Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Васюта Василь Михайлович

УДК 530.145, 537.8

ДИСЕРТАЦІЯ
КВАНТОВІ СИСТЕМИ У ПРОСТОРІ ЗІ СПІНОВОЮ НЕКОМУТАТИВНІСТЮ КООРДИНАТ

01.04.02 — теоретична фізика
10 Природничі науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

__________ В. М. Васюта

Науковий керівник Ткачук Володимир Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор

ЛЬВІВ — 2017

АНОТАЦІЯ

Васюта В. М. Квантові системи у просторі зі спіновою некомутативністю координат. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико–математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.04.02 "Теоретична фізика" — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2017.

Робота присвячена систематичному вивченню квантових та класичних (зокрема електромагнітних) систем у просторі зі спіновою некомутативністю координат.

З метою відновлення інваріантності відносно поворотів (Лоренц–інваріантності) запропоновано дві нові некомутативні алгебри (нерелятивістську та релятивістську) зі спіновою некомутативністю координат. Показано, що у просторі з такими алгебрами присутня мінімальна довжина, знайдено її значення. Для релятивістської алгебри запропоновано метод побудови некомутативних функцій як заміну зірковому добутку Мояли, що використовується у просторі з канонічною некомутативністю. Досліджено математичні властивості добутку введених некомутативних функцій.

У просторі зі спіновою некомутативністю координат точно розв'язано гармонічний осцилятор, знайдено спектр і хвильові функції задачі. Показано, що спінова некомутативність знімає виродження рівнів стосовно суми $(2n + l)$ головного та орбітального квантових чисел. При деяких, достатньо великих, значеннях параметра некомутативності основний стан виявляється двократно вироджений.

У рамках теорії збурень досліджено спектр атома водню у просторі зі спіновою некомутативністю координат. Показано, що для рівнів з $l \neq 0$ спінова некомутативність знімає виродження по орбітальному квантовому числу. Для знаходження поправок до s–рівнів розвинуто модифіковану теорію збурень. Перші поправки до s–рівнів атома водню внаслідок спінової некомутативності виявилися логарифмічно залежними від параметра спінової некомутативності.

На основі отриманих значень для поправок до спектру атома водню та результатів експериментального вимірювання частоти двофотонного $2s - 1s$ переходу в атомі водню знайдено верхню межу параметра спінової некомутативності. Отримане обмеження порівняно з аналогічними обмеженнями, знайденими для параметра канонічної некомутативності.

Досліджено часову еволюцію квантової частинки в обернено квадратичному потенціалі. Показано, що квантовомеханічне середнє $\langle r^2 \rangle$ еволюціонує як квадратичний поліном по часу. На основі отриманих виразів знайдено умови падіння частинки на притягальний центр. Добре відомо, що притягальний обернено квадратичний потенціал не допускає стаціонарних станів, однак показано, що існують квазістаціонарні стани. Такі стани еволюціонують зі сталим у часі $\langle r^2 \rangle$, тобто не падають на центр і не віддаляються від нього. Наведено приклад такого квазістаціонарного стану.

Показано, що у випадку квантового обернено квадратичного потенціалу присутня межа падіння — частинка принципово не може впасти на притягальний обернено квадратичний потенціал для констант взаємодії, менших за деяке критичне значення.

Отримані вирази для еволюції квантової частинки застосовано для опису експерименту з падінням нейтральних атомів літію на притягальний обернено квадратичний потенціал, створений тонкою зарядженою ниткою. Однак при параметрах проведеного експерименту виміряти квантову межу падіння є складно. Тому нами було запропоновано деякі модифікації експерименту, які б могли полегшити спостереження квантової межі падіння експериментально.

Розглянуто обернено квадратичний потенціал у просторах з різними варіантами алгебр зі спіновою некомутативністю координат. Показано, що потенціальна, а отже і повна, енергія частинки в обернено квадратичному потенціалі у просторі зі спіновою некомутативністю обмежена знизу. З іншої сторони, використовуючи варіаційний метод, знайдено верхню межу для енергії основного стану. Таким чином, показано, що для достатньо великих значень константи взаємодії, для обернено квадратичного потенціалу у просторі зі спіновою некомутативністю виникають зв'язані стани замість падіння частинки на притягальний центр.

Також побудовано теорію електромагнітного поля у просторі зі спіновою некомутативністю координат. Знайдено тензор такого некомутативного поля, лагранжіан та дію. Побудована дія є Лоренц–інваріантною та $\mathcal{C}-$, $\mathcal{P}-$, $\mathcal{T}-$ інваріантною. Крім того отримана дія є інваріантною відносно деяких калібрувальних перетворень, вигляд яких знайдено з умови калібрувальної інваріантності коваріантної похідної. Маючи калібрувальні перетворення, за допомогою методу Ньотер знайдено модифікований закон збереження електричного струму. Варіюючи дію, отримано точні рівняння поля. Ці рівняння є нелінійними та містять похідні всіх порядків, але тим не менше є точними.

В рамках побудованої електродинаміки розглянуто деякі електромагнітні системи. Показано, що спінова некомутативність координат не впливає на електростатичне поле одного точкового заряду. Але тим не менше, внаслідок нелінійності теорії, електростатичне поле точкового заряду взаємодіє з зовнішнім магнітним полем. Така взаємодія приводить до анізотропного екранування заряду магнітним полем. Також присутній і зворотній ефект — електричне поле точкового заряду зменшує магнітне поле поблизу заряду.

Нелінійність електродинаміки призводить до взаємодії двох плоских хвиль. Для розгляду цієї задачі нами було узагальнено добре відомий з класичної механіки метод Боголюбова–Крилова на теорію поля. Аналіз в рамках цього методу показує, що окрім очікуваної генерації вищих гармонік, спінова некомутативність модифікує хвильовий вектор деяких компонент взаємодіючих хвиль.

Незважаючи на складність отриманих рівнянь, нам вдалося знайти точний розв'язок задачі про поширення електромагнітної хвилі у постійному електричному та магнітному полях. Зовнішні поля змінюють дисперсійне співвідношення для плоскої хвилі, але не продукують вищих гармонік і двопроменезаломлення. Цікаво, що в цій задачі, хвиля не модифікує зовнішнє постійне поле, як це має місце у випадку точкового заряду в постійному полі.

Ключові слова: некомутативність, атом водню, гармонічний осцилятор, обернено квадратичний потенціал, падіння на притягальний центр, некомутативна теорія поля, нелінійна електродинаміка.

ABSTRACT

Vasyuta V. M. Quantum systems in space with spin noncommutativity of coordinates. — Manuscript copyright.

Thesis for the Candidate of Physics and Mathematics Sciences Degree (Doctor of Philosophy), specialty 01.04.02 —- Theoretical physics – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2017.

The work is devoted to the systematic investigation of quantum and classical (in particular electromagnetic) systems in space with spin noncommutativity of coordinates.

To restore rotational invariance (Lorentz–invariance) we propose two new algebras (nonrelativistic and relativistic) with spin noncommutativity of coordinates. It is shown, that in space with these algebras the minimal length is present. Its value is found for both versions of noncommutative algebras. For a relativistic algebra we propose a scheme of constructing a noncommutative function. This scheme is an alternate way to the Moyal star product, which is widely used in space with canonical noncommutativity. Also mathematical properties of a product of such functions are investigated.

In space with spin noncommutativity of coordinates a harmonic oscillator is solved exactly, a spectrum and wave functions of the problem are found. It is shown, that spin noncommutativity breaks degeneracy of energy levels relatively to a sum $(2n + l)$ of principal and orbital quantum

numbers. For some, sufficiently large, values of a parameter of noncommutativity a ground state is twice degenerated.

Within the perturbation theory a spectrum of the Hydrogen atom in space with spin noncommutativity of coordinates is studied. It is shown, that for levels with $l \neq 0$ spin noncommutativity breaks degeneracy of energy levels relatively to orbital quantum number. To find corrections to s–levels a modified perturbation theory is developed. First non–zero corrections to energy of s–levels due to spin noncommutativity depends logarithmically upon the parameter of spin noncommutativity.

Using obtained results for corrections to the spectrum of the Hydrogen atom and results of experimental measurements of the frequency of the two-photon $2s - 1s$ transition in Hydrogen atom an upper estimation for the parameter of spin noncommutativity was established. The estimation is compared with analogous restrictions, that were found for a parameter of canonical noncommutativity.

Time evolution of a quantum particle in an attractive inverse square potential is investigated. It is found, that quantum mechanical average $\langle r^2 \rangle$ evolves as quadratic polynomial with time. Based on obtained results conditions of falling into the attractive potential are found. It is well known, that an attractive inverse square potential does not produce stationary states, but we show, that some quasi–stationary states exists. Such states evolve with $\langle r^2 \rangle$ being constant in time, namely they neither fall into the center nor escape from it. An example of such a quasi–stationary state is given.

It is shown, that in quantum case a limit of falling exists — a particle cannot fall into an attractive inverse square potential for coupling constants smaller than some critical value.

Obtained results for an evolution of a quantum particle in an inverse square potential are applied for description of the experiment, where neutral Lithium atoms fall into an inverse square potential, created by a thin charged wire. However for parameters of the experiment it is hard to measure the quantum limit of falling. Therefore we propose several modifications of the experiment, which may help in observing the quantum limit of falling experimentally.

An attractive inverse square potential is considered in space with different versions of spin noncommutative algebra. It is shown, that potential, and as conclusion total, energy of a particle in an inverse square potential in space with spin noncommutativity is bounded from below. From the other hand, using the variational method, an upper estimation for a ground state energy is found. Thereby it is shown, that for sufficiently large coupling constants, in an attractive inverse square potential instead of falling of a particle into the center bound states appear.

Also a theory of electromagnetic field in space with spin noncommutativity of coordinates is built. Tensor of the electromagnetic field, the Lagrange function and action are found. The constructed action is Lorentz– and $\mathcal{C}-$, $\mathcal{P}-$, $\mathcal{T}-$ invariant. Moreover it is invariant relatively to some gauge transformations, which were found from the condition of gauge invariance of covariant derivative. From the expression for gauge transformation, using the Noether method a modified conservation law of electrical current is found. From the least action principle exact field equations are received. These equations are nonlinear and contain derivatives of all orders, nevertheless they are exact.

Within the considered electrodynamics several electromagnetic systems are considered. It is shown, that spin noncommutativity does not affect an electrostatic field of a single point charge. Nevertheless, because of nonlinearity of considered theory, the electrostatic field of the point charge interacts with an external magnetic field. Such an interaction leads to anisotropic screening of the charge by magnetic field. Also an opposite effect is present — the electric field of the point charge effectively decreases a strength of the magnetic field in the vicinity of the charge.

Nonlinearity of the electrodynamics leads to interaction of two plane waves. To consider the problem we generalized the well–known from classical mechanics Bogolyubov—Krylow method on field theory. A consideration within this method shows, that besides generation of the higher harmonics, spin noncommutativity modifies a wave vector of some components of the interacting waves.

Despite the complexity of obtained field equations, we find an exact solution of a problem of a plane wave propagation in constant electric and magnetic fields. External fields only change a dispersion law, but do not produce higher harmonics and birefringence. It is interesting, that in this problem, the wave does not modify external fields, how it is in the case of a point charge in an external magnetic field.

Key words: noncommutativity, Hydrogen atom, harmonic oscillator, inverse square potential, falling into an attractive center, noncommutative field theory, nonlinear electrodynamics.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] Васюта В. М. Точний розв'язок гармонічного осцилятора в просторі зі спіновою некомутативністю // Журн. фіз. дослідж.— 2013.— Т. 17, №3.— Ст. 3001.— 4 с.

[2] Васюта В. М. Поправки до енерґетичного спектра атома водню у просторі зі спіновою некомутативністю координат // Журн. фіз. дослідж.— 2014.— Т. 18, №4.— Ст. 4001.— 7 с.

[3] Vasyuta V. M., Tkachuk V. M. Classical electrodynamics in a space with spin noncommutativity of coordinates // Phys. Lett. B.— 2016.— Vol. 761.— P. 462-468.

[4] Vasyuta V. M., Tkachuk V. M. Falling of a quantum particle in an inverse square attractive potential // Eur. Phys. J. D.— 2016.— Vol. 70, No. 12.— Art. 267.— 5 p.

[5] Васюта В. М., Ткачук В. М. Обернено квадратичний потенціал у просторі зі спіновою некомутативністю координат // Укр. фіз. журн.— 2017.— Т. 62, №4.— С. 343-348.

[6] Vasyuta V. M. Quantum systems in space with spin noncommutativity of coordinates // in: Trans-European School of High Energy Physics, Basivka, Lviv Region, Ukraine, July 17-24, 2014: Proceedings.— 2014.— 155-157.

[7] Васюта В. Узагальнена нерелятивістська спінова некомутативність // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоре-

тичної та експериментальної фізики "Еврика-2013 Львів, 15-17 травня 2013 р.: Тези доповідей.— С. F2.

[8] Vasyuta V. M. Exactly solvable problems in space with spin noncommutativity // International Conference "Quantum Groups and Quantum Integrable Systems", June 18 – 21, 2013, Kiev, Ukraine: Program and Abstracts.— P. 48.

[9] Vasyuta V. M. Spin noncommutativity of coordinates from Barut-Zanghi model // V Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics", December 24-27, 2013, Kyiv, Ukraine: Program & Proceedings.— P. 27.

[10] Васюта В. М. Поправки до енергетичного спектру атома водню в просторі зі спіновою некомутативністю // 14-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 4-6 червня 2014. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез.— С. 48.

[11] Васюта В. Атом водню в просторі зі спіновою некомутативністю координат [Різдвяні дискусії 2015, Львів, 12-13 січня 2015] // Журн. фіз. дослідж.— 2015.— Т. 19, №1/2.— С. 1998-4.

[12] Васюта В. М. Час падіння квантової частинки на потенціал $-\gamma/r^2$ // 15-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 4-5 червня 2015. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез.— С. 41.

[13] Vasyuta V. Hydrogen atom in space with spin noncommutativity // XXXV Max Born Symposium "The Planck Scale II", Wroclaw, Poland, 7-12 September 2015: Book of abstracts.— [P. 4].

[14] Vasyuta V. M. Evolution of a quantum particle in an inverse square

potential // Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 19-22 October 2015, Zielona Góra, Poland: Book of abstracts.— [P. 37].

[15] Васюта В. Електродинаміка у просторі зі спіновою некомутативністю координат [Різдвяні дискусії 2016, Львів, 11-12 січня 2016] // Журн. фіз. дослідж.— 2016.— Т. 20, №1/2.— С. 1998-4.

[16] Vasyuta V. M. Field equations in space with spin noncommutativity of coordinates// Workshop on Current Problems in Physics: Program and Abstracts, Lviv, 05–07 July 2016.— P. 18-19.

[17] Васюта В. М. Електромагнітні системи у просторі зі спіновою некомутативністю координат // 17-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 8-9 червня 2017. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез.— С. 35.

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми. Наприкінці минулого століття майже одночасно в теоріях суперструн [1, 2] та квантової гравітації [3, 4] з'явилася ідея некомутативності операторів координат на малих (планківських) масштабах. Струнна аргументація гіпотези некомутативності координат викликала інтенсивні дослідження різноманітних фізичних систем в некомутативному просторі. Вже в перші роки після вищезгаданих публікацій було досліджено ряд задач з класичної [5, 6] та квантової механіки [7–10], електродинаміки [8, 11, 12], теорії поля [13–16], тощо. Такі дослідження проводяться й надалі, наприклад [17–23].

Також важливою прикладною задачею є пошук ефективних некомутативних моделей для різноманітних явищ у просторі з комутативними координатами. Так, наприклад, було знайдено зв'язок некомутативної теорії поля з теорією еніонів [24], теорією калібрувального поля [25, 26], ядерними моделями [27, 28].

Однак широкодосліджувана алгебра з канонічною некомутативністю [1] володіє рядом проблем як фундаментального так і технічного характеру. Найбільшою з проблем є порушення інваріантності відносно поворотів системи координат (Лоренц–інваріантності для релятивістського випадку) даної алгебри та, як наслідок, будь–яких фізичних теорій, побудованих у відповідному просторі. Крім того канонічна некомутативність веде до нелокальності, а також порушує мікропричинність, створюючи кореляцію між значеннями полів в точках, розділених просторовоподібним інтервалом. До технічних проблем можна віднести, наприклад, проблему впорядкування.

Тому останнім часом починають з'являтися все більше альтернативних до канонічної некомутативності алгебр, за допомогою яких намагаються вирішити одну чи більше вищезгаданих проблем, серед яких найбільша увагу приділяється відновленню інваріантності відносно поворотів [3, 29–31].

Одним з таких напрямів є так звані алгебри зі спіновою некомутативністю координат, де вводяться некомутативні координати шляхом "змішування" звичайних координат з операторами спіну [32–34]. В цьому контексті особливо цікавим є питання про дослідження впливу спінової некомутативності координат на відомі задачі та системи, а також порівняння ефектів спінової некомутативності з аналогічними ефектами, спричиненими канонічною некомутативністю.

Крім того фундаментальним питанням є спосіб побудови задачі в некомутативному просторі. Добре відомо, що при побудові гамільтоніана квантовомеханічної задачі чи функції Лагранжа деякого поля з необхідністю виникає проблема впорядкування некомутативних операторів координат. В просторі з канонічною некомутативністю ця проблема традиційно вирішується або простою заміною комутативних координат на некомутативні (для прикладу [8]), або введенням зіркового добутку Мояли (для прикладу [13, 16]). Певні варіанти спінової некомутативності дозволяють вирішити цю проблему в дещо інший спосіб.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та відповідно до держбюджетних тем

Фф-110Ф "Нові ефекти у квантових рідинах і газах та системах з деформованою алгеброю Гайзенберґа" (2013–2014 рр., номер держреєстрації 0112U001275), Фф-30Ф "Класичні і квантові системи з нестандартними комутаційними співвідношеннями і статистиками" (2016–2017 р., номер держреєстрації 0116U001539) та проекту ДФФД Ф64 "Класичні та квантові системи за межами стандартних підходів" (2015-16 р., номери держреєстрації 0115U004838, 0116U005055).

Мета і завдання дослідження. Головною метою дисертаційної роботи є знаходження впливу спінової некомутативності координат на поведінку квантових та класичних систем, побудова нових алгебр зі спіновою некомутативністю координат, в рамках яких спрощується дослідження фізичних систем, встановлення верхньої межі для параметра некомутативності, дослідження впливу спінової некомутативності на сингулярні потенціали.

Для досягнення мети роботи поставлено наступні задачі: знайти спектр енергії гармонічного осцилятора та атома водню у просторі зі спіновою некомутативністю координат, дослідити можливість падіння квантової частинки на притягальний центр обернено квадратичного потенціалу у просторі зі спіновою некомутативністю координат, побудувати нові алгебри зі спіновою некомутативністю, встановити верхню оцінку параметра спінової некомутативності виходячи зі сучасних вимірювань.

Значна частина роботи присвячена дослідженню електромагнітного поля в просторі зі спіновою некомутативністю. Завданням цієї частини роботи є знаходження рівнянь поля в просторі зі спіновою некомутативністю, дослідження їх структури та їх розв'язок для певних задач.

Об'єктом дослідження є квантові та класичні системи у просторі зі спіновою некомутативністю координат. *Предметом дослідження* є властивості та поведінка фізичних систем у просторі зі спіновою некомутативністю координат. *Методами дослідження* є методи теорії збурень, метод представлення некомутативних координат через оператори, що задовільняють алгебру Гайзенберга, метод Ньотер, метод Боголюбова–Крилова.

У першому розділі подано коротку історію ідеї некомутативності координат взагалі та спінової некомутативності зокрема, мотивацію дослідження систем в некомутативному просторі, а також висвітлено сучасний стан даної проблеми.

У другому розділі запропоновано дві нові алгебри зі спіновою некомутативністю. Перша з них, нерелятивістська, будується шляхом зсуву комутативних координат на тривимірний аналог вектора Паулі–Любанського. Інша, релятивістська, отримується за допомогою додавання до координат чотиривимірного простору відповідних матриць Дірака. Для обох алгебр знайдено значення мінімальної довжини. Для релятивістської алгебри запропоновано відображення з простору комутативних функцій в простір некомутативних, досліджено властивості такого відображення.

У третьому розділі розглянуто вплив спінової некомутативності на такі добре вивчені квантові системи як гармонічний осцилятор та атом водню. Точно розв'язано гармонічний осцилятор в просторі зі спіновою некомутативністю координат. Також проаналізовано поправки до спектра атома водню спричинені спіновою некомутативністю. Для отримання коректного значення поправок до s–рівнів було розроблено модифіковану теорію збурень. На основі отриманих теоретичних результатів та даних експериментальних вимірювань частоти двофотонного $2s-1s$ переходу в атомі водню знайдено верхню оцінку параметра некомутативності.

У четвертому розділі досліджено часову еволюцію квантової частинки в обернено квадратичному потенціалі. Отримані результати порівняно з експериментальними падіння нейтральних атомів літію на тонку заряджену нитку. Показано існування квантової границі падіння: квантова частинка не падатиме на обернено квадратичний потенціал, якщо константа взаємодії (в експерименті з атомами літію — заряд нитки) менша, ніж деяке граничне значення. Запропоновано методи для полегшення спостереження квантової границі падіння експериментально. Показано, що у просторі зі спіновою некомутативністю координат обернено квадратичний потенціал регуляризується, і частинка не падає на центр, а натомість утворюються стаціонарні рівні. Оцінено значення енергії основного стану для частинки в обернено квадратичному потенціалі для різних варіантів алгебр зі спіновою некомутативністю координат.

У п'ятому розділі побудовано дію для електромагнітного поля у просторі зі спіновою некомутативністю координат. Знайдено калібрувальні перетворення для такого поля. Отримано модифікований закон збереження струму. Знайдено точні у всіх порядках розкладу по параметру спінової некомутативності рівняння електромагнітного поля, які є нелінійними. Також розглянуто ряд електромагнітних систем у просторі зі спіновою некомутативністю координат. Зокрема, точно розв'язано задачу про поширення плоскої хвилі в постійному магнітному та електричному полях. В рамках теорії збурень розглянуто потенціал електричного поля точкового заряду, поміщеного в магнітне поле та задачу про взаємодію двох плоских хвиль. Результати, отримані в просторі зі спіновою некомутативністю порівняно з аналогічними результатами для простору з канонічною некомутативністю.

Дисертаційна робота завершується **Висновками** та **Списком використаних джерел**.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі запропоновано два нових типи алгебр зі спіновою некомутативністю. Вперше знайдено вираз для мінімальної довжини у відповідних некомутативних просторах. Запропоновано новий альтернативний до зіркового добутку Мояли спосіб побудови некомутативних функцій. Також в роботі вперше точно розв'язано квантовий просторовий осцилятор та вперше в рамках теорії збурень розглянуто атом водню в просторі зі спіновою некомутативністю координат.

Вперше досліджено часову еволюцію квантової частинки в обернено квадратичному потенціалі. Вперше показано наявність квантової границі падіння для обернено квадратичного потенціалу, а саме — квантова частинка не падає на притягальний центр, якщо константа взаємодії менша за певне граничне значення. Вперше розглянуто обернено квадратичний потенціал у просторі зі спіновою некомутативністю координат і показано, що в такому просторі частинка замість падіння на центр утворюватиме зв'язані стани.

Вперше з першопринципів побудовано класичну електродинаміку в просторі зі спіновою некомутативністю координат. Знайдено точні рівняння електромагнітного поля у всіх порядках розкладу по параметру некомутативності.

Практичне значення отриманих результатів. Результати, отримані у роботі, можуть бути використані для покращення верхньої оцінки параметра некомутативності шляхом їх порівняння з даними експериментальних вимірювань. Вирази для часу та умови падіння частинки на обернено квадратичний потенціал полегшать проектування експерименту для спостереження квантових ефектів падіння на центр.

Запропонований у роботі метод побудови електродинаміки в просторі зі спіновою некомутативністю дає можливість побудови теорії довільного поля в просторі зі спіновою некомутативністю координат та знаходження відповідних точних рівнянь поля, які можна використати для пошуку нетривіальних непертурбативних польових конфігурацій (інстантонів, скірміонів, тощо). Крім того, наявність точних рівнянь електромагнітного поля в просторі зі спіновою некомутативністю відкриває широкі можливості для дослідження високоенергетичних процесів (випромінювання атома в сильному магнітному полі магнетарів, явище дисперсії високоенергетичних гамма–променів у вакуумі, тощо) та знаходження верхньої оцінки параметра некомутативності.

Особистий внесок здобувача. Постановку завдань дослідження здійснив науковий керівник роботи проф. В. М. Ткачук. Всі викладені в дисертації оригінальні результати отримані автором самостійно або при його безпосередній участі. У роботах, виконаних зі співавтором — науковим керівником, здобувачеві належить:

- знаходження точного розв'язку гармонічного осцилятора у просторі зі спіновою некомутативністю координат [35]; розрахунок поправок до спектру атома водню у просторі зі спіновою некомутативністю координат [36]; розрахунок мінімальної довжини у просторі з відповідною алгеброю.

- знаходження умов падіння на притягальний обернено квадратичний потенціал та розрахунок часу падіння [37].

- знаходження верхньої та нижньої оцінки енергії основного стану частинки в обернено квадратичному потенціалі у просторі з різними алгебрами зі спіновою некомутативністю координат [38].

- знаходження дії для електромагнітного поля у просторі зі спіновою некомутативністю координат, знаходження калібрувальних перетворень, знаходження рівнянь руху та їх розв'язання для наступних систем: поле точкового заряду в магнітному полі, взаємодія двох електромагнітних хвиль, дисперсія електромагнітної хвилі в зовнішньому електричному та магнітному полях [39].

Результати статей, їх інтерпретацію та застосовність використаних підходів співавтори обговорювали на паритетних засадах.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включені до дисертації, здобувач представляв особисто на таких конференціях та семінарах:

- Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика–2013" (Львів, 2013) [40];
- International Conference "Quantum Groups and Quantum Integrable Systems" (Київ, 2013) [41];
- Week of Doctoral Students 2013 (Prague, 2013);
- V Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics" (Київ, 2013) [42];
- Trans–European School of High Energy Physics (Басівка, Львівська обл., 2014) [43];
- 14–та Всеукраїнська школа–семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2014) [44];
- Різдвяні дискусії 2015 (Львів, 2015) [45];

- 15–та Всеукраїнська школа–семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2015) [46];

- XXXV Max Born Symposium "The Planck Scale II" (Wroclaw, 2015) [47];

- Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra - Lviv (Zielona Góra, 2015) [48];

- Різдвяні дискусії 2016 (Львів, 2016) [49];

- Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2015 рік (Львів, 2016);

- Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra - Lviv (Lviv, 2016) [50].

- Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2016 рік (Львів, 2017);

- Різдвяні дискусії 2017 (Львів, 2017) [51];

- 17–та Всеукраїнська школа–семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 2017) [52];

Подані у роботі результати були представлені на наукових семінарах у Вроцлавському університеті та університеті Зєльоної Гури, неодноразово обговорювали на наукових семінарах кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка, а також були апробовані під час наукових стажувань за кордоном.

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані у п’яти журнальних статтях [35–39], матеріалах конференції [43] та 14 тезах конференцій [40–42, 44–50, 52].

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Гіпотеза, що оператори координат на малих відстанях не комутують, вперше з'явилася в роботах Снайдера [53,54] як спроба уникнення ультрафіолетових розбіжностей в квантовій теорії поля, хоча дещо раніше некомутативність як математичний трюк використав Пейерс для розгляду зарядженої частинки в сильному магнітному полі [55].

Однак ідея некомутативності координат як фундаментальної властивості простору–часу довгий час не розвивалася, і лише на кінець 1970–их років було сформульовано основи некомутативної геометрії, як виключно математичної теорії.

Інтерес у фізиці до некомутативності відновився з публікацією [1], де було показано, що при наявності зовнішнього B–поля Нав'є–Шварца, координати на D–брані стають некомутативними з комутатором

$$[X_i, X_j] = i\theta_{ij} \tag{1.1}$$

з правою частиною, що визначається рівністю

$$\theta_{ij} = \frac{1}{T}\left([\widehat{g} + \widehat{B}/T]^{-1}\right)^{(a)}_{ij}, \tag{1.2}$$

де $\widehat{g}$ та $\widehat{B}$ — матриці метричного тензора цільового (target) простору та напруженості поля Нав'є–Шварца відповідно, T — напруження (tension) брани, а індекс (a) позначає антисиметричну частину матриці. Якщо магнітне поле постійне, то (1.2) теж постійна (розглядається рух в евклідовому просторі, де метричний тензор в декартовій системі координат сталий). Некомутативність (1.1) зі сталою правою частиною координатного комутатора називають канонічною некомутативністю. Також, канонічна некомутативність координат з'являється при певному варіанті компактифікації IKKT (з перших літер авторів Ішібаші–Каваї–Кітазава–Цучія, Ishibashi–Kawai–Kitazawa–Tsuchiya) М-теорії [2].

Цікаво, що за допомогою некомутативності координат в комутативні теорії можна включити поняття так званої мінімальної довжини, яка з необхідністю виникає при квантовому розгляді гравітаційного поля [3, 4]. Щоправда, в даних роботах автори розглядають некомутативність типу

$$[X_\mu, X_\nu] = i\widehat{Q}_{\mu\nu}, \tag{1.3}$$

де $\widehat{Q}$ вже є тензором, який відповідним чином перетворюється при перетворенні координат та володіє певними комутаційними співвідношеннями з іншими операторами динамічних величин. Однак через феноменологічну причину введення некомутативність (1.3) набагато менше досліджується, ніж канонічна некомутативність (1.1).

Некомутативність у квантовій механіці природно вводять, деформуючи комутатори операторів динамічних величин. Припускаючи, що оператори імпульсу не модифіковуються відносно їхнього звичного значення

$$P_i = p_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{1.4}$$

можна записати повну алгебру канонічної некомутативності у наступному вигляді

$$[X_i, X_j] = i\theta_{ij}, \tag{1.5}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.6}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{1.7}$$

де δ_{ij} — символ Кронекера, θ_{ij} — стала матриця, тут і всюди великими літерами (X, P, тощо) позначаються оператори динамічних величин, що задовільняють деформовану алгебру.

Основною проблемою канонічної некомутативності (1.5)–(1.7) зі сталою правою частиною координатного комутатора є її неінваріантність відносно поворотів системи координат, а, як наслідок, існування виділеного в координатному просторі напрямку.

