо отримані вирази для поправок до енергії довільних рівнів з $k = -1$ (або орбітальним квантовим числом $l = 1$). Якщо знехтувати членом, пов'язаним з $\frac{(p^0)^2}{r}$ у виразах для цих поправок і взяти нерелятивістську границю ($\alpha \to 0$), то ми приходимо до добре відомого результату для поправок до енергетичних рівнів з $l = 1$ для атома водню у просторі з деформованою алґеброю (1.4). Ця границя підтверджує те, що отримані результати (6.33) та (6.35) є правильними.

Нарешті, звернемо увагу на те, що середнє $\langle\frac{(p^0)^2}{r}\rangle$ дає значно більший вклад до поправок для енергетичних рівнів у порівнянні з іншими доданками. Цей результат є очікуваним, оскільки $p^0$ містить енергію спокою, яка значно перевищує енергію зв'язаного стану.

Знайдемо оцінку для верхньої межі параметра деформації, порівнявши результати для поправок до енергетичних рівнів атома водню, отримані нами вище, із експериментальними даними. У статті [109] представлено такий результат для частоти переходу

$$f_{1s-2s} = 2466061413187035(10). \tag{6.36}$$

Точність згаданого експерименту рівна $4.2\times 10^{-15}$. Використавши формулу (6.35) можемо записати ведучий доданок поправки до енергії переходу $1s-2s$, що зумовлені мінімальною довжиною

$$\Delta_{12} = \widetilde{\Delta E}^{(1)}_{01} - \widetilde{\Delta E}^{(1)}_{11} = \frac{3e^2\hbar^2\beta}{4\alpha^2 a^3}. \tag{6.37}$$

Знайдемо відношення $\Delta_{12}/(E^0_{11} - E^0_{01})$. Оскільки поправки $\Delta_{12}$ є малими, то можна знехтувати релятивістськими внесками у частоту переходу і вважати, що

$$(E^0_{11} - E^0_{01}) = (E^0_2 - E^0_1), \tag{6.38}$$

де

$$E^0_n = -\frac{e^2}{2an^2}. \tag{6.39}$$

Отримаємо, що

$$\Delta_{12}/(E^0_{11} - E^0_{01}) = \frac{2\hbar^2\beta}{\alpha^2 a^2}. \tag{6.40}$$

З метою оцінки верхньої межі для параметра деформації припустимо, що поправки, зумовлені мінімальною довжиною, знаходяться в межах точності експериментальних даних. Тобто

$$\Delta_{12}/(E^0_{11} - E^0_{01}) \leq 4.2 \times 10^{-15}, \tag{6.41}$$

а це означає, що

$$\frac{2\hbar^2\beta}{\alpha^2 a^2} \leq 4.2 \times 10^{-15}. \tag{6.42}$$

Звідси отримуємо оцінку на мінімальну довжину

$$\Delta X = \hbar\sqrt{\beta} \leq 1.8 \times 10^{-20} < 10^{-19} \text{ m}. \tag{6.43}$$

Варто зауважити, що є також і інші (новіші) експериментальні дані для частоти переходу $1s - 2s$ переходу [110], однак вони суттєво не впливають на оцінку верхньої межі мінімальної довжини.

Отже, припущення про те, що поправки до енергетичних рівнів атома водню, зумовлені деформацією комутаційних співвідношень не перевищують точності вимірювання частоти переходу, приводять до оцінки мінімальної довжини $\Delta X < 10^{-19}$ m.

## 6.4 Розрахунок поправок до енергетичних рівнів атома водню для довільних $|\mathbf{k}| = 1$

У цьому підрозділі ми продемонструємо метод, який ми використали для розрахунку середніх значень від доданків, що входять у вираз для оператора збурення (6.32). Розрахуємо середнє значення $\left\langle \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\sqrt{r^2+b^2}} \right\rangle$

у стані з $|k| = 1$, зберігаючи лише ведучі за малим параметром $b$ члени

$$\left\langle \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\sqrt{r^2+b^2}} \right\rangle = \frac{4\hbar^2 C^2(p,k)}{a^2\alpha^2}\Bigg( I_{FF}(p,k) + (n^*-k)^2 I_{GG}(p,k) - \frac{(2p+s)(n^*-k)}{n^*} I_{FG}(p,k)\Bigg). \tag{6.44}$$

