

**ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА**

На правах рукопису

**Фітьо Тарас Володимирович**

УДК 530.145.61

**Нові точно та квазі-точно розв'язувані  
квантові системи**

**01.04.02 — Теоретична фізика**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата  
фізико-математичних наук

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук,

професор

Ткачук Володимир Михайлович

**ЛЬВІВ — 2006**

# Зміст

<b>ВСТУП</b>	<b>5</b>
--------------	----------

## **РОЗДІЛ 1. Методи побудови квазі-точно та точно**

<b>розв'язуваних задач</b>	<b>12</b>
1.1 Суперсиметрична квантова механіка . . . . .	13
1.2 Формінваріантність . . . . .	16
1.3 Перетворення Дарбу . . . . .	19
1.4 Точкові перетворення . . . . .	20
1.5 Інверсний метод . . . . .	23

## **РОЗДІЛ 2. Квазі-точно розв'язувані задачі з неермітовими**

<b>гамільтоніанами</b>	<b>27</b>
2.1 Вступ до другого розділу . . . . .	27
2.2 Факторизація $PT$ -симетричного потенціалу . . . . .	30
2.2.1 $PT$ -симетрія . . . . .	30
2.2.2 Загальний вигляд суперпотенціалу $PT$ -симетричного потенціалу . . . . .	32
2.2.3 Приклади факторизованих $PT$ -симетричних потенціалів . . . . .	35
2.3 Неермітові системи з дійсними спектрами . . . . .	37

2.3.1	Загальний метод побудови псевдоермітових гамільтоніанів з дійсним спектром . . . . .	39
2.3.2	Псевдоермітовість з диференціальним оператором другого порядку . . . . .	41
2.3.3	Приклади неермітових гамільтоніанів з дійсними спектрами . . . . .	44
2.4	Висновки до другого розділу . . . . .	47

### **РОЗДІЛ 3. Квазі-точно розв'язувані потенціали**

	<b>у багатовимірних просторах</b>	<b>49</b>
3.1	Вступ до третього розділу . . . . .	49
3.2	Багатовимірне стаціонарне рівняння Шррьодінгера з двома відомими розв'язками . . . . .	49
3.2.1	Побудова багатовимірного потенціалу з двома відомими рівнями . . . . .	51
3.2.2	Приклади багатовимірних гамільтоніанів з двома відомими рівнями . . . . .	55
3.3	Нестаціонарне рівняння Шррьодінгера з одним відомим розв'язком . . . . .	58
3.3.1	Побудова нестаціонарного рівняння Шррьодінгера з одним відомим розв'язком . . . . .	59
3.3.2	Приклади часово-залежних потенціалів з одним відомим розв'язком . . . . .	63
3.4	Висновки до третього розділу . . . . .	69

### **РОЗДІЛ 4. Одновимірні квантові системи**

	<b>у деформованому просторі з мінімальною довжиною</b>	<b>70</b>
4.1	Вступ до четвертого розділу . . . . .	70
4.2	Комутаційні співвідношення з мінімальною довжиною . . . . .	73

4.2.1	Імпульсне та квазі-координатне представлення для деформованого простору з мінімальною довжиною	76
4.2.2	Деформації, що ведуть до верхньої межі кінетичної енергії . . . . .	77
4.2.3	Деформована алгебра з верхньою межею кінетичної енергії з точно розв'язуваним гамільтоніаном	80
4.3	Точний розв'язок одновимірної задачі Кулона в деформованому просторі . . . . .	85
4.3.1	Імпульсне представлення Кулонівського гамільтоніану в деформованому просторі та його власні функції . . . . .	86
4.3.2	Енергетичний спектр для одновимірної задачі Кулона . . . . .	90
4.3.3	Наближені методи в застосуванні до задачі Кулона в деформованому просторі . . . . .	96
4.4	Квазікласичне наближення в деформованому просторі з мінімальною довжиною . . . . .	98
4.4.1	Приклади застосування квазікласичного наближення до одновимірних задач у деформованому просторі . . . . .	104
4.4.2	Приклади застосування квазікласичного наближення до тривимірних задач зі сферичною симетрією у деформованому просторі . . . . .	109
4.5	Висновки до четвертого розділу . . . . .	113
	<b>ВИСНОВКИ</b>	<b>114</b>
	<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b>	<b>116</b>

## ВСТУП

**Актуальність теми.** На початку ХХ століття виникли дві нові галузі фізики, які кардинально поміняли науковий світогляд вчених: теорія відносності та квантова механіка. Остання з них бурхливо розвивається ще й дотепер. Постійно виникають нові відгалуження та напрямки досліджень: квантові обчислення та квантова інформатика, квантова механіка з деформованою алгеброю Гайзенберґа, неермітові та комплексні системи.

Досьогодні не знайдено ще жодного прикладу фізичної системи, для якої не виконувалися б закони та постулати квантової механіки. З цієї точки зору квантова механіка — найуспішніша фізична теорія. З іншого боку, принципи квантової механіки суперечать нашому повсякденному досвіду і, як наслідок, її важко зрозуміти на інтуїтивному рівні. Тому, як і для будь-якої іншої теорії, аналіз та розгляд простих квазі-точно та точно розв’язуваних задач є важливими для глибокого розуміння квантової механіки. Як писав Дірак [1]: “Квантова механіка Гайзенберґа і Шрьодінґера спочатку була розроблена для кількох простих прикладів, на основі яких була сконструйована загальна математична схема. Опісля науковці усвідомили загальні фізичні принципи, які визначають інтерпретацію [квантової механіки], як от принцип суперпозиції станів та принцип невизначеності.”