Інваріантності відносно поворотів в некомутативних алгебрах можна досягнути, використовуючи в правій частині координатного комутатора (1.1) складніші, ніж константа, конструкції. Зокрема, при використанні генераторів поворотів отримуємо алгебру Снайдера

$$[X_\mu, X_\nu] = il^2 L_{\mu\nu}, \tag{1.8}$$

де $L_{\mu\nu}$ — генератори поворотів Лоренца, l — малий параметр [53, 54].

При заміні в (1.1) констант $\theta_{\mu\nu}$ на комутуючі між собою оператори $\widehat{Q}_{\mu\nu}$ (1.3), які перетворюються як компоненти тензора і разом з X_μ є координатами розширеного релятивістського 10–вимірного простору, отримуємо так звану DFR–алгебру (абревіатура складена з перших літер прізвищ авторів: Doplicher, Fredenhagen, Roberts) [3, 4].

Забезпечити інваріантність відносно поворотів в некомутативних алгебрах можна також, сконструювавши θ_{ij} з векторів координат, які описують рух частинки у внутрішньому просторі. Така алгебра, в припущенні, що внутрішні координати є координатами квантового гармонічного осцилятора була запропонована в [31].

Подальші версії алгебр з некомутативними координатами стосуються додавання координатної залежності в праву частину комутатора (1.5), наприклад як в [30]:

$$[X_i, X_j] = i\theta\omega_{ij}(X), \tag{1.9}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.10}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{1.11}$$

де ω_{ij} вже є функцією X.

В літературі досліджено декілька часткових випадків некомутативності (1.9). Найочевидніший варіант — це некомутативність типу алгебри Лі, яка отримується також в моделях нечіткого простору (fuzzy space) [56]

$$[X_i, X_j] = iC_{ij}^k X_k, \tag{1.12}$$

де C_{ij}^k — деякі константи.

Існують роботи, в яких було досліджено певні, складніші і загальніші, ніж (1.12), некомутативні координати. Наприклад в [57] було розглянуто атом водню у просторі з координатним комутатором

$$[X_i, X_j] = i\varepsilon_{ij}^k X_k f(X^2), \tag{1.13}$$

де $f(X^2)$ — деяка функція квадрата радіус–вектора.

Однак такі алгебри, в яких присутня залежність правої частини координатного комутатора $\omega_{ij}(X)$ від координат, володіють додатковою проблемою — вони перестають бути трансляційно–інваріантними.

Разом з тим можна побудувати достатньо широкий клас алгебр з так званою спіновою некомутативністю координат (в англомовній літературі ще немає усталеного означення, тому можна зустріти два: spin noncommutativity, noncommutativity due to spin), в яких права частина координатного комутатора має вигляд деякої функції спінових операторів та операторів імпульсу. За побудовою такі алгебри є інваріантними відносно поворотів (Лоренц–інваріантними в релятивістському випадку). Крім того, вони також володіють мінімальною довжиною та є трансляційно–інваріантними.

Вперше алгебру зі спіновою некомутативністю було запропоновано в [32] як трюк для врахування дипольної взаємодії в бозе–конденсаті. Запропонована алгебра має вигляд

$$[X_i, X_j] = i\theta^2 \varepsilon_{ijk} s_k, \tag{1.14}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.15}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{1.16}$$

$$[s_i, s_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} s_k, \tag{1.17}$$

$$[X_i, s_j] = i\theta\varepsilon_{ijk} s_k, \tag{1.18}$$

де θ — параметр спінової некомутативності, ε_{ijk} — одиничний повністю антисиметричний тензор, s_k — k–та компонента оператора спіну. Така алгебра отримується додаванням до комутативних координат оператора спіну та відсутності модифікації оператора імпульсу

$$X_i = x_i + \theta s_i, \tag{1.19}$$

$$P_i = p_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{1.20}$$

Легко бачити, що оскільки оператор спіну є вектором (взагалі кажучи псевдовектором), то запропонована алгебра є інваріантною відносно поворотів.

В цій ж роботі [32] розглянуто суперсиметричне розширення гармонічного осцилятора в просторі з алгеброю (1.14)–(1.18) і отримано точну хвильову функцію основного стану такого осцилятора. Показано, що основний стан осцилятора є безмежнократно вироджений стосовно деякого набору квантових чисел, які виникають в задачі. Крім того, в основному стані спонтанно порушена симетрія відносно поворотів системи. Було зроблено передбачення про існування нової фази в системах з домінуючою диполь-дипольною взаємодією (наприклад бозе–конденсат ^{52}Cr), які можуть бути змодельовані таким гамільтоніаном.

Алгебра (1.14)–(1.18) досліджувалася ще у кількох роботах, зокрема, в [58] було розглянуто розсіяння частинки на магнітному полі безмежно довгого і тонкого соленоїда (ефект Ааронова–Бома) у відповідному просторі, показано калібрувальну інваріантність відповідного поля в лінійному наближені по θ, в цьому ж наближенні розв'язано відповідне рівняння Паулі. Показано, що головний вклад від некомутативності наслідується від комутативної задачі, тобто топологічні властивості не деформуються, хоча поле на малих відстанях ($r \sim \theta$) і володіє сильною асиметрією.

За допомогою даної алгебри (з точністю до заміни $\theta \to i\theta$) можна пояснити триплетний куперівський механізм спарювання, знайдений в деяких екзотичних надпровідниках (UPt_3, Sr_2RbO_4): для будь–якого ненульового θ існують триплети з нижчою енергією, ніж в синглетних станах [59].

Алгебра зі спіновою некомутативністю (1.14)–(1.18) також виникає при квантуванні квазікласичної некомутативної моделі Березіна–Маринова для спіну 1/2 [34].

Алгебру зі спіновою некомутативністю (1.14)–(1.18) можна узагальнити додаванням імпульсної спінової некомутативності [33]

$$[X_i, X_j] = i\theta^2 \varepsilon_{ijk} s_k, \tag{1.21}$$

$$[P_i, P_j] = i\kappa^2 \varepsilon_{ijk} s_k, \tag{1.22}$$

$$[X_i, P_j] = i(\delta_{ij} + \kappa\theta \varepsilon_{ijk} s_k), \tag{1.23}$$

$$[s_i, s_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} s_k, \tag{1.24}$$

$$[X_i, s_j] = i\theta \varepsilon_{ijk} s_k, \tag{1.25}$$

$$[P_i, s_j] = i\kappa \varepsilon_{ijk} s_k. \tag{1.26}$$

Представлення такої алгебри легко отримується у наступному вигляді

$$X_i = x_i + \theta s_i, \tag{1.27}$$

$$P_i = p_i + \kappa s_i. \tag{1.28}$$

У просторі з такою алгеброю у [33] було точно знайдено основний стан суперсиметричного розширення тривимірного гармонічного осцилятора.

Також було проаналізовано в рамках теорії збурень рух квантової частинки (як нерелятивістської так і релятивістської) в однорідному магнітному полі в (2+1)–вимірному просторі з некомутативною алгеброю (1.21)–(1.26) [60]. Проаналізовано випадок малих параметрів спінової некомутативності (θ та κ) та випадок, коли хоча б один параметр некомутативності є великим. Коли параметри некомутативності є малими, то спектр очікувано нагадує спектр комутативної задачі Ландау. Поправки до спектру є пропорційними до магнітного квантового числа. У випадку великих значень параметрів некомутативності ці параметри визначають енергетичний масштаб задачі: енергія квадратично залежить від них. Також енергетичні рівні квадратично залежать від магнітного квантового числа.

Для такої ж (2+1)–вимірної алгебри (1.21)–(1.26) знайдено поправки до спектру гармонічного осцилятора спричинені такою спіновою некомутативністю [61]. Показано, що ведучий вклад від некомутативності є квадратичним по параметрах некомутативності і знімає виродження осциляторних рівнів по орбітальному квантовому числу. В цій роботі також показано, що задача про осцилятор Дірака для такої алгебри зводиться до задачі Ландау в цьому ж просторі.

Була побудована також дещо інша спінова некомутативність [34] із введенням наступних координат та імпульсів

$$X^\mu = x^\mu + \theta W^\mu, \tag{1.29}$$

$$P^\mu = p^\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \tag{1.30}$$

де $W^\mu = (1/2)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\nu\rho}p_\sigma$ — псевдовектор Паулі-Любанського, $\sigma_{\nu\rho} = i[\gamma_\nu, \gamma_\rho]/2$. Відповідна алгебра має вигляд

$$[X^\mu, X^\nu] = i\theta\hbar\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma} - i\theta^2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}W_\rho P_\sigma, \tag{1.31}$$

$$[X^\mu, P^\nu] = -i\hbar g^{\mu\nu}, \tag{1.32}$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \tag{1.33}$$

$$[X^\mu, \gamma^\nu] = -\frac{i\theta}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\rho\gamma_\sigma, \tag{1.34}$$

$$[P^\mu, \gamma^\nu] = 0. \tag{1.35}$$

Однією з головних переваг даної алгебри є її релятивістська інваріантність.

В [62] для такої алгебри розглянуто рівняння Дірака, показано існування закону збереження модифікованого струму

$$J^{\mu} = \overline{\psi}\partial^{\mu}\psi + e\theta\overline{\psi}\gamma^{5}\left(\partial_{\nu}A^{\nu}\gamma^{\mu} - \partial_{\nu}A^{\mu}\gamma^{\nu}\right)\psi + \mathcal{O}(\theta^{2}), \tag{1.36}$$

де $\overline{\psi} = \psi\gamma^0$ — діраківськи спряжений біспінор, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, A_μ – зовнішнє електромагнітне поле. В [62] також показано, що для електрона в постійному магнітному полі (задача Ландау) некомутативність знімає виродження збуджених рівнів в другому порядку теорії збурень по параметру некомутативності. Незважаючи на лоренц-інваріантність (1.31)–(1.35), можна показати, що в просторі з цією алгеброю квантовопольові спостережувані в різних точках простору–часу, які пов'язані просторовоподібним інтервалом, в загальному не комутують, тобто дана алгебра порушує мікропричинність [63]

Спінова некомутативність (1.31)–(1.35) ефективно виникає у низці квазікласичних моделей частинок зі спіном. В роботах [64, 65] було розглянуто рух квазікласичного електрона у викривленому просторі та отримано координати, для яких справджується комутаційне співвідношення (1.31).

Координатний комутатор (1.31) з'являється також і при канонічному квантуванні твісторів [66]. Спінова некомутативність (1.31)–(1.35) отримується також при розгляді частинок зі спіном в (2+1)–вимірному просторі (еніонів) [67, 68].

Підсумовуючи сказане, зазначимо, що ідея спінової некомутативності координат є достатньо новою, багато задач залишається нерозв'язаними. Взагалі не досліджено теорію поля у просторі зі спіновою некомутативністю. Цим питанням присвячені наступні розділи дисертаційної роботи.

Розділ 2

ДЕФОРМОВАНІ АЛГЕБРИ ЗІ СПІНОВОЮ НЕКОМУТАТИВНІСТЮ КООРДИНАТ

2.1 Вступ

В літературі досліджуються в основному два типи алгебр зі спіновою некомутативністю. Для першого типу за допомогою зсуву на оператор спіну будуються некомутативні спіново–зміщені координати у вигляді (1.27) [32]. Відповідна алгебра операторів динамічних величин має вигляд (1.14)–(1.18).

Іншу алгебру зі спіновою некомутативністю будують зсуваючи комутативні координати на вектор Паулі–Любанського (1.29) [34]. Відповідна алгебра має вигляд (1.31)–(1.35). Алгебри такого типу називатимемо спіновою некомутативністю GKdS за першими літерами прізвищ її авторів: Гомез (Gomes), Купріянов (Kupriyanov) і да Сільва (da Silva).

Обидва типи алгебр є інваріантними відносно поворотів (просторових поворотів і бустів в релятивістському випадку) та трансляційно інваріантними. Як буде показано в цьому розділі, при таких алгебрах у просторі виникає мінімальна довжина.

В даному розділі запропоновано дві нові алгебри зі спіновою некомутативністю координат: нерелятивістський варіант алгебри GKdS (підрозділ 2.2) та релятивістську алгебру з некомутативними спіново–зміщеними координатами (підрозділ 2.3). Ці алгебри є обертово– та трансляційно–інваріантними та мають мінімальною довжиною. Також додає цінності обидвом запропонованим алгебрам існування точно-розв'язуваних задач у просторах з цими алгебрами.

Зазвичай побудова некомутативних функцій (функцій некомутативних координат) відбувається за допомогою зіркового добутку Мояли. Це зумовлено наявністю доданків з імпульсами (похідними) в представленні некомутативних координат через оператори недеформованої алгебри Гайзенберга. Такий добуток дозволяє поставити у відповідність добутку функцій число, а не диференціальний оператор. Однак у випадку спіново-зміщених координат легко реалізувати інший шлях побудови некомутативних функцій. В параграфі 2.3.2 побудовано таке відображення з простору комутативних функцій в простір функцій некомутативних координат. В такому підході кожній функції у комутативному просторі відповідає деяка матрична функція у просторі зі спіновою некомутативністю координат. В цьому ж параграфі розглянуто деякі властивості таких матричних некомутативних функцій.

2.2 Нерелятивістська спінова некомутативність Гомеза–Купріянова–да Сільви

2.2.1 Алгебра

Побудуємо нерелятивістський варіант алгебри [34]. Для цього введемо тривимірний аналог вектора Паулі-Любанського:

$$W_i = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\sigma_j p_k = \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p}\right]_i , \tag{2.1}$$

де σ_j — матриці Паулі. Тоді некомутативні координати та імпульси запишемо у вигляді

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \theta\mathbf{W} = \mathbf{r} + \frac{\theta}{4}[\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p}] = \mathbf{r} + \frac{\theta}{2\hbar}[\mathbf{s} \times \mathbf{p}], \tag{2.2}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}, \tag{2.3}$$

де $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ є елементами недеформованої алгебри Гайзенберга.

Зауважимо, що вираз (2.2) є спіновим аналогом так званого зсуву Боппа (Bopp shift), але через некомутативність спінових множників біля імпульсів (на відміну від звичайного випадку числових констант в (1.5)–(1.7)) алгебра з координатами (2.2) містить ще доданок пропорційний до квадрата параметра некомутативності:

$$[X_i, X_j] = i\theta\varepsilon_{ijk}s_k + i\frac{\theta^2}{4\hbar}\varepsilon_{ijk}P_k(\mathbf{s}, \mathbf{P}), \tag{2.4}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{2.5}$$

$$[P_i, P_j] = 0. \tag{2.6}$$

Для повноти алгебри доповнимо її комутаційними співвідношеннями для спінів

$$[s_i, s_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}s_k, \tag{2.7}$$

$$[X_i, s_j] = i\frac{\theta}{2}(P_j s_i - \delta_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{P})). \tag{2.8}$$

Важливою рисою цієї алгебри є те, що некомутативні координати залишаються векторами, тобто існує інваріантність відносно поворотів системи координат, яка порушується для канонічної некомутативності (1.5)–(1.7).

2.2.2 Мінімальна довжина

Для знаходження мінімальної довжини піднесемо (2.2) до квадрату

$$R^2 = r^2 + \frac{\theta}{\hbar}\left(\mathbf{r}, [\mathbf{s}\times\mathbf{p}]\right) + \frac{\theta^2 p^2}{8} = r^2 - \frac{\theta}{\hbar}(\mathbf{s}, \mathbf{L}) + \frac{\theta^2 p^2}{8}. \tag{2.9}$$

Знайдемо власні значення цього оператора. Відокремимо радіальну та кутові змінні

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = \mathcal{R}(r)\Omega_{j,l,m}(\theta,\varphi),$$

де $\Omega_{j,l,m}(\theta,\varphi)$ — сферичний спінор, $\mathcal{R}(r)$ — радіальна частина хвильової функції. Відокремивши змінні і скориставшись операторною тотожністю

$$2(\mathbf{s}, \mathbf{L}) = J^2 - L^2 - S^2,$$

де $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}$ — повний момент імпульсу, отримаємо рівняння на радіальну складову

$$\begin{aligned}\left(r^2 + \frac{\theta^2 p^2}{8} - \frac{\hbar}{2}\theta\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right)\right)\mathcal{R}(r) &= \\ = \lambda^2\mathcal{R}(r),\end{aligned} \tag{2.10}$$

що є рівнянням просторового гармонічного осцилятора. Квантові числа пробігають значення

$$l = 0, 1, 2, ...; \quad j = |l \pm 1/2|. \tag{2.11}$$

Власними значеннями такої задачі є

$$\lambda^2 = \frac{\hbar|\theta|}{\sqrt{2}}\left(2n + l + \frac{3}{2}\right) - \frac{\hbar}{2}\theta\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right), \tag{2.12}$$

де квантове число $n = 0, 1, 2, ...$

Мінімальне значення $\lambda^2_{min} = (3/2\sqrt{2})\hbar|\theta|$ досягається при наборі квантових чисел $n = 0,\ j = 1/2,\ l = 0$ для $\theta > 0$ і $\lambda^2_{min} = ((5 - 2\sqrt{2})/2\sqrt{2})\hbar|\theta|$ при $n = 0,\ j = 1/2,\ l = 1$ для $\theta < 0$. А оскільки середнє значення оператора фізичної величини не може бути меншим, ніж найменше власне значення цього оператора, то для довільного стану справджується нерівність

$$\sqrt{\langle R^2 \rangle} \geq \lambda_{min}, \tag{2.13}$$

тому в просторі з алгеброю (2.4)–(2.8) існує мінімальна довжина в сенсі

$$\lambda_{min} = \sqrt{\min \langle R^2 \rangle}. \tag{2.14}$$

Зауважимо, що різна мінімальна довжина в залежності від знаку θ зумовлена тим фактом, що власні значення оператора $2\,(\mathbf{s}, \mathbf{L})$ набувають всіх цілих значень за винятком -1 (в одиницях $\hbar^2$). Цей факт можна показати, переписавши доданок спін-орбітальної взаємодії з врахуванням залежності між квантовими числами $j = |l \pm 1/2|$: $j = 1/2$ для $l = 0$ та $j = l + \sigma,\ \sigma = \pm 1/2$ для $l \neq 0$.

Явну асиметрію λ^2 можна показати, переписавши (2.12) через квантові числа $n,\ j,\ \sigma$:

$$\lambda_{l=0}^2 = \frac{\hbar|\theta|}{\sqrt{2}} \left(2n + \frac{3}{2}\right), \tag{2.15}$$

$$\lambda_{l\neq 0}^2 = \frac{\hbar|\theta|}{\sqrt{2}} \left(2n + l + \frac{3}{2}\right) - \hbar\theta\sigma \left(l + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\theta}{4}, \tag{2.16}$$

тут ми поклали $s(s+1) = 3/4$.

Власні функції (2.9) мають вигляд $\Psi(r, \varphi, \theta) = \mathcal{R}_{n,l}(r)\Omega_{l,j,m}(\varphi, \theta)$, де $\Omega_{l,j,m}(\varphi, \theta)$ — сферичний спінор [69, §24], а радіальна частина дорівнює

$$\mathcal{R}_{n,l}(r) = (-1)^n \left(\frac{m|\theta|}{\hbar}\right)^{3/4} \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(n + l + 3/2)}} \rho^l e^{-\rho^2/2} L_n^{l+1/2}(\rho^2), \tag{2.17}$$

де $\rho = r\sqrt{m|\theta|/\hbar}$, а $L_n^{l+1/2}(\rho^2)$ — узагальнені поліноми Лагерра.

2.3 Релятивістські некомутативні спіново–зміщені координати

2.3.1 Алгебра

Пряме релятивістське узагальнення алгебри спіново-зміщених координат (1.14)–(1.18) можна побудувати замінивши матриці Паулі (які генерують алгебру Кліффорда $\mathcal{C}\ell(3)$) на γ-матриці Дірака ($\mathcal{C}\ell(1,3)$) в представленні (1.19). Отримані некомутативні оператори координат стають матрицями і рівні комутативним координатам зміщеним на відповідні матриці γ^μ

$$X^\mu = x^\mu + i\theta\gamma^\mu, \tag{2.18}$$

де уявна одиниця додана для ермітовості просторових координат, θ — параметр спінової некомутативності.

Постулюючи, що імпульси в некомутативному просторі є такими самими як і в комутативному випадку

$$P^\mu = p^\mu = i\partial^\mu, \tag{2.19}$$

легко записати повну замкнену алгебру операторів динамічних величин, яка має наступний вигляд

$$[X^\mu, X^\nu] = 2i\theta^2\sigma^{\mu\nu}, \tag{2.20}$$

$$\left[X^\mu, \sigma^{\alpha\beta}\right] = 2\theta(\gamma^\alpha\eta^{\mu\beta} - \gamma^\beta\eta^{\mu\alpha}), \tag{2.21}$$

$$[X^\mu, P^\nu] = -i\eta^{\mu\nu}, \tag{2.22}$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \tag{2.23}$$

$$\left[P^\mu, \sigma^{\alpha\beta}\right] = 0, \tag{2.24}$$

$$[\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\gamma\delta}] = i\left(\eta_{\alpha\gamma}\sigma_{\beta\delta} - \eta_{\beta\gamma}\sigma_{\alpha\delta} - \eta_{\alpha\delta}\sigma_{\beta\gamma} + \eta_{\beta\delta}\sigma_{\alpha\gamma}\right), \tag{2.25}$$

де $\sigma^{\alpha\beta} = i[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]/2$.

Зауважимо, що як $\sigma^{\mu\nu}$, так і $L^{\mu\nu}$ є генераторами спеціальної ортогональної групи $SO(1,3)$ однак в різних представленнях. В такому контексті координатний комутатор (2.20) співпадає з координатним комутатором в алгебрі Снайдера (1.8). Однак в загальному, оскільки спінові матриці σ комутують з p, то повна алгебра (2.20)–(2.25) відрізняється від алгебри Снайдера. Принципову відмінність видно вже з того факту, що запропонована алгебра, на відміну від алгебри Снайдера, є лінійною.

З іншої точки зору, зсув координат в представленні (2.18) нагадує вигляд координат суперпростору $X^\mu = x^\mu + i\xi\sigma^\mu\overline{\xi}$, де ξ — спінори Майорани, $\sigma^\mu = (1,\, \sigma^i)$ (для прикладу [70–72]). Але на противагу до суперпростору, запропонована алгебра не потребує введення додаткових грассманових змінних.

Легко показати, що в алгебрі (2.20)–(2.25) присутня мінімальна довжина. Справді, оскільки

$$\widehat{R}^2 = r^2 + 2i\theta(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{r}) + 3\theta^2, \tag{2.26}$$

то власні значення $\widehat{R}^2$ рівні

$$R^2 = (r \pm \theta)^2 + 2\theta^2 \geq \lambda_{min}^2, \tag{2.27}$$

де мінімальна довжина визначається як і в попередньому підрозділі мінімальним власним значенням (2.14) і дорівнює

$$\lambda_{min} = \sqrt{2}\theta. \tag{2.28}$$

Слід зауважити, що таке саме значення мінімальної довжини отримуємо і у випадку нерелятивістського аналогу (1.14)–(1.18).

2.3.2 Операції з функціями некомутативних спіново-зміщених координат

Для побудови будь-якої теорії в некомутативному просторі (просторі з некомутативними координатами) перш за все необхідно знайти правило побудови некомутативного відповідника деякої заданої функції комутативних змінних $f(x)$, $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$. З необхідністю при такому переході до некомутативного простору виникатиме проблема впорядкування некомутативних координат. Зазвичай в такому випадку обирають впорядкування за Вейлем

$$f \to \tilde{f} = \int d^n k\, e^{ik_\mu X^\mu} F_k, \tag{2.29}$$

де $F_k = 1/(2\pi)^n \int d^n x e^{ikx} f(x)$ є Фур'є–компонентою функції $f(x)$, інтегрування по хвильовому вектору відбувається від $-\infty$ до ∞.

У випадку некомутативних координат (2.18) отримуємо

$$\tilde{f}(x) = \int d^4k\, e^{i(kX)} F_k = \widehat{T} \int d^4k e^{i(kx)} F_k = \widehat{T} f(x), \tag{2.30}$$

де $\widehat{T} = e^{i\theta(\gamma\partial)}$, а два релятивістських вектори в дужках $(AB) = \eta^{\mu\nu} A_\mu B_\nu$ тут і всюди в роботі позначають (3+1)–вимірний скалярний добуток. Отже ми можемо матричну функцію $\tilde{f}(x) = \widehat{T} f(x)$ асоціювати з некомутативним еквівалентом комутативної функції $f(x)$. Оператор $\widehat{T}$ відображає гладку функцію $f(x) \in C^\infty$ в простір некомутативних функцій $C^\infty \otimes \mathcal{C}\ell(1,3)$. Зауважимо також, що фактично некомутативна функція $\tilde{f}(x)$ рівна дії оператора спінової трансляції $\widehat{T} = e^{i\theta(\gamma\partial)}$ на комутативну функцію $f(x)$.

Зрозуміло, що властивості добутку двох таких функцій відрізнятиметься від властивостей зіркового добутку Мояли. Зокрема, можна показати, що $\widehat{T} f \widehat{T} f \neq \widehat{T}(fg)$ (що повинно перетворюватися у рівність для моялівського добутку), але тим не менше, запропонований добуток теж володіє необхідними математичними властивостями, зокрема асоціативністю.

Проаналізуємо впорядкування діраківських γ–матриць у виразі $\widehat{T}f(x)$. Дія оператора $\widehat{T} = e^{i\theta(\gamma\partial)}$ на $f(x)$ еквівалентна наступному розкладу в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \tilde{f} = e^{i\theta(\gamma\partial)}f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n\theta^n}{n!}(\gamma\partial)^n f(x) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}f^{(n)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdot\ldots\cdot\gamma^{\mu_n}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

де (n) позначає порядок похідної від $f(x)$. Оскільки значення похідної порядку n не залежить від порядку диференціювання, то множники з фіксованою кількістю похідних по кожній з координат рівні симетризованому добутку відповідних матриць Дірака. Цей вираз рівний розкладу в ряд Тейлора функції $f(x+i\theta\gamma)$ по θ, де кожен доданок складається з всіх симетризованих перестановок γ–матриць. Наприклад, у випадку $n=3$, $\mu_1 = x$, $\mu_2 = x$, $\mu_3 = y$ відповідний доданок в розкладі записується

$$\frac{(i\theta)^3}{3!}f'''_{xxy}\cdot(2\gamma_x\gamma_x\gamma_y + 2\gamma_x\gamma_y\gamma_x + 2\gamma_y\gamma_x\gamma_x).$$

З іншого боку, використовуючи тотожність $(\gamma\partial)^2 = -\partial^2 = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ можна переписати $\widehat{T}$ в наступному вигляді

$$\widehat{T} = e^{i\theta(\gamma\partial)} = \tilde{C} + i\theta(\gamma\tilde{\partial}), \tag{2.32}$$

де $\tilde{C} = \cos(\theta\sqrt{-\partial^2})$, $\tilde{\partial}_\mu = \mathrm{sinc}(\theta\sqrt{-\partial^2})\partial_\mu$, $\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x$. Це представлення є корисним у виведенні деяких властивостей некомутативних функцій та операцій над ними.

Перш за все, використовуючи розклад в ряд Тейлора оператора $\widehat{T}$

можна показати, що задовольняються наступні природні властивості

$$\tilde{1} = 1, \tag{2.33}$$

$$\widehat{T} x^\mu = x^\mu + i\theta\gamma^\mu = X^\mu. \tag{2.34}$$

Знайдемо вираз для добутку двох некомутативних функцій $\tilde{f}$ і $\tilde{g}$. Його можна записати у наступній формі

$$\begin{gathered} \left[\tilde{C} + i\theta(\gamma\tilde{\partial})\right] f \cdot \left[\tilde{C} + i\theta(\gamma\tilde{\partial})\right] g = \\ = \tilde{C} f \tilde{C} g - \theta^2 (\gamma\tilde{\partial}) f (\gamma\tilde{\partial}) g + i\theta \left((\gamma\tilde{\partial}) f \tilde{C} g + \tilde{C} f (\gamma\tilde{\partial}) g \right). \end{gathered} \tag{2.35}$$

Використовуючи добре відому тотожність

$$(\gamma A)(\gamma B) = (AB) - i\sigma^{\mu\nu} A_\mu B_\nu, \tag{2.36}$$

отримаємо праву частину (2.35) у вигляді

$$\tilde{C} f \tilde{C} g - \theta^2 \tilde{\partial}^\mu f \tilde{\partial}_\mu g + i\theta \left((\gamma\tilde{\partial}) f \tilde{C} g + \tilde{C} f (\gamma\tilde{\partial}) g \right) + i\theta^2 \sigma^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\mu f \tilde{\partial}_\nu g.$$

Доведемо наступну операторну тотожність

$$\tilde{C} f \tilde{C} g - \theta^2 \tilde{\partial}^\mu f \tilde{\partial}_\mu g = \tilde{C}(fg). \tag{2.37}$$

Справді, використовуючи означення введених диференціальних операторів, можна записати

$$\begin{aligned} \tilde{C} f \tilde{C} g &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \frac{\theta^{2m}}{(2m)!} \partial^{2n} f \partial^{2m} g = |n + m = k| = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} \frac{\theta^{2k}}{(2k-2m)!(2m)!} \partial^{2k-2m} f \partial^{2m} g \end{aligned} \tag{2.38}$$

та

$$\begin{gathered} -\theta^2 \tilde{\partial}_\mu f \tilde{\partial}^\mu g = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n+2}}{(2n+1)!} \frac{\theta^{2m}}{(2m+1)!} \partial^{2n} \partial_\mu f \partial^{2m} \partial^\mu g = \\ = |n + m = k| = \\ = -\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} \frac{\theta^{2k+2}}{(2k-2m+1)!(2m+1)!} \partial^{2k-2m} \partial_\mu f \partial^{2m} \partial^\mu g. \end{gathered} \tag{2.39}$$

З іншого боку, розкладемо в ряд праву частину операторної тотожності (2.37). Розклад має вигляд

$$\tilde{C}(fg) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \partial^{2n}(fg) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \times$$
$$\times \left\{ \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} \partial^{2n-2k} f \partial^{2k} g - \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k+1} \partial^{2k} \partial_\mu f \partial^{2n-2k-2} \partial^\mu g \right\}, \tag{2.40}$$

де $C_n^k = (n!)/(k!(n-k)!)$ — кількість комбінацій з n по k. Враховуючи вираз для числа комбінацій, отримуємо

$$\tilde{C}(fg) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\theta^{2n}}{(2n-2k)!(2k)!} \partial^{2k} f \partial^{2n-2k} g -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\theta^{2n}}{(2n-2k-1)!(2k+1)!} \partial^{2k} \partial_\mu f \partial^{2n-2k-2} \partial^\mu g. \tag{2.41}$$

Перший доданок у цьому виразі з точністю до перепозначення індексів підсумовування співпадає з (2.38). Для того, щоб показати, що другий доданок в (2.41) співпадає з виразом (2.39) необхідно перейти до нового індексу підсумовування $n = m + 1$. Отже, ми довели істинність тотожності (2.37).