Тут

$$\begin{aligned} I_{FF}(p,k) &= \int_0^\infty F_{pk}(x)\left(\frac{e^2}{x} - \frac{e^2}{\sqrt{x^2+\bar{b}^2}}\right) F_{pk}(x)dx, \\ I_{GG}(p,k) &= \int_0^\infty G_{pk}(x)\left(\frac{e^2}{x} - \frac{e^2}{\sqrt{x^2+\bar{b}^2}}\right) G_{pk}(x)dx, \\ I_{FG}(p,k) &= \int_0^\infty F_{pk}(x)\left(\frac{e^2}{x} - \frac{e^2}{\sqrt{x^2+\bar{b}^2}}\right) G_{pk}(x)dx, \end{aligned} \tag{6.45}$$

та $\bar{b} = \frac{2b}{an^*}$. Для функцій $F_{pk}(x)$ і $G_{pk}(x)$ маємо такі вирази:

$$\begin{aligned} F_{pk}(x) &= x^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{x}{2}} Q_p^s(x), \\ G_{pk}(x) &= x^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{x}{2}} Q_{p-1}^s(x) \\ C(p,k) &= \sqrt{\frac{(n^*+k)}{p!\Gamma(p+s+1)} \frac{\alpha^2}{n^{*4}}}. \end{aligned} \tag{6.46}$$

Нагадуємо, що вигляд хвильових функцій для релятивістського атома водню описано в попередньому розділі.

Для того, щоб обчислити інтеграли (6.45) уведемо функцію $f$ додатного $s$ і невід'ємного малого $\bar{b}$ за допомогою такого інтеграла

$$f(s,\bar{b}) = \int_0^\infty x^s e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+\bar{b}^2}}\right) dx. \tag{6.47}$$

У асимптотиці при малих $b$ ми отримуємо такий вираз для введеної функції

$$f(s,\bar{b}) \approx \begin{cases} \frac{1}{2}\bar{b}^2\Gamma(s-2) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\bar{b}^s\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right), & \text{if } s \leq 2 \\ \\ \frac{1}{2}\bar{b}^2\Gamma(s-2), & \text{if } s > 2\,. \end{cases}$$

Представивши поліноми Лагерра у вигляді

$$Q_p^s(x) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(-1)^i x^i}{i!} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(s+p+1)}{\Gamma(p-i+1)\Gamma(s+i+1)}, \tag{6.48}$$

ми одержимо

$$I_{FF}(p,k) \tag{6.49}$$
$$= \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^{i+j}\Gamma^2(s+p+1)\Gamma^2(p+1) f(s+i+j,\bar{b})}{i!j!\Gamma(s+i+1)\Gamma(s+j+1)\Gamma(p-i+1)\Gamma(p-j+1)}.$$

Тоді, підставляючи (6.48) у (6.49), ми отримуємо

$$\begin{aligned} I_{FF}(p,k) &= \frac{\bar{b}^2}{2}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^{i+j}\Gamma^2(s+p+1)\Gamma^2(p+1)\Gamma(s+i+j-2)}{i!j!\Gamma(s+i+1)\Gamma(s+j+1)\Gamma(p-i+1)\Gamma(p-j+1)} \\ &- \frac{\bar{b}^s}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma^2(s+p+1)}{\Gamma^2(s+1)}\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{6.50}$$

Ми уже зустрічалися з такою ж сумою, як у першому доданку попереднього виразу, коли проводили обчислення інтегралу $\int_0^\infty F_{pk}(x)\frac{1}{x^3}F_{pk}(x)dx$ із $\left\langle \frac{e^2\hbar^2\beta}{r^3}\right\rangle$ з тією лиш різницею, що у цьому випадку параметр $s$ був більший ніж 2. Проаналізувавши цю суму, приходимо до висновку, що вигляд буде таким же, як і у випадку $s = 2\sqrt{1-\alpha^2}$. Таким чином, можемо записати:

$$
\begin{aligned}
I_{FF} &= \frac{\bar{b}^2}{2}\Gamma(s+p+1)\Gamma(p+1)\frac{s^2+6ps+3s+6p^2+6p+2}{s(s^2-1)(s^2-4)} - \\
&- \frac{\bar{b}^s}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma^2(s+p+1)}{\Gamma^2(s+1)}\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
\qquad (6.51)
$$

аналогічно і для функцій $I_{GG}, I_{FG}$. Нарешті, ми одержуємо

$$
\left\langle \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\sqrt{r^2+b^2}} \right\rangle = \frac{8e^2\hbar^2\beta}{a^3n^3}\left(-\frac{1}{2s(s^2-1)} + \frac{3k^2\left(2p+s\right)\left(2n+k(2p+s)\right)}{2n^2s(s^2-1)(s^2-4)}\right)
$$

$$
+\frac{e^2}{2\sqrt{\pi}a}\left(\frac{2\sqrt{2}\hbar\sqrt{\beta}}{an^*}\right)^s \frac{sk(n^*+k)+2pk^2}{n^{*3}}\frac{\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma(s+p+1)\Gamma(p+s)}{p!\Gamma(s+1)^2}.
$$

Теорія збурень застосовна і у випадку, коли $|k| > 1$. Зважаючи на це, другий доданок у останньому виразі може бути опущений, оскільки він є членом вищого порядку малості за параметром $\beta$.