Точно розв’язувані задачі — це задачі, для яких можна в явному

вигляді знайти всі енергетичні рівні і відповідні хвильові функції. Було розроблено декілька методів для знаходження точно розв'язуваних гамільтоніанів. Зокрема методи факторизації (Шр'юдінґер, 1940 [2]; Інфельд та Хілл, 1951 [3]), суперсиметрії (Ніколаї, 1976 [4]; Вітен, 1981 [5], Генденштейн, 1983 [6]). Є відомо близько десяти точно розв'язуваних задач [7]. Квазі-точно розв'язувані задачі — задачі, для яких можна в явному вигляді знайти кілька енергетичних рівнів та відповідних хвильових функцій [8–11]. Клас квазі-точно розв'язуваних гамільтоніанів є набагато ширшим. Знаходження нових точно та квазі-точно розв'язуваних задач — важлива та складна проблема.

Методи побудови точно та квазі-точно розв'язуваних задач можна застосовувати до нових областей квантової механіки. Одним з таких нових напрямків квантової механіки є неермітові гамільтоніани. Під впливом роботи Дірака [1] Паулі [12] запропонував їх використовувати ще у сорокових роках минулого століття. Неермітові гамільтоніани почали інтенсивно вивчатися після робіт Бендера та колег [13–15]. Неермітові системи застосовуються як ефективні гамільтоніани [16, 17], для опису еволюції нерівноважної систем у статистичній фізиці [18, 19]. Інтерпретація неермітових гамільтоніанів викликає певні труднощі і такі системи та їх властивості активно досліджуються.

Останнім часом інтенсивно досліджуються квантові системи з деформованою алгеброю Гайзенберґа. Перша робота, в якій розглядалася модифікація канонічних комутаційних співвідношень, була опублікована ще у 1947 році Снайдером [20]. Зацікавленість цією проблемою була відновлена наприкінці минулого століття дослідженнями з теорії струн [21] та квантової теорії чорних дір [22], які передбачали існування ненульової мінімальної невизначеності координат. Кемпфом було показано, що мінімальна невизначеність координати може при-

родньо з'явитися у квантовій механіці шляхом незначної зміни (деформації) канонічних комутаційних співвідношень (алгебри Гайзенберга) [23, 24]. Саме роботи Кемпфа стимулювали дослідження традиційних квантово-механічних задач у просторах з мінімальною невизначеністю координати. Ці задачі дають можливість виявити вплив квантування простору на спектри та хвильові функції квантових систем.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана у Львівському національному університеті імені Івана Франка та згідно держбюджетних тем Фф-39Б “Нелінійні флюктуації в квантових рідинах” (номер державної реєстрації № 0100U001447), Фф-150Ф “Розробка нових математичних методів дослідження квантових систем” (номер державної реєстрації № 0100U001446) та Фф-55Ф “Теоретичні дослідження нових квантових систем” (номер державної реєстрації № 0106U001293).

**Мета і задачі дослідження.** Головною метою дисертаційної роботи є виявлення нових квазі та точно-розв'язуваних задач квантової механіки. При цьому значна увага приділялася вивченню нових напрямків квантової механіки. Зокрема, досліджувалися спектральні властивості неермітових гамільтоніанів, а також вивчалися властивості одновимірних квантових систем у фазовому просторі з деформованою алгеброю Гайзенберга. Також досліджувалися багатовимірні квазі-точно розв'язувані гамільтоніани.

Таким чином, *об'єктом дослідження* є точно та квазі-точно розв'язувані задачі квантової механіки. *Предметом дослідження* виступають спектри гамільтоніанів та їх власні функції. Для дослідження використовувалися методи суперсиметрії, факторизації, форм-інваріантності та інверсний метод.

**У першому розділі** зроблено огляд методів побудови квазі-точно та точно розв'язуваних задач. Описано труднощі, які виникають при їх застосуванні. Пояснено термінологію, яка використовується у дисертаційній роботі.

Наступні три розділи містять оригінальні результати. На початку кожного розділу зроблено короткий огляд літератури, який безпосередньо стосується проблематики розділу.

**У другому розділі** вивчалася квантова механіка з неермітовими гамільтоніанами. Розглянуто загальні властивості таких систем та їх інтерпретація. Вивчалися способи побудови неермітових гамільтоніанів з дійсним спектром. Окремо розглядалися так звані *PT*-симетричні системи. Знайдено загальний вигляд суперпотенціалу для *PT*-симетричного гамільтоніану.

**У третьому розділі** досліджувались рівняння Шрьодінґера з кількома змінними. Зокрема стаціонарне рівняння в багатовимірному просторі та нестаціонарне рівняння в одновимірному просторі. За допомогою інверсного методу знайдено прості рецепти побудови квазі-точно розв'язуваних систем з двома та одним розв'язком відповідно.

**У четвертому розділі** досліджувалася нова область квантової механіки: деформовані простори з мінімальною довжиною. Розглянуто математичні властивості операторів координати та імпульсу, які спричиняють виникнення мінімальної довжини. Проаналізовано та знайдено спектр для кількох гамільтоніанів в деформованому просторі. Побудоване квазікласичне наближення та вивчено його застосовність.