Таким самим методом можна довести, ще одну операторну тотожність

$$\tilde{\partial}_\mu f \tilde{C} g + \tilde{C} f \tilde{\partial}_\mu g = \tilde{\partial}_\mu (fg). \tag{2.42}$$

Таким чином з (2.35), враховуючи вираз (2.36) та тотожності (2.37) і (2.42), можна показати, що справедливим є наступний вираз для множення двох некомутативних функцій

$$\widehat{T}(f)\widehat{T}(g) = \widehat{T}(fg) + i\theta^2 \sigma^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\mu f \tilde{\partial}_\nu g. \tag{2.43}$$

Цей вираз показує зв'язок між добутком двох некомутативних функцій $\widehat{T}(f)\widehat{T}(g)$ і некомутативним відповідником комутативного добутку цих функцій. Прямими обчисленнями можна показати, що такий добуток некомутативних функцій є асоціативним

$$\tilde{f}(\tilde{g}\tilde{h}) = (\tilde{f}\tilde{g})\tilde{h}. \tag{2.44}$$

З (2.43), внаслідок антисиметрії матриць $\sigma^{\mu\nu}$ стосовно перестановки індексів, випливає, що

$$(\tilde{f})^n = \widehat{T}(f^n). \tag{2.45}$$

Дію $\widehat{T}$ на складену функцію $\varphi(f(x))$ можна отримати таким самим чином. Діючи оператором $\widehat{T}$ на розклад $\varphi(f(x))$ в ряд по степенях $f(x)$ і використовуючи властивість (2.45) отримуємо

$$\widehat{T}\varphi(f) = \varphi(\widehat{T}f). \tag{2.46}$$

Оскільки оператор $\widehat{T}$ комутує з похідними, то легко провести диференціювання некомутативної функції

$$\partial^\mu \tilde{f} = \partial^\mu \widehat{T}(f(x)) = \widehat{T}(\partial^\mu f(x)). \tag{2.47}$$

Диференціювання складеної функції є дещо складнішим

$$\begin{aligned} \partial_\rho \tilde{f}(\varphi) = \widehat{T}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\partial_\rho \varphi\right) = \\ = \widehat{T}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\widehat{T}\left(\partial_\rho \varphi\right) - i\theta^2\sigma^{\mu\nu}\left(\partial_\mu \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\left(\partial_\nu \partial_\rho \varphi\right) \end{aligned} \tag{2.48}$$

або

$$\begin{aligned} \partial_\rho \tilde{f}(\varphi) = \widehat{T}\left(\partial_\rho \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = \\ = \widehat{T}\left(\partial_\rho \varphi\right)\widehat{T}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) + i\theta^2\sigma^{\mu\nu}\left(\partial_\mu \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\left(\partial_\nu \partial_\rho \varphi\right). \end{aligned} \tag{2.49}$$

В розділі 5 ми побудуємо дію для некомутативного електромагнітного поля. Дія повинна бути скаляром. Тому означимо інтегрування некомутативної функції $\tilde{f}$ з додатковим взяттям сліду від підінтегрального виразу у вигляді $(1/4)\int dx\ \mathrm{Sp}\{\tilde{f}\}$. Додатково накладатимемо на польові функції під інтегралом умову фізичності — самі функції та всі їхні похідні повинні достатньо швидко прямувати до нуля на границях області інтегрування, забезпечуючи збіжність інтеграла. Інтегрування відбувається в області $\mathcal{D} \subset R(1,3)$, інфінітній у просторово–подібних напрямах та обмеженій двома поверхнями у часово–подібних напрямах.

Таким чином маємо для інтегралу від однієї некомутативної функції $\tilde{f}(x) = \widehat{T} f(x)$

$$\frac{1}{4}\int dx\ \mathrm{Sp}\{\tilde{f}\} = \frac{1}{4}\int dx\ \mathrm{Sp}\{\tilde{C} f + i\theta(\gamma\tilde{\partial}) f\}.$$

Зашпуровування другого доданку дасть нуль в силу безшпуровості матриць Дірака. Враховуючи означення оператора $\tilde{C}$ та припускаючи рівномірну збіжність підінтегральних виразів, запишемо наступну рівність

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int\limits_{\mathcal{D}} dx\ \mathrm{Sp}\{\tilde{f}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}\int\limits_{\mathcal{D}} dx\ \partial^{2n} f = \\ &= \int\limits_{\mathcal{D}} dx\ f + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}\int\limits_{\partial\mathcal{D}} dS_\alpha \partial^\alpha(\partial^{2n-2} f)\end{aligned}$$

де dS_α — елемент інтегрування по гіперповерхні $\mathcal{D}$. Якщо вимагати рівності нулю самого поля і всіх його похідних на нескінченно далекій просторово–подібній частині границі та зафіксувати значення поля і всіх похідних на часово–подібних частинах границі $\mathcal{D}$, то отримуємо

$$\frac{1}{4}\int dx\ \mathrm{Sp}\{\tilde{f}\} = \int dx\ f + I_1, \tag{2.50}$$

де I_1 — деяка функція значень поля і його похідних на границі. Оскільки таке інтегрування розглядається для побудови дії для поля з подальшою варіацією, то доданком I_1 можна знехтувати, бо варіація цієї функції рівна нулю.

Розглянемо інтеграл від добутку двох некомутативних функцій

$\tilde{f}\tilde{g}$. Враховуючи (2.43), (2.50) та $\mathrm{Sp}(\sigma^{\mu\nu}) = 0$ маємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int dx\,\mathrm{Sp}\{\tilde{f}\tilde{g}\} = \frac{1}{4}\int dx\,\mathrm{Sp}\{\widehat{T}(fg) + i\theta^2\sigma^{\mu\nu}\tilde{\partial}_\mu f\tilde{\partial}_\nu g\} = \\ = \int dx fg + I_2,\end{aligned} \tag{2.51}$$

де I_2 є функцією значень поля і його похідних на границі області, тобто інтеграл від добутку двох некомутативних функцій з точністю до константи є теж такий самий як і у комутативному випадку

В такий самий спосіб можна показати, що релевантний для дії для поля вплив спінової некомутативності на інтеграл від добутку трьох функцій відсутній. І лише інтеграл добутку чотирьох некомутативних функцій змінюється внаслідок некомутативності. Використовуючи добре відому рівність

$$\mathrm{Sp}\{\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}\} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}, \tag{2.52}$$

можна показати, що

$$\frac{1}{4}\int dx\,\mathrm{Sp}\{\tilde{f}\tilde{g}\tilde{h}\tilde{j}\} \neq \int dx fghj, \tag{2.53}$$

тобто вклад від спінової некомутативності в дію присутній лише для доданків з добутком як мінімум чотирьох польових змінних.

2.4 Висновки

В даному розділі ми побудували дві нові алгебри зі спіновою некомутативністю координат. Першою з них є нерелятивістський аналог некомутативної Лоренц–коваріантної алгебри [34] із змішуванням координатних та спінових змінних. В лінійному наближенні по параметру некомутативності координатний комутатор для нашої алгебри співпадає з нерелятивістською спіновою некомутативністю, запропонованою в [32].

Для досліджуваної алгебри знайдено мінімальну довжину $\sqrt{\langle R^2 \rangle} \geq \lambda_{min}$, яка в залежності від знаку θ рівна

$$\lambda_{min} = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \hbar |\theta| \right)^{1/2}, \quad \theta > 0;$$

$$\lambda_{min} = \left(\frac{5 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \hbar |\theta| \right)^{1/2}, \quad \theta < 0.$$

Також нами було побудовано нову Лоренц–інваріантну некомутативну алгебру (2.20)–(2.25). В даній алгебрі некомутативні оператори координат будуються за допомогою зсуву комутативних координат на гамма–матриці Дірака. Ми показали, що кожній комутативній функції $f(x)$ відповідає некомутативний аналог $\widehat{T} f(x)$ в просторі зі спіновою некомутативністю координат. Цей відповідник отримується з дії оператора трансляції $\widehat{T} = e^{i\theta(\gamma_\mu \partial^\mu)}$ на комутативну функцію. Також було розглянуто добуток таких некомутативних функцій. Така побудова некомутативних функцій є альтернативною до традиційного введення функцій за допомогою зіркового добутку Мояли. Однак добуток таких некомутативних функцій володіє необхідними математичними властивостями, зокрема він є асоціативним. Завершується розділ дослідженням математичних властивостей таких некомутативних функцій, а саме: добутку кількох функцій, диференціювання некомутативної функції, диференціювання складеної функції, інтегрування функції.

Розділ 3

ГАРМОНІЧНИЙ ОСЦИЛЯТОР ТА АТОМ ВОДНЮ У ПРОСТОРІ ЗІ СПІНОВОЮ НЕКОМУТАТИВНІСТЮ КООРДИНАТ

3.1 Вступ

В даному розділі розглянуто вплив спінової некомутативності на дві добре відомі квантові задачі, а саме гармонічний просторовий осцилятор і атом водню. Ці задачі є точнорозв'язуваними квантовомеханічними задачами, спектр і власні стани яких добре відомі. В обох системах є випадкове виродження енергетичних рівнів (в гармонічному осциляторі по сумі $2n+l$, а в атомі водню по орбітальному квантовому числу l). Тому ці задачі, враховуючи всебічний аналіз і простоту розв'язків їхніх аналогів в комутативному просторі, можуть бути своєрідною лабораторією для дослідження впливу некомутативності на фізичні системи.

З іншої сторони ці задачі мають велике практичне значення. Гармонічний осцилятор є важливою моделлю, якою наближено описують багато фізичних ефектів. Атом водню є реальною фізичною системою з виміряними з високою точністю характеристиками.

Гармонічний осцилятор в просторі з алгеброю (1.14)–(1.18) точно не розв'язується. Поправки до енергетичного спектру гармонічного осцилятора в (2+1)–вимірному просторі з спіново-зміщеними координатами знайдено в [61]. В [32] розглянуто точний розв'язок деякого суперсиметричного розширення гармонічного осцилятора в просторі з алгеброю (1.14)–(1.18). Показано спонтанне порушення симетрії основного стану.

В підрозділі 3.2 цього розділу ми знайдемо та проаналізуємо точний розв'язок гармонічного просторового осцилятора в просторі зі спіновою некомутативністю GKdS (2.4)–(2.8).

Атом водню теж досліджувався в некомутативному просторі. Так в роботі [73] показано, що в просторі з канонічною некомутативністю (1.5)–(1.7) поправки до гамільтоніана, спричинені некомутативністю, мають вигляд

$$\Delta H = \frac{e^2}{4\hbar}\frac{\theta^k L_k}{r^3}, \tag{3.1}$$

де введено позначення $\theta_{ij} = 1/2\varepsilon_{ijk}\theta^k$, а $L_k = \varepsilon_{klm}x^l p^m$ — вектор моменту імпульсу.

Атом водню в просторі зі спіновою некомутативністю досліджувався в [74]. Використовуючи відомий результат (3.1) та позначивши $\theta^k = \theta s^k$, було знайдено поправку до гамільтоніана атома водню у вигляді

$$\Delta H = \frac{e^2\theta}{4\hbar}\frac{s^k L_k}{r^3} \tag{3.2}$$

в просторі з представленням для операторів координати у вигляді $X_i = x_i - \theta\varepsilon_{ijk}p^j s^k/4\hbar$, що відповідає некомутативній алгебрі (2.4)–(2.8).

В підрозділі 3.3 знайдено поправки до спектру атома водню, спричинені некомутативністю (1.14)–(1.18). Для знаходження поправок до рівнів з $l \neq 0$ було використано звичайну теорію збурень за параметром некомутативності θ, яка виявилася незастосовною для s-рівнів.

Для знаходження поправки до рівнів з $l = 0$ розвинено модифіковану теорію збурень.

Завершується даний розділ, порівнянням отриманих виразів для поправок до спектру атома водню і результатів експериментальних вимірювань частоти двофотонного $2s - 1s$ переходу в атомі водню. З цього порівняння знайдено верхню межу для чисельного значення параметра некомутативності θ.

3.2 Точний розв'язок гармонічного осцилятора у просторі зі спіновою некомутативністю

На відміну від (1.14)–(1.18) в алгебрі (2.4)–(2.8) просторовий гармонічний осцилятор є точнорозв'язуваною задачею.

Зазвичай постулюється, що гамільтоніан задачі в просторі з деформованими комутаційними співвідношеннями (в тому числі в некомутативному просторі) записують заміною звичайних динамічних змінних на їхні деформовані (некомутативні) аналоги. В такому підході гамільтоніан некомутативного осцилятора записується

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 R^2}{2} = \frac{p^2}{2m}\gamma^2 + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{m\omega^2\theta}{2\hbar}(\mathbf{s}, \mathbf{L}), \tag{3.3}$$

$$\gamma^2 = 1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{8}. \tag{3.4}$$

Легко бачити, що гамільтоніан (3.3) з точністю до числових коефіцієнтів співпадає з оператором квадрату некомутативного радіус-вектора (2.9), тому рівняння Шредінгера для гармонічного осцилятора можна розв'язати таким самим способом як і рівняння на власні значення оператора (2.9), яке було розв'язано в попередньому розділі. Тому спектр просторового осцилятора дорівнює

$$E_{n,l,j}=\hbar\omega\gamma(2n+l+3/2)-\frac{\hbar m\omega^2\theta}{4}(j(j+1)-l(l+1)-3/4), \quad (3.5)$$

де відповідні квантові числа пробігають можливі значення

$$n,l=0,1,2,..., \quad j=|l\pm 1/2|.$$

З (3.5) легко бачити, що спінова некомутативність знімає виродження за квантовими числами j та l. Проте, як буде показано далі, для певних значень параметра некомутативності $m\omega|\theta|>1$ можливе випадкове виродження рівнів.

Основний стан при $\theta>0$ відповідає квантовим числам $n=0$, $l=0$, $j=1/2$, а енергія основного стану рівна

$$E_0=\frac{3}{2}\hbar\omega\gamma=\frac{3}{2}\hbar\omega\sqrt{1+\frac{m^2\omega^2\theta^2}{8}}. \quad (3.6)$$

При $\theta<0$ картина стає дещо складнішою — набір квантових чисел, які реалізовують основний стан, залежить від частоти: існує критична частота $\omega_{cr}=2\sqrt{2}/m|\theta|$, нижче якої основний стан реалізовується набором квантових чисел $n=0,\ l=0,\ j=1/2$ з енергією $E_0^{(1)}=E_0$, вище критичної частоти основний стан реалізовується набором $n=0,\ l=1,\ j=1/2$ з енергією

$$E_0^{(2)}=\frac{5}{2}\hbar\omega\sqrt{1+\frac{m^2\omega^2\theta^2}{8}}-\frac{\hbar m\omega^2|\theta|}{2}, \quad (3.7)$$

для критичної частоти, значення якої шукаємо з умови

$$E_0^{(1)}(m\omega_{cr}|\theta|)=E_0^{(2)}(m\omega_{cr}|\theta|), \quad (3.8)$$

основний стан є двократно виродженим з енергією

$$E_0^{cr}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\hbar\omega_{cr}=\frac{6\hbar}{m|\theta|}. \quad (3.9)$$

В комутативній границі ($\theta \to 0$) критична частота ω_{cr} та відповідна енергія E_0^{cr} стають безмежними, а тому нефізичними.

Залежність енергії найнижчих енергетичних рівнів від $m\omega|\theta|$ зображено на Рис.3.1. Як видно з графіка, при деяких значеннях частоти енергія частинки при різних наборах квантових чисел справді співпадає.

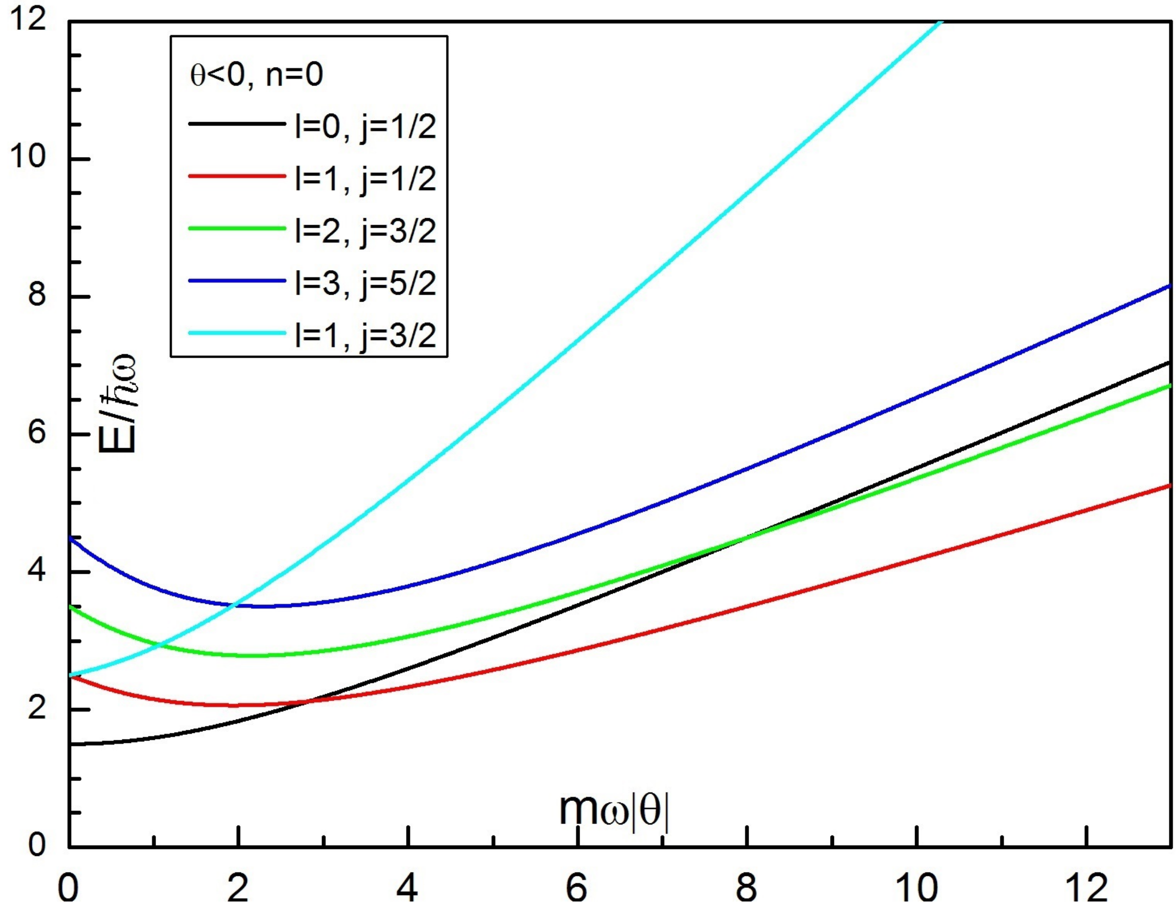

Рис. 3.1: Залежність енергії рівнів від $m\omega|\theta|$ для деяких наборів квантових чисел при $\theta < 0$.

Власні функції гамільтоніана (3.3) дорівнюють

$$\Psi(r,\varphi,\theta) = \mathcal{R}_{n,l}(r)\Omega_{l,j,m}(\varphi,\theta),$$

де кутова частина є відповідним сферичним спінором, а радіальна має вигляд

$$\mathcal{R}_{n,l}(r) = (-1)^n \left(\frac{m\omega}{\hbar}\gamma\right)^{3/4} \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(n+l+3/2)}}\rho^l e^{-\rho^2/2} L_n^{l+1/2}(\rho^2), \quad (3.10)$$

де $\rho = r\sqrt{m\omega\gamma/\hbar}$.

Легко бачити, що в комутативній границі при спрямуванні $\theta \to 0$ ($\gamma \to 1$) вираз (3.5) переходить у формулу для енергії недеформованого осцилятора.

При великих частотах осцилятора чи великих масах частинки ($m\omega \gg 1/|\theta|$, $\gamma \approx 8^{-1/4} m\omega|\theta|$) енергія осцилятора рівна

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2\lambda^2, \quad (3.11)$$

тобто формально співпадає з класичним виразом для енергії гармонічного осцилятора з різницею, що λ^2 квантується згідно з (2.15). Енергія основного стану при цьому пов'язана з мінімальною довжиною співвідношенням

$$E_0 = \frac{1}{2}m\omega^2\lambda_{min}^2. \quad (3.12)$$

3.3 Поправки до спектра атома водню, спричинені спіновою некомутативністю

3.3.1 Теорія збурень для рівнів з $l \neq 0$

Оператор Гамільтона атома водню в просторі зі спіновою некомутативністю (1.14)–(1.18) отримуємо замінивши комутативні координати на некомутативні (1.27)

$$H = \frac{P^2}{2m} - \frac{e^2}{R}, \quad (3.13)$$

де $R = \sqrt{r^2 + 2\theta(\mathbf{r},\mathbf{s}) + 3\hbar^2\theta^2/4}$.

Перш за все зауважимо, що некомутативний кулонівський потенціал в (3.13) є несингулярним. Справді, власні значення знаменника потенціальної енергії обмежені знизу

$$R = \sqrt{r^2 \pm \hbar\theta r + \frac{3}{4}\hbar^2\theta^2} = \sqrt{\left(r \pm \frac{\hbar\theta}{2}\right)^2 + \frac{\hbar^2\theta^2}{2}} \geq \frac{\hbar\theta}{\sqrt{2}},$$

і ніколи не набувають нульового значення.

Розкладаючи в (3.13) потенціальну енергію в ряд Тейлора за параметром некомутативності θ та, зберігаючи лише перших два члени розкладу, отримаємо гамільтоніан у вигляді

$$H_2 = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \frac{L^2 + 2m\theta e^2(\mathbf{n}, \mathbf{s})}{2mr^2} + \frac{9\hbar^2\theta^2 e^2}{32r^3}, \tag{3.14}$$

де $p_r^2 = -(\hbar^2/r)(\partial^2/\partial r^2)r$ — радіальна частина квадрату імпульсу в сферичних координатах, L^2 — квадрат моменту імпульсу, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

Гамільтоніан (3.14) дозволяє розділення радіальних і кутових змінних. Справді, знайшовши власні значення оператора $L^2 + 2m\theta e^2(\mathbf{n}, \mathbf{s})$, отримаємо радіальне рівняння Шредінгера. Для знаходження спектру цього оператора зауважимо, що

$$\left[J_i, L^2 + 2m\theta e^2(\mathbf{n}, \mathbf{s})\right] = 0, \tag{3.15}$$

$$\left[J^2, L^2 + 2m\theta e^2(\mathbf{n}, \mathbf{s})\right] = 0, \tag{3.16}$$

де $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ — вектор–оператор повного моменту. Тобто як повний набір операторів для опису кутового руху частинки можемо обрати оператори квадрату J^2 та проекції на вибрану вісь повного моменту J_z з відповідними власними значеннями $j(j+1)$ та m, а кутову частину хвильової функції вибрати як лінійну комбінацію власних функцій цих операторів, тобто сферичних спінорів Ω_{jlm}. Тому для заданих $j(j+1)$ та m кутова частина хвильових функцій записується у наступному вигляді

$$A_{jm}(\vartheta,\varphi) = C_-\Omega_{j,j-1/2,m} + C_+\Omega_{j,j+1/2,m}. \tag{3.17}$$

Враховуючи дію оператора $(\mathbf{n},\mathbf{s})$ на сферичні спінори [69]

$$(\mathbf{n},\mathbf{s})\Omega_{j,j-1/2,m} = \frac{i\hbar}{2}\Omega_{j,j+1/2,m}, \tag{3.18}$$

$$(\mathbf{n},\mathbf{s})\Omega_{j,j+1/2,m} = -\frac{i\hbar}{2}\Omega_{j,j-1/2,m}, \tag{3.19}$$

знайдемо власні значення оператора $L^2 + 2m\theta e^2(\mathbf{n},\mathbf{s})$ як розв'язки наступного рівняння

$$\begin{vmatrix} \hbar^2\left(j-\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)-\lambda & ime^2\hbar\theta \\ -ime^2\hbar\theta & \hbar^2\left(j+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{3}{2}\right)-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3.20}$$

Розв'язками цього рівняння є

$$\lambda_\pm = \hbar^2\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 \pm \sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 + m^2e^4\theta^2/\hbar^2}\right]. \tag{3.21}$$

Маючи значення $\lambda_\pm$, можна переписати наближений гамільтоніан (3.14) у вигляді

$$H_2 = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \frac{\lambda_\pm}{2mr^2} + \frac{9\hbar^2\theta^2e^2}{32r^3}. \tag{3.22}$$

Представимо цей гамільтоніан у вигляді суми $H_2 = H_0 + V$, де

$$H_0 = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \frac{\lambda_\pm}{2mr^2} \tag{3.23}$$

розв'язується точно, а доданок $V = 9\hbar^2\theta^2e^2/32r^3$ розглядатимемо як збурення.

Розв'язок радіального рівняння Шредінгера для гамільтоніана (3.23) записується

$$E_{n,s_\pm} = -\frac{R_H}{(n+s_\pm)^2}, \tag{3.24}$$

$$\mathcal{R}_{n,s_\pm} = \rho^{s_\pm}e^{-\rho/2}F(-n, 2s_\pm+2, \rho), \tag{3.25}$$

де R_H — стала Рідберга, $F(-n, 2s+2, \rho) = {}_1F_1(-n; 2s+2; \rho)$ — вироджена гіпергеометрична функція [75], $\rho = 2\sqrt{-2mE_{n,s_\pm}}r$. Головне квантове число набуває значень $n = 1, 2, ...$, а $s_\pm$ є додатнім розв'язком рівняння

$$\hbar^2 s_\pm (s_\pm + 1) = \lambda_\pm. \tag{3.26}$$

Як видно вже з (3.21), головні поправки до спектру є другого порядку по θ. З точністю до θ^2 маємо

$$s_\pm = j \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\hbar^2\theta^2}{a^2(2j+1)(2j+1\pm 1)}, \tag{3.27}$$

$$E^0_{nj} = -\frac{R_H}{\left(n + j \pm \frac{1}{2}\right)^2} \pm \frac{2\hbar^2\theta^2 R_H}{a^2(2j+1)(2j+1\pm 1)\left(n + j \pm \frac{1}{2}\right)^3}, \tag{3.28}$$

де $a = \hbar^2/me^2$ — радіус Бора.

Середнє від оператора збурення V на власних функціях (3.25) дорівнює

$$\langle V \rangle = \left\langle \frac{9\hbar^2\theta^2 e^2}{32 r^3} \right\rangle = \frac{9\hbar^2\theta^2 R_H}{32 a^2 (n + s_\pm)^3 s_\pm (s_\pm + 1)\left(s_\pm + 1/2\right)}. \tag{3.29}$$

Таким чином, поправки до енергії рівнів атома водню з $l \neq 0$ в просторі з алгеброю (1.14)–(1.18) відносно комутативної задачі є наступними

$$\begin{aligned} \Delta E_{nj} = &\frac{\hbar^2\theta^2 R_H}{a^2(2j+1\pm 1)\left(n + j \pm \frac{1}{2}\right)^3} \times \\ &\times \left(\frac{9}{4(2j\pm 1)\left(2j \pm 1 + 2\right)} \pm \frac{2}{2j+1}\right). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Як видно з (3.27) при $j = 1/2$ квантове число s_-, що відповідає λ_- і станам з $l = 0$, є пропорційним θ^2, що означає, що поправка (3.29) до спектру є порядку 1, а звичайна теорія збурень є незастосовною в цьому випадку.

3.3.2 Модифікована теорія збурень для s–рівнів

Для отримання поправок до енергії s–рівнів скористаємося модифікованою теорією збурень, ідея якої запропонована в [76, 77]. Для цього запишемо гамільтоніан (3.13) у наступному вигляді

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2 + 2m\theta e^2(\mathbf{n}, \mathbf{s})}{2mr^2} - \frac{e^2}{r} + V, \tag{3.31}$$

де оператор збурення

$$V = -\frac{e^2}{\sqrt{r^2 + \frac{3}{4}\hbar^2\theta^2 + 2\theta r(\mathbf{n}, \mathbf{s})}} + \frac{e^2}{r} - \frac{\theta e^2(\mathbf{n}, \mathbf{s})}{r^2}. \tag{3.32}$$

Як видно з виразів (3.31) та (3.32), ми додали і відняли ту саму величину $\theta e^2(\mathbf{n}, \mathbf{s})/r^2$, яка дозволяє одразу ж отримати правильну кутову частину хвильової функції в першому порядку розкладу по θ. Враховуючи відому тотожність

$$f(c + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\sigma})) = \frac{1}{2}(f(c+b) + f(c-b)) + \frac{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\sigma})}{2b}(f(c+b) - f(c-b)),$$

перепишемо оператор збурення (3.32) у вигляді

$$V = -\frac{e^2}{2}\left[S_+ + S_-\right] - \frac{e^2}{2}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma})\left[S_+ - S_-\right] + \frac{e^2}{r} - \frac{\hbar\theta e^2(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma})}{2r^2}, \tag{3.33}$$

де введено позначення $S_\pm = 1/\sqrt{r^2 + 3\hbar^2\theta^2/4 \pm \hbar\theta r}$.

В рамках теорії збурень шукатимемо перші поправки до енергій s–рівнів як середні оператора збурення (3.33) на наступних хвильових функціях s–рівнів

$$\psi_{ns} = B_n \exp\left(-\frac{\alpha_n r}{2}\right) L_{n-1}^1(\alpha_n r) A_{1/2,m}(\vartheta, \varphi), \tag{3.34}$$

де стала нормування $B_n = 2/\sqrt{n^5 a^3}$, $\alpha_n = 2/na$, $L_n^1(x)$ — поліноми Лагерра

$$L_n^1(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} C_{n+1}^{n-i} x^i,$$

а кутова частина хвильової функції має вигляд

$$A_{1/2,m}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\hbar^2\theta^2}{4a^2}}}\left(\Omega_{1/2,0,m} - i\frac{\hbar\theta}{2a}\Omega_{1/2,1,m}\right). \tag{3.35}$$

Зауважимо, що (3.34) з точністю до першого порядку по θ є власною функцією гамільтоніана (3.14). Цього наближення достатньо для того, щоб отримати перші поправки до енергії s–рівнів.