Таким чином власні стани з $|k| > 1$ задовольняють умові

$$
\left\langle \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{\sqrt{r^2+b^2}} \right\rangle = \left\langle \frac{e^2\hbar^2\beta}{r^3} \right\rangle, \qquad (6.52)
$$

у лінійному наближенні за малим параметром $\beta$, як і має бути.

Подібним чином проводимо обчислення для інших середніх середніх значень від доданків, що входять у вираз для оператора збурення (6.32). Як результат ми одержуємо вирад для поправок до енергетичних рівнів релятивістського атома водню (6.35), зумовлених лоренц-коваріантною деформованою алгеброю.

## 6.5 Висновки

Ми дослідили атом водню у просторі із лоренц-коваріантною деформованою алґеброю, яка приводить до існування мінімальної довжини. У попередньому розділі, використавши звичайну теорію збурень, ми обчислили поправки до енергетичного спектру до усіх станів атома водню, за винятком певних "проблемних"станів, що визначаються квантовим числом $|k| = 1$. Основна складність, яка виникала при розрахунку поправок до енергії у цих станах, пов'язана із доданками, пропорційним до $1/r^3$ та $\frac{1}{r}\hat{p}^2 + \hat{p}^2\frac{1}{r}$, які входять у оператор збурення. Саме ці доданки дають розбіжний вклад у поправки до енергетичного спектру. Щоб обійти ці розбіжності, ми запропонували модифіковану теорію збурень, використавши аналогію із нерелятивістським випадком. Це дозволило обчислити поправки до енергетичних рівнів для довільних станів включно із "проблемними"станами. Припустивши, що ефекти, зумовлені деформацією комутаційних співвідношень, не є експериментально спостережуваними, ми одержали оцінку для верхньої межі для мінімальної довжини, яка виявилася порядку $10^{-19}$ м.

# ВИСНОВКИ

У роботі досліджено вплив деформації простору з мінімальною довжиною на властивості класичних та релятивістських квантових систем. Головні результати роботи можна підсумувати у вигляді таких тез.

Показано, що довільна хвильова функція, що належить до фізичної області станів, може бути представлена як лінійна комбінація зліченного набору максимально локалізованих станів. Запропоновано простий спосіб такого представлення.

На основі узагальнення рівняння Шредингера в імпульсному представленні на випадок деформованого простору з мінімальною довжиною, запропоновано новий підхід у вирішенні квантово-механічних задач в деформованому просторі. Користуючись цим підходом вдалося розглянути одновимірні задачі про частинку в дельта ямі та подвійній дельта ямі. Отримано точні вирази для енерґетичного спектру та хвильових функцій для згаданих задач.

Ґрунтуючись на функціональному аналізі оператора координати в загальному випадку деформованої алґебри Гайзенберґа, що призводить до мінімальної довжини, запропоновано означення для оператора $1/\hat{X}$, при якому цей оператор є лінійним та двостороннім оберненим до оператора координати. Користуючись цим означенням вперше знайдено точний розв'язок одновимірної задачі Кулона в загальному випадку деформованої алґебри Гайзенберґа. Проаналізовано вирази для енерґетичного спектру та власних функції частинки в одновимірному потенціалі Кулона для різноманітних часткових випадків деформацій, в тому числі і таких, що окрім мінімальної довжини приводять до максимального імпульсу.

Запропоновано узагальнення рівняння Дірака на випадок лоренцковаріантної деформованої алґебри Гайзенберґа з мінімальною довжиною та розглянуто задачу про релятивістський атом водню з такою деформацією. Отримано поправки до енерґії атома водню спричинені деформованою алґеброю. Вперше запропоновано в релятивістському випадку модифіковану теорію збурень, за допомогою якої одержано аналітичні вирази для поправок до всіх без винятку енерґетичних рівнів. Порівняння цих поправок з експериментальними результатами дозволило отримати оцінки верхньої межі для мінімальної довжини.

# Бібліографія


[1] *Samar M. I.* Exactly solvable problems in the momentum space with a minimum uncertainty in position / M. I. Samar, V. M. Tkachuk // J. Math. Phys. — 2016. — Vol. 57, No. 4. — Art. 042102. — 8 p.