Дисертація завершується **Висновками** та **Списком використаних джерел**.

**Наукова новизна отриманих результатів.** У дисертаційній роботі вперше знайдено загальний вигляд суперпотенціалу для *PT*-



симетричного гамільтоніану. Побудовано новий клас неермітових операторів, які мають дійсний спектр і які є квазі-точно розв'язуваними.

Узагальнено інверсний метод для отримання квазі-точно розв'язуваних багатовимірних потенціалів з двома відомими рівнями. Його також було поширено для побудови квазі-точно розв'язуваного нестационарного рівняння Шрьодінґера.

Вперше узагальнено правило квантування Бора-Зомерфельда на випадок одновимірного квантового простору з деформованим комутаційним співвідношенням, яке передбачає існування мінімальної довжини. Вперше знайдено спектр одновимірної кулонівської задачі у деформованому просторі з мінімальною довжиною. На прикладі цієї задачі показано, що наявність деформації необов'язково приводить до усунення проблем пов'язаних зі сингулярністю потенціалу.

**Практичне значення одержаних результатів.** Результати представлені в дисертації, мають самостійний інтерес, а також можуть бути використані у подальших теоретичних та експериментальних дослідженнях.

Так, наприклад, для деформованого простору розроблено новий наближений метод знаходження спектрів — правило квантування Бора-Зомерфельда, яке може бути застосоване до широкого класу гамільтоніанів. Спектр для кулонівської системи може бути використаний для оцінки можливої величини мінімальної невизначеності координат простору. Результати третього розділу можуть бути використані для простого, а тому швидкого, розрахунку пасток Пауля.

**Особистий внесок здобувача.** Всі викладені в дисертації оригінальні результати отримано автором самостійно або при його безпосередній участі. У роботах, виконаних зі співавторами, здобувачу належить:

- побудова та частковий аналіз прикладів, які ілюструють теоретичні положення відповідних статей [25, 27, 28, 30];
- два вигляди генеруючої функції (формули (3.10) та (3.19) дисертації), для якого можна побудувати квазі-точно розв'язувані багатовимірні гамільтоніани з двома відомими рівнями [27];
- аналіз дійсності побудованого потенціалу та квадратичної інтегрованості хвильової функції [28];
- вибір методу квантування для кулонівського потенціалу у деформованому просторі з мінімальною довжиною [29];

Значна частина математичних розрахунків статті [29] та розклад кінетичної енергії по степенях  $\hbar$  при дослідженні квазікласичного наближення для деформованого простору у [30] робилися всіма трьома співавторами незалежно один від одного.

І зрозуміло, що результати статей, їх інтерпретація, застосовність та наочність використаних підходів до розв'язання задач у спільних публікаціях обговорювалися всіма співавторами на паритетних засадах.

**Апробація результатів дисертації.** Результати досліджень, включених до дисертаційної роботи, були представлені автором особисто на таких конференціях і семінарах: Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2002 рік (Львів, 2003); Еврика–2003 (Львів, 2003) [31]; ІЕФ–2003 (Ужгород, 2003) [32]; Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2003 рік (Львів, 2004); Звітна наукова конференція Львівського національного університету імені Івана Франка за 2004 рік (Львів, 2005); Еврика–2005 (Львів, 2005) [33]; 6<sup>th</sup> International Conference: SNMP–05 (Kyiv, 2005) [34].

Результати, викладені у роботі, також неодноразово обговорювалися на семінарах кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка.

**Публікації.** Результати, викладені в дисертації, ґрунтуються на матеріалі шести журнальних статей [25–30] та чотирьох тезах конференцій [31–34].

# Розділ 1

## Методи побудови квазі-точно та точно розв'язуваних задач

В цьому розділі коротко опишемо відомі методи побудови точно та квазі-точно розв'язуваних задач. Цими методами будемо користатися в дисертаційній роботі. В рамках цієї роботи будемо вивчати як стаціонарне рівняння Шрьодінгера у одновимірному та багатовимірному випадках

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_n + V(x)\psi_n = E_n\psi_n, \quad (1.1)$$

$$-\Delta\psi_n + V(x_1, \dots, x_m)\psi_n = E_n\psi_n, \quad (1.2)$$

так і нестационарне рівняння в одновимірному випадку

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + V(x)\psi. \quad (1.3)$$

Безпосереднє розв'язування цих рівнянь стикається зі значними труднощами. Тому постає питання про знаходження таких потенціалів, для яких ці рівняння можуть бути розв'язані. В літературі використовуються два метапідходи до цієї проблеми:

1. на основі рівняння Шрьодінгера, для якого є відомими всі чи кілька розв'язків, побудувати нове рівняння Шрьодінгера, власні функції якого будуються на основі власних функцій старого рівняння (метод факторизації, суперсиметричний метод, метод точкових перетворень, перетворення Дарбу);

2. задаючи кілька власних функцій, знайти такий потенціал, для якого ці власні функції є розв'язками відповідного рівняння Шрьодінгера (інверсний метод).

В цьому розділі ми розглянемо ці методи на прикладі одновимірного стаціонарного рівняння Шрьодінгера (1.1) та опишемо приклади їх застосування до нього та двох інших рівнянь Шрьодінгера (1.2–1.3). Також відмітимо, що метод факторизації, викладений Інфельдом та Гульом [3], еквівалентний [7] до об'єднання методів суперсиметрії [5] та формінваріантності [6]. Останнім часом переважна більшість робіт виконуються у формалізмі методів суперсиметрії та формінваріантності, тому ми викладемо у цьому розділі тільки ці два останніх методи, опускаючи метод факторизації.