Усереднимо (3.33) по кутових змінних

$$\begin{aligned} V^* = \left\langle A_{1/2,m}\right| V \left|A_{1/2,m}\right\rangle = \\ = -\frac{e^2}{2}\left[S_+ + S_-\right] + \frac{e^2}{2}\kappa\theta\left[S_+ - S_-\right] + \frac{e^2}{r} + \frac{\hbar^2\theta^2e^2}{4ar^2} + \mathcal{O}(\theta^3). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Розрахунок середнього від (3.36) на функціях (3.34) непертурбативними методами здійснити не вдається. Тому для обчислення поправок розкладемо $S_\pm$ в ряд Тейлора. Відмінність в обчисленні поправок запропонованим методом від звичайної теорії збурень полягає в тому, що розклад в ряд Тейлора проводиться не в околі точки силового центру, а в околі зміщеної відносно силового центру точці, як наприклад у [77]. Критерієм вибору зміщеної точки є додатність знаменників членів розкладу, що забезпечує відсутність розбіжностей. Насправді таких точок є багато, але з технічних міркувань зручно позбутися ірраціональностей і виділити в $S_\pm$ повний квадрат:

$$S_\pm = \frac{1}{\sqrt{(r+\sqrt{3}\theta/2)^2 \pm \theta r - \sqrt{3}\theta^2 r}}$$

і розкладати вираз в ряд Тейлора в околі $(r+\frac{\sqrt{3}}{2}\theta)^2$

$$S_\pm = \frac{1}{r+\sqrt{3}\theta/2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\frac{\theta^k(\sqrt{3}\mp 1)^k r^k}{(r+\sqrt{3}\theta/2)^{2k+1}}. \tag{3.37}$$

Як буде видно далі, для виділення перших поправок (принаймні для s–рівнів) необхідно зберігати всі члени розкладу. Таким чином середнє від оператора збурення записується

$$\langle V\rangle_{ns} = -\frac{e^2}{2}B_n^2\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1}A_n(p,q)\alpha_n^{p+q}\int\limits_0^\infty dre^{-\alpha_n r}r^{2+p+q}\left[\frac{2}{r+\sqrt{3}\theta/2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{r}+\sum_{k=1}^\infty\frac{\theta^k Q_k^+ r^k}{(r+\sqrt{3}\theta/2)^{2k+1}}+\sum_{k=1}^\infty\frac{\theta^{k+1}Q_k^- r^k}{(r+\sqrt{3}\theta/2)^{2k+1}}-\frac{\hbar^2\theta^2}{2ar^2}\right],$$

де введено позначення

$$A_n(i,j) = \frac{(-1)^{i+j}}{i!j!}C_n^{n-1-i}C_n^{n-1-j},$$

$$Q_k^\pm = \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\left[(\sqrt{3}+1)^k \pm (\sqrt{3}-1)^k\right].$$

Інтеграли, які виникають при розрахунку, можна обчислити наступним чином

$$\int\limits_0^\infty dr\frac{r^{2+k+i}e^{-\alpha r}}{(r+\beta)^{2k+1}} = \frac{(-1)^{k+i}}{(2k)!}\frac{\partial^{2k}}{\partial\beta^{2k}}\frac{\partial^{2+k+i}}{\partial\alpha^{2+k+i}}\int\limits_0^\infty dr\frac{e^{-\alpha r}}{r+\beta} =$$

$$= \frac{(-1)^{k+i+1}}{(2k)!}\frac{\partial^{2k}}{\partial\beta^{2k}}\frac{\partial^{2+k+i}}{\partial\alpha^{2+k+i}}e^{\alpha\beta}\mathrm{E}i(-\alpha\beta),$$

де введено позначення $\beta = \sqrt{3}\theta/2$, а $\mathrm{E}i(-\alpha\beta)$ — інтегральна показникова функція [75].

Після диференціювання отримаємо

$$I_k(i) = \theta^k\int\limits_0^\infty dr\frac{r^{2+k+i}e^{-\alpha r}}{(r+\beta)^{2k+1}} = (-1)^{k+i}\theta^k\left[\sum_{j=0}^{2+k+i}C_{2+k+i}^j\frac{\alpha^{2k-j}}{(2k-j)!}\times\right.$$

$$\times\left(-\beta^{2+k+i-j}e^{\alpha\beta}Ei(-\alpha\beta)+\sum_{l=1}^{2+k+i-j}(-1)^l(l-1)!\beta^{2+k+i-j-l}\alpha^{-l}\right)+$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{k-2-i}(-1)^l\frac{(l-1)!(2k-l)!}{(2k)!(k-2-i-l)!}\alpha^{k-2-i-l}\beta^{-l}\right].$$

Дослідимо отриманий вираз для різних k (порядок розкладу в ряд $S_{\pm}$). Виділимо перші поправки по θ з врахуванням розкладу інтегральної показникової функції в ряд [75]

$$\mathrm{E}i(x) = \gamma + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{nn!},$$

де $\gamma = 0.57721...$ — стала Ейлера.

При $k = 0$

$$I_0(i) = \int_0^{\infty} dr \frac{r^{i+2} e^{-\alpha r}}{r+\beta} = (-1)^{i+1} \beta^{i+2} e^{\alpha\beta} Ei(-\alpha\beta) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{i+2} (-1)^{i+2-l} (l-1)! \beta^{i+2-l} \alpha^{-l},$$

що співпадає з табличним значенням інтеграла [78], як і повинно бути. Остаточно

$$I_0(i) = \frac{(i+1)!}{\alpha^{i+2}} - \frac{\sqrt{3}\theta}{2\alpha^{i+1}} i! + \frac{3\theta^2}{4\alpha^i}(1-\delta_{i0})(i-1)! -$$

$$-\delta_{i0}\theta^2 \left(\gamma + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\theta\right)\right) + \mathcal{O}(\theta^3).$$

Вирази для $k = 1$ та $k = 2$ є наступними

$$I_1(i) = \frac{\theta}{\alpha^{i+1}} \sum_{j=0}^{2} (-1)^j C_{3+i}^j \frac{(2+i-j)!}{(2-j)!} + \left(\gamma + \frac{5}{6} + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\theta\right)\right) \times$$

$$\times \frac{3\sqrt{3}}{2}\theta^2 \delta_{i,0} - \frac{\sqrt{3}\theta^2}{2\alpha^i}(1-\delta_{i,0}) \sum_{j=0}^{2} (-1)^j C_{3+i}^j \frac{(1+i-j)!}{(2-j)!} + \mathcal{O}(\theta^3),$$

$$I_2(i) = \theta^2 \left[\delta_{i,0} \left(\gamma - \frac{25}{12} + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\theta\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\delta_{i,0}}{\alpha^i} \sum_{j=0}^{4} (-1)^j C_{4+i}^j \frac{(3+i-j)!}{(4-j)!} \right] + \mathcal{O}(\theta^3).$$

Для $k > 2$ доданки пропорційні до θ^2 можуть бути отримані лише з останньої суми при умові $i = 0$, $l = k - 2$

$$I_{k>0}(i) = \delta_{i,0}\theta^2 \frac{2^{k-2}(k-3)!(k+2)!}{3^{k/2-1}(2k)!} + \mathcal{O}(\theta^3).$$

Погрупуємо доданки в (3.38) за степенями θ з врахуванням здійсненого аналізу для $I_k(i)$. Безпосереднім обчисленням можна перевірити, що коефіцієнти біля θ^0 і θ^1 рівні 0. Тоді

$$\langle V \rangle_{ns} = -\frac{e^2}{2}\hbar^2\theta^2 B_n^2 \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} A_n(p,q)\left[10\delta_{p+q,0}\ln\frac{\sqrt{3}\hbar\theta}{na} + \right.$$

$$\left. +\delta_{p+q,0}P_0 + (1-\delta_{p+q,0})P_1(p+q)\right] + \frac{\hbar^2\theta^2}{a^2 n^3} R_H,$$

де P_0 та $P_i(j)$ є числами і визначаються з наступних формул

$$P_0 = 10\gamma + \frac{9}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} Q_k^+ \frac{(k-3)!(k+2)!}{(2k)!b^{k-2}} = 10.022...$$

$$P_1(i) = \frac{3}{2}(i-1)! + 3\sum_{j=0}^{4}(-1)^j C_{4+i}^j \frac{(3+i-j)!}{(4-j)!} +$$

$$+\sum_{j=0}^{2}(-1)^j C_{3+i}^j \frac{(1+i-j)!}{(2-j)!}(i-j-1).$$

Значення $P_1(i)$ для перших i є наступними (точно):

$$P_1(1) = 3.5,\ P_1(2) = 2.5,\ P_1(3) = 3.0,$$

$$P_1(4) = 3.0,\ P_1(5) = 12,\ P_1(6) = 180.$$

З отриманого виразу видно, що поправки пропорційні до $\theta^2 \ln\theta$ як і доданки порядку θ^2 зі всіх членів розкладу в ряд Тейлора ($k > 2$) виникають лише для хвильових функцій, в яких поліноми Лагерра в радіальній частині містять доданки з r^0 (це випливає з наявності множника $\delta_{p+q,0}$). Така умова виконується лише для хвильових функцій s–рівнів.

Таким чином середнє від оператора збурення на s–станах рівне

$$\langle V\rangle_{ns} = -10R_H\frac{\hbar^2\theta^2}{a^2n^3}\left(\ln\frac{\hbar\theta}{a} + D(n)\right) + \frac{\hbar^2\theta^2}{a^2n^3}R_H. \qquad (3.38)$$

Остаточно поправки до s–рівнів комутативного атома водню, спричинені некомутативністю, з врахуванням поправок (3.27) рівні

$$\Delta E_{ns} = -10R_H\frac{\hbar^2\theta^2}{a^2n^3}\left(\ln\frac{\hbar\theta}{a} + D(n)\right), \qquad (3.39)$$

де введені числа $D(n)$ дорівнюють

$$D(1) = 1.552...,\ D(2) = 1.146...,\ D(3) = 0.911...,$$

$$D(4) = 0.746...,\ D(5) = 0.620...,\ D(6) = 0.516....$$

Насамкінець зауважимо, що другий і вищі порядки теорії збурень дадуть поправки порядку θ^4.

3.4 Оцінка верхньої межі параметра некомутативності

Знайдемо верхню межу параметра некомутативності θ, використовуючи отримані теоретичні результати. Енергія переходу між рівнями $2s - 1s$ атома водню виміряна з точністю до $\Delta f = 11$ Гц [79]

$$f_{2s-1s} = (2\ 466\ 061\ 413\ 187\ 018 \pm 11)\ \text{Гц}. \qquad (3.40)$$

Як було показано в попередньому розділі, спінова некомутативність (1.14)–(1.18) зміщує енергетичні рівні атома водню на величину (3.39). Різниця між 2s та 1s рівнями при цьому змінюється на величину

$$\delta E_{2s-1s} \approx \frac{35}{4}\frac{\hbar^2\theta^2 R_H}{a^2}\ln\left[C\frac{\hbar\theta}{a}\right], \qquad (3.41)$$

де $(C-5) < 10^{-3}$.

Але оскільки експериментальні результати добре пояснюються в рамках комутативної квантової теорії, то зміна енергії переходу (3.41) через спінову некомутативність (1.14)–(1.18) не може бути більшою, ніж похибка експерименту $\delta E_{2s-1s} \leq 11$ Гц. Звідси отримуємо для параметра некомутативності оцінку

$$\hbar\theta \leq 2.5 \cdot 10^{-19} \text{ м}. \tag{3.42}$$

Зауважимо, що в середовищі, де взаємодія між частинками може бути ефективно врахована некомутативністю, можливі більші значення параметра некомутативності. Так наприклад, для бозе-конденсату атомів ^{52}Cr отримано значення $\hbar\theta \sim 10^{-11}$ см [7].

Знайдене обмеження для параметра некомутативності досліджуваної алгебри (3.42) є приблизно такими ж як і обмеження, знайдені для некомутативності канонічного типу. Наприклад у [80] встановлено верхню межу для параметра некомутативності канонічного типу на рівні $\hbar\sqrt{\langle\theta^2\rangle} \leq 7.7 \cdot 10^{-36}$ м^2. У [81] знайдено верхню межу параметра канонічної некомутативності на рівні $\hbar\theta \leq 5.6 \cdot 10^{-15}$ м^2.

3.5 Висновки

У даному розділі досліджено вплив спінової некомутативності на гармонічний осцилятор та атом водню.

В рамках алгебри (2.4)—(2.8) точно розв'язано тривимірний гармонічний осцилятор. Показано, що некомутативність знімає виродження за орбітальним l (вірніше сумою $2n+l$) та спіновим квантовими числами. При певних, достатньо великих, значеннях $m\omega|\theta|$ деякі рівні є випадково виродженими, зокрема для $\theta < 0$ і $m\omega|\theta| = \sqrt{8}$ основний рівень є двократно виродженим. В асимптотиці $m\omega \gg 1/|\theta|$ енергія основного рівня $E_0 = m\omega^2\lambda_{min}^2/2$.

Також проаналізовано атом водню у просторі зі спіновою некомутативністю координат (1.14)–(1.18). Показано, що в просторі з даною алгеброю кулонівський потенціал є несингулярний в $r = 0$. Встановлено, що квадрат моменту імпульсу не комутує з гамільтоніаном, а тому його власні значення не можуть входити до повного набору квантових чисел, які описують стан. Натомість запропоновано характеризувати стани значеннями квадрату повного моменту і його проекції на вибрану вісь.

Знайдено поправки до спектру енергій атома водню. Поправки до енергії рівнів з $l \neq 0$ рівні (3.30) і є пропорційними до θ^2. Для знаходження поправок до енергії s–рівнів було розроблено модифіковану теорію збурень, згідно з якою розклад в ряд кулонівського потенціалу проводився не в околі точки $r = 0$, а в околі зміщеної відносно силового центру точки, що дозволило виділити поправки до спектру s–рівнів (3.39), які виявилися пропорційними до $\theta^2 \ln \theta$.

Виходячи з похибки вимірювання частоти переходу між рівнями $2s$–$1s$ атома водню встановлено верхню межу для параметра некомутативності $\hbar\theta < 2.5 \cdot 10^{-19}$ м.

Розділ 4

РУХ ЧАСТИНКИ В ОБЕРНЕНО КВАДРАТИЧНОМУ ПОТЕНЦІАЛІ В КОМУТАТИВНОМУ ПРОСТОРІ ТА У ПРОСТОРІ ЗІ СПІНОВОЮ НЕКОМУТАТИВНІСТЮ

4.1 Вступ

Притягальний обернено квадратичний потенціал вивчався в літературі з різних точок зору і в різних підходах. Такий інтерес викликаний цікавими властивостями цього потенціалу. Це перш за все відсутність стаціонарних станів для притягального $1/r^2$ потенціалу: енергія частинки в такому потенціалі необмежена знизу [82–84]. Хоча формально і можна знайти розв'язки рівняння Шредінгера

$$\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{\gamma}{r^2}\right)\psi_E = E\psi_E \tag{4.1}$$

у вигляді функцій Бесселя $Z_\nu(kr)$, де $\nu = \sqrt{1/4 + l_z^2/\hbar^2 - 2m\gamma/\hbar^2}$, $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ [82], однак відповідні функції, достатньо швидко спадаючи на безмежності для забезпечення інтегровності, в околі нуля володіють асимптотикою $\psi_E \sim Ar^{s_+} + Br^{s_-}$, де $s_\pm = -1/2 \pm \sqrt{1/4 - 2m\gamma/\hbar^2}$, а тому є неаналітичними в так званому режимі сильного зв'язку $\gamma > \Gamma_c = \hbar^2/8m$. Неаналітична поведінка функції ψ_E може бути ототожнена з класичним падінням на центр [83]. Крім того, гамільтоніан в (4.1) є неермітовим [84], оскільки як можна переконатися, відповідні індекси дефекту цього гамільтоніана не рівні.

Обернено квадратичний потенціал досліджувався в літературі з різних точок зору. Інтерес до нього викликаний також реалізацією такого потенціалу в різних по своїй природі системах, зокрема таких як бозонні системи в ефекті Єфімова [85], нейтральний атом в електричному полі тонкої нитки [86–89], атом з магнітним моментом в магнітному полі довгого соленоїда [90], речовина поблизу горизонту чорної діри [91–95], електрон поблизу біполярної молекули [96–99].

Слід зауважити, що зв'язані стани можуть виникати для відповідно вибраного самоспряженого розширення гамільтоніана в (4.1) [100–102]. Так само зв'язані стани можуть виникати для відповідним чином регуляризованого потенціалу $-1/r^2$ [102–108]. Цікаво, що обернено квадратичний потенціал натуральним чином регуляризується в просторі з мінімальною довжиною [109, 110] і в некомутативному просторі [111]. Спільною рисою всіх названих підходів є наявність додаткового параметра розмірності довжини, який не є параметром чистого обернено квадратичного потенціалу.

В просторі з узагальненим принципом невизначеності $-\gamma/R^2$ регуляризується і замість падіння частинки на центр в потенціалі з'являються стаціонарні рівні [109, 112].

Розв'язок класичної проблеми про рух частинки в потенціалі $1/r^2$ відомий ще з XVIII століття [113]. Траекторією частинки є одна з трьох можливих спіралей Котеса. Частинка може або впасти на притягуючий центр, або ж віддалитися від центру в залежності від початкових параметрів.

Метою даного розділу є розглянути еволюцію квантової частинки в обернено квадратичному потенціалі. Хоча квантова задача про рух в потенціалі $-1/r^2$ вивчалася довгий час (наприклад [83]), однак часова еволюція квантового стану в такому потенціалі не розглядалася. В підрозділі 4.2 ми розглянемо еволюцію середнього $\left\langle r^2 \right\rangle$ в обернено квадратичному потенціалі. Також в цьому підрозділі буде показано наявність квантової границі падіння — квантова частинка принципово не може впасти на притягальний центр, якщо константа зв'язку менша, ніж певне критичне значення. В підрозділі 4.3 отримані теоретичні розрахунки буде порівняно з експериментальними вимірюваннями падіння атомів літію на заряджену нитку [89]. В підрозділі 4.4 ми запропонуємо модифікації розглядуваного експерименту, які допоможуть виявити квантову границю падіння експериментально.

В даному розділі також розглянуто вплив спінової некомутативності на поведінку частинки в обернено квадратичному потенціалі. Так в підрозділі 4.5 розглянуто обернено квадратичний потенціал у просторі з алгеброю (1.14)–(1.18). Знайдено вираз для гамільтоніана частинки в обернено квадратичному потенціалі в просторі зі спіновою некомутативністю. В параграфі 4.5.1 показано, що ефективна потенціальна енергія і повна енергія частинки в такому потенціалі обмежені знизу. В параграфі 4.5.2 за допомогою варіаційного методу знайдено верхню оцінку енергії основного стану.

Такі самі розрахунки проведено для алгебри (2.4)–(2.8) у підрозділі 4.6. Показано, що ця алгебра теж веде до регуляризації обернено квадратичного потенціалу, і замість падіння на притягальний центр у потенціалі виникають зв'язані стани.

Розділ завершується висновками.

4.2 Еволюція квантової частинки в обернено квадратичному потенціалі

4.2.1 Випадок довільної вимірності простору

Розрахунок часової еволюції хвильової функції під дією гамільтоніана з дискретним спектром можна легко провести розкладаючи хвильову функцію по власних станах цього гамільтоніана. Діючи на цей розклад оператором еволюції отримуємо закон зміни хвильової функції з часом. Однак у випадку притягального обернено квадратичного потенціалу, в якого немає стаціонарних рівнів, така схема не може бути застосованою.

Інший шлях розрахунку еволюції полягає в розкладі оператора еволюції в ряд Тейлора по часові. Для достатньо малих часів такий ряд збігається. Проте для обернено квадратичного потенціалу виникає додаткова проблема, яка пов'язана з сингулярністю гамільтоніана. Сингулярність гамільтоніана, в такому пертурбативному підході спричиняє наявність в хвильової функції доданків, які є нескінченними в точці силового центру. Справді, якщо, наприклад, початкова хвильова функція в околі початку координат має асимптотику r^s, тоді n-ий член розкладу в ряді поводить себе як r^s/r^{2n} і є сингулярним при $n > s/2$. Тому зрозуміло, що розклад в ряд Тейлора не можна проводити для оператора еволюції сингулярного гамільтоніана.

Виявляється, що вищеописаних труднощей можна уникнути, якщо аналізувати лише операторні середні. Часову еволюцію операторних середніх можна знайти з рівнянь Гайзенберга. Розглянемо рівняння руху для $\langle r^2 \rangle$. Таке середнє відображає просторовий розподіл хвильової функції, а саме — менші $\langle r^2 \rangle$ відповідають компактнішій локалізації хвильової функції і навпаки. Критерієм того, що частинка впала на центр на такій мові є рівність $\left\langle r^2\right\rangle = 0$.

Перша похідна по часу від $\left\langle r^2\right\rangle$ рівна

$$\frac{d}{dt}\left\langle r^2\right\rangle = -\frac{i}{\hbar}\left\langle\left[r^2, \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V\right]\right\rangle = \frac{\langle \boldsymbol{rp} + \boldsymbol{pr}\rangle}{m}. \tag{4.2}$$

Друга похідна записується

$$\frac{d^2}{dt^2}\left\langle r^2\right\rangle = \frac{4}{m}\left\langle\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\boldsymbol{\nabla}V\right\rangle. \tag{4.3}$$

Якщо розглядати потенціал V, який є степеневою функцією радіус-вектора r, то отриману систему рівнянь можна замкнути лише в трьох випадках — $V = 0$, $V = kr^2$ та $V = -\gamma/r^2$. У випадку $V = -\gamma/r^2$ знайдемо

$$\frac{d^2}{dt^2}\left\langle r^2\right\rangle = \frac{4}{m}\langle H\rangle. \tag{4.4}$$

Оскільки енергія (гамільтоніан) є інтегралом руху, то розв'язок рівняння (4.4) можна одразу ж знайти в наступному вигляді

$$\left\langle r^2\right\rangle = \left\langle r^2\right\rangle_0 + \frac{\langle \boldsymbol{rp} + \boldsymbol{pr}\rangle_0}{m}t + \frac{2\langle H\rangle}{m}t^2, \tag{4.5}$$

де дужки $\langle ...\rangle_0$ позначають операторні середні в початковий момент часу $t = 0$.

Протягом всього розділу, працюючи з середніми від операторів, будемо неявно припускати, що хвильові функції, на яких шукається середнє, задовільняють необхідні граничні умови, належать до області визначення відповідних операторів і жодних проблем з ермітовістю сингулярних операторів не виникає. Ці умови з очевидністю виконуються, якщо хвильова функція достатньо швидко спадає на безмежності, а в околі початку координат поводить себе як $|\psi|^2 \sim r^\alpha$, де $\alpha > 2 - D$, D є вимірністю простору. Така асимптотика хвильової функції забезпечує скінченність всіх середніх, які виникають в рівняннях (4.2)–(4.5), а головне $\left\langle 1/r^2\right\rangle$.

Рівняння руху для $\left\langle r^2 \right\rangle$ (4.5) формально співпадає з відповідним класичним рівнянням, в якому середні від операторів замінені класичними аналогами. Розв'язок цих класичних рівнянь руху можна записати в наступному вигляді

$$r^2 = r_0^2 + 2r_0\dot{r}_0 t + \frac{2E}{m}t^2. \tag{4.6}$$

Така відповідність між класичними і квантовими рівняннями руху для досліджуваного потенціалу відображає добре відому теорему Еренфеста.

З (4.5) випливає, що доля частинки залежить від значень середніх $\left\langle r^2 \right\rangle_0$, $\langle \boldsymbol{rp} + \boldsymbol{pr} \rangle_0$ і $\langle H \rangle$. У випадку $\langle H \rangle < 0$ частинка обов'язково впаде на центр.

Для $\langle H \rangle > 0$ частинка може або впасти на центр або віддалитися від нього. Падіння можливе у випадку $\langle \boldsymbol{rp} + \boldsymbol{pr} \rangle_0 < 0$ і $\left\langle r^2 \right\rangle_0 \leq \langle \boldsymbol{rp} + \boldsymbol{pr} \rangle_0^2 / 8m \left| \langle H \rangle \right|$. Нерівність $\langle \boldsymbol{rp} + \boldsymbol{pr} \rangle_0 < 0$ відповідає класичному випадку $\dot{r}_0 < 0$, тобто ситуації коли радіальна проекція початкової швидкості напрямлена на притягувальний центр.

Аналогічна ситуація має місце і у випадку $\langle H \rangle = 0$. Цікаво, що при $\langle H \rangle = 0$ і $\langle \boldsymbol{rp} + \boldsymbol{pr} \rangle_0 = 0$ частинка рухається з постійним середнім $\left\langle r^2 \right\rangle$. Залежність $\left\langle r^2 \right\rangle$ від часу зображена на Рис. 4.1.

У випадку, коли частинка падає на центр, можна знайти час падіння, використовуючи формулу (4.5) і покладаючи в ній $\left\langle r^2 \right\rangle = 0$.

4.2.2 Двовимірний випадок

В наступному підрозділі ми порівняємо викладені далі теоретичні розрахунки з вимірюваннями руху нейтральних атомів в електричному полі тонкої нитки [89] (будемо називати ці експерименти абревіатурою

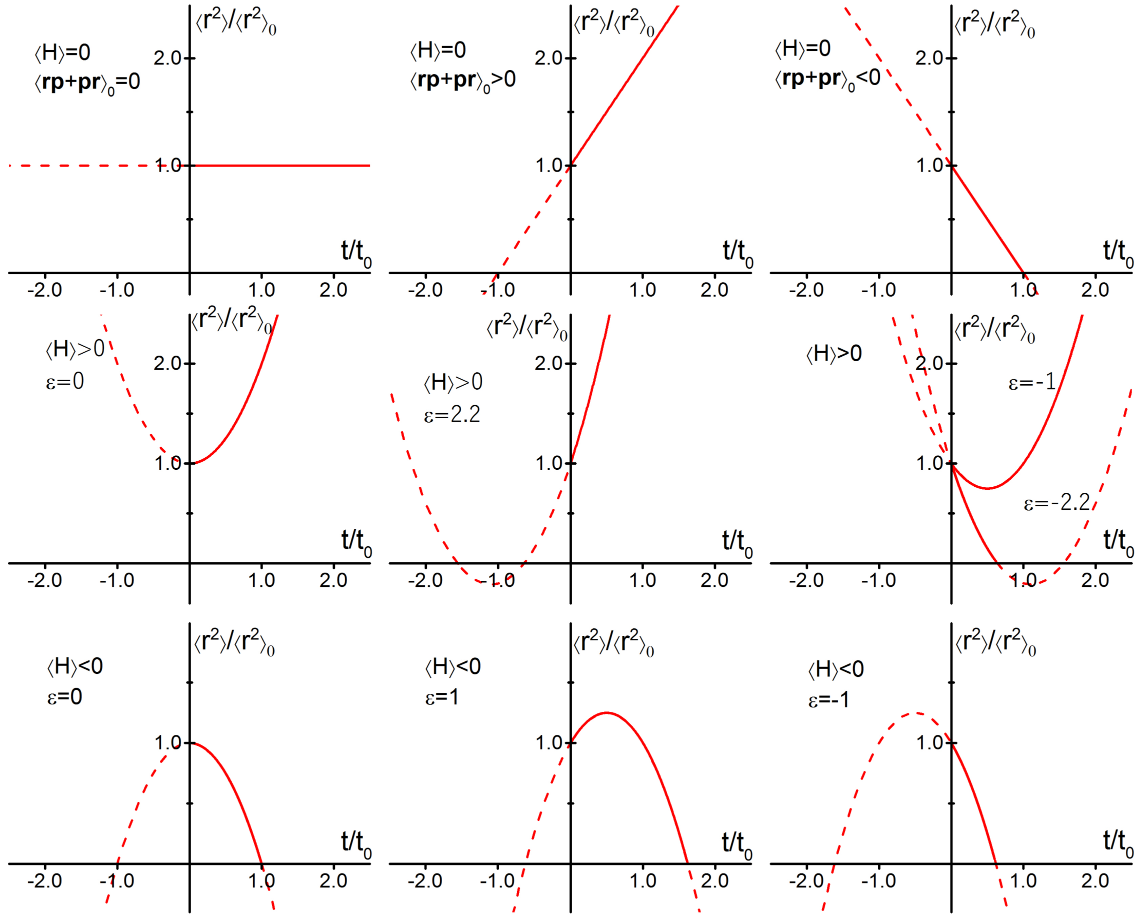

Рис. 4.1: Еволюція $\langle r^2 \rangle$ для різних початкових умов. Повна лінія (суцільна і пунктирна) відображає розв'язок рівнянь руху для $\langle r^2 \rangle$, але дійсний рух частинки відповідає лише суцільній частині. Часовий масштаб t_0 визначається в наступний спосіб. Якщо $\langle H \rangle \neq 0$, тоді $t_0 = \sqrt{m \langle r^2 \rangle_0 / 2 |\langle H \rangle|}$ і $\varepsilon = \langle \boldsymbol{rp} + \boldsymbol{pr} \rangle_0 / \sqrt{2m |\langle H \rangle| \langle r^2 \rangle_0}$. У випадку $\langle H \rangle = 0$ можна покласти $t_0 = m \langle r^2 \rangle_0 / |\langle \boldsymbol{rp} + \boldsymbol{ptr} \rangle_0|$. Якщо $\langle H \rangle$ і $\langle \boldsymbol{rp} + \boldsymbol{pr} \rangle_0$ рівні нулю, то частинка еволюціонує з постійним $\langle r^2 \rangle$, і в цьому випадку часовий масштаб можна обрати довільним.

DUS, отриманою з перших букв прізвищ авторів: Деншлаг–Умшаус–Шмідмаєр, Denschlag–Umshaus–Schmiedmayer).

Гамільтоніан частинки (атомів літію) в цьому експерименті має наступний вигляд

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - \frac{\gamma}{x^2 + y^2}. \tag{4.7}$$

Даний гамільтоніан можна представити як суму двох доданків

$$H = H_{xy} + H_z,$$

де $H_{xy} = (p_x^2 + p_y^2)/2m - \gamma/r^2$, $H_z = p_z^2/2m$. Як наслідок, хвильова функція факторизується

$$\Psi(x, y, z) = Ae^{ik_z z}\psi(x, y) \tag{4.8}$$

і початково тривимірна задача зводиться до двовимірної. Тому, надалі двовимірний випадок розглянемо детальніше.

Проаналізуємо середнє $\langle \boldsymbol{rp} + \boldsymbol{pr} \rangle_0$. Оскільки шукається середнє від ермітового оператора, то воно з необхідністю є дійсним.