[2] *Samar M. I.* One-dimensional Coulomb-like problem in general case of deformed space with minimal length / M. I. Samar, V. M. Tkachuk // J. Math. Phys. — 2016. — Vol. 57, No. 8. — Art. 082108. — 12 p.

[3] *Samar M. I.* Perturbation hydrogen-atom spectrum in a space with the Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length / M. I. Samar, V. M. Tkachuk // J. Phys. Stud. — 2010. — Vol. 14, No. 1. — Art. 1001. — 5 p.

[4] *Samar M. I.* Modified perturbation theory for hydrogen atom in space with Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length / M. I. Samar // J. Phys. Stud. — 2011. — Vol. 15, No. 1. — Art. 1007. — 7 p.

[5] *Samar M. I.* Physical states in deformed space with minimal length / M. I. Samar // Visnyk Lviv Univ. Ser. Phys. — 2015. — Vol. 50. — P. 72-83.

[6] *Самар М.* Максимально локалізовані стани в деформованому просторі / М. Самар // Міжнародна Конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2007". — Львів, 22-24 травня 2007 р.: Тези доповідей. — С. А33.

[7] *Самар М.* Релятивістський атом водню в деформованому просторі / М. Самар // Міжнародна Конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2008". — Львів, 19-21 травня 2008 р.: Тези доповідей. — С. А22.

[8] *Samar M.* Perturbation hydrogen-atom spectrum in deformed space with lorentz-covariant deformed algebra [Workshop on Theoretical Physics, Lviv, 5-8 july 2009] / M. Samar // J. Phys. Stud. — 2009. — Vol. 13, No. 3. — P. 3998-2.

[9] *Samar M.* Modified perturbation theory for hydrogen atom in a space with the lorentz-covariant deformed algebra with minimal length [Workshop on Current Problems in Physics, Lviv, 5-9 July 2010] / M. Samar // J. Phys. Stud. — 2010. — Vol. 14, No. 3. — P. 3998-3.

[10] *Самар М.* Теорія збурень для атома водню в просторі з Лоренц-коваріантною деформованою алґеброю Гайзенберґа / М. Самар // X Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, 3-4 червня 2010. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 34.

[11] *Samar M.* Relativistic mechanics with the lorentz-covariant deformed Poisson brackets / M. Samar. — 2011. — P. 23.

[12] *Samar M. I.* Relativistic particle in a space with the deformed Lorentz-covariant Poisson brackets / M. I. Samar. — 4-26 October 2011: Program & Abstracts. — P. 41.

[13] *Самар М. І.* Релятивістська динаміка та деформована Пуанкаре-симетрія [Різдвяні дискусії 2013, Львів, 3-4 січня 2013] / М. І. Самар // Журн. фіз. дослідж. — 2013. — Т. 17, № 1. — С. 1998-4.

[14] *Samar M.* Relativistic particle dynamics and deformed Poincare symmetry / M. Samar // Proceedings of VI International Conference "Physics of Disordered Systems". — Lviv, Ukraine, 14-16 October, 2013. — P. 34.

[15] *Самар М.* Деформована Пуанкаре-симетрія та вільна релятивістська частинка [Різдвяні дискусії 2014, Львів, 9-10 січня 2014] / М. Самар // Журн. фіз. дослідж. — 2014. — Т. 18, № 1. — С. 1998-4.

[16] *Samar M.* Relativistic particle dynamics and deformed Poincare symmetry / M. Samar // XXXIII Max Born Symposium "Noncommutative geometry, quantum symmetries and quantum gravity". — Wroclaw, 6-10 July 2014: List of talks with abstracts. — P. 5.

[17] *Samar M.* A dynamical model for the origin of lorentz-covariant noncommutative spacetime [Workshop on Current Problems in

Physics, Lviv, 08-09 July 2014] / M. Samar // J. Phys. Stud. — 2014. — Vol. 18, No. 2/3. — P. 2998-8.

[18] *Самар М.* Максимально локалізовані стани в деформованому просторі[Різдвяні дискусії 2015, Львів, 12-13 січня 2015] / М. Самар // Журн. фіз. дослідж. — 2015. — Т. 19, № 1/2. — С. 1998-7-8.

[19] *Самар М.* Дія релятивістської частинки у лоренц-коваріантному деформованому просторі / М. Самар // Міжнародна Конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2015". — Львів, 13-15 травня 2015 р.: Тези доповідей. — С. E3.

[20] *Samar M. I.* One-dimensional Coulomb-like problem and minimal length [Різдвяні дискусії 2016, Львів, 11-12 січня 2016] / M. I. Samar, V. M. Tkachuk. — 2016. — Vol. 20. — P. 1998-8.