## 1.1 Суперсиметрична квантова механіка

Суперсиметрія виникла як теорія, що описує перетворення Фермі частинок в Бозе і навпаки. Для ілюстрації деяких особливостей суперсиметрії Вітен запропонував іграшкову модель суперсиметрії [5], яка пізніше виявилася корисною для побудови точно розв'язуваних задач [7].

Замкнута супералгебра  $sl(1/1)$  складається з двох суперзарядів  $Q^\pm$  та гамільтоніану  $H$ , які задовольняють наступні співвідношення

$$\{Q^-, Q^+\} = H, \quad \{Q^-, Q^-\} = \{Q^+, Q^+\} = 0, \quad (1.4)$$

з яких випливають рівняння, що замикають супералгебру

$$[H, Q^-] = [H, Q^+] = 0. \quad (1.5)$$

Суперзаряди є ермітовоспряженими один до одного:  $(Q^-)^+ = Q^+$ . Вважається, що  $Q^-$  перетворює бозе частинку в фермі, а  $Q^+$  діє навпаки.

Співвідношення (1.5) вказує, що рівні суперсиметричного гамільтоніану вироджені. Більш детальний аналіз показує, що кратність виродження, спричинена існуванням суперсиметрії, рівна двом.

Описуючи ферміонні ступені вільності за допомогою матриць два на два, а бозонні неперервною змінною  $x$ , ми прийдемо до такого представлення:

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

де  $H_1 = A^+A$ ,  $H_2 = AA^+$ , а оператори  $A$ ,  $A^+$  діють тільки на змінну  $x$ . Оператори  $A^+$ ,  $A$  називаються *операторами народження та знищення*. Власні функції гамільтоніану  $H$  мають таку структуру

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^{(1)}(x) \\ \psi^{(2)}(x) \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Тут  $\psi^{(1)}(x)$  та  $\psi^{(2)}(x)$  — власні функції гамільтоніанів  $H_1$  та  $H_2$  відповідно. Цим власним функціям має відповідати та сама енергія  $E$ . Такі власні функції можна знайти. Дійсно, з

$$H_1\psi_n^{(1)} = A^+A\psi_n^{(1)} = E_n^1\psi_n^{(1)} \quad (1.8)$$

і

$$AH_1\psi_n^{(1)} = AA^+A\psi_n^{(1)} = H_2A\psi_n^{(1)} = E_n^1A\psi_n^{(1)}, \quad (1.9)$$

впливає що, якщо  $A\psi_n^{(1)}$  не тотожний нуль, то це — власна функція  $H_2$ . І, навпаки,  $A^+\psi_n^{(2)}$  — власна функція  $H_1$ .

Гамільтоніан  $H$ , який відповідає рівнянню на власні значення (1.1), може бути представлений у вигляді

$$H = A^+A + E_0 = \left(-\frac{d}{dx} + W(x)\right) \left(\frac{d}{dx} + W(x)\right) + E_0, \quad (1.10)$$

де  $E_0$  — енергія основного стану гамільтоніану  $H$ , для  $W(x)$  у літературі є загальноприйнятий термін — *суперпотенціал*. Відмітимо,

що відтепер під  $H$  будемо розуміти звичайний скалярний гамільтоніан (тобто, гамільтоніан, який відповідає рівнянням Шрьодінґера (1.1), (1.2)). Суперпотенціал  $W(x)$  виражається через функцію основного стану  $\psi_0(x)$ :

$$W(x) = -\frac{1}{\psi_0(x)} \frac{d\psi_0(x)}{dx}. \quad (1.11)$$

Побудований таким чином суперпотенціал не має особливостей, бо функція основного стану не має нулів [35].

Гамільтоніани

$$\begin{aligned} H_1 &= A^+A = \left(-\frac{d}{dx} + W(x)\right) \left(\frac{d}{dx} + W(x)\right) = -\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - W'(x), \\ H_2 &= AA^+ = -\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) + W'(x) \end{aligned} \quad (1.12)$$

мають однаковий спектр за винятком основного стану гамільтоніану  $H_1$  з власним значенням 0 (функція  $A\psi_0 \equiv 0$  не є власною функцією  $H_2$ ). Гамільтоніани  $H_1$  та  $H_2$  називаються *суперпартнерами*.

Отже, маючи гамільтоніан  $H$ , який є точно розв'язуваним, тобто, для якого відомо всі нормовані власні функції  $\psi_n$  та власні значення  $E_n$ , послідовно можна знайти суперпотенціал  $W(x)$ ; гамільтоніан  $H_1$ , спектр якого зсунутий на величину  $-E_0$  відносно спектру гамільтоніану  $H$ :  $E_n^{(1)} = E_n - E_0$ , а хвильові функції співпадають; та його суперпартнер  $H_2$ , спектр якого співпадає з ненульовими власними значеннями  $H_1$ :  $E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}$ , а хвильові функції задаються так:

$$\psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} A\psi_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} \left(\frac{d}{dx} + W(x)\right) \psi_{n+1}(x). \quad (1.13)$$

В цій рівності множник  $\frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}}$  забезпечує нормування на одиницю хвильової функції  $\psi_n^{(2)}$ .