З іншої сторони накладемо додатково на хвильову функцію, по якій ведеться усереднення, умову дійсності: $\psi^*(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})$. Тоді, враховуючи представлення для операторів імпульсу $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, перепишемо шукане середнє у вигляді

$$\langle \boldsymbol{rp} + \boldsymbol{pr} \rangle_0 = -i\hbar \int d\mathbf{r}\psi(\mathbf{r}) \left(\mathbf{r}\nabla + \nabla\mathbf{r}\right) \psi(\mathbf{r}). \tag{4.9}$$

Бачимо, що підінтегральний вираз в (4.9) є дійсним, а весь вираз справа уявний. Таким чином маємо ситуацію, коли з однієї частини рівняння маємо дійсну величину, а з іншої уявну. Це можливо тільки у випадку, коли вирази з обидвох сторін рівняння рівні нулю, а тому

$$\langle \boldsymbol{rp} + \boldsymbol{pr} \rangle_0 = 0 \tag{4.10}$$

якщо радіальна частина хвильової функції дійсна.

В такому випадку з врахуванням умови (4.10), можна отримати з (4.5) вираз для часу падіння у наступному вигляді

$$t_f = \sqrt{-\frac{m \langle r^2 \rangle_0}{2 \langle H \rangle}}. \tag{4.11}$$

Якщо умова (4.10) задовільняється, то частинка падає на центр тільки при від'ємній енергії $\langle H \rangle < 0$. Якщо хвильова функція пропорційна до r^s поблизу центру з $s < 1/2$, то $\langle H \rangle$ формально є нескінченним, бо відповідний підінтегральний вираз є сингулярним. В цьому випадку час падіння можна вважати нульовим. Однак такі стани вимагають безмежно великої енергії для створення, тому є нефізичними. З іншої сторони, для додатніх енергій $\langle H \rangle > 0$ час падіння t_f є уявним, а частинка не може впасти на центр.

Цікаво зауважити, що частинка з нульовою енергією буде безмежно довго знаходитися на тій самій відстані від центру $\left\langle r^2 \right\rangle = \left\langle r^2 \right\rangle_0$, як це видно з виразу (4.5). В цьому випадку, час падіння формально рівний нескінченності. Тобто, хоча обернено квадратичний потенціал не допускає стаціонарних станів, існують квазістаціонарні стани, в тому сенсі, що частинка, що задається таким станом, не падає на центр і не втікає з нього.

Наведемо приклад такого квазістаціонарного стану. Його можна шукати зокрема в наступному вигляді

$$\psi_s = \sqrt{\frac{2\beta^{s+1}}{\Gamma(s+1)}} r^s \exp\left(-\frac{1}{2}\beta r^2\right), \tag{4.12}$$

де $\Gamma(s)$ — гамма–функція Ейлера. Енергія частинки рівна нулю $\langle H \rangle = 0$ при $s = 2m\gamma/3\hbar^2$ і відповідна хвильова функція є квазістаціонарним станом.

Як було сказано, класичний вираз для часу падіння може бути отриманий з квантового (4.11) заміною операторних середніх їхніми класичними аналогами. Однак принципова відмінність між класичною та квантовою еволюціями полягає в допустимих значеннях класичних величин і відповідних квантовомеханічних середніх. Цікавий квантовий ефект має місце коли константа зв'язку γ є меншою, ніж певне критичне значення γ_c: $\gamma \leq \gamma_c$. Класична частинка може впасти на центр для яких завгодно малих значень γ. Для прикладу, як тільки покласти $\dot{r} = 0$ і $L = 0$, то енергія E стає від'ємною і частинка з необхідністю падає на центр.

В квантовій механіці ситуація є іншою, і як тільки константа зв'язку $\gamma \leq \gamma_c$ частинка принципово не може впасти на притягальний центр. Така квантова границя падіння має місце тому, що для достатньо малих γ енергія частинки не може бути від'ємною. Адже локалізація хвильової функції частинки в області малих розмірів спричиняє, згідно з принципом невизначеності Гайзенберга, великі значення імпульсу, а отже і кінетичної енергії, яка є строго додатна.

Для знаходження критичного значення γ_c детально розглянемо середнє від гамільтоніана. Для простоти, візьмемо хвильову функцію у вигляді $\psi = \mathcal{R}(r)e^{il_z\varphi}/\sqrt{2\pi}$, де радіальна частина $\mathcal{R}(r)$ є довільною квадратично інтегровною диференційовною функцією, а кутова частина є власною функцією оператора орбітального моменту, яка відповідає власному значенню l_z. В цьому випадку середнє від гамільтоніана $\langle H \rangle$ можна переписати в наступному вигляді

$$\langle H \rangle = \frac{\langle p_r^2 \rangle}{2m} + \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left(l_z^2 + \frac{1}{4} \right) - \gamma \right] \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle, \tag{4.13}$$

де $p_r = -(i\hbar/\sqrt{r})\partial_r \sqrt{r}$ — радіальна складова оператора імпульсу в полярних координатах. Використовуючи умову падіння $\langle H \rangle < 0$, отримаємо

$$\gamma > \gamma_c = \frac{\langle p_r^2 \rangle}{2m \langle 1/r^2 \rangle} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(l_z^2 + \frac{1}{4} \right). \tag{4.14}$$

З (4.14) випливає, що $\min \gamma_c = \Gamma_c = \hbar^2/8m$. Зауважимо, що Γ_c співпадає з границею режиму сильного зв'язку. Таким чином, для будь–якої заданої хвильової функції критичне значення γ_c можна знайти з виразу (4.14). Наприклад, для хвильової функції ψ_s (4.12) (підінтегральний вираз несингулярний при $s \geq 1/2$) отримаємо наступний вираз для середнього від гамільтоніана

$$\langle H \rangle = \frac{s+1}{\langle r^2 \rangle_0} \left(\frac{\hbar^2}{2m} - \frac{\gamma}{s} \right). \tag{4.15}$$

А для критичного значення γ_c маємо

$$\gamma_c = \frac{s\hbar^2}{2m} = 4s\Gamma_c. \tag{4.16}$$

Додамо дещо про межі застосовності нашої теорії. Хоча ми й розглядаємо нерегуляризований обернено квадратичний потенціал, та тим не менше наші результати залишаються застосовними також і у випадку регуляризованого потенціалу, якщо цікавитися еволюцією від положення $\left\langle r^2 \right\rangle = r_1^2$ до $\left\langle r^2 \right\rangle = r_2^2$, де $r_1^2, r_2^2 \gg a$, a — деякий регуляризаційний параметр.

Крім того, падіння на притягальний центр скінченних розмірів теж може бути описане отриманими рівняннями. В цьому випадку головна відмінність від точкового силового центру полягає в умові події падіння: частинка падає на центр, якщо $\left\langle r^2 \right\rangle_0 = a$, де a — радіус притягального центру.

4.3 Нейтральні атоми в полі тонкої зарядженої нитки

Падіння на обернено квадратичний потенціал було експериментально реалізовано в експерименті DUS для ультрахолодних атомів літію в полі тонкої зарядженої нитки [89]. В цьому експерименті нейтральні атоми літію з поляризованістю $\alpha_{Li} = 24.3$ Å^3 рухалися в циліндричній камері з довжиною $l = 0.1$ м. Нитка, радіусом $r_1 = 0.7$ мкм розміщена коаксіально з камерою.

Радіус зовнішнього циліндра камери не вказаний в роботах, однак його значення можна легко отримати за допомогою співвідношення між зарядом нитки і напругою на ній (зовнішній циліндр заземлений): заряд $q = 640 \cdot 10^{-12}$ Кл/м відповідає напрузі $U = 100$ В. Використовуючи вираз для ємності циліндричного конденсатора, отримаємо радіус камери рівний $r_2 = 4.2$ мм. В цьому експерименті підтримувався тиск на рівні $p = 6 \cdot 10^{-10}$ мм.рт.ст. Оскільки тиск є достатньо малий, то можна припустити, що під час падіння на нитку, атоми літію не розсіюються один на одному.

Нейтральні атоми літію поляризуються електричним полем нитки і набувають електричного дипольного моменту $\varepsilon_0 \alpha \mathcal{E}$. Гамільтоніан такого індукованого електричного диполя в електричному полі $\mathcal{E}$ записується

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{\varepsilon_0 \alpha \mathcal{E}^2}{2} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\gamma}{r^2}, \tag{4.17}$$

де $\gamma = \alpha q^2 / 8\pi^2 \varepsilon_0$.

Для порівняння отриманих теоретичних результатів з експериментальними вимірюваннями розглянемо систему N атомів літію в електричному полі нитки. Нехай атоми описуються хвильовою функцією певного типу, наприклад (4.12), і β — параметр цієї хвильової функції, який відображає просторовий розподіл атомів. У випадку хвильової функції (4.12) маємо $\beta = (s+1)/\left\langle r^2 \right\rangle_0$. Отже, різні β відповідають різним відстаням до центра. Насправді, ми представляємо систему N атомів літію як статистичний ансамбль хвильових функцій з різними β (або рівносильно $\left\langle r^2 \right\rangle_0$).

Як було зазначено в [89], типовий розподіл густини атомів в магніто-оптичній пастці з малою густиною атомів (включаючи пастку в експерименті DUS) є гаусовий. Тому можна записати нормований розподіл густини атомів літію в камері у наступному вигляді

$$\rho(\xi) = 2N\frac{\xi}{\bar{r}^2}\exp\left(-\xi^2/\bar{r}^2\right), \tag{4.18}$$

де $\xi = \sqrt{\langle r^2 \rangle_0}$ — "відстань" частинки від притягального центру, а $\bar{r}^2 = N^{-1}\int_0^\infty d\xi\xi^2\rho(\xi)$ позначає статистичне усереднення $\left\langle r^2 \right\rangle_0$.

Для довільної хвильової функції середнє від гамільтоніана $\langle H \rangle$ можна переписати у вигляді $\langle H \rangle = K/\left\langle r^2 \right\rangle$, де K — деяка константа, яка може бути знайдена для кожного заданого стану. Для хвильової функції (4.12) з виразу (4.15) знаходимо $K = (s+1)(\hbar^2/2m - \gamma/s)$. Використовуючи таке позначення, можна переписати вираз (4.11) в наступному вигляді

$$t_f = \sqrt{-\frac{m}{2K}\xi^2}, \tag{4.19}$$

тут t_f — час, за який частинка з $\sqrt{\langle r^2 \rangle_0} = \xi$ впаде на притягальний центр.

Цей вираз можна проінтерпретувати наступним чином. За проміжок часу від $t = 0$ до $t = t_f$ всі атоми з $\left\langle r^2 \right\rangle_0 \leq \xi^2(t_f) = \sqrt{-2K/m}t_f$ впадуть на центр. Число атомів, що впадуть за час t можна знайти у наступному вигляді

$$N(t) = \int\limits_0^{r(t)} d\xi\rho(\xi) = N\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \tag{4.20}$$

де час життя атомів у пастці рівний

$$\tau = \sqrt{-\frac{m}{2K}\bar{r}^2}. \tag{4.21}$$

Отриманий експоненційний закон розпаду повністю відповідає результатам експерименту DUS. Легко бачити, що час життя атомів (4.19) співпадає з часом (4.21), якщо квантовомеханічне середнє $\left\langle r^2 \right\rangle_0$ замінити статистичним середнім $\bar{r}^2$.

Оцінимо час життя атомів в камері експерименту DUS, використовуючи вираз (4.21). Припустимо, що хвильова функція атомів літію має вигляд (4.12) з $s = 1/2$. Покладаючи $\bar{r}^2 = r_2^2$, отримаємо час життя $\tau \sim 7$ с. Такий результат узгоджується з оцінкою зробленою в [89], де було виміряно час життя атомів на рівні 10 с.

Точна хвильова функція атомів літію є невідома. Для того, щоб обчислити достовірне значення критичного заряду q_c, який необхідний для падіння квантової частинки використаємо вираз Γ_c. В такому випадку отримуємо

$$q_c = \sqrt{\frac{\hbar^2 \pi^2 \varepsilon_0}{m\alpha}}. \tag{4.22}$$

В класичній границі ($\hbar \to 0$) критичний заряд рівний нулю $q_c = 0$, границя падіння відсутня, як і повинно бути.

Критичний заряд нитки в експерименті DUS, для якої атоми літію (з поляризованістю $\alpha_{Li} = 24.3$ Å^3) не падають на центр, є приблизно $q = 1.8 \cdot 10^{-12}$ Кл/м. Цей заряд відповідає напрузі $U_c = 0.29$ В. Така напруга є занадто малою для спостереження на оригінальній установці експерименту DUS.

4.4 Можливості покращення експерименту з падінням нейтральних атомів на заряджену нитку

Мета даного підрозділу полягає в тому, щоб запропонувати кілька модифікацій експерименту DUS для збільшення критичної напруги U_c і тим самим полегшення експериментального спостереження квантової границі падіння.

Перша пропозиція полягає у використанні легших атомів з меншим значенням поляризованості, як це випливає з виразу для q_c (4.22).

Так, для атомів водню ($\alpha_H = 0.667$ Å^3), а критичний заряд і напруга в камері експерименту рівні $q_c = 30 \cdot 10^{-12}$ Кл/м, $U_c = 4.6$ В відповідно. Таким чином, для атомів водню квантова границя падіння є в 16 разів більша, ніж в атомів літію. Майже такі самі критичні значення отримуються для атомів ^{3}He: $q_c = 31 \cdot 10^{-12}$ Кл/м, $U_c = 4.8$ В.

Інша ідея полягає в зміні розмірів камери. Ця пропозиція мотивована зв'язком між зарядом і напругою конденсатора $U = q/C = q\ln(r_2/r_1)/2\pi\varepsilon_0$, де C — ємність. Таким чином, використання конденсатора з більшим r_2 і меншим r_1 дозволяє працювати з більшою напругою. Так якщо маємо конденсатор з $r_2' = \lambda_2 r_2$, $r_1' = \lambda_1 r_1$, то значення критичної напруги рівне

$$U_c' = U_c \frac{\ln \frac{\lambda_2 r_2}{\lambda_1 r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = U_c \left(1 + \frac{\ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}\right).$$

Для експерименту DUS маємо $\ln r_2/r_1 \approx 8.67$, тому критична напруга $U_c' \approx 1.26 U_c$ для $\lambda_2/\lambda_1 = 10$ ($r_2 = 4.2$ см, $r_1 = 0.7$ мкм) і $U_c' \approx 1.53 U_c$ для $\lambda_2/\lambda_1 = 100$ ($r_2 = 42$ см, $r_1 = 0.7$ мкм). Збільшення розміру камери в 10 разів приводить до критичної напруги приблизно 6.1 В для атомів ^{3}He і 5.8 В для атомів водню. Це майже в 21 раз більше, ніж критична напруга в оригінальному експерименті DUS. Сподіваємося, що такі покращення допоможуть спостерігати квантову границю падіння експериментально.

4.5 Обернено квадратичний потенціал у просторі з некомутативними спіново-зміщеними координатами

Розглянемо притягальний обернено квадратичний потенціал у некомутативному просторі з некомутативними спіново–зміщеними координатами

натами та алгеброю (1.14)–(1.18). Покажемо, що в даному просторі існує мінімальна довжина. Справді, знайдемо власні значення оператора квадрату радіус–вектора (оператора площі з точністю до числового множника)

$$\widehat{R}^2 = r^2 + \hbar\theta(\mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}) + \frac{3}{4}(\hbar\theta)^2. \tag{4.23}$$

Вони (в залежності від напряму спіну) рівні

$$R^2_{\pm} = \left(r \pm \frac{\hbar\theta}{2}\right)^2 + \frac{(\hbar\theta)^2}{2}. \tag{4.24}$$

Мінімальне власне значення отримуємо при $r = \hbar\theta/2$ і знакові $-$: $\lambda^2_{min} = (\hbar\theta)^2/2$.

Як добре відомо, для довільного стану середнє від оператора не може бути меншим, ніж мінімальне власне значення

$$\langle R^2 \rangle \geq \lambda^2_{min} = \frac{(\hbar\theta)^2}{2}. \tag{4.25}$$

Таким чином отримуємо, що неможливо утворити стан з локалізацією в області з лінійними розмірами меншими, ніж $\lambda_{min} = \hbar\theta/\sqrt{2}$, а сама величина λ_{min} є мінімальною довжиною в просторі з алгеброю (1.14)–(1.18).

Інтуїтивно зрозуміло, що падіння на точковий центр в просторі з ненульовою мінімальною довжиною неможливе. Далі покажемо це строго.

Як зазвичай, приймемо як постулат, що задача в некомутативному просторі формулюється заміною в гамільтоніані $H(x,p)$ комутативних координат x на некомутативні відповідники X. Таким чином для обернено квадратичного потенціалу в просторі з алгеброю (1.14)–(1.18) маємо

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\gamma}{R^2} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\widehat{L}^2}{2mr^2} - \frac{\gamma}{r^2 + \theta r(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma}) + 3\theta^2/4}, \tag{4.26}$$

де $p_r = -(i\hbar/r)\partial_r r$ — радіальна складова оператора імпульсу, $\widehat{L}$ — оператор моменту імпульсу, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$.

Для подальших розрахунків зручно знерозмірити координати $r = \theta x/2$ та гамільтоніан

$$h = \frac{H}{H_0} = -\frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}x + \frac{\widehat{l}^2}{x^2} - \frac{\widetilde{\gamma}}{x^2 + 2x(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\sigma}) + 3}, \tag{4.27}$$

де введено знерозмірені величини $\widehat{l}^2 = \widehat{L}^2/\hbar^2$, $\widetilde{\gamma} = \gamma/\frac{\hbar^2}{2m}$, $H_0 = 2\hbar^2/m\theta^2$.

Як бачимо спінова некомутативність регуляризує потенціал, тому слід очікувати, що енергія буде обмежена знизу. Справді, оскільки в алгебрі (1.14)–(1.18) присутня мінімальна довжина (4.25), то враховуючи, що кінетична енергія завжди додатно визначена, отримуємо наступну межу знизу для енергії частинки

$$\langle h \rangle \geq -\left\langle \frac{\widetilde{\gamma}}{X^2} \right\rangle \geq -\frac{\widetilde{\gamma}}{\lambda_{min}^2} = -\frac{\widetilde{\gamma}}{2\theta^2}. \tag{4.28}$$

В наступному параграфі покращимо нижню межу енергії, враховуючи відцентровий доданок кінетичної енергії.

Крім того покажемо, що гамільтоніан (4.56) дійсно володіє зв'язаними станами. Для цього достатньо показати, що основний стан даного гамільтоніана має скінченну від'ємну енергію.

4.5.1 Знаходження нижньої межі енергії основного стану

Покращимо нижню границю (4.28) енергії основного стану, врахувавши відцентровий доданок кінетичної енергії. Для цього зручно помножити оператор потенціальної енергії частинки на спряжену до знаменника величину. Тоді гамільтоніан (4.27) запишеться у наступному вигляді

$$h = -\frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}x + \frac{\widehat{l}^2}{x^2} - \widetilde{\gamma}\frac{x^2 + 3 - 2x(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\sigma})}{x^4 + 2x^2 + 9}. \tag{4.29}$$

Для цього гамільтоніана спінові та кутові змінні відокремлюються і спіново–кутове рівняння розв'язується точно у вигляді лінійної комбінації сферичних спінорів $\Omega_{j,l,m}(\theta,\varphi)$ [69]

$$\psi = R_+(r)\Omega_{j,j+1/2,m} + R_-(r)\Omega_{j,j-1/2,m} = \begin{pmatrix} R_+ \\ R_- \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

Враховуючи те, що сферичні спінори є власними функціями оператора квадрату моменту імпульсу

$$\widehat{l^2}\Omega_{j,l,m} = l(l+1)\Omega_{j,l,m}, \tag{4.31}$$

та дію оператора $(\mathbf{n},\boldsymbol{\sigma})$ на сферичні спінори (3.18)–(3.19), знайдемо ефективну потенціальну енергію $\widetilde{U}(x)$ для радіального рівняння Шредінгера в представленні сферичних спінорів у вигляді наступної матриці

$$\widetilde{U}(x) = \begin{pmatrix} I_{j+1/2} - V_1 & -iV_2 \\ iV_2 & I_{j-1/2} - V_1 \end{pmatrix}, \tag{4.32}$$

де

$$V_1 = -\widetilde{\gamma}\frac{(x^2+3)}{(x^4+2x^2+9)}, \quad V_2 = -\widetilde{\gamma}\frac{2x}{(x^4+2x^2+9)}, \quad I_l = \frac{l(l+1)}{x^2}.$$

Оскільки оператор кінетичної енергії є додатно визначеним, то очевидно, що

$$\varepsilon \geq \langle\psi|\widetilde{U}|\psi\rangle \geq U_0, \tag{4.33}$$

де U_0 — мінімальне власне значення оператора ефективної потенціальної енергії (4.32).

Знайдемо мінімальне власне значення $U(x)$ матриці (4.32). Воно досягається при $j = 1/2$ і рівне

$$U(x) = V_1 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{\frac{1}{x^4} + V_2^2}. \tag{4.34}$$

Далі мінімізуючи (4.34) як функцію x знаходимо $U_0 = \min U(x)$, яке згідно з (4.33) і буде оцінкою нижньої межі для енергії частинки з гамільтоніаном (4.26)

$$\varepsilon_{low}(\widetilde{\gamma}) = U_0. \tag{4.35}$$

Чисельні розрахунки дають наступні значення для нижньої межі енергії частинки:

$$\varepsilon_{low}(\widetilde{\gamma} = 1) = -0.3482..., \tag{4.36}$$

$$\varepsilon_{low}(\widetilde{\gamma} = 10) = -4.3475..., \tag{4.37}$$

$$\varepsilon_{low}(\widetilde{\gamma} = 100) = -49.0618.... \tag{4.38}$$

Залежність $\varepsilon_{low}(\widetilde{\gamma})$ представлена на Рис.4.2.

Зауважимо, що для реальних експериментів з реалізацією потенціалу $-\gamma/r^2$ значення $\widetilde{\gamma}$ є порядку 100 [89].

4.5.2 Знаходження верхньої межі енергії основного стану

Обмеженість потенціальної енергії знизу ще не гарантує наявності зв'язаних станів, оскільки потенціальна яма може виявитися занадто мілкою чи вузькою для утворення зв'язаних рівнів. Щоб продемонструвати їхню наявність скористаємося варіаційним методом і покажемо, що енергія основного стану дійсно є від'ємною.

Оберемо пробну хвильову функцію у вигляді

$$\psi(x, \theta, \varphi) = Ce^{-\alpha x/2} \left(x\Omega_{1/2,1,0} + i\frac{\beta}{\alpha}\Omega_{1/2,0,0} \right), \tag{4.39}$$

де α, β — безрозмірні варіаційні параметри, C — стала нормування. Лінійна комбінація сферичних спінорів в (4.39) вибрана у відповідності до точного розв'язку кутового рівняння Шредінгера з гамільтоніаном (4.29).

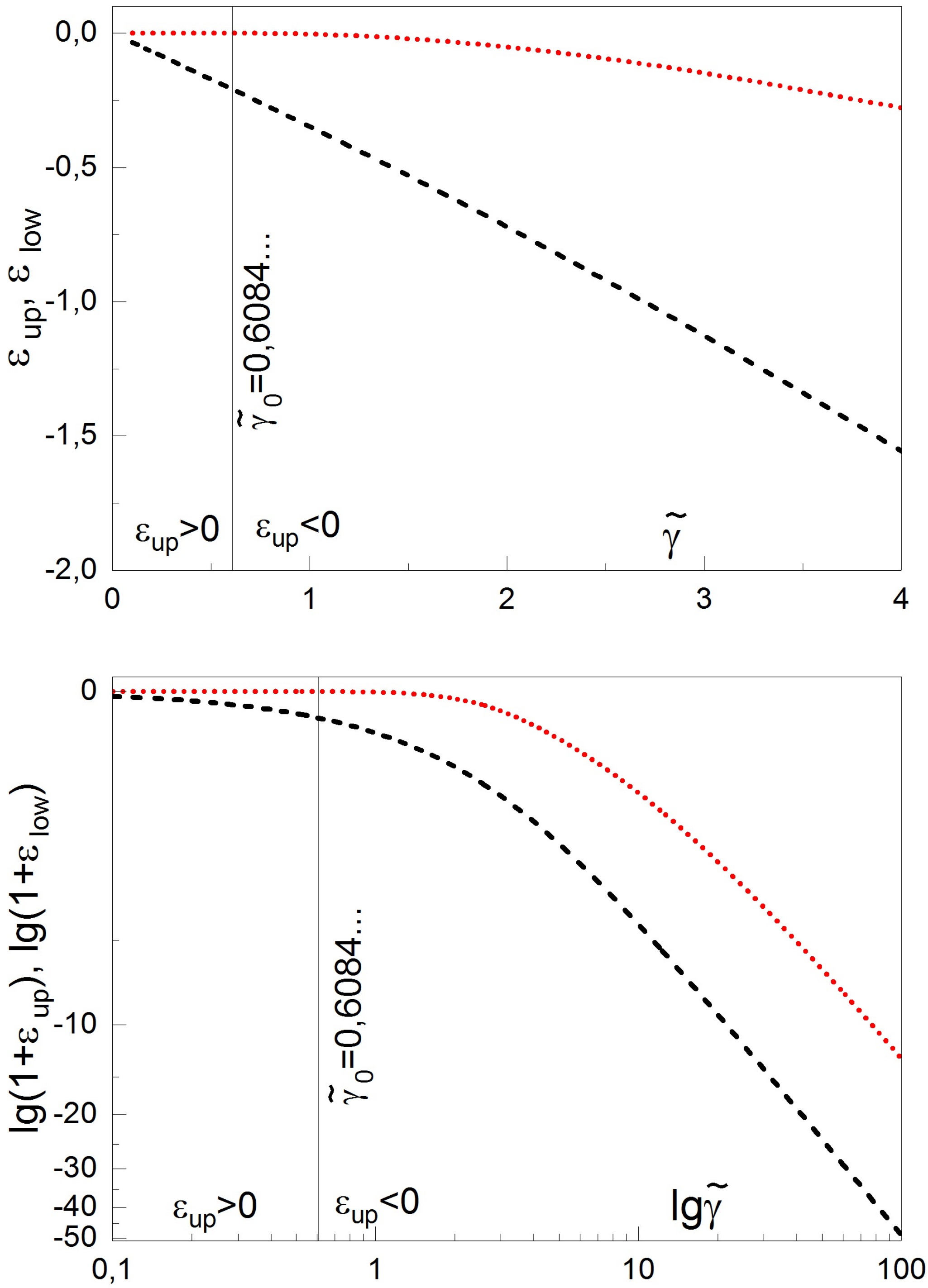

Рис. 4.2: На графіках зображено залежність нижньої $\varepsilon_{low}(\widetilde{\gamma})$ (пунктиром) та верхньої $\varepsilon_{up}(\widetilde{\gamma})$ (точками) оцінки енергії основного стану від константи зв'язку $\widetilde{\gamma}$. Вертикальна лінія $\widetilde{\gamma}_0 = 0.6084...$ відповідає граничному значенню константи зв'язку: при $\widetilde{\gamma} < \widetilde{\gamma}_0$ верхня оцінка енергії основного стану більша нуля, а при $\widetilde{\gamma} > \widetilde{\gamma}_0$ — менша. Значення енергії основного стану знаходиться між верхньою і нижньої лініями.

З умови нормування хвильової функції

$$\int_0^\infty dx \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, x^2 \sin\theta |\psi|^2 = 1,$$

та враховуючи ортогональність сферичних спінорів

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \sin\theta\, \Omega^\dagger_{jlm} \Omega_{j'l'm'} = \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

отримуємо сталу нормування $|C|^2 = \alpha^5/(24 + 2\beta^2)$.

Середнє від кінетичної енергії на хвильовій функції (4.39), враховуючи (4.31), рахується достатньо просто і рівне

$$\left\langle -\frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial x^2} x + \frac{\widehat{l}^2}{x^2} \right\rangle = \frac{\alpha^2}{4}. \tag{4.40}$$

Обчислення середнього від потенціальної енергії провести аналітично складно. Тому здійснимо деякі перетворення потенціалу. Для цього помножимо чисельник і знаменник дробу на спряжену до знаменника величину

$$-\frac{\widetilde{\gamma}}{x^2 + 2x(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma}) + 3} = -\widetilde{\gamma} \frac{x^2 + 3 - 2x(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma})}{(x^2+3)^2 - 4x^2}. \tag{4.41}$$

Оскільки нас цікавить верхня межа енергії основного стану, то можемо замінити потенціал системи на потенціал, який більший за даний в кожній точці x

$$-\widetilde{\gamma} \frac{x^2 + 3 - 2x(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma})}{(x^2+3)^2 - 4x^2} \leq -\widetilde{\gamma} \frac{x^2 + 3 - 2x(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma})}{(x^2+3)^2}. \tag{4.42}$$

Інтеграли, які виникають при обчисленні верхньої межі енергії основного стану можна знайти аналітично

$$\int_0^\infty dx \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(x^2+b)^{m+1}} = \frac{(-1)^{m+n}}{m!} \frac{d^n}{d\alpha^n} \frac{d^m}{db^m} \int_0^\infty dx \frac{e^{-\alpha x}}{x^2 + b}.$$

Інтеграл в правій частині рівний [78]

$$\int\limits_0^\infty dx \frac{e^{-\alpha x}}{x^2+b} = \frac{1}{\sqrt{b}} f(\sqrt{b}\alpha), \tag{4.43}$$

де $f(x) = \operatorname{ci} x \sin x - \operatorname{si} x \cos x$, $\operatorname{ci} x$, $\operatorname{si} x$ — інтегральний косинус та синус відповідно.

Таким чином, враховуючи вирази (3.18)–(3.19) та рівність

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} f(\sqrt{b}\alpha) = \frac{\sqrt{b}}{\alpha} - bf(\sqrt{b}\alpha), \tag{4.44}$$

знайдемо оцінку верхньої межі для середнього від потенціальної енергії

$$\langle U \rangle \leq -\frac{\widetilde{\gamma}}{2} \frac{a\beta^2 + b\beta + c}{12 + \beta^2}, \tag{4.45}$$

де введені константи рівні

$$a = 1 - \sqrt{3}\alpha f, \tag{4.46}$$

$$b = 4a - 4\sqrt{3}\alpha^2 f - 6a^3 f', \tag{4.47}$$

$$c = 2 - 3\alpha + 3\sqrt{3}\alpha^3 f, \tag{4.48}$$

$$f = f(\sqrt{3}\alpha), \tag{4.49}$$

$$f' = \frac{d}{d\alpha} f(\sqrt{3}\alpha). \tag{4.50}$$

Для середнього від гамільтоніана (4.27) отримуємо

$$\langle h \rangle \leq E(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\widetilde{\gamma}}{2} \frac{a\beta^2 + b\beta + c}{12 + \beta^2}. \tag{4.51}$$

Мінімізація $E(\alpha, \beta)$ по β приводить до наступного значення

$$\beta = \frac{12a - c}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{12a - c}{b}\right)^2 + 12}. \tag{4.52}$$

Для мінімізації (4.51) по α необхідно розв'язати складне трансцендентне рівняння, що аналітично здійснити неможливо. Чисельні розрахунки дають наступні оцінки верхньої межі для енергії основного стану:

$$\varepsilon_{up}(\widetilde{\gamma} = 1) = -0.0037..., \tag{4.53}$$

$$\varepsilon_{up}(\widetilde{\gamma} = 10) = -1.0753..., \tag{4.54}$$

$$\varepsilon_{up}(\widetilde{\gamma} = 100) = -13.0336.... \tag{4.55}$$

Залежність верхньої межі енергії основного стану від константи зв'язку зображена на Рис.4.2. Істинне значення енергії основного стану на графіку знаходиться між верхньою і нижньою лініями.