[21] *Samar M. I.* Singular potentials in general case of deformed space with minimal length / M. I. Samar // Workshop on Current Problems in Physics: Program and Abstracts. — Lviv, 05–07 July 2016. — P. 16.

[22] *Hossenfelder S.* Minimal length scale scenarios for quantum gravity / S. Hossenfelder // Living Rev. Rel. — 2016. — Vol. 16. — 2 p.

[23] *Polchinski J.* M Theory: Uncertainty and Unification / J. Polchinski // Fundamental Physics — Heisenberg and Beyond: Werner Heisenberg Centennial Symposium "Developments in Modern Physics" / Ed. by Gerd W. Buschhorn, Julius Wess. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2004. — P. 157–166.

[24] *Jackiw R.* Observations on noncommuting coordinates and on fields depending on them / R. Jackiw // Annales Henri Poincaré. — 2003. — Vol. 4, No. 2. — P. 913–919.

[25] *Snyder H. S.* Quantized space-time / H. S. Snyder // Phys. Rev. — 1947. — Vol. 71. — P. 38.

[26] *Snyder H. S.* The electromagnetic field in quantized space-time / H. S. Snyder // Phys. Rev. — 1947. — Vol. 72. — P. 68.

[27] *Yang C. N.* On quantized space-time / C. N. Yang // Phys. Rev. — 1947. — Vol. 72. — P. 874.

[28] *Hellund E. J.* Quantized space-time / E. J. Hellund, K. Tanaka // Phys. Rev. — 1954. — Vol. 94. — P. 192.

[29] *Fischbach E.* Coupling of internal and quantized space-time symmetries / E. Fischbach // Phys. Rev. — 1965. — Vol. 137. — P. B642.

[30] *Hamilton M. R.* Class of fields in Snyder spaces / M. R. Hamilton, G. Sandri // Phys. Rev. D. — 1973. — Vol. 8. — P. 1788.

[31] *Gross D. J.* String theory beyond the Planck scale / D. J. Gross, P. F. Mende // Nucl. Phys. B. — 1988. — Vol. 303. — P. 407.

[32] *Maggiore M.* A generalized uncertainty principle in quantum gravity / M. Maggiore // Phys. Lett. B. — 1993. — Vol. 304. — P. 65.

[33] *Witten E.* Reflections on the fate of spacetime / E. Witten // Phys. Today. — 1996. — Vol. 49. — P. 24.

[34] *Kempf A.* Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry / A. Kempf // J. Math. Phys. — 1994. — Vol. 35. — P. 4483.

[35] *Kempf A.* Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation / A. Kempf, G. Mangano, R. B. Mann // Phys. Rev. D. — 1995. — Vol. 52. — P. 1108.

[36] *Hinrichsen H.* Maximal localization in the presence of minimal uncertainties in positions and in momenta / H. Hinrichsen, A. Kempf // J. Math. Phys. — 1996. — Vol. 37. — P. 2121.

[37] *Kempf A.* Non-pointlike particles in harmonic oscillators / A. Kempf // J. Phys. A: Math. Gen. — 1997. — Vol. 30. — P. 2093.

[38] *Kempf A.and Mangano G.* Minimal length uncertainty relation and ultraviolet regularization / G. Kempf, A.and Mangano // Phys. Rev. D. — 1997. — Vol. 55. — P. 7909.

[39] *Nowicki A.* Relation of deformed nonlinear algebras with linear ones / A. Nowicki, V. M. Tkachuk // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — Vol. 47, No. 2.

[40] *Maslowski T.* Deformed Heisenberg algebra and minimal length / T. Maslowski, A. Nowicki, Tkachuk V. M. // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — Vol. 45, No. 7. — P. 075309.

[41] *Biedenharn L. C.* The quantum group $SU(2)_q$ and a q-analogue of the boson operators / L. C. Biedenharn // J. Phys. A: Math. and Gen. — 1989. — Vol. 22, No. 18. — P. L873.

[42] *Macfarlane A. J.* On q-analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $su(2)_q$ / A. J. Macfarlane // J. Phys. A: Math. and Gen. — 1989. — Vol. 22, No. 21. — P. 4581.

[43] *Kempf A.* On quantum field theory with nonzero minimal uncertainties in positions and momenta / A Kempf // J. Math. Phys. — 1997. — Vol. 38, No. 3. — P. 1347.

[44] *Maggiore M.* The algebraic structure of the generalized uncertainty principle / M Maggiore // Phys. Let. B. — 1993. — Vol. 319, No. 1. — P. 83.