Відмітимо, що гамільтоніан  $H_2$  теж є точно розв'язуваним. Таким чином знаючи один точно розв'язуваний гамільтоніан можна побудувати новий точно розв'язуваний гамільтоніан. Цю процедуру можна

ітеративно продовжити і отримати цілу ієрархію точно розв'язуваних гамільтоніанів на основі початкового.

Застосування методу суперсиметрії до багатовимірного рівняння Шрьодінгера (1.2) викликає труднощі оскільки, хоча гамільтоніан можна записати у вигляді

$$H = \sum_{i=1}^N A_i^+ A_i,$$

та оператори народження-знищення з різними індексами не комутують між собою в загальному випадку. Як наслідок, не вдається записати рівняння типу (1.9), яке дає змогу пов'язати спектри суперпартнерів. В багатовимірному випадку суперсиметрію можна застосувати, або до матричних рівнянь Шрьодінгера [36], або до опису систем у магнітному полі [37, 38], гамільтоніани яких можуть бути представлені як  $H = A^+ A$ .

Наприкінці цього підрозділу дамо ще два означення. Оператор  $A$  називається *факторизованим*, якщо його можна представити у вигляді

$$A = BC + \varepsilon,$$

де  $A, B$  нетривіальні оператори.  $\varepsilon$  називають *енергією факторизації*. Дуже часто факторизація оператора спрощує пошук власних функцій оператора. Так, якщо  $C\psi = 0$ , то  $\psi$  — власна функція оператора  $A$  з власним значенням  $\varepsilon$ . Ми використовували факторизацію  $PT$ -симетричних гамільтоніанів для пошуку їх власних значень [25].

## 1.2 Формінваріантність

У 1983 році Генденштейн запропонував метод формінваріантності [6], який у поєднанні зі суперсиметричним методом дозволяє точно розв'язувати рівняння Шрьодінгера алгебраїчним чином.



Як ми бачили, у гамільтоніанів-суперпартнерів

$$\begin{aligned} H_1 &= A^+ A = -\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - W'(x), \\ H_2 &= A A^+ = -\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) + W'(x) \end{aligned} \quad (1.14)$$

енергетичний спектр співпадає за винятком одного найнижчого рівня гамільтоніана  $H_1$ . Причому, нам відомий найнижче власне значення  $H_1$ , воно рівне 0. Є відомою і відповідна власна функція

$$\psi_0(x) = \exp \left\{ - \int W(x) dx \right\}.$$

Нехай, суперпотенціал, а значить і суперпартнери, залежить від деякого параметру  $\alpha$ :  $W(x, \alpha)$ . Нехай існує ще одне значення параметра  $\alpha_1$ , для якого виконується рівність

$$W^2(x, \alpha) + W'(x, \alpha) = W^2(x, \alpha_1) - W'(x, \alpha_1) + \varepsilon_1(\alpha_1).$$

Іншими словами

$$H_2(\alpha) = H_1(\alpha_1) + \varepsilon_1(\alpha_1).$$

Якщо для довільного значення параметра  $\alpha$  можна підібрати таке значення параметра  $\alpha_1$ , що виконується ця рівність, то такі гамільтоніани називаються *формінваріантними*.

Так як, гамільтоніани  $H_2(\alpha)$  та  $H_1(\alpha_1)$  відрізняються тільки на константу  $\varepsilon_1(\alpha_1)$ , то їхні власні функції співпадають, а відповідні власні значення зсунуті на цю константу. Явний вигляд власної функції основного стану гамільтоніана  $H_1(\alpha_1)$  відомий:

$$\psi_0(x, \alpha_1) = \exp \left\{ - \int W(x, \alpha_1) dx \right\}$$

з власним значенням 0. Ця ж функція є власною функцією гамільтоніану  $H_2(\alpha)$  з власним значенням  $\varepsilon_1(\alpha_1)$ . Згідно зі суперсиметричним

методом функція

$$\psi_1(x, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1(\alpha_1)}} A^+(\alpha) \psi_0(x, \alpha_1)$$

є нормованою власною функцією оператора  $H_1(\alpha)$  першого збудженого рівня, якій відповідає власне значення  $\varepsilon_1(\alpha_1)$ .

Подібним чином можна збудувати цілу ієрархію гамільтоніанів, спектри яких пов'язані суперсиметрично. Тобто, спочатку ми завжди зможемо знайти такий параметр  $\alpha_2$ , що

$$H_2(\alpha_1) = H_1(\alpha_2) + \varepsilon_2(\alpha_2).$$

Міркуючи аналогічно до попереднього випадку легко бачити, що

$$\psi_2(x, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2(\alpha_2)}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1(\alpha_1) + \varepsilon_2(\alpha_2)}} A^+(\alpha) A^+(\alpha_1) \psi_0(x, \alpha_2)$$

буде нормованою власною функцією оператора  $H_1(\alpha)$  другого збудженого рівня, якій відповідає власне значення  $\varepsilon_1(\alpha_1) + \varepsilon_2(\alpha_2)$ . Цей процес можна продовжити ітеративно і знайти весь спектр початкового гамільтоніану  $H_1(\alpha)$  і всі його власні функції. Можливі два варіанти.