Існує граничне значення $\widetilde{\gamma}_0 = 0.6084...$, нижче якого варіаційний метод дає оцінку енергії основного стану, більшу нуля, а отже стверджувати наявність зв'язаних станів не можна. Однак для $\widetilde{\gamma} > \widetilde{\gamma}_0$ верхня оцінка енергії основного стану від'ємна, що і доводить наявність зв'язаних станів для обернено квадратичного потенціалу в просторі зі спіново–зміщеними некомутативними координатами.

4.6 Обернено квадратичний потенціал у просторі з нерелятивістською алгеброю Гомеза–Купріянова–да Сільви

Розглянемо притягальний обернено квадратичний потенціал у просторі з нерелятивістською спіновою некомутативністю GKdS (2.4)–(2.8). Гамільтоніан частинки в обернено квадратичному потенціалі в некомутативному просторі традиційно побудуємо заміною комутативних координат в гамільтоніані на некомутативні координати. Враховуючи

(2.9) запишемо гамільтоніан задачі у вигляді

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\gamma}{R^2} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\gamma}{r^2 - \theta\left(\mathbf{s}, \mathbf{L}\right)/\hbar + \theta^2 p^2/8}. \tag{4.56}$$

Покажемо, що гамільтоніан (4.56) володіє зв'язаними станами. Для цього, так само як і у попередньому підрозділі, достатньо показати, що енергія частинки є скінченною від'ємною величиною.

Обмеженість енергії частинки знизу випливає з факту існування в просторі з досліджуваною алгеброю мінімальної довжини (2.12). Справді, оскільки кінетична енергія $\widehat{T} = \mathbf{p}^2/2m$ додатно визначена $\langle \widehat{T} \rangle \geq 0$, то очевидно, що енергія частинки з гамільтоніаном (4.56) обмежена знизу

$$\langle H \rangle \geq \left\langle -\frac{\gamma}{R^2} \right\rangle \geq -\frac{\gamma}{\lambda_{min}^2} = -\frac{2\sqrt{2}\gamma}{3\hbar\theta}. \tag{4.57}$$

Ця величина і є нижньою оцінкою енергії основного стану.

Тепер покажемо, що енергія основного стану є від'ємною. Для цього скористаємося варіаційним методом. В якості пробної хвильової функції оберемо власні стани оператора $\widehat{R}^2$ (2.17). Ці хвильові функції є власними станами оператора потенціальної енергії. Крім того вони є також власними станами оператора

$$\widehat{h} = r^2 + \frac{\theta^2 p^2}{8} \tag{4.58}$$

з власними значеннями

$$h = \frac{\hbar\theta}{\sqrt{2}(2n + l + 3/2)}. \tag{4.59}$$

Легко бачити, що оператор $\widehat{h}$ фактично є гамільтоніаном гармонічного осцилятора, тому для розрахунку середнього від кінетичної енергії на варіаційних функціях $|\psi\rangle_{nl}$ зручно використати теорему про віріал, згідно з якою

$$\langle p^2 \rangle_{nl} = \frac{8}{\theta^2}\frac{h}{2} = \frac{2\sqrt{2}\hbar}{\theta}\left(2n + l + \frac{3}{2}\right). \tag{4.60}$$

Таким чином середнє від гамільтоніана на $|\psi\rangle_{nl}$ рівне

$$\langle H\rangle_{nl} = \frac{\sqrt{2}\hbar}{m\theta}\left(2n + l + \frac{3}{2}\right) - \\ -\frac{\gamma}{\hbar\theta}\frac{2}{\sqrt{2}(2n+l+3/2) - (j(j+1) - l(l+1) - 3/4)}. \qquad (4.61)$$

Мінімізуючи (4.61) по n та l, отримуємо мінімальне значення середнього від гамільтоніана при $n = 0$, $l = 0$

$$\langle H\rangle_{min} = \langle H\rangle_{00} = \frac{3\hbar}{\sqrt{2}m\theta} - \frac{2\sqrt{2}\gamma}{3\hbar\theta}. \qquad (4.62)$$

Величина $\langle H\rangle_{min}$ є верхньою варіаційною границею для енергії основного стану.

Таким чином, істинне значення енергії основного стану знаходиться між верхньою і нижньою межами

$$-\frac{2\sqrt{2}\gamma}{3\hbar\theta} \leq E_0 \leq \frac{3\hbar}{\sqrt{2}m\theta} - \frac{2\sqrt{2}\gamma}{3\hbar\theta}. \qquad (4.63)$$

Тепер покажемо, що для достатньо великих констант зв'язку γ в потенціалі $-\gamma/R^2$ в просторі з алгеброю (2.4)–(2.8) виникають зв'язані стани. Справді, з умови

$$\frac{3\hbar}{\sqrt{2}m\theta} - \frac{2\sqrt{2}\gamma}{3\hbar\theta} < 0$$

отримуємо, що енергія основного стану від'ємна при

$$\gamma > \frac{9\hbar^2}{4m} = 18\gamma_{cr} \qquad (4.64)$$

і на відміну від падіння на центр в комутативному просторі, в просторі з нерелятивістською спіновою некомутативністю GKdS в обернено квадратичному потенціалі виникають зв'язані стани.

4.7 Висновки

Було показано, що середнє $\left\langle r^2\right\rangle$ еволюціонує як квадратичний поліном по часу в обернено квадратичному потенціалі. Еволюція повністю задається середніми $\left\langle r^2\right\rangle_0$, $\langle \boldsymbol{rp}+\boldsymbol{pr}\rangle_0$ та $\langle H\rangle$ в початковому стані і є суттєво відмінною для різних початкових умов (Рис. 4.1). Знайдено необхідні умови для падіння квантової частинки на притягальний центр.

Випадок для $\langle \boldsymbol{rp}+\boldsymbol{pr}\rangle_0 = 0$ у двовимірному просторі було розглянуто детально. Для таких станів час падіння визначається виразом (4.11). Також продемонстровано існування квазістаціонарних станів, які еволюціонують з постійним $\left\langle r^2\right\rangle$. Прикладом такого стану є (4.12). Показано наявність квантової границі падіння, а саме — частинка не може впасти на притягальний центр потенціалу $1/r^2$, якщо константа зв'язку γ є меншою, ніж деяке критичне значення γ_c, яке визначається формулою (4.14).

Отримані теоретичні результати порівняно з експериментальними вимірюваннями руху нейтральних атомів літію в електричному полі зарядженої нитки [89]. Теоретично розрахований час падіння близький з експериментально виміряним значенням. Також обчислено критичний заряд нитки і напругу між ниткою і стінкою камери, який дозволяє падіння частинки на притягуючий центр. Критична напруга виявилася рівною приблизно 0.3 В.

Додатково запропоновано деякі модифікації для покращення експерименту для виявлення квантової границі падіння. Перша пропозиція полягає у використанні легших атомів з меншим значенням поляризованості (наприклад атоми гідрогену або гелію), інша – в зміні розмірів камери. Ці покращення дозволять збільшити необхідну напругу в 21 раз по відношенню до аналогічного значення в оригінальному експерименті.

В даному розділі також розглянуто притягальний обернено квадратичний потенціал $-\gamma/R^2$ в просторі зі спіновою некомутативністю координат (1.14)–(1.18). Знайдено ефективну потенціальну енергію (4.32) радіального руху основного стану частинки в обернено квадратичному потенціалі. Ефективна потенціальна енергія виявилися обмеженою знизу, що свідчить про те, що енергія основного стану теж обмежена знизу.

Використовуючи варіаційний метод показано, що для константи зв'язку $\gamma/\frac{\hbar^2}{2m} > 0.6084...$ варіаційна границя для енергії основного стану є меншою нуля. Таким чином доведено, що в просторі з некомутативними спіново–зміщеними координатами при достатньо великих значеннях константи зв'язку мінімальна енергія частинки в обернено квадратичному потенціалі є скінченною від'ємною величиною, а отже утворюються зв'язані стани, на противагу до комутативного випадку, де відбувається падіння частинки на центр.

Також було розглянуто потенціал $-\gamma/R^2$ у просторі зі спіновою некомутативністю координат (2.4)–(2.8). Показано, що наявність мінімальної довжини теж регуляризує потенціал і енергія основного стану є обмеженою знизу. Використовуючи варіаційний метод знайдено верхню границю для енергії основного стану, яка для достатньо великих значень константи зв'язку γ є від'ємною. Таким чином доведено, що в обернено квадратичному потенціалі в просторі зі спіновою некомутативністю координат GKdS виникають зв'язані стани, на відміну від комутативного простору, де частинка падає на центр.

Розділ 5

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА У ПРОСТОРІ З НЕКОМУТАТИВНИМИ СПІНОВО-ЗМІЩЕНИМИ КООРДИНАТАМИ

5.1 Вступ

В цьому розділі розглянуто теорію електромагнітного поля у просторі зі спіновою некомутативністю координат (2.20)–(2.25). Вперше електромагнітне поле у просторі з некомутативними координатами розглянув Снайдер [54], однак, через брак фізичних аргументів на користь некомутативності, після цієї роботи теорія поля в некомутативному просторі довгий час не розглядалася.

Інтерес до некомутативної теорії поля, як і до фізики в некомутативному просторі взагалі відновився з публікацією [1], де координатна некомутативність отримана строго з теорії струн. Така аргументація спричинила інтенсивне дослідження різноманітних ефектів теорії поля, зокрема і електродинаміки у просторі з канонічною некомутативністю. Зараз електродинаміка у просторі з канонічною некомутативністю є добре вивченою як і на класичному, так і на квантовому рівнях [8, 11, 13–15, 17, 114–120].

Хоча електродинаміці у просторі з канонічною некомутативністю присвячена переважна більшість робіт в області електродинаміки в просторах з деформованими комутаційними співвідношеннями, існує декілька цікавих моделей в просторах з іншими варіантами координатної некомутативності. Так наприклад, в роботах [121–124] розглянуто електродинаміку у просторі з некомутативною алгеброю DFR [3, 4]. В [125–127] досліджено теорію електромагнітного поля у нечіткому просторі (fuzzy space) з координатним комутатором (1.12).

Цікавою є теорія електромагнітного поля у просторі з релятивістською деформованою двопараметричною алгеброю Гайзенберга [128]. Можна показати, що в лінійному наближенні по параметру алгебри така електродинаміка співпадає з електродинамікою Подольського [128]. Така електродинаміка з зовнішнім джерелом була розглянута в [129].

Електродинаміка у просторі зі спіновою некомутативністю розглянута нами вперше.

Для побудови функції поля в просторі з канонічною некомутативністю необхідно розв'язувати рівняння Зайберга–Віттена [1], які розв'язуються в кожному порядку розкладу польової функції в ряд по параметру некомутативності. В кожному наступному порядку дані рівняння сильно ускладнюються, що робить задачу пошуку коефіцієнтів розкладу польової функції надзвичайно складною. На практиці, в переважній більшості випадків користуються лише кількома першими членами розкладу. Як буде показано в цьому розділі, запропонований нами метод побудови польової функції в просторі зі спіновою некомутативністю не містить даної проблеми, а рівняння поля можуть бути знайденими точно у всіх порядках розкладу польової функції по параметру спінової некомутативності. Більше того, застосування цього методу не обмежується лише електродинамікою і може бути застосованою до будь–якого поля.

Нами знайдено вираз для потенціалу електромагнітного поля у просторі зі спіновою некомутативністю координат. В некомутативному просторі електромагнітне поле є неабелевим, тому для побудови функції Лагранжа такого поля було використано методи теорії поля Янга–Міллса. З умови інваріантності коваріантної похідної відносно локальних калібрувальних перетворень було знайдено вигляд калібрувальних перетворень для поля та закон збереження електричного струму. З принципу найменшої дії знайдено точні рівняння поля. Таким чином побудована електродинаміка є корисною моделлю для дослідження непертурбативних ефектів в некомутативній теорії поля.

В рамках побудованої теорії розв'язано ряд задач. Зокрема, в рамках теорії збурень було знайдено вплив магнітного поля на електричне поле точкового заряду, який виникає внаслідок нелінійності польових рівнянь. Крім того досліджено взаємодію двох плоских електромагнітних хвиль в такій електродинаміці. Також точно розв'язано задачу про поширення плоскої хвилі у постійному магнітному та електричному полях та знайдено модифіковане дисперсійне співвідношення для такої хвилі. Всі результати порівняно з аналогічними дослідженнями у просторі з канонічною некомутативністю.

5.2 Електромагнітне поле в просторі зі спіново– зміщеними некомутативними координатами

5.2.1 Тензор електромагнітного поля. Дія електромагнітного поля

Потенціал електромагнітного поля в просторі зі спіново-зміщеними некомутативними координатами задається матричною функцією

$$\tilde{A}^{\mu} = \widehat{T} A^{\mu} = e^{i\theta(\gamma\partial)} A^{\mu} \tag{5.1}$$

у повній відповідності до результатів підрозділу 2.3.2. Некомутативне електромагнітне поле $\tilde{A}^{\mu}$ є неабелевим, а комутатор різних компонент потенціалу дорівнює

$$\left[e^{i\theta(\gamma\partial)} A^{\mu}, e^{i\theta(\gamma\partial)} A^{\nu}\right] = 2i\theta^2 \sigma^{\alpha\beta} \tilde{\partial}_{\alpha} A^{\mu} \tilde{\partial}_{\beta} A^{\nu}. \tag{5.2}$$

В силу загальної схеми теорії неабелевих полів, тензор такого некомутативного електромагнітного поля записується у наступному вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{\mu\nu} &= \partial^{\mu}\tilde{A}^{\nu} - \partial^{\nu}\tilde{A}^{\mu} - ie\left[\tilde{A}^{\mu}, \tilde{A}^{\nu}\right] = \\ &= \partial^{\mu}\tilde{A}^{\nu} - \partial^{\nu}\tilde{A}^{\mu} + 2e\theta^2\sigma^{\alpha\beta}\tilde{\partial}_{\alpha}A^{\mu}\tilde{\partial}_{\beta}A^{\nu}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Тепер, отримавши тензор поля, можна легко побудувати функцію Лагранжа, а отже, і дію поля. Вони будуються наступним стандартним чином

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x \, \mathrm{Sp}\left\{-\frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right\}. \tag{5.4}$$

Після шпурування дія набуде вигляду

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \left\{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \right. \\ \left. -\frac{1}{4}e^2\theta^4\left(\tilde{\partial}^{\alpha}A^{\mu}\tilde{\partial}_{\alpha}A_{\mu}\tilde{\partial}^{\beta}A^{\nu}\tilde{\partial}_{\beta}A_{\nu} - \tilde{\partial}^{\alpha}A^{\mu}\tilde{\partial}_{\alpha}A_{\nu}\tilde{\partial}^{\beta}A^{\nu}\tilde{\partial}_{\beta}A_{\mu}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Очевидно, що дія (5.5) є інваріантною відносно перетворень Лоренца, оскільки записана в явно коваріантній формі. Крім того прямою перевіркою можна переконатися, що побудована дія некомутативного електромагнітного поля є $\mathcal{C}-$, $\mathcal{P}-$ та $\mathcal{T}-$ інваріантною.

З виразу для дії (5.5) також випливає, що перші поправки, спричинені спіновою некомутативністю, є порядку четвертої степені по параметру некомутативності θ. В зв'язку з цим зауважимо про деяку довільність у виборі представлення некомутативних координат. Справді, в представленні (2.18) можна було б не писати уявної одиниці біля діраківських матриць (яку ми там ввели для ермітовості операторів координати). Позбутися цієї уявної одиниці можна у всіх формулах формальною заміною $\theta \to -i\theta$. Однак до зміни функції Лагранжа, а отже і рівнянь руху це не призведе, оскільки ведучий вклад від спінової некомутативності кратний θ^4, а $(-i\theta)^4 = \theta^4$.

5.2.2 Калібрувальні перетворення. Закон збереження електричного струму

Згідно з компенсаційним підходом, калібрувальні поля виникають як деякі додаткові поля, необхідні для забезпечення інваріантності функції Лагранжа деякого (в загальному випадку багатокомпонентного, а для електромагнітного поля комплексного) скалярного поля φ відносно локальних калібрувальних перетворень. На практиці це зводиться до заміни звичайних похідних від поля ∂_μ на коваріантні $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, де поле A_μ і є "компенсаційним" калібрувальним полем, яке забезпечує інваріантність лагранжіана. Калібрувальні перетворення для поля A_μ можна знайти з умови калібрувальної інваріантності коваріантної похідної стосовно множення на елемент групи калібрувальних перетворень.

Калібрувальні перетворення (локальні калібрувальні перетворення) для електромагнітного поля в некомутативному просторі відрізняються від звичайних $U(1)$ перетворень. В просторі зі спіновою некомутативністю вимагатимемо від лагранжіана комплексного поля інваріантності стосовно множення на експонентний фактор $\exp(ie\tilde{\alpha}(x))$ (замість множення на $\exp(ie\alpha(x))$ як в комутативному просторі). Таким чином знайдемо калібрувальні перетворення для некомутативного електромагнітного поля $\tilde{A}^{\mu}$ з умови

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'_{\mu}(e^{ie\tilde{\alpha}}\tilde{\varphi}) = \partial_{\mu}(e^{ie\tilde{\alpha}}\tilde{\varphi}) + ie\tilde{A}'_{\mu}e^{ie\tilde{\alpha}}\tilde{\varphi} = \\ = e^{ie\tilde{\alpha}}(\partial_{\mu}\tilde{\varphi} + ie\tilde{A}_{\mu}\tilde{\varphi}) = e^{ie\tilde{\alpha}}\mathcal{D}_{\mu}\tilde{\varphi},\end{aligned} \tag{5.6}$$

де штрих позначає змінну після калібрувального перетворення.

Диференціюючи перший доданок в лівій частині, отримаємо

$$ie\tilde{A}'_{\mu}e^{ie\tilde{\alpha}}\tilde{\varphi} = e^{ie\tilde{\alpha}}ie\tilde{A}_{\mu}e^{-ie\tilde{\alpha}}(e^{ie\tilde{\alpha}}\tilde{\varphi}) - (\partial_{\mu}e^{ie\tilde{\alpha}})e^{-ie\tilde{\alpha}}(e^{ie\tilde{\alpha}}\tilde{\varphi}).$$

Враховуючи довільність масового поля $\tilde{\varphi}$ знайдемо калібрувальні перетворення у наступному вигляді

$$\tilde{A}'_{\mu} = e^{ie\tilde{\alpha}}\tilde{A}_{\mu}e^{-ie\tilde{\alpha}} + \frac{i}{e}\cdot e^{ie\tilde{\alpha}}(\partial_{\mu}e^{-ie\tilde{\alpha}}). \tag{5.7}$$

Вигляд цього калібрувального закону нагадує закон калібрувального перетворення неабелевого поля в комутативному просторі. Прокомутуємо A_{μ} і експоненту $e^{-ie\tilde{\alpha}}$ в першому доданку і продиференціюємо $e^{-ie\tilde{\alpha}}$ в другому доданку правої сторони рівняння. Тоді калібрувальні перетворення набудуть наступного вигляду

$$\tilde{A'}_{\mu} = \tilde{A}_{\mu} + \partial_{\mu}\tilde{\alpha} - i\theta^{2}\sigma^{\nu\beta}(e^{ie\tilde{\alpha}}\tilde{\partial}_{\nu}e^{-ie\alpha})\tilde{\partial}_{\beta}(2A_{\mu} + \partial_{\mu}\alpha). \tag{5.8}$$

Відповідні інфінітезимальні калібрувальні перетворення мають вигляд

$$\tilde{A'}_{\mu} = \tilde{A}_{\mu} + \partial_{\mu}\tilde{\alpha} - 2e\theta^{2}\sigma^{\nu\beta}\tilde{\partial}_{\nu}\alpha\tilde{\partial}_{\beta}A_{\mu}. \tag{5.9}$$

Як і у випадку поля Янга–Міллса можна легко записати закон калібрувальних перетворень для тензора поля $\tilde{F}^{\mu\nu}$ і показати інваріантність дії відносно калібрувальних перетворень. Калібрувальні перетворення для A_μ є складнішими, їх можна отримати дією оператора $\widehat{T}^{-1} = e^{-i\theta(\gamma\partial)}$ зліва на вираз (5.8).

Алгебра калібрувальної групи є прямим добутком алгебр $u(1) \otimes so\gamma(1,3)$, де алгебра $so\gamma(1,3)$ складається з матриць γ^μ, $\sigma^{\mu\nu}$ і одиничної матриці. Відповідна калібрувальна група є теж прямим добутком добре відомих груп $U(1) \otimes SL(1,3)$. Перший множник відображає внутрішню симетрію електромагнітного поля, а останній виникає внаслідок некомутативної структури простору–часу.

Більше того, таким самим чином, алгебра калібрувальної групи довільного неабелевого (в комутативному просторі) поля може бути записана як прямий добуток $g \otimes so\gamma(1,3)$, де алгебра g є алгеброю калібрувальної групи G відповідного поля Янга–Міллса в комутативному просторі. Однак в цьому випадку через неабелевий характер групи G некомутативна калібрувальна група досліджуваного поля вже не є просто добутком двох груп $G \otimes SL(1,3)$.

Маючи вигляд калібрувальних перетворень, за допомогою методу Ньотер можна легко отримати закон збереження електричного струму. Для цього розглянемо дію для некомутативного електромагнітного поля з зовнішнім заданим струмом j

$$S = S_0 + e\int d^4x(jA), \tag{5.10}$$

де S_0 — дія вільного поля (5.5). Зауважимо, що доданок зі взаємодією записаний вже після шпурування, яке знімає весь вплив некомутативності для інтегралу від добутку двох функцій внаслідок безшпуровості матриць σ.

Внаслідок калібрувальних перетворень (5.9) дія (5.10) отримує варіацію

$$\delta S = \int d^4x \left\{ (\partial_\mu \alpha) j^\mu - 2e^2\theta^4 (\tilde{\partial}_\beta \alpha) \tilde{\partial}^\beta A^\mu \tilde{\partial}^\gamma A^\nu \tilde{\partial}_\gamma F_{\mu\nu} \right\} + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (5.11)$$

Після інтегрування частинами в обидвох доданках під інтегралом, отримуємо

$$\delta S = -\int d^4x \alpha \left\{ (\partial j) - 2e^2\theta^4 \tilde{\partial}_\beta (\tilde{\partial}^\beta A^\mu \tilde{\partial}^\gamma A^\nu \tilde{\partial}_\gamma F_{\mu\nu}) \right\} + \mathcal{O}(\alpha^2).$$

В силу довільності α отримуємо закон збереження електричного струму у наступному вигляді

$$\partial_\mu \left[j^\mu - 2e^2\theta^4 \mathrm{sinc}(\sqrt{-\theta\partial^2}) (\tilde{\partial}^\mu A^\alpha \tilde{\partial}^\nu A^\beta \tilde{\partial}_\nu F_{\alpha\beta}) \right] = 0. \quad (5.12)$$

Інтерпретація цього виразу звична для теорії полей Янга–Міллса і інтуїтивно очікувана внаслідок неабелевості калібрувальної групи електромагнітного поля у просторі зі спіновою некомутативністю: окрім зовнішнього струму присутні струми самодії самого поля і зберігається не струм зовнішніх зарядів, а повний струм, що визначається наступним виразом

$$J^\mu = j^\mu - 2e^2\theta^4 \mathrm{sinc}(\sqrt{-\theta\partial^2}) (\tilde{\partial}^\mu A^\alpha \tilde{\partial}^\nu A^\beta \tilde{\partial}_\nu F_{\alpha\beta}). \quad (5.13)$$

5.2.3 Рівняння поля

Знайдемо рівняння електромагнітного поля в просторі зі спіново – зміщеними некомутативними координатами з принципу найменшої дії. Варіюючи дію (5.5), отримуємо наступні точні рівняння

$$\partial^2 A^\mu + e^2\theta^4 \tilde{\partial}_\alpha \left(\tilde{\partial}^\alpha A^\mu \tilde{\partial}^\beta A^\nu \tilde{\partial}_\beta A_\nu - \tilde{\partial}^\beta A^\mu \tilde{\partial}^\alpha A^\nu \tilde{\partial}_\beta A_\nu \right) = 0. \quad (5.14)$$

Легко бачити, що в границі комутативного простору ($\theta \to 0$, $\tilde{\partial} \to \partial$) ці рівняння переходять в рівняння Максвела для вільного поля

$$\partial^2 A^\mu = 0. \quad (5.15)$$

Рівняння поля (5.14) володіють цікавою структурою, яка в багатьох випадках полегшує їхній аналіз. Незважаючи на те, що отримані рівняння є нелінійними, легко бачити, що рівняння для вибраної компоненти A^μ є лінійним, якщо всі інші компоненти відомі (зафіксовані). Ця властивість рівнянь може бути вкрай помічною при пертурбативному аналізі системи.

Якщо деяка компонента A^μ є постійною в комутативному просторі, то вона задовільняє і відповідне рівняння (5.14) автоматично. Тому в цьому випадку ця компонента A^μ в некомутативному просторі є така сама як і в комутативному. Це саме стосується і випадку, коли $A^\mu = 0$ в комутативному просторі, тоді відповідна компонента нульова і в некомутативному просторі.

З іншої сторони, якщо присутня лише одна ненульова компонента A^κ, рівняння для неї має вигляд

$$\begin{aligned}\partial^2 A^\kappa + e^2\theta^4\tilde{\partial}_\alpha\left(\tilde{\partial}^\alpha A^\kappa\tilde{\partial}^\beta A^\kappa\tilde{\partial}_\beta A_\kappa - \tilde{\partial}^\beta A^\kappa\tilde{\partial}^\alpha A^\kappa\tilde{\partial}_\beta A_\kappa\right) = \\ = \partial^2 A^\kappa = 0\end{aligned} \tag{5.16}$$

і співпадає з комутативним рівнянням Максвела. Отже, спінова некомутативність не впливає на системи, які описуються 4-вектором потенціалу з одною ненульовою компонентою.

Більше того, оскільки рівняння некомутативного поля інваріантні відносно перетворень Лоренца, то якщо вектор потенціалу відповідними перетвореннями Лоренца можна привести до вектора з лише однією ненульовою компонентою, то така система теж не відчуває некомутативності. Такі системи зазвичай є простими і складаються з одного джерела поля, наприклад точковий заряд, лінійний провідник зі струмом, плоска хвиля, тощо. Спінова некомутативність не впливає на ці системи.

Взаємодія поля з заданим струмом j^μ може бути легко врахована шляхом додавання відповідного доданку в дію (5.5)

$$S_{int} = \frac{1}{4}\int dx\,\mathrm{Sp}(\tilde{j}\tilde{A}) = \int dx(jA). \tag{5.17}$$

Отже, спінова некомутативніть не впливає на взаємодію поля і заданого струму. Рівняння електромагнітного поля, які враховують наявність струмів мають вигляд

$$\partial^2 A^\mu + e^2\theta^4\tilde{\partial}_\alpha\left(\tilde{\partial}^\alpha A^\mu\tilde{\partial}^\beta A^\nu\tilde{\partial}_\beta A_\nu - \tilde{\partial}^\beta A^\mu\tilde{\partial}^\alpha A^\nu\tilde{\partial}_\beta A_\nu\right) = j^\mu, \tag{5.18}$$

і переходять в рівняння (5.14) при $j^\mu = 0$. Їх можна отримати варіюючи дію (5.10).

5.3 Електромагнітне поле деяких систем

5.3.1 Електростатичне поле точкового заряду в постійному магнітному полі

Як було показано в попередньому підрозділі, спінова некомутативність (2.20)–(2.25) не модифікує електромагнітне поле точкової частинки, оскільки таке поле задається одною компонентою електромагнітного поля A_0, а спінова некомутативність не впливає на векторний потенціал з одною ненульовою компонентою. Ситуація змінюється, коли частинка поміщена в магнітне поле. Оскільки електромагнітне поле стає нелінійним у просторі зі спіновою некомутативністю, то електричне і магнітне поля взаємодіють між собою. В частковому випадку така взаємодія приводить до модифікації потенціалу Кулона в зовнішньому магнітному полі.

Вплив постійного магнітного поля на електричне поле зарядженої частинки в просторі з канонічною некомутативністю досліджувався в багатьох роботах. Зокрема, в роботах [11, 17, 118] досліджувалися поправки до закону Кулона в магнітному полі, які виникають з функції Лагранжа електромагнітного поля в просторі з канонічною некомутативністю. В першому наближенні по параметру некомутативності θ^{ij} закон Кулона має вигляд [17]

$$A^0(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{r}\left(1 - e\left[\frac{1}{r^2}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\theta}) + (\boldsymbol{B}\boldsymbol{\theta})\right]\right), \tag{5.19}$$

де $\theta^i = \varepsilon^{ijk}\theta_{jk}$, $r^2 = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{B}$ — індукція магнітного поля.

Для повноти картини зауважимо, що існує альтернативний підхід до розгляду кулонівського потенціалу в некомутативному просторі. В рамках цієї схеми будується некомутативний гамільтоніан атома водню шляхом заміни комутативних координат x на некомутативні відповідники X в комутативному гамільтоніані. В цьому випадку потенціальна енергія стає оператором. Відповідне рівняння Шредінгера описує рух електрона у модифікованому кулонівському потенціалі. В такому підході атом водню вивчався в просторі зі спіновою некомутативністю [8, 118] та нерелятивістською спіновою некомутативністю GKdS (розділ 3 цієї роботи).