[45] *Maggiore M.* Quantum groups, gravity, and the generalized uncertainty principle / M. Maggiore // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 49. — P. 5182–5187.

[46] *Kempf A.* Noncommutative geometric regularization / A. Kempf // Phys. Rev. D. — 1996. — Vol. 54. — P. 5174–5178.

[47] *Ali A. F.* Discreteness of space from the generalized uncertainty principle / A. F. Ali, S. Das, E. C. Vagenas // Phys.Lett.B. — 2009. — Vol. 678. — P. 497-499.

[48] *Das S.* Discreteness of space from GUP II: Relativistic wave equations / S. Das, E. C. Vagenas, A. F. Ali // Phys.Lett.B. — 2010. — Vol. 690. — P. 407-412.

[49] *Quesne C.* Lorentz-covariant deformed algebra with minimal length and application to the $(1+1)$-dimensional Dirac oscillator /

C. Quesne, V. M. Tkachuk // J.Phys. A. — 2006. — Vol. 39. — P. 10909.

[50] Exact solution of the harmonic oscillator in arbitrary dimensions with minimal length uncertainty relations / L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, T. Takeuchi // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol. 65. — P. 125027.

[51] *Dadic I.* Harmonic oscillator with minimal length uncertainty relations and ladder operators / I. Dadic, L. Jonke, Meljanac S. // Phys. Rev. D. — 2003. — Vol. 67. — P. 087701.

[52] *Quesne C.* Harmonic oscillator with nonzero minimal uncertainties in both position and momentum in a SUSYQM framework / C. Quesne, V. M. Tkachuk // J.Phys. A. — 2003. — Vol. 36. — P. 10373.

[53] *Quesne C.* More on a SUSYQM approach to the harmonic oscillator with nonzero minimal uncertainties in position and/or momentum / C. Quesne, V. M. Tkachuk // J.Phys. A. — 2004. — Vol. 37. — P. 10095.

[54] *Quesne C.* Dirac oscillator with nonzero minimal uncertainty in position / C. Quesne, V. M. Tkachuk // J.Phys. A. — 2005. — Vol. 38. — P. 1747.

[55] *Boumali A.* The exact solutions of a $(2+1)$-dimensional Dirac oscillator under a magnetic field in the presence of a minimal length / A. Boumali, Hassanabadib H. // Can. J. Phys. — Vol. 93, No. 5. — P. 542-548.

[56] *Fityo T.V.* One-dimensional Coulomb-like problem in deformed space with minimal length / T.V. Fityo, I. O. Vakarchuk, V. M. Tkachuk // J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — Vol. 39, No. 9. — P. 2143.

[57] *Pedram P.* A note on the one-dimensional hydrogen atom with minimal length uncertainty / P. Pedram // J. Phys. A. — 2012. — Vol. 45, No. 50. — Art. 505304. — 11 p.

[58] *Bouaziz D.* Regularization of the singular inverse square potential in quantum mechanics with a minimal length / D. Bouaziz, M. Bawin // Phys. Rev. A. — 2007. — Vol. 76, No. 3. — Art. 032112. — 13 p.

[59] *Bouaziz D.* Singular inverse square potential in arbitrary dimensions with a minimal length: Application to the motion of a dipole in a cosmic string background / D. Bouaziz, M. Bawin // Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 78, No. 3. — Art. 032110. — 8 p.

[60] *Brau F.* Minimal length uncertainty relation and hydrogen atom / F. Brau // J. Phys. A. — 1999. — Vol. 32. — P. 7691-7696.

[61] Hydrogen-atom spectrum under a minimal-length hypothesis / S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, T. Takeuchi // Phys. Rev. A. — 2005. — Vol. 72. — P. 012104.

[62] *Stetsko M. M.* Perturbation hydrogen-atom spectrum in deformed space with minimal length / M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 74. — P. 012101.

[63] *Stetsko M. M.* Corrections to the ns levels of the hydrogen atom in deformed space with minimal length / M. M. Stetsko // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 74. — P. 062105.

[64] *Stetsko M. M.* Orbital magnetic moment of the electron in the hydrogen atom in deformed space with minimal length / M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk // Phys. Lett. A. — 2008. — Vol. 372. — P. 5126-5130.

[65] *Stetsko M. M.* Scattering problem in deformed space with minimal length / M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk // Physical Review A. — 2007. — Vol. 76, No. 1. — P. 012707.

[66] *Brau F.* Minimal length uncertainty relation and gravitational quantum well / F. Brau, F. Buisseret // Phys. Rev. D. — 2006. — Vol. 74. — P. 036002.