Перший: хвильова функція  $\psi_0(x, \alpha_n) = \exp\{-\int W(x, \alpha_n) dx\}$  основного стану гамільтоніана  $H_1(\alpha_n)$  не є квадратично інтегрованою, в свою чергу це означає, що спектр  $H_1(\alpha)$  містить  $n$  власних значень і є обмеженим. Як приклад можна навести гамільтоніан Морзе [7, 39].

Другий: всі функції  $\psi_0(x, \alpha_n)$  квадратично інтегровані. Спектр гамільтоніана  $H_1(\alpha)$  містить нескінченну кількість власних значень. Прикладами можуть слугувати гамільтоніани атома водню чи гармонічного осцилятора.

Вище наведена процедура може бути узагальнена до так званої дво- та багатокрокової формінваріантності [40]. Багатокрокова формінваріантність застосовується до багатовимірних систем [41], де не

можна застосувати звичайну суперсиметрію, а значить і вище викладений метод формінваріантності.

Слід відмітити, що всі точно розв'язувані одновимірні гамільтоніани є формінваріантними [7]. З іншого боку, метод формінваріантності є простим і його легко застосувати у нових областях квантової механіки. Так скажімо, коли в кінці дев'яностих років минулого століття почав активно розвиватися напрямок неермітових гамільтоніанів, то цей метод було практично відразу застосовано для побудови великого набору точно розв'язуваних неермітових систем [42]. Цей метод також використовувався при дослідженні квантових систем у деформованих просторах з мінімальною довжиною [43, 44].

### 1.3 Перетворення Дарбу

Співпадіння спектрів суперпартнерів можна розглядати і як наслідок перетворення Дарбу. Два гамільтоніани  $H_1$ ,  $H_2$  називаються пов'язаними *перетворенням Дарбу* [45], якщо існує такий оператор  $A$ , що

$$AH_1 = H_2A. \quad (1.15)$$

Легко бачити, що спектр оператора  $H_1$  міститься в спектрі оператора  $H_2$ . Дійсно, якщо  $\psi$  — власна функція  $H_1$ , то  $A\psi$  — власна функція гамільтоніану  $H_2$  з тим самим власним значенням. Якщо для оператора  $A$  існує обернений оператор  $A^{-1}$ , то спектри співпадають повністю.

Перетворення Дарбу не вимагає факторизації гамільтоніану, а тому може використовуватися в більш загальних схемах, які не потребують знання основного стану одного з операторів. Так наприклад, якщо існує перетворення Дарбу між неермітовим та ермітовим операторами Шрьодінгера, то можна твердити, що спектр неермітового

гамільтоніану співпадає зі спектром ермітового гамільтоніану, а тому він дійсний [46].

Перетворення Дарбу широко застосовують для побудови нових точно-розв'язуваних потенціалів. Так воно використовується для побудови нових нестационарних рівнянь з відомими розв'язками [47, 48], нових точно та квазі-точно розв'язуваних багатовимірних гамільтоніанів [41].

Наприкінці підрозділу зробимо одне зауваження. Оскільки інтерес до перетворення Дарбу відродився в контексті суперсиметрії, то дуже часто у працях, в яких воно використовується, на нього посилаються як на суперсиметричний метод/підхід (як приклади таких статей можна навести [41, 47]).

## 1.4 Точкові перетворення

Якщо в рівнянні (1.1) зробити таку заміну змінних:

$$f(z) = \frac{dz}{dx} \quad \text{або} \quad \frac{d}{dx} = f(z) \frac{d}{dz},$$

то це рівняння для нової змінної  $z$  буде мати такий вигляд

$$\left\{ -\frac{d^2}{dz^2} - \frac{f'}{f} \frac{d}{dz} + \frac{V - E_n}{f^2} \right\} \psi_n = 0.$$

Щоб уникнути члена з першою похідною хвильову функцію  $\psi_n$  перемасштабовують

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{f}} \tilde{\psi}_n$$

і додаючи до обох боків рівності по члену  $\epsilon_n \tilde{\psi}_n$  отримують нове рівняння Шрьодінгера

$$-\frac{d^2 \tilde{\psi}_n}{dz^2} + \tilde{V}(z, n) \tilde{\psi}_n = \epsilon_n \tilde{\psi}_n,$$

де новий потенціал

$$\tilde{V}(z, n) = \frac{V - E_n + \epsilon_n f^2}{f^2} - \left[ \frac{f'^2}{4f^2} - \frac{f''}{2f} \right]$$

в загальному випадку залежить від квантового числа  $n$ . Щоб отримати коректне рівняння Шрьодінгера новий потенціал  $\tilde{V}$  не повинен залежати від  $n$ . Це досягається якщо величина

$$G = V - E_n + \epsilon_n f^2$$

є незалежною від  $n$ . Незалежності від  $n$  можна досягнути кількома способами. Один зі способів полягає в тому, що функціональні залежності  $V$  та  $f^2$  від  $x(z)$  вибираються подібними. З незалежності  $\tilde{V}$  від  $n$  також впливає, що параметри  $V$  підбираються залежними від  $n$  і, що  $n$  хвильова функція нового гамільтоніану пов'язана з  $n$  хвильовою функцією старого гамільтоніану з параметрами, які залежать від  $n$ . Цю методику можна краще зрозуміти подивившись конкретний приклад такого перетворення координат (приклади з відповідними поясненнями наведені у [7]).