В цьому підрозділі розглянемо модифікацію закону Кулона під впливом зовнішнього магнітного поля в просторі зі спіновою некомутативністю (2.20)–(2.25). Розглянемо рівняння поля (5.18) з заданим чотири–струмом нерухомого точкового заряду q

$$j^\mu = \begin{pmatrix} -q\delta(\boldsymbol{x}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

Точний розв'язок цієї задачі невідомий, тому знайдемо перші по параметру некомутативності поправки до потенціалу поля. Таким чином потенціал запишемо у вигляді

$$A^0 = \frac{q}{4\pi r} + e^2\theta^4 A^0_{(1)} + \mathcal{O}(\theta^8), \tag{5.21}$$

$$A^i = \varepsilon^{ijk} h_j x_k + e^2\theta^4 A^i_{(1)} + \mathcal{O}(\theta^8), \tag{5.22}$$

де індекс (1) позначає перший порядок розкладу потенціалу A^μ по θ^4. В комутативній границі $\theta \to 0$ векторний потенціал A^μ переходить в потенціал електростатичного поля точкового заряду $-q$ і постійного магнітного поля $\boldsymbol{h}$. Підстановка анзацу (5.21)–(5.22) в рівняння поля (5.14) дає наступні рівняння для $A^\mu_{(1)}$

$$\nabla^2 A^0_{(1)} = \frac{qh^2}{4\pi r^3} - \frac{3q(\boldsymbol{hx})^2}{4\pi r^5} + qh^2\delta(\boldsymbol{x}), \tag{5.23}$$

$$\nabla^2 A^i_{(1)} = \frac{2q^2}{(4\pi)^2 r^6}\varepsilon^{ijk} h_j x_k, \tag{5.24}$$

де $\nabla = \boldsymbol{e}_x\partial_x + \boldsymbol{e}_y\partial_y + \boldsymbol{e}_z\partial_z$ — диференційний оператор Гамільтона.

Рівняння (5.23)–(5.24) можна легко розв'язати, шукаючи потенціал у вигляді суми обернених степенів модуля радіус–вектора r^{-n} з відповідними коефіцієнтами. Остаточно в першому наближенні вираз для потенціалу записується

$$A^0 = \frac{q}{4\pi r}\left[1 - e^2\theta^4\left(h^2 - \frac{(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{e}_r)^2}{2}\right)\right] + \mathcal{O}(\theta^8), \tag{5.25}$$

$$A^i = \varepsilon^{ijk} h_j x_k \left[1 + \frac{e^2\theta^4}{2}\frac{q^2}{(4\pi)^2 r^4}\right] + \mathcal{O}(\theta^8), \tag{5.26}$$

де $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/r$.

Як можна бачити з (5.25), магнітне поле екранує заряд, роблячи його значення меншим. Крім того, це екранування є анізотропним, а найбільший ефект отримується в перпендикулярному до магнітного поля $\boldsymbol{h}$ напрямі. Як і в канонічній некомутативності, в спіновій некомутативності величина екранування є незалежною від відстані. Однак на відміну від випадку канонічної некомутативності, в спіновій некомутативності екранування ніколи не зникає в жодному напрямі, завжди зменшуючи ефективний заряд частинки.

З іншої сторони, як випливає з (5.26), існує і зворотній ефект: заряд також деформує магнітне поле. Вплив заряду на магнітне поле залежить лише від абсолютного значення заряду, але не від його знаку. Цей вплив є короткосяжним (спадає як r^{-4}) і завжди збільшує величину магнітного поля.

5.3.2 Взаємодія двох плоских електромагнітних хвиль

Оскільки рівняння поля (5.14) є нелінійними, то принцип суперпозиції не виконується і у загальному випадку сума двох розв'язків (наприклад двох плоских хвиль) вже не буде розв'язком цих рівнянь. В рамках пертурбативного підходу таку ситуацію можна протрактувати як взаємодію цих розв'язків (в нашому випадку плоских хвиль) один з одним. В цьому підрозділі розглянемо взаємодію двох плоских хвиль у просторі зі спіновою некомутативністю (2.20)–(2.25).

Задача про взаємодію двох плоских хвиль в просторі з канонічною некомутативністю розглядалася в роботі [11]. Автори в рамках пертурбативного підходу знайшли поправки до потенціалу двох хвиль. Як нульове наближення вони розглянули потенціал двох хвиль у формі суперпозиції двох комплексних експонент Ae^{ikx} та $Be^{ik'x}$. Однак такий математичний трюк з розглядом уявних експонент замість дійсних тригонометричних функцій не можна використовувати в нелінійних рівняннях, якщо вимагати дійсності потенціалу електромагнітного поля.

Знайдемо розв'язок A^μ рівнянь (5.14), який в комутативній границі $\theta \to 0$ переходить в $A^{\mu}\big|_{\theta=0} = A^{\mu}_{(0)}$, де

$$A^0_{(0)} = 0, \tag{5.27}$$

$$A^1_{(0)} = 0, \tag{5.28}$$

$$A^2_{(0)} = B \sin\Theta \cos(kx), \tag{5.29}$$

$$A^3_{(0)} = C\cos(qx) + B\cos\Theta\cos(kx). \tag{5.30}$$

В комутативному просторі даний потенціал відповідає поширенню двох плоских електромагнітних хвиль з амплітудами B та C та хвильовими векторами k^{μ} та q^{μ} відповідно. Кут між напрямами осциляцій поля рівний Θ.

Пертурбативний аналіз відповідної системи рівнянь пов'язаний з деякими труднощами, які зазвичай виникають при аналізі нелінійних коливальних систем. Так підстановка виразу $A^{\mu} = A^{\mu}_{(0)} + A^{\mu}_{s}$ в рівняння (5.14) приводить до рівняння типу

$$\partial^2 f = B\cos(kx). \tag{5.31}$$

Якщо вектор k^{μ} не є чотиримірним ізотропним $k^2 \neq 0$, то розв'язок такого рівняння є простий і записується

$$f = -\frac{B\cos(kx)}{k^2}. \tag{5.32}$$

Однак такий розв'язок не може бути використаним у випадку фотонного хвильового вектора, оскільки для електромагнітної хвилі маємо $k^2 = 0$.

З іншої сторони, легко перевірити, що в цьому випадку розв'язок такого рівняння можна знайти у наступному вигляді

$$f = \frac{(ax)}{2(ak)}\sin(kx),$$

де a^μ — довільний вектор, який задовільняє умови $(ax) \neq 0$, $(ak) \neq 0$. Але цей розв'язок описує резонансне наростання поля, а отже і енергії поля. Зрозуміло, що така резонансна поведінка не може мати місця в даній системі і є артефактом виконаного анзацу.

Ця проблема може бути розв'язана в рамках так званого методу Крилова–Боголюбова [130]. Відповідно до цього методу розв'язок відповідних рівнянь (5.14) необхідно шукати в наступній формі

$$A^0 = 0, \quad (5.33)$$

$$A^1 = 0, \quad (5.34)$$

$$A^2 = B \sin\Theta \cos(kx + e^2\theta^4 f_1) + e^2\theta^4 a_1, \quad (5.35)$$

$$A^3 = C\cos(qx + e^2\theta^4 f_2) + B\cos\Theta\cos(kx + e^2\theta^4 f_3) + e^2\theta^4 a_2. \quad (5.36)$$

Підстановка виразів (5.33)–(5.36) в рівняння поля (5.14) дає наступні рівняння на допоміжні функції f_1, f_2, f_3, a_1 та a_2

$$\begin{gathered} \sin(kx)\partial^2 f_1 - 2\cos(kx)k_\alpha\partial^\alpha f_1 = \\ -\frac{C}{2}(kq)^2\left(B_c\cos qx - C\sin kx\right), \end{gathered} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 a_1 = -\frac{B_s C}{4}(kq)^2 (-B_c \{\cos(2q-k)x + \cos(2q+k)x\} + \\ +C\{\cos(2k-q)x + \cos(2k+q)x\}), \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\sin(qx)\partial^2 f_2 - 2\cos(qx)q_\alpha\partial^\alpha f_2 = -\frac{B_s^2}{2}(kq)^2\cos qx, \quad (5.39)$$

$$f_3 = 0, \quad (5.40)$$

$$\partial^2 a_2 = \frac{B_s^2 C}{4}(kq)^2\left\{\cos(2k-q)x + \cos(2k+q)x\right\}, \quad (5.41)$$

де $B_s = B\sin\Theta$, $B_c = B\cos\Theta$.

В даних рівняннях вже немає вищеописаних проблем як у (5.32) і їх можна легко проінтегрувати. Наприклад, рівняння (5.38) та (5.41) інтегруються згідно виразу (5.32). В знаменнику розв'язку виникає квадрат відповідної комбінації хвильових векторів початкових хвиль, однак квадрат такої лінійної комбінації в силу того, що вектори k та q є фотонними, може бути переписаний у наступному вигляді

$$(2q-k)^2 = 4q^2 + k^2 - 4(qk) = -4(qk).$$

Таким чином, знаменник скорочується з множником $(kq)^2$. Причому навіть у випадку, коли $k \sim q$, а $(kq) = 0$ весь вираз виявляється пропорційним до (kq), і потенціал є нульовим, а не нескінченним.

Рівняння (5.39) розв'язується за допомогою анзацу

$$f_2 = (Fx),$$

де F^μ — невідомий сталий вектор. Підстановка цього виразу в рівняння (5.39) дає наступне значення для допоміжного вектора F^μ

$$F^\mu = \frac{B_s^2}{4}(kq)k^\mu. \tag{5.42}$$

Рівняння (5.37) є найскладнішим у системі, однак легко розв'язується вдалим вибором анзацу у вигляді

$$f_2 = (Gx) + H\sin(\kappa x),$$

де G^μ, κ^μ — невідомі сталі вектори, H — невідома стала. Підставляючи цей вираз у рівняння (5.37) отримуємо наступні значення

$$G^\mu = \frac{C^2}{4}(kq)q^\mu, \tag{5.43}$$

$$\kappa^\mu = k^\mu + q^\mu, \tag{5.44}$$

$$H = \frac{B_c C}{4}(kq). \tag{5.45}$$

Остаточно запишемо розв'язок в першому порядку наближення для компонент векторного потенціалу системи двох плоских хвиль у просторі зі спіновою некомутативністю координат (2.20)–(2.25) в наступному вигляді

$$A^0 = 0, \quad (5.46)$$

$$A^1 = 0, \quad (5.47)$$

$$A^2 = B_s \cos\left(kx + \frac{e^2}{4}\theta^4 C^2 (kq)(qx) + e^2\theta^4\varphi\right) + e^2\theta^4 a_1, \quad (5.48)$$

$$A^3 = C\cos\left(qx + \frac{e^2}{4}\theta^4 B_s^2 (kq)(kx)\right) + B_c \cos(kx) + e^2\theta^4 a_2, \quad (5.49)$$

де

$$\varphi = \frac{B_c C}{4}(kq)\sin(q+k)x,$$

$$a_1 = \frac{B_s C}{16}(kq)\left(B_c\left\{\cos(2q-k)x - \cos(2q+k)x\right\} - \right.$$

$$\left. - C\left\{\cos(2k-q)x - \cos(2k+q)x\right\}\right),$$

$$a_2 = -\frac{B_s^2 C}{16}(kq)\left\{\cos(2k-q)x - \cos(2k+q)x\right\}.$$

З останнього виразу видно, що спінова некомутативність ефективно змінює хвильовий вектор деяких компонент взаємодіючих хвиль, а також продукує вищі гармоніки. Останній ефект є інтуїтивно очікуваний в силу нелінійності рівнянь електродинаміки в некомутативному просторі.

З виразів (5.48) та (5.49) також випливає, що дві електромагнітні хвилі не взаємодіють одна з одною якщо кут між напрямами коливань їхнього векторного потенціалу рівний $\Theta = 0$ або $\Theta = \pi$. Ця ситуація відповідає випадку, коли присутня лише одна компонента векторного потенціалу (5.33)–(5.36), і з результатів підрозділу 5.2.3 так і повинно бути.

Також вплив спінової некомутативності координат є нульовим у випадку коли

$$(kq) = |\boldsymbol{k}||\boldsymbol{q}| - (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q}) = |\boldsymbol{k}||\boldsymbol{q}|(1 - \cos\vartheta) = 0,$$

де ϑ — кут між векторами k^μ та q^μ. Це відповідає поширенню хвиль в тому самому напрямі ($\vartheta = 0$).

5.3.3 Точний розв'язок поширення плоскої електромагнітної хвилі в постійних електричному та магнітному полях

Поширення плоскої електромагнітної хвилі в постійному магнітному полі у просторі з канонічною некомутативністю (1.1) розглядалося в [115]. В цій роботі в першому порядку по параметру канонічної некомутативності θ_{ij} було отримано модифіковане дисперсійне співвідношення для електромагнітної хвилі. Вираз для такого закону дисперсії записується

$$\omega = |\boldsymbol{k}|(1 - \boldsymbol{\theta}_T \boldsymbol{b}_T), \tag{5.50}$$

де введено позначення $\theta_i = \varepsilon_{ijk}\theta^{ij}/2$, а літера T в індексі позначає поперечну до хвильового вектора хвилі $\boldsymbol{k}$ компоненту.

Задача поширення плоскої електромагнітної хвилі в постійному електричному та магнітному полях в просторі зі спіновою некомутативністю (2.20)–(2.25) розв'язується точно. Для цього оберемо комутативну частину векторного потенціалу в наступному вигляді

$$A_0^\mu = A_f^\mu + A_w^\mu, \tag{5.51}$$

де потенціал

$$A_f^\mu = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{E}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.52}$$

описує постійне електричне та магнітне поля, а доданок

$$A_w^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A\cos(kx) \end{pmatrix} \tag{5.53}$$

відповідає власне плоскій хвилі. Потенціал (5.52) в комутативному просторі задає магнітне поле

$$\boldsymbol{B} = (-b_z; a_z; b_x - a_y)^T \tag{5.54}$$

та електричне поле $\boldsymbol{E}$.

Зауважимо, що в комутативному випадку деякі компоненти векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ можна зробити рівними нулю відповідними калібрувальними перетвореннями (наприклад ${A'}_f^\mu = A_f^\mu + \partial^\mu(-a_x x^2/2 - b_y y^2/2 - a_y xy)$), а значення напруженостей полей не залежатимуть від цих компонент, як це видно з (5.54). Але в некомутативному просторі це, взагалі кажучи, здійснити не можна. А тому різні набори векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, які в комутативному просторі відповідали тим самим полям, в некомутативному просторі відповідатимуть різним полям.

Якщо додати деяку лінійну комбінацію координат $\mathbf{cx}$ в компоненту A_f^3 в (5.52), то такий потенціал в комутативному просторі теж описуватиме постійне магнітне поле, однак в просторі зі спіновою некомутативністю така задача точно не розв'язується.

Перший крок в отриманні розв'язку полягає в спостереженні, що перші поправки $A^0_{(1)}$, $A^1_{(1)}$, $A^2_{(1)}$ рівні нулю. Справді, з рівнянь поля (5.14) отримуємо, що

$$\partial^2 A^0_{(1)} = 0, \tag{5.55}$$

$$\partial^2 A^1_{(1)} = 0, \tag{5.56}$$

$$\partial^2 A^2_{(1)} = 0. \tag{5.57}$$

Рівняння для компоненти $A^3_{(1)}$ вже є дещо складнішим і записується в наступному вигляді

$$\partial^2 A^3_{(1)} = \tilde{A}\cos(kx), \tag{5.58}$$

де позначено $\tilde{A} = A\left[(\boldsymbol{E},\boldsymbol{k})^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{k})^2 - (\boldsymbol{b},\boldsymbol{k})^2\right]$.

При розв'язанні рівняння (5.58) виникають такі ж труднощі, як і при розгляді рівняння (5.31). Однак його розгляд за допомогою методу Боголюбова–Крилова як у попередньому підрозділі показує, що розв'язком рівняння є плоска хвиля зі зміненим хвильовим вектором і, що важливо, вищі гармоніки є відсутніми.

Рівняння для наступних членів розкладу потенціалу A^μ по θ^4 є якісно такими самими: некомутативність не впливає на потенціали постійного поля $A^0_{(n)}$, $A^1_{(n)}$, $A^2_{(n)}$, не продукує вищих гармонік, а лише змінює хвильовий вектор електромагнітної хвилі.

Використовуючи такий аналіз в рамках пертурбативного підходу, можна стверджувати, що точний розв'язок рівнянь поля (5.14) є знову плоска хвиля $A^3 = A\cos(k_s x)$ з модифікованим законом дисперсії, яка поширюється в постійних полях

$$A^0 = -\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}, \tag{5.59}$$

$$A^1 = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}, \tag{5.60}$$

$$A^2 = \boldsymbol{b}\boldsymbol{x}. \tag{5.61}$$

Підстановка виразів (5.59)–(5.61) в рівняння поля (5.14) дає наступні рівняння для компонент поля

$$\partial^2 A^0 = 0, \tag{5.62}$$

$$\partial^2 A^1 = 0, \tag{5.63}$$

$$\partial^2 A^2 = 0; \tag{5.64}$$

$$\begin{gathered}\partial^2 A^3 = -e^2\theta^4(E^2 - a^2 - b^2)\tilde{\partial}^2 A^3 - \\ -e^2\theta^4\left[(\boldsymbol{E}\tilde{\nabla})^2 - (\boldsymbol{a}\tilde{\nabla})^2 - (\boldsymbol{b}\tilde{\nabla})^2\right] A^3.\end{gathered} \tag{5.65}$$

Отримані рівняння є точними у всіх порядках по параметру некомутативності θ. Рівняння (5.62)–(5.64) є у повній відповідності з припущенням (5.59)–(5.61) лінійності компонент A^0, A^1, A^2 по координатах.

З (5.65) можна знайти точний вираз для дисперсійного співвідношення для k_s^μ, який записується

$$\omega_s^2 = \boldsymbol{k}_s^2 \frac{1 + e^2\theta^4\left([\boldsymbol{E},\boldsymbol{k}_s]^2 - [\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}_s]^2 - [\boldsymbol{b},\boldsymbol{k}_s]^2\right)\operatorname{sinc}^2(\theta k_s)}{1 + e^2\theta^4\left(E^2 - a^2 - b^2\right)\operatorname{sinc}^2(\theta k_s)}, \tag{5.66}$$

де $k_s = \sqrt{\omega_s^2 - \boldsymbol{k}_s^2}$. Врахувавши рівність $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^2 = a^2b^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2$ і провівши прості математичні перетворення, цей вираз можна переписати у наступному вигляді

$$k_s^2 = -\frac{e^2\theta^4\left((\boldsymbol{E},\boldsymbol{k}_s)^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}_s)^2 - (\boldsymbol{b},\boldsymbol{k}_s)^2\right)\operatorname{sinc}^2(\theta k_s)}{1 + e^2\theta^4\left(E^2 - a^2 - b^2\right)\operatorname{sinc}^2(\theta k_s)}, \tag{5.67}$$

Рівняння (5.67) має єдиний розв'язок k_s^2 для заданого набору векторів $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{k}_s$. Отже, електромагнітна хвиля в постійному електричному та магнітному полях в просторі зі спіновою некомутативністю не володіє подвійним двопроменезаломленням, яке характерне для нелінійних теорій електромагнітного поля [131–134].

Знак k_s^2 (знак квадрату маси $m^2 = k_s^2$) залежить від знаку чисельника в (5.67). В частковому випадку, в лише електричному полі маємо $k_s^2 < 0$ (оскільки квадрат маси є від'ємним, то такі фотони можна назвати "тахіонними" фотонами), а в чистому магнітному полі маємо $k_s^2 > 0$ (випадок масивних фотонів з масою $m^2 = k_s^2$).

Цікаво порівняти отримані результати з виразом (5.50). В першому порядку по θ^4 за відсутності електричного поля $\boldsymbol{E} = 0$ дисперсійне співвідношення (5.66) записується

$$\omega = |\boldsymbol{k}|[1 + e^2\theta^4((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_k)^2 + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_k)^2)], \tag{5.68}$$

де $\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{k}/k$. Як бачимо, в просторі зі спіновою некомутативністю вплив магнітного поля на хвильове дисперсійне співвідношення є якісно іншим, ніж у випадку простору з канонічною некомутативністю. Спінова некомутативність завжди збільшує множник біля $|\boldsymbol{k}|$ в дисперсійному співвідношенні, записаному у вигляді (5.68). Більше того, на противагу до випадку канонічної некомутативності, спінова некомутативність модифікує дисперсійне співвідношення через повздовжню до напряму поширення $\boldsymbol{k}$ компоненту магнітного поля.

5.4 Висновки

В даному розділі розглянуто теорію електромагнітного поля у просторі з некомутативними спіново–зміщеними координатами (2.20)–(2.25). Постулюючи, що в такому некомутативному просторі польовій змінній відповідає матрична функція $e^{i\theta(\gamma\partial)}A_\mu$, ми отримали вираз для тензора (5.3) та дії (5.4), (5.5) електромагнітного поля. На відміну від електродинаміки в просторі з канонічною некомутативністю, запропонована електродинаміка в просторі зі спіновою некомутативністю побудована точно у всіх порядках розкладу в ряд по параметру некомутативності.

Ми знайшли калібрувальні перетворення для такого поля (5.9). Ці перетворення нагадують калібрувальні перетворення для поля Янга–Міллса. Цікаво, що абелевій групі $U(1)$ електромагнітного поля в комутативному просторі відповідає калібрувальна група некомутативного електромагнітного поля, яку можна записати у вигляді прямого добутку $U(1) \otimes SL(1,3)$. Також отримано закон збереження модифікованого електричного струму для такого поля.

Варіюючи дію, отримано точні рівняння поля (5.14), які є нелінійними та містять похідні всіх порядків. Ці рівняння володіють цікавою структурою, яка значно спрощує їхній пертурбативний аналіз. Також, можна показати, що спінова некомутативність не впливає на електромагнітне поле, створене одним джерелом.

Нелінійність польових рівнянь веде до цікавих ефектів взаємодії електричного і магнітного полів. Ці ефекти було продемонстровано на ряді прикладів. Зокрема, в рамках запропонованої електродинаміки ми розглянули вплив зовнішнього постійного поля на електростатичне поле точкового заряду. Було показано, що магнітне поле екранує заряд частинки, більше того таке екранування є анізотропним, модифікуючи тим самим закон Кулона, і завжди зменшує величину ефективного заряду (5.25). Присутній також і зворотній ефект — точковий заряд дещо збільшує магнітне поле на малих відстанях від заряду.

Також ми дослідили взаємодію двох плоских електромагнітних хвиль в просторі зі спіновою некомутативністю в рамках теорії збурень. Звичайний розклад потенціалів A^μ в ряд по степенях параметра некомутативності θ^4 призводить до рівнянь, які описують резонансне наростання поля. Для уникнення резонансних доданків ми узагальнили на релятивістський випадок рівнянь поля добре відомий з класичної механіки метод Крилова–Боголюбова дослідження нелінійних коливань. Показано, що окрім генерації вищих гармонік (через нелінійність електродинаміки в некомутативному просторі) також змінюються хвильові вектори деяких компонент взаємодіючих хвиль (5.48), (5.49).

Побудована електродинаміка є достатньо складною: вона нелінійна і містить похідні всіх порядків, але тим не менше задача про поширення плоскої хвилі в постійному електричному та магнітному полях розв'язується точно. В просторі зі спіновою некомутативністю координат наявність зовнішніх постійних електричного та магнітного полів лише модифікує дисперсійне співвідношення, не змінюючи форму самої плоскої хвилі. Знайдено точний модифікований закон дисперсії для електромагнітної хвилі (5.66).

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено вплив різних варіантів спінової некомутативності координат на такі системи і задачі як атом водню, гармонічний осцилятор, обернено квадратичний потенціал, електромагнітне поле, поле точкового заряду в постійному магнітному полі, плоска електромагнітна хвиля в електричному та магнітному полях, дві плоскі електромагнітні хвилі. Також запропоновано і досліджено нові некомутативні алгебри, інваріантні відносно поворотів системи координат (перетворень Лоренца у релятивістському випадку).

Для досягнення поставленої мети роботи було отримано наступні результати:

1. Вперше запропоновано інваріантну відносно поворотів нерелятивістську алгебру зі спіновою некомутативністю координат. Для запропонованої алгебри встановлено наявність мінімальної довжини та знайдено її значення.

2. Вперше запропоновано релятивістську Лоренц-інваріантну алгебру з некомутативними спіново–зміщеними координатами. Встановлено значення мінімальної довжини для даної алгебри. Дана алгебра дозволяє легко ввести закон множення некомутативних функцій, який відрізняється від зіркового добутку Мояли. Досліджено математичні властивості такої операції множення.

3. Вперше точно розв’язано тривимірний гармонічний осцилятор в

просторі зі спіновою некомутативністю координат. Показано, що спінова некомутативність знімає виродження енергетичних рівнів осцилятора за орбітальним квантовим числом. Показано, що для різних значень параметра некомутативності (або різних частот осцилятора) основний стан може реалізовуватися при різних наборах квантових чисел.

4. Вперше досліджено вплив алгебри зі спіново–зміщеними некомутативними координатами на спектр атома водню. Для знаходження поправок було використано модифікації теорії збурень для виділення неаналітичної логарифмічної залежності поправки до енергії s–станів від параметра некомутативності. Показано, що спінова некомутативність знімає виродження енергетичних рівнів по орбітальному квантовому числу. Використовуючи отримані результати, вперше встановлено верхню границю для параметра спінової некомутативності.

5. Вперше розглянуто часову еволюцію квантової частинки в притягальному обернено квадратичному потенціалі. Використовуючи рівняння Гайзенберга, вперше знайдено, що середнє від оператора квадрата радіус–вектора еволюціонує як квадратичний поліном по часу. Знайдено умови падіння частинки на притягальний центр. Вперше розраховано час падіння квантової частинки в обернено квадратичному потенціалі. Показано, що існують квазі–стаціонарні стани, які еволюціонують з постійним в часі середнім від оператора квадрата радіус–вектора. Результати порівняно з експериментальним вимірюванням падіння атомів літію на заряджену нитку.

6. Вперше показано, що для притягального обернено квадратичного

потенціалу існує квантова границя падіння: частинка принципово не може впасти на притягальний центр, якщо константа взаємодії менша за деяке критичне значення. Запропоновано модифікації існуючого експерименту для забезпечення можливості спостереження цієї квантової границі падіння.

7. Вперше показано, що в просторі зі спіновою некомутативністю обернено квадратичний потенціал регуляризується і замість падіння на притягальний центр утворюються зв'язані стани в такому потенціалі. Оцінено енергію основного стану частинки в обернено квадратичному потенціалі в просторах з різними алгебрами зі спіновою некомутативністю.

8. Вперше побудовано теорію електромагнітного поля у просторі зі спіновою некомутативністю. Побудовано тензор та дію електромагнітного поля в такому просторі. Знайдено калібрувальні перетворення для поля та закон збереження електричного струму.

9. Вперше в просторі з релятивістськими некомутативними спіново–зміщеними координатами записано рівняння електромагнітного поля. Ці рівняння є нелінійними, містять похідні всіх порядків, однак є точними у всіх порядках розкладу по параметру некомутативності.

10. Вперше розглянуто модифікацію закону Кулона під впливом зовнішнього магнітного поля у просторі зі спіновою некомутативністю координат. Показано, що магнітне поле ефективно екранує заряд, а заряд в свою чергу локально збільшує магнітне поле.

11. Вперше розглянуто взаємодію плоских електромагнітних хвиль у просторі зі спіновою некомутативністю. Показано, що взаємодія

між хвилями, спричинена некомутативністю, генерує вищі гармоніки, а також змінює хвильовий вектор деяких компонент взаємодіючих хвиль.

12. Вперше точно розв'язано задачу про поширення плоскої електромагнітної хвилі в постійних електричному та магнітному полях у просторі зі спіновою некомутативністю координат. Знайдено точний вираз для закону дисперсії електромагнітної хвилі в цьому випадку.

ПОДЯКИ

Насамперед автор щиро вдячний науковому керівнику, доктору фіз.–мат. наук професору В. Ткачуку за постановку цікавих задач та за корисні консультації під час наукових досліджень.

Також велика подяка доктору фіз.–мат. наук, доценту А. Ровенчаку за численні корисні поради та за участь в обговоренні результатів.

Велику подяку автор висловлює колективу кафедри теоретичної фізики за цікаві і плідні дискусії та за допомогу і корисні зауваження під час оформлення цієї роботи, а особливо доктору фіз.–мат. наук професору І. Вакарчуку, кандидату фіз.–мат. наук, доценту В. Мигалю, кандидату фіз.-мат. наук, доценту С. Піх, кандидату фіз.–мат. наук, доценту М. Стецку, кандидату фіз.–мат. наук, доценту Р. Притулі, кандидату фіз.–мат. наук, доценту В. Пастухову, старшому викладачу Ю. Криницькому, кандидату фіз.–мат. наук, науковому співробітнику А. Кузьмаку, кандидату фіз.–мат. наук, асистенту М. Самару, кандидату фіз.–мат. наук, асистенту О. Григорчаку, кандидату фіз.–мат. наук, асистенту Х. Гнатенко, викладачу Г. Паночко, інженеру О. Кіктєвій, а також старшому лаборанту В. Яремі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Seiberg N.* String theory and noncommutative geometry / N. Seiberg, E. Witten // J. High Energy Phys. — 1999. — Vol. 1999, No. 09. — Art. 032. — 92 p.

[2] *Connes A.* Noncommutative geometry and matrix theory / A. Connes, M. R. Douglas, A. Schwarz // J. High Energy Phys. — 1998. — Vol. 1998, No. 02. — P. 003.

[3] *Doplicher S.* Spacetime quantization induced by classical gravity / S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts // Phys. Lett. B. — 1994. — Vol. 331, No. 1-2. — P. 39–44.

[4] *Doplicher S.* The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields / S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts // Commun. Math. Phys. — 1995. — Vol. 172, No. 1. — P. 187–220.

[5] *Djemai A. E. F.* Noncommutative classical mechanics / A. E. F. Djemai // International Journal of Theoretical Physics. — 2004. — Vol. 43, No. 2. — P. 299–314.

[6] *Romero J. M.* Newton's second law in a non-commutative space / J. M. Romero, J. A. Santiago, J. D. Vergara // Phys. Lett. A. — 2003. — Vol. 310, No. 1. — P. 9–12.

[7] *Gamboa J.* Noncommutative quantum mechanics / J. Gamboa, M. Loewe, J. C. Rojas // Phys. Rev. D. — 2001. — Vol. 64, No. 6. — Art. 067901. — 3 p.

[8] *Chaichian M.* Hydrogen atom spectrum and the Lamb shift in noncommutative QED / M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 86, No. 13. — P. 2716–2719.