[67] *Blado G.* Quantum wells and the generalized uncertainty principle / G. Blado, C. Owens, V Meyers // European Journal of Physics. — 2014. — Vol. 35, No. 6. — P. 065011.

[68] *Blado G.* Effects of the generalised uncertainty principle on quantum tunnelling / G. Blado, T. et.al. Prescott // European Journal of Physics. — 2016. — Vol. 37, No. 2. — P. 025401.

[69] *Fityo T.V.* WKB approximation in deformed space with minimal length / T.V. Fityo, I. O. Vakarchuk, V. M. Tkachuk // J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — Vol. 39, No. 2. — P. 379.

[70] *Fityo T.V.* The WKB approximation in the deformed space with the minimal length and minimal momentum / T.V. Fityo, I. O. Vakarchuk, V. M. Tkachuk // J. Phys. A: Math. Theor. — 2008. — Vol. 41, No. 4. — P. 045305.

[71] On the minimal length uncertainty relation and the foundations of string theory / L. N. Chang, Z. Lewis, D. Minic, T. Takeuchi // Adv. High Energy Phys. — 2011. — Vol. 2011. — Art. 493514. — 30 p.

[72] Short distance versus long distance physics: The classical limit of the minimal length uncertainty relation / S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic et al. // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol. 66, No. 2. — P. 026003.

[73] Classical implications of the minimal length uncertainty relation / S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic et al. // arXiv preprint hep-th/0209119. — 2002.

[74] Effect of the minimal length uncertainty relation on the density of states and the cosmological constant problem / L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, T. Takeuchi // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol. 65, No. 12. — P. 125028.

[75] *Guo X.* The classical limit of minimal length uncertainty relation: revisit with the Hamilton-Jacobi method / X. Guo, P. Wang, H. Yang // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2016. — Vol. 2016, No. 05. — P. 062.

[76] *Chashchina O. I.* Remark on orbital precession due to central-force perturbations / O. I. Chashchina, Z. K. Silagadze // Phys. Rev. D. — 2008. — Vol. 77. — P. 107502.

[77] *Silagadze Z.* Quantum gravity, minimum length and Keplerian orbits / Z. Silagadze // Phys. Let. A. — 2009. — Vol. 373, No. 31. — P. 2643–2645.

[78] *Tkachuk V. M.* Galilean and Lorentz transformations in a space with generalized uncertainty principle / V. M. Tkachuk // Foundations of Physics. — 2016. — P. 1–14.

[79] *Fityo T.* Statistical physics in deformed spaces with minimal length / T. Fityo // Phys. Lett. A. — 2008. — Vol. 372. — P. 5872.

[80] *Vakili B.* Thermostatistics with minimal length uncertainty relation / B. Vakili, M. A. Gorji // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2012. — Vol. 2012, No. 10. — P. P10013.

[81] *Shababi H.* The minimal length uncertainty and the nonextensive thermodynamics / H. Shababi, P. Pedram // Int. J.Theor. Phys. — 2016. — Vol. 55, No. 6. — P. 2813–2823.

[82] *Quesne C.* Composite system in deformed space with minimal length / C. Quesne, V. M. Tkachuk // Phys. Rev. A. — 2010. — Vol. 81, No. 1. — P. 012106.

[83] *Quesne C.* Deformed Heisenberg algebra with minimal length and the equivalence principle / C. Quesne, V. M. Tkachuk // Phys. Rev. A. — 2010. — Vol. 86, No. 6. — P. 062112.

[84] *Gnatenko Kh. P.* Composite system in noncommutative space and the equivalence principle / Kh. P. Gnatenko // Phys. Lett. A. — 2013. — Vol. 377, No. 43. — P. 3061-3066.

[85] *Гнатенко Х. П.* Оцінка верхньої межі для параметра некомутативності на основі принципу еквівалентності / Х. П. Гнатенко // Журн. фіз. дослідж. — 2013. — Т. 17. — Ст. 4001. — 5 с.

[86] *Gnatenko Kh. P.* Hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space / Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // Phys. Lett. A. — 2014. — Vol. 378, No. 47. — P. 3509-3515.

[87] *Gnatenko Kh. P.* Perturbation of the ns levels of the hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space / Kh. P. Gnatenko, Yu. S. Krynytskyi, V. M. Tkachuk // Mod. Phys. Lett. A. — 2015. — Vol. 30, No. 08. — Art. 1550033. — 12 p.

[88] *Gnatenko Kh. P.* Effect of coordinate noncommutativity on the mass of a particle in a uniform field and the equivalence principle / Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // Mod. Phys. Lett. A. — 2016. — Vol. 31, No. 5. — Art. 1650026. — 9 p.