Точкові перетворення пов'язують між собою всі одновимірні формінваріантні потенціали квантової механіки [7]. На рисунку 1.1 зображено заміни змінних, які переводять один потенціал в інший. Власні функції потенціалів на внутрішньому колі описуються за допомогою конфлюентних гіпергеометричних функцій, а на зовнішньому — гіпергеометричних. При відповідних граничних переходах з других можна отримати перші.

Точкові перетворення можна застосувати і до одновимірного нестационарного рівняння Шрьодінгера [49, 50]. Нове рівняння буде містити новий час і нову координату. Цікаво відмітити, що в цьому випадку точкові перетворення мають набагато простіший вигляд, що пов'язано з відсутністю власних значень (залежність нового потенціалу від

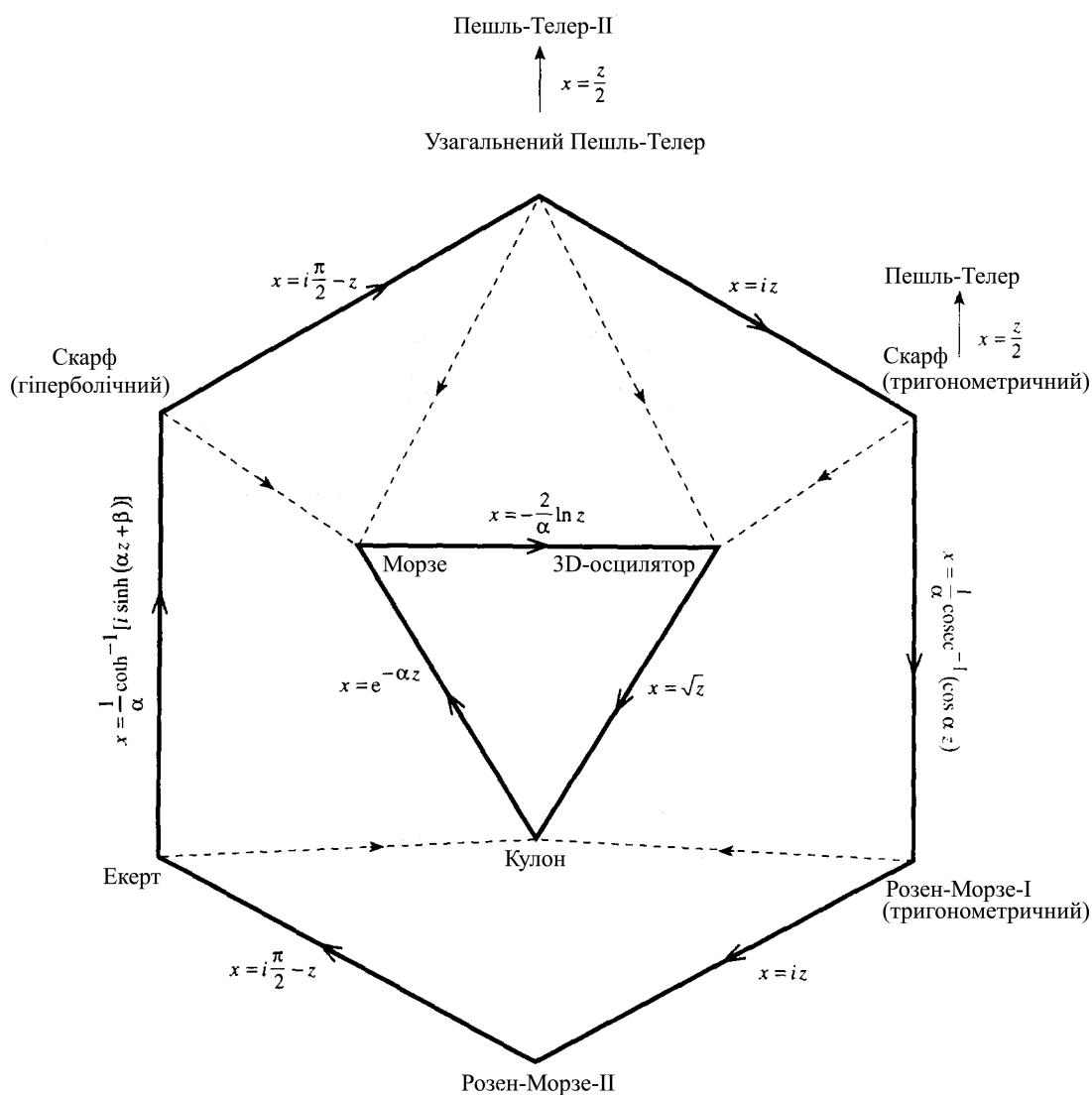


Рис. 1.1: Зв'язок між точно розв'язуваними задачами квантової механіки. Потенціали на зовнішньому та внутрішньому колах пов'язані між собою відповідними точковими перетвореннями. Потенціали на внутрішньому колі характеризуються одним параметром і можуть бути отримані як граничний перехід від потенціалів зовнішнього кола, які описуються двома параметрами. Рисунок взятий з огляду [7].

$n$  навіть не виникає). Один з прикладів точкового перетворення для нестационарного рівняння — формула (3.35) дисертаційної роботи.