[9] *Ho P.-M.* Noncommutative quantum mechanics from noncommutative quantum field theory / P.-M. Ho, Hs.-Ch. Kao // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 88, No. 15. — Art. 151602. — 4 p.

[10] *Acatrinei C.* Path integral formulation of noncommutative quantum mechanics / C. Acatrinei // J. High Energy Phys. — 2001. — Vol. 2001, No. 09. — Art. 007. — 7 p.

[11] Noncommutative electrodynamics / G. Berrino, S. L. Cacciatori, A. Celi et al. // Phys. Rev. D. — 2003. — Vol. 67, No. 6. — Art. 065021. — 7 p.

[12] *Zahn J.* Noncommutative electrodynamics with covariant coordinates / J. Zahn // Phys. Rev. D. — 2004. — Vol. 70, No. 10. — Art. 107704. — 4 p.

[13] Gauge theory on noncommutative spaces / J. Madore, S. Schraml, P. Schupp, J. Wess // Eur. Phys. J. C. — 2000. — Vol. 16, No. 1. — P. 161–167.

[14] *Douglas M. R.* Noncommutative field theory / M. R. Douglas, N. A. Nekrasov // Rev. Mod. Phys. — 2001. — Vol. 73, No. 4. — P. 977–1029.

[15] *Szabo R. J.* Quantum field theory on noncommutative spaces / R. J. Szabo // Phys. Rep. — 2003. — Vol. 378, No. 4. — P. 207–299.

[16] *Stern A.* Particlelike solutions to classical noncommutative gauge theory / A. Stern // Phys. Rev. D. — 2008. — Vol. 78, No. 6. — Art. 065006. — 11 p.

[17] Classical noncommutative electrodynamics with external source / T. C. Adorno, D. M. Gitman, A. E. Shabad, D. V. Vassilevich // Phys. Rev. D. — 2011. — Vol. 84, No. 6. — Art. 065003. — 13 p.

[18] Chiral fermions in noncommutative electrodynamics: renormalizability and dispersion / M. Burić, D. Latas, V. Radovanović, J. Trampetić // Phys. Rev. D. — 2011. — Vol. 83, No. 4. — Art. 045023. — 10 p.

[19] *Fresneda R.* Photon propagation in noncommutative QED with constant external field / R. Fresneda, D. M. Gitman, A. E. Shabad // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 91, No. 8. — Art. 085005. — 10 p.

[20] *Ma K.* Time–dependent Aharonov–Bohm effect on the noncommutative space / K. Ma, J.-H. Wang, H.-X. Yang // Phys. Lett. B. — 2016. — Vol. 759. — P. 306–312.

[21] *Lambiase G.* Cosmological consequences of noncommutative gauge theories / G. Lambiase, G. Vilasi, A. Yoshioka // Class. Quant. Grav. — 2016. — Vol. 34, No. 2. — Art. 025004. — 11 p.

[22] *Martínez-Huerta H.* Vacuum Cherenkov radiation and photon decay rates from generic Lorentz invariance violation / H. Martínez-Huerta, A. Pérez-Lorenzana // J. Phys.: Conference Series. — Vol. 761. — 2016. — 4 p.

[23] *Ma K.* Seiberg–Witten map and quantum phase effects for neutral Dirac particle on noncommutative plane / K. Ma, J.-H. Wang, H.-X. Yang // Phys. Lett. B. — 2016. — Vol. 756. — P. 221–227.

[24] *Prange R. E.* The Quantum Hall Effect, Graduate texts in contemporary Physics / R. E. Prange, S. M. Girvin. — New York : Springer-Verlag, 1987.

[25] *Minwalla Sh.* Noncommutative perturbative dynamics / Sh. Minwalla, M. Van Raamsdonk, N. Seiberg // J. High Energy Phys. — 2000. — Vol. 2000, No. 02. — Art. 020. — 31 p.

[26] Large-N field theories, string theory and gravity / O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena et al. // Physics Reports. — 2000. — Vol. 323, No. 3. — P. 183–386.

[27] *Eguchi T.* Simplification of quenching procedure for large n spin models / T. Eguchi, R. Nakayama // Phys. Lett. B. — 1983. — Vol. 122, No. 1. — P. 59–62.

[28] *Gonzalez-Arroyo A.* Reduced model for large N continuum field theories / A. Gonzalez-Arroyo, C. P. K. Altes // Phys. Lett. B. — 1983. — Vol. 131, No. 4-6. — P. 396–398.

[29] *Saxell S.* On general properties of Lorentz-invariant formulation of noncommutative quantum field theory / S. Saxell // Phys. Lett. B. — 2008. — Vol. 666, No. 5. — P. 486–490.

[30] *Kupriyanov V. G.* Quantum mechanics with coordinate dependent noncommutativity / V. G. Kupriyanov // J. Math. Phys. — 2013. — Vol. 54, No. 11. — Art. 112105. — 25 p.

[31] *Gnatenko Kh. P.* Hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space / Kh. P. Gnatenko, V.M. Tkachuk // Phys. Lett. A. — 2014. — Vol. 378, No. 47. — P. 3509–3515.

[32] Magnetic-dipole spin effects in noncommutative quantum mechanics / H. Falomir, J. Gamboa, J. Lopez-Sarrion et al. // Phys. Lett. B. — 2009. — Vol. 680, No. 4. — P. 384–386.

[33] Spin noncommutativity and the three-dimensional harmonic oscillator / H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe et al. // Phys. Rev. D. — 2012. — Vol. 85, No. 2. — Art. 025009. — 5 p.

[34] *Gomes M.* Noncommutativity due to spin / M. Gomes, V. G. Kupriyanov, A. J. da Silva // Phys. Rev. D. — 2010. — Vol. 81, No. 8. — Art. 085024. — 6 p.

[35] *Васюта В. М.* Точний розв'язок гармонічного осцилятора в просторі зі спіновою некомутативністю / В. М. Васюта // Журн. фіз. досл. — 2013. — Т. 17. — Ст. 3001. — 4 с.

[36] *Васюта В. М.* Поправки до енерґетичного спектра атома водню у просторі зі спіновою некомутативністю координат / В. М. Васюта // Журн. фіз. досл. — 2014. — Т. 18. — Ст. 4001. — 7 с.

[37] *Vasyuta V. M.* Falling of a quantum particle in an inverse square attractive potential / V. M. Vasyuta, V. M. Tkachuk // Eur. Phys. J. D. — 2016. — Vol. 70, No. 12. — Art. 267. — 5 p.

[38] *Васюта В. М. Ткачук В. М.* Обернено квадратичний потенціал у просторі зі спіновою некомутативністю координат / Ткачук В. М Васюта В. М. // Укр. фіз. журн. — 2017. — Vol. 62. — P. 343-348.

[39] *Vasyuta V. M.* Classical electrodynamics in a space with spin noncommutativity of coordinates / V. M. Vasyuta, V. M. Tkachuk // Phys. Lett. B. — 2016. — Vol. 761. — P. 462–468.

[40] *Васюта В.* Узагальнена нерелятивістська спінова некомутативність / В. Васюта // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика–2013". — Львів, 15–17 травня 2013 р.: Тези доповідей. — С. F2.

[41] *Vasyuta V.M.* Exactly solvable problems in space with spin noncommutativity / V.M. Vasyuta // International Conference "Quantum Groups and Quantum Integrable Systems". — Kiev, Ukraine, June 18-–21, 2013: Program and Abstracts. — P. 48.

[42] *Vasyuta V. M.* Spin noncommutativity of coordinates from Barut-Zanghi model / V. M. Vasyuta // V Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics". — Kyiv, Ukraine, December 24–27, 2013: Program and Abstracts. — P. 27.

[43] *Vasyuta V. M.* Quantum systems in space with spin noncommutativity of coordinates / V. M. Vasyuta // Trans–European School of High Energy Physics. — Basivka, Lviv Region, Ukraine, July 17–24, 2014: Proceedings. — P. 155–157.

[44] *Васюта В. М.* Поправки до енергетичного спектру атома водню в просторі зі спіновою некомутативністю / В. М. Васюта // 14-та Всеукраїнська школа–семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, 4–6 червня 2014. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 48.

[45] *Васюта В.* Атом водню в просторі зі спіновою некомутативністю координат / В. Васюта // Різдвяні дискусії 2015, Львів, 12–13 січня 2015. — Журн. фіз. дослідж., 2015. — Т. 19. — С. 1998-4.

[46] *Васюта В. М.* Час падіння квантової частинки на потенціал $-\gamma/r^2$ / В. М. Васюта // 15–та Всеукраїнська школа–семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, 4–5 червня 2015. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 41.

[47] *Vasyuta V.* Hydrogen atom in space with spin noncommutativity / V. Vasyuta // XXXV Max Born Symposium "The Planck Scale II". — Wroclaw, Poland, 7–12 September 2015: Book of abstracts. — P. 4.

[48] *Vasyuta V. M.* Evolution of a quantum particle in an inverse square potential / V. M. Vasyuta // Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra - Lviv. — Zielona Góra, Poland, 19–22 September 2015: Book of abstracts. — P. 37.

[49] *Васюта В.* Електродинаміка у просторі зі спіновою некомутативністю координат / В. Васюта // Різдвяні дискусії 2016, Львів, 11–12 січня 2016. — Журн. фіз. дослідж., 2016. — Т. 20. — С. 1998–4.

[50] *Vasyuta V. M.* Field equations in space with spin noncommutativity of coordinates / V. M. Vasyuta // Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra - Lviv. — Lviv, 05–07 July 2016: Program and Abstracts. — P. 18–19.

[51] *Васюта В. М.* Потенціал $-\gamma/r^2$ у просторі зі спіновою некомутативністю координат / В. М. Васюта // Різдвяні дискусії 2017,

Львів, 11–12 січня 2016. — Журн. фіз. дослідж., 2017. — Т. 21. — С. 1998–5.

[52] *Васюта В. М.* Електромагнітні системи у просторі зі спіновою некомутативністю координат / В. М. Васюта // 17–та Всеукраїнська школа–семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. — Львів, 8–9 червня 2017. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. — С. 35.

[53] *Snyder H. S.* Quantized space-time / H. S. Snyder // Phys. Rev. — 1947. — Vol. 71, No. 1. — P. 38–41.

[54] *Snyder H. S.* The electromagnetic field in quantized space-time / H. S. Snyder // Phys. Rev. — 1947. — Vol. 72, No. 1. — P. 68–71.

[55] *Peierls R.* Zur Theorie des Diamagnetismus von Leitungselektronen / R. Peierls // Z. Phys. — 1933. — Vol. 80, No. 11–12. — P. 763–791.

[56] *Madore J.* The fuzzy sphere / J. Madore // Class. Quant. Grav. — 1992. — Vol. 9, No. 1. — P. 69-87.

[57] *Kupriyanov V.G.* A hydrogen atom on curved noncommutative space / V.G. Kupriyanov // J. Phys. A: Mathematical and Theoretical. — 2013. — Vol. 46, No. 24. — Art. 245303. — 7 p.

[58] Aharonov–Bohm effect in a class of noncommutative theories / Ashok Das, H. Falomir, M. Nieto et al. // Phys. Rev. D. — 2011. — Vol. 84, No. 4. — Art. 045002. — 8 p.

[59] Generalization of the Cooper pairing mechanism for spin-triplet in superconductors / Ashok Das, J. Gamboa, F. Méndez, F. Torres // Phys. Lett. A. — 2011. — Vol. 375, No. 16. — P. 1756–1759.

[60] Noncommutativity in (2+1)-dimensions and the Lorentz group / H. Falomir, F. Vega, J. Gamboa et al. // Phys. Rev. D. — 2012. — Vol. 86, No. 10. — Art. 105035. — 14 p.

[61] *Vega F.* Oscillators in a (2+ 1)-dimensional noncommutative space / F. Vega // J. Math. Phys. — 2014. — Vol. 55, No. 3. — Art. 032105.

[62] Dynamics of a Dirac fermion in the presence of spin noncommutativity / A. F. Ferrari, M. Gomes, V. G. Kupriyanov, C. A. Stechhahn // Phys. Lett. B. — 2013. — Vol. 718, No. 4. — P. 1475–1480.

[63] *Huang J.-H.* Microcausality of spin-induced noncommutative theories / J.-H. Huang, W. Wang // Mod. Phys. Lett. A. — 2013. — Vol. 28, No. 04. — Art. 1250239. — 7 p.

[64] *Ramírez W. G.* Frenkel electron and a spinning body in a curved background / W. G. Ramírez, A. A. Deriglazov, A. M. Pupasov-Maksimov // J. High Energy Phys. — 2014. — Vol. 2014, No. 3. — P. 1–19.

[65] *Ramírez W. G.* Lagrangian formulation for Mathisson-Papapetrou-Tulczyjew-Dixon equations / W. G. Ramírez, A. A. Deriglazov // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 92, No. 12. — P. 124017.

[66] *Lukierski J.* Noncommutative space-time from quantized twistors / J. Lukierski, M. Woronowicz // arXiv preprint arXiv:1311.7498v1 [hep-th]. — 2013.

[67] *Ghosh S.* Spinning particles in (2+1) dimensions / S. Ghosh // Phys. Lett. B. — 1994. — Vol. 338, No. 2-3. — P. 235–240.

[68] *Ghosh S.* Anyons in an electromagnetic field and the Bargmann-Michel-Telegdi equation / S. Ghosh // Phys. Rev. D. — 1995. — Vol. 51. — P. 5827–5829.

[69] *Ландау Л. Д.* Квантовая электродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Москва : Наука, 1989. — Т. 4.

[70] *Faizal M.* Nonanticommutativity in the presence of a boundary / M. Faizal, D. J. Smith // Phys. Rev. D. — 2013. — Vol. 87, No. 2. — Art. 025019.

[71] *Faizal M.* Noncommutativity and non-anticommutativity perturbative quantum gravity / M. Faizal // Mod. Phys. Lett. A. — 2012. — Vol. 27, No. 13. — Art. 1250075.

[72] *Faizal M.* Deformation of the ABJM theory / M. Faizal // EPL (Europhysics Letters). — 2012. — Vol. 98, No. 3. — Art. 31003.

[73] *Chaichian M.* Hydrogen atom spectrum and the Lamb shift in noncommutative QED / M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 86, No. 13. — P. 2716–2719.

[74] *Colatto L. P.* Noncommutative geometry induced by spin effects / L. P. Colatto, A. L. A. Penna, W. C. Santos // Phys. Rev. D. — 2006. — Vol. 73, No. 10. — Art. 105007. — 11 p.

[75] *Абрамовиц М.* Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. — Москва : Наука, 1979. — 832 р.

[76] *Stetsko M. M.* Corrections to the n s levels of the hydrogen atom in deformed space with minimal length / M. M. Stetsko // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 74, No. 6. — Art. 062105.

[77] *Stetsko M. M.* Perturbation hydrogen-atom spectrum in deformed space with minimal length / M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk // Phys. Rev. A. — 2006. — Vol. 74, No. 1. — Art. 012101. — 5 p.

[78] *Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — Москва : Наука, 1971. — 1100 с.

[79] Precision measurement of the hydrogen $1s{-}2s$ frequency via a 920-km fiber link / A. Matveev, C. G. Parthey, K. Predehl et al. // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Vol. 110, No. 23. — Art. 230801. — 5 p.

[80] *Gnatenko Kh. P.* Hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space / Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk // Physics Letters A. — 2014. — Vol. 378, No. 47. — P. 3509–3515.

[81] *Гнатенко Х. П.* Оцінка верхньої межі для параметра некомутативності на основі принципу еквівалентності / Х. П. Гнатенко // Журн. фіз. досл. — 2013. — Vol. 17. — Art. 4001. — 5 p.

[82] *Shortley G. H.* The inverse-cube central force field in quantum mechanics / G. H. Shortley // Phys. Rev. — 1931. — Vol. 38, No. 1. — P. 120–127.

[83] *Ландау Л. Д.* Квантовая механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Наука, 1989. — Vol. 3. — P. 768.

[84] *Case K. M.* Singular potentials / K. M. Case // Phys. Rev. — 1950. — Vol. 80, No. 5. — P. 797–806.

[85] *Efimov V.* Low-energy properties of 3 resonantly interacting particles / V. Efimov // Sov. J. Nucl. Phys. — 1979. — Vol. 29, No. 4. — P. 546–553.

[86] *Hau L. V.* Bound states of guided matter waves: An atom and a charged wire / L. V. Hau, M. M. Burns, J. A. Golovchenko // Phys. Rev. A. — 1992. — Vol. 45, No. 9. — P. 6468–6478.

[87] *Schmiedmayer J.* A wire trap for neutral atoms / J. Schmiedmayer // Appl. Phys. B. — 1995. — Vol. 60, No. 2. — P. 169–179.

[88] *Denschlag J.* Scattering a neutral atom from a charged wire / J. Denschlag, J. Schmiedmayer // Europhys. Lett. — 1997. — Vol. 38, No. 6. — P. 405-410.

[89] *Denschlag J.* Probing a singular potential with cold atoms: A neutral atom and a charged wire / J. Denschlag, G. Umshaus, J. Schmiedmayer // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 81, No. 4. — P. 737–741.

[90] *Tkachuk V. M.* Binding of neutral atoms to ferromagnetic wire / V. M. Tkachuk // Phys. Rev. A. — 1999. — Vol. 60, No. 6. — P. 4715–4717.

[91] *Govindarajan T. R.* Horizon states for AdS black holes / T. R. Govindarajan, V. Suneeta, S. Vaidya // Nucl. Phys. B. — 2000. — Vol. 583, No. 1. — P. 291–303.

[92] *Birmingham D.* Near-horizon conformal structure of black holes / D. Birmingham, K. S. Gupta, S. Sen // Phys. Lett. B. — 2001. — Vol. 505, No. 1. — P. 191–196.

[93] *Gupta K. S.* Further evidence for the conformal structure of a Schwarzschild black hole in an algebraic approach / K. S. Gupta, S. Sen // Phys. Lett. B. — 2002. — Vol. 526, No. 1. — P. 121–126.

[94] *Chakrabarti S. K.* Universal near-horizon conformal structure and black hole entropy / S. K. Chakrabarti, K. S. Gupta, S. Sen // I. J. Mod. Phys. A. — 2008. — Vol. 23, No. 16-17. — P. 2547–2561.

[95] *Camblong H. E.* Conformal tightness of holographic scaling in black hole thermodynamics / H. E. Camblong, C. R. Ordóñez // Class. Quant. Grav. — 2013. — Vol. 30, No. 17. — Art. 175007. — 2 p.

[96] *Bawin M.* Electron-bound states in the field of dipolar molecules / M. Bawin // Phys. Rev. A. — 2004. — Vol. 70, No. 2. — Art. 022505. — 3 p.

[97] *Bawin M.* Anions and anomalies / M. Bawin, S. A. Coon, B. R. Holstein // Int. J. Mod. Phys. A. — 2007. — Vol. 22, No. 27. — P. 4901–4910.

[98] *Alhaidari A. D.* Charged particle in the field of an electric quadrupole in two dimensions / A. D. Alhaidari // J. Phys. A. — 2007. — Vol. 40, No. 49. — Art. 14843. — 14 p.

[99] Electron capture and scaling anomaly in polar molecules / P. R. Giri, K. S. Gupta, S. Meljanac, A. Samsarov // Phys. Lett. A. — 2008. — Vol. 372, No. 17. — P. 2967–2970.

[100] *Bawin M.* Singular inverse square potential, limit cycles, and self-adjoint extensions / M. Bawin, S.A. Coon // Phys. Rev. A. — 2003. — Vol. 67, No. 4. — Art. 042712. — 5 p.

[101] *Narnhofer H.* Quantum theory for $1/r^2$-potentials / H. Narnhofer // Acta Physica Austriaca. — 1974. — Vol. 40, No. 3-4. — P. 306–322.

[102] *Bouaziz D.* Singular inverse-square potential: Renormalization and self-adjoint extensions for medium to weak coupling / D. Bouaziz,

M. Bawin // Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 89, No. 2. — Art. 022113. — 4 p.

[103] *Gupta K. S.* Renormalization in quantum mechanics / K. S. Gupta, S. G. Rajeev // Phys. Rev. D. — 1993. — Vol. 48, No. 12. — P. 5940–5945.

[104] Renormalization of the inverse square potential / H. E. Camblong, L. N. Epele, H. Fanchiotti, C. A. García Canal // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 85, No. 8. — P. 1590–1593.

[105] Singular potentials and limit cycles / S. R. Beane, P. F. Bedaque, L. Childress et al. // Phys. Rev. A. — 2001. — Vol. 64. — P. 042103.

[106] *Coon S. A.* Anomalies in quantum mechanics: the $1/r^2$ potential / S. A. Coon, B. R. Holstein // Am. J. of Phys. — 2002. — Vol. 70, No. 5. — P. 513–519.

[107] *Hammer H.-W.* On the limit cycle for the $1/r^2$ potential in momentum space / H.-W. Hammer, B. G. Swingle // Ann. Phys. — 2006. — Vol. 321, No. 2. — P. 306–317.

[108] *Alhaidari A. D.* Renormalization of the strongly attractive inverse square potential: Taming the singularity / A. D. Alhaidari // Foundations of Physics. — 2014. — Vol. 44, No. 10. — P. 1049–1058.

[109] *Bouaziz D.* Regularization of the singular inverse square potential in quantum mechanics with a minimal length / D. Bouaziz, M. Bawin // Phys. Rev. A. — 2007. — Vol. 76, No. 3. — Art. 032112. — 13 p.

[110] *Bouaziz D.* Singular inverse square potential in arbitrary dimensions with a minimal length: Application to the motion of a dipole in a

cosmic string background / D. Bouaziz, M. Bawin // Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 78, No. 3. — Art. 032110. — 8 p.

[111] *Giri P. R.* Inverse square problem and so(2, 1) symmetry in noncommutative space / P. R. Giri // Int. J. Mod. Phys. A. — 2009. — Vol. 24, No. 14. — P. 2655–2663.

[112] *Fityo T. V.* WKB approximation in deformed space with minimal length / T. V. Fityo, I. O. Vakarchuk, V. M. Tkachuk // J. Phys. A. — 2005. — Vol. 39, No. 2. — P. 379–387.

[113] *Cotesius, R.* Harmonia mensurarum, sive Analysis & Synthesis per Rationum & Angulorum Mensuras promotæ : Accedunt alia opuscula mathematica / Per Rogerum Cotesium… Edidit et auxit Robertus Smith. — Cantabrigiæ, 1722. — 10 p. l., 249 p., 1 l., 125, [1] p.

[114] *Burić M.* The one-loop effective action for quantum electrodynamics on noncommutative space / M. Burić, V. Radovanović // J. High Energy Phys. — 2002. — Vol. 2002, No. 10. — Art. 074. — 16 p.

[115] Testing non-commutative QED, constructing non-commutative MHD / Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Y. Pi, A. P. Polychronakos // Phys. Lett. B. — 2001. — Vol. 517, No. 3. — P. 450–456.

[116] *Cai R.-G.* Superluminal noncommutative photons / R.-G. Cai // Phys. Lett. B. — 2001. — Vol. 517, No. 3. — P. 457–461.

[117] *Castorina P.* Noncommutative synchrotron / P. Castorina, A. Iorio, D. Zappalà // Phys. Rev. D. — 2004. — Vol. 69, No. 6. — Art. 065008. — 6 p.

[118] *Gaete P.* Coulomb's law modification in nonlinear and in noncommutative electrodynamics / P. Gaete, I. Schmidt // Int. J. Mod. Phys. A. — 2004. — Vol. 19, No. 20. — P. 3427–3437.

[119] *Castorina P.* On the vacuum Cherenkov radiation in noncommutative electrodynamics and the elusive effects of Lorentz violation / P. Castorina, A. Iorio, D. Zappalà // EPL (Europhys. Lett.). — 2005. — Vol. 71, No. 6. — P. 912–917.

[120] *Banerjee R.* Noncommutative gauge theories and Lorentz symmetry / R. Banerjee, B. Chakraborty, K. Kumar // Phys. Rev. D. — 2004. — Vol. 70, No. 12. — Art. 125004. — 12 p.

[121] *Carlson C. E.* Noncommutative gauge theory without lorentz violation / C. E. Carlson, Ch. D. Carone, N. Zobin // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol. 66, No. 7. — Art. 075001. — 8 p.

[122] Lorentz-invariant non-commutative space-time based on DFR algebra / H. Kase, K. Morita, Y. Okumura, E. Umezawa // Progress of theoretical physics. — 2003. — Vol. 109, No. 4. — P. 663–685.

[123] *Morita K.* Lorentz-invariant non-commutative QED / K. Morita // Progress of theoretical physics. — 2002. — Vol. 108, No. 6. — P. 1099–1122.

[124] *Conroy J. M.* Phenomenology of Lorentz-conserving noncommutative QED / J. M. Conroy, H. J. Kwee, V. Nazaryan // Phys. Rev. D. — 2003. — Vol. 68, No. 5. — Art. 054004. — 8 p.

[125] *Grosse H.* The Dirac operator on the fuzzy sphere / H. Grosse, P. Prešnajder // Lett. Math. Phys. — 1995. — Vol. 33, No. 2. — P. 171–181.

[126] *Bertolami O.* Noncommutative field theory and violation of translation invariance / O. Bertolami, L. Guisado // J. High Energy Phys. — 2003. — Vol. 2003, No. 12. — P. 013.

[127] *Prešnajder P.* Gauge fields on the fuzzy sphere / P. Prešnajder // Mod. Phys. Lett. A. — 2003. — Vol. 18, No. 33n35. — P. 2431–2438.

[128] *Ткачук В. М.* Рівняння поля в деформованому просторі з мінімальною довжиною / В. М. Ткачук // Журн. фіз. досл. — 2007. — Vol. 11. — P. 41-44.

[129] *Moayedi S. K.* Formulation of electrodynamics with an external source in the presence of a minimal measurable length / S. K. Moayedi, M. R. Setare, B. Khosropour // Adv. High Energy Phys. — 2013. — Vol. 2013. — Art. 657870. — 7 p.

[130] *Крылов Н. М.* Введение в нелинейную механику / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. — Изд-во АН УССР, 1937. — P. 365.

[131] Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics / M. Novello, V. A. De Lorenci, J. M. Salim, R. Klippert // Phys. Rev. D. — 2000. — Vol. 61, No. 4. — Art. 045001.

[132] *Bialynicka-Birula Z.* Nonlinear effects in quantum electrodynamics. Photon propagation and photon splitting in an external field / Z. Bialynicka-Birula, I. Bialynicki-Birula // Phys. Rev. D. — 1970. — Vol. 2, No. 10. — P. 2341.

[133] *Loskutov Yu. M.* Nonlinear electrodynamics in a superstrong magnetic field / Yu. M. Loskutov, V. V. Skobelev // Phys. Lett. A. — 1976. — Vol. 56, No. 3. — P. 151–152.

[134] *Denisov V. I.* Nonlinear vacuum electrodynamics birefringence effect in a pulsar's strong magnetic field / V. I. Denisov, V. A. Sokolov, M. I. Vasili'ev // Phys. Rev. D.— 2014.— Vol. 90, No. 2.— Art. 023011.

Додаток А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] Васюта В. М. Точний розв'язок гармонічного осцилятора в просторі зі спіновою некомутативністю // Журн. фіз. дослідж.— 2013.— Т. 17, №3.— Ст. 3001.— 4 с.

[2] Васюта В. М. Поправки до енерґетичного спектра атома водню у просторі зі спіновою некомутативністю координат // Журн. фіз. дослідж.— 2014.— Т. 18, №4.— Ст. 4001.— 7 с.

[3] Vasyuta V. M., Tkachuk V. M. Classical electrodynamics in a space with spin noncommutativity of coordinates // Phys. Lett. B.— 2016.— Vol. 761.— P. 462-468.

[4] Vasyuta V. M., Tkachuk V. M. Falling of a quantum particle in an inverse square attractive potential // Eur. Phys. J. D.— 2016.— Vol. 70, No. 12.— Art. 267.— 5 p.

[5] Васюта В. М., Ткачук В. М. Обернено квадратичний потенціал у просторі зі спіновою некомутативністю координат // Укр. фіз. журн.—

2017.— Т. 62, №4.— С. 343-348.

[6] Vasyuta V. M. Quantum systems in space with spin noncommutativity of coordinates // in: Trans-European School of High Energy Physics, Basivka, Lviv Region, Ukraine, July 17-24, 2014: Proceedings.— 2014.— 155-157.

[7] Васюта В. Узагальнена нерелятивістська спінова некомутативність // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "Еврика-2013 Львів, 15-17 травня 2013 р.: Тези доповідей.— С. F2.

[8] Vasyuta V. M. Exactly solvable problems in space with spin noncommutativity // International Conference "Quantum Groups and Quantum Integrable Systems", June 18 – 21, 2013, Kiev, Ukraine: Program and Abstracts.— P. 48.

[9] Vasyuta V. M. Spin noncommutativity of coordinates from Barut-Zanghi model // V Young Scientists Conference "Problems of Theoretical Physics", December 24-27, 2013, Kyiv, Ukraine: Program & Proceedings.— P. 27.

[10] Васюта В. М. Поправки до енергетичного спектру атома водню в просторі зі спіновою некомутативністю // 14-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 4-6 червня 2014. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез.— С. 48.

[11] Васюта В. Атом водню в просторі зі спіновою некомутативністю координат [Різдвяні дискусії 2015, Львів, 12-13 січня 2015] // Журн. фіз. дослідж.— 2015.— Т. 19, №1/2.— С. 1998-4.

[12] Васюта В. М. Час падіння квантової частинки на потенціал $-\gamma/r^2$ // 15-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі

статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 4-5 червня 2015. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез.— С. 41.

[13] Vasyuta V. Hydrogen atom in space with spin noncommutativity // XXXV Max Born Symposium "The Planck Scale II", Wroclaw, Poland, 7-12 September 2015: Book of abstracts.— [P. 4].

[14] Vasyuta V. M. Evolution of a quantum particle in an inverse square potential // Workshop on Current Problems in Physics: Zielona Góra – Lviv, 19-22 October 2015, Zielona Góra, Poland: Book of abstracts.— [P. 37].

[15] Васюта В. Електродинаміка у просторі зі спіновою некомутативністю координат [Різдвяні дискусії 2016, Львів, 11-12 січня 2016] // Журн. фіз. дослідж.— 2016.— Т. 20, №1/2.— С. 1998-4.

[16] Vasyuta V. M. Field equations in space with spin noncommutativity of coordinates// Workshop on Current Problems in Physics: Program and Abstracts, Lviv, 05–07 July 2016.— P. 18-19.

[17] Васюта В. М. Електромагнітні системи у просторі зі спіновою некомутативністю координат // 17-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 8-9 червня 2017. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез.— С. 35.