[89] *Gnatenko Kh. P.* Physical systems in a space with noncommutativity of coordinates / Kh. P. Gnatenko // J. Phys.: Conf. Ser. — 2016. — Vol. 670. — Art. 012023. — 9 p.

[90] *Detournay S.* About maximally localized states in quantum mechanics / S. Detournay, C. Gabriel, Ph. Spindel // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol. 66. — P. 125004.

[91] *Kempf A.* Mode generating mechanism in inflation with a cutoff / A. Kempf // Phys. Rev. D. — 2001. — Vol. 63. — P. 083514.

[92] *Nouicer Kh.* Casimir effect in the presence of minimal lengths / Kh Nouicer // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2005. — Vol. 38, No. 46. — P. 10027.

[93] *Harbach U.* The casimir effect in the presence of a minimal length / U. Harbach, S. Hossenfelder // Phys. Let. B. — 2006. — Vol. 632, No. 2–3. — P. 379 - 383.

[94] *Frassino A. M.* Casimir effect in minimal length theories based on a generalized uncertainty principle / A. M. Frassino, O. Panella // Phys. Rev. D. — 2012. — Vol. 85. — P. 045030.

[95] *Dorsch G.* Maximally localized states in quantum mechanics with a modified commutation relation to all orders / G. Dorsch, J. A. Nogueira // International Journal of Modern Physics A. — 2012. — Vol. 27, No. 21. — P. 1250113.

[96] *Pedram P.* A higher order GUP with minimal length uncertainty and maximal momentum II: Applications / P. Pedram // Phys. Lett. B. — 2012. — Vol. 718, No. 2. — P. 638-645.

[97] *Miao Y.-G.* Maximally localized states and quantum corrections of black hole thermodynamics in the framework of a new generalized uncertainty principle / Y.-G. Miao, Y.-J. Zhao, Zhang Sh.-J. // Adv. High Energy Phys. — 2015. — Vol. 2015. — P. 627264.

[98] *Nozari K.* Minimal length, maximal momentum, and Hilbert space representation of quantum mechanics / K. Nozari, A. Etemadi // Phys. Rev. D. — 2012. — Vol. 85. — P. 104029.

[99] *Lubo M.* Maximally localized states and causality in noncommutative quantum theories / M. Lubo // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol. 65. — P. 066003.

[100] *Bonneau G.* Measurement of the hydrogen $1S$- $2S$ transition frequency by phase coherent comparison with a microwave cesium fountain clock / G. Bonneau, J. Faraut, G. Valent // Am. J. Phys. — 2001. — Vol. 69. — P. 322.

[101] *Ferkous N.* Regularization of the Dirac $\delta$ potential with minimal length / N. Ferkous // Phys. Rev. A. — 2013. — Vol. 88, No. 6. — Art. 064101. — 4 p.

[102] Simple quantum systems in the momentum representation / E. Guillaumín-España, A. L. Salas-Brito, R. P. Martínez y Romero, H. P. Núñez-Yépez // Rev. Mex. Fís. — 2001. — Vol. 47, No. 1. — P. 98–104.

[103] On the Coulomb-type potential of the one-dimensional Schrödinger equation / Y. Ran, L. Xue, S. Hu, R.-K. Su // J. Phys. A. — 2000. — Vol. 33, No. 50. — P. 9265–9272.

[104] *Nouicer Kh.* Coulomb potential in one dimension with minimal length: A path integral approach / Kh. Nouicer // J. Math. Phys. — 2007. — Vol. 48, No. 11. — Art. 112104. — 11 p.

[105] *Moshinsky M.* Penetrability of a one-dimensional Coulomb potential / M. Moshinsky // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1993. — Vol. 26, No. 10. — P. 2445.

[106] *Reyes J. A.* 1D Schrodinger equations with Coulomb-type potentials / J. A. Reyes, Castillo-Mussot M. // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1999. — Vol. 32, No. 10. — P. 2017.

[107] *Pedram P.* One-dimensional hydrogen atom with minimal length uncertainty and maximal momentum / P. Pedram // EPL (Europhysics Letters). — 2013. — Vol. 101, No. 3. — P. 30005.

[108] Fundamentals of Quantum mechanics / Ed. by V. A. Fock. — Moscow : Mir Publishers, 1983.

[109] *Parthey C. G. et al.* Improved measurement of the hydrogen $1s-2s$ transition frequency / C. G. et al. Parthey // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Nov. — Vol. 107. — P. 203001.

[110] *Matveev A. et. al.* Precision measurement of the hydrogen $1s-2s$ frequency via a 920-km fiber link / A. et. al. Matveev // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Vol. 110. — P. 230801.