Взагалі кажучи, точкове перетворення можна виконати, стартуючи з довільного диференціального рівняння другого порядку і, роблячи заміну змінних, перейти до рівняння типу Шрьодінгера. В ро-

боті [51] робиться перехід від дуже загального рівняння для гіпергеометричних функцій до рівняння Шрьодінгера. Як часткові випадки в явному вигляді отримуються всі точно розв'язувані потенціали (додаatkovo можна отримати потенціали задані неявно).

## 1.5 Інверсний метод

В додатку до книжки Ушверідзе [52], присвяченій квазі-точно розв'язуваним задач, автор формулює ідею інверсного методу в застосуванні до одновимірних стаціонарних рівнянь Шрьодінгера. Суть методу проста: замість безпосереднього розв'язування рівняння Шрьодінгера підбираються такі хвильові функції, які задовольняють те саме рівняння Шрьодінгера.

Рівняння з одним рівнем будується просто: підбирається будь-яка функція  $W(x)$ , така що хвильова функція  $\psi(x)$ , задана наступним чином

$$\psi(x) = \exp \left\{ - \int W(x) dx \right\},$$

задовольняє граничним умовам та є квадратично інтегрованою. Підставляючи цей вираз в рівняння (1.1) визначаємо потенціал  $V(x)$  через  $W(x)$ :

$$V(x) = E + W^2(x) - W'(x),$$

тут штрих позначає похідну по  $x$ . Наступним кроком потрібно визначити чи відповідний потенціал не є сингулярним. Простий аналіз [52] показує, що функція  $W(x)$  або повинна бути всюди регулярною, або повинна мати лише прості полюси. Тобто, вона може мати такі особливості в точках  $x_i$

$$W(x) = -\frac{1}{x - x_i}.$$

Бачимо, що функція  $W(x)$  задає потенціал  $V(x)$  та одну хвильову функцію, яка задовольняє рівняння Шрьодінгера. Функція, яка задає потенціал і декілька хвильових функцій, називається *генеруючою функцією*.

Для побудови рівняння Шрьодінгера з двома відомими рівнями Ушверідзе застосував наступний підхід [52]. Власні функції будь-яких різних рівнів  $\psi_1(x) = \exp(-\int W_1(x)dx)$ ,  $\psi_2(x) = \exp(-\int W_2(x)dx)$ , з власними значеннями  $E_1$  та  $E_2$  відповідно, повинні задовольняти рівнянню Шрьодінгера з тим самим потенціалом. Тобто,

$$V(x) = E_1 + W_1^2(x) - W_1'(x) = E_2 + W_2^2(x) - W_2'(x).$$

Вводячи

$$W_+(x) = W_1(x) + W_2(x), \quad W_-(x) = W_1(x) - W_2(x)$$

з попереднього рівняння можна виразити  $W_+(x)$  через  $W_-(x)$ :

$$W_+(x) = \frac{W_-'(x) + E_2 - E_1}{W_-(x)}.$$

Знаючи  $W_+(x)$  та  $W_-(x)$ , можна знайти  $W_1(x)$  та  $W_2(x)$ , а значить потенціал  $V(x)$  та хвильові функції  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ .

Аналіз відсутності сингулярностей в отриманого таким чином потенціалу та квадратичної інтегровності хвильових функцій є більш складний, і в праці [52] був проведений поверхово. Більш докладно застосування інверсного методу до побудови квазі-точно розв'язуваних гамільтоніанів з двома відомими рівнями вивчалось у працях [53–56].

У [52] схематично було наведено методу побудови квазі-точно розв'язуваних потенціалів з трьома та чотирма відомими рівнями. Але аналіз цих випадків ще більш громіздкий. Наскільки нам відомо, існує лише дві праці, де розглядається застосування цього методу до побудо-



ви квазі-точно розв'язуваних задач з трьома відомими рівнями [57, 58], і жодної з чотирма.

Інверсний метод може бути застосований не тільки до одновимірного стаціонарного рівняння Шрьодінгера. Так, в статті [28] ми поширили інверсний метод для побудови нестаціонарних рівнянь Шрьодінгера з одним відомим розв'язком. Автор [59], застосувавши інверсний метод до багатовимірного випадку, знайшов приклади цікавих потенціалів з одним відомим рівнем. Метод побудови багатовимірного стаціонарного рівняння Шрьодінгера з двома відомими рівнями був запропонований у [27]. Наші результати, описані у [27, 28], будуть докладно розглянуті у третьому розділі дисертаційного дослідження.

Слід відмітити, що незважаючи на концептуальну простоту інверсного методу, застосування його до деяких типів рівняння Шрьодінгера може становити значні труднощі. Так, скажімо, при спробі побудувати клас задач з одним відомим рівнем для деформованих просторів з мінімальною довжиною, ми отримали різнецеві рівняння, які нам не вдалося розв'язати. Наскільки нам відомо, інші дослідники теж не змогли побудувати клас квазі-точно розв'язуваних систем у деформованому просторі.

Наприкінці ми опишемо ще один часто вживаний спосіб побудови квазі-точно розв'язуваних задач, схожий на інверсний метод. Представляючи хвильову функцію у вигляді

$$\psi(x) = p(x)e^{-\phi(x)},$$

де функція  $p(x)$  містить інформацію про нулі, і вибираючи конкретний вигляд  $\phi(x)$  на основі цих функцій отримується квазі-точно розв'язуваний потенціал. Зрозуміло, що вибір функції  $\phi(x)$  повинен забезпечувати нормованість  $\psi(x)$ . Докладний опис цього методу можна знайти

у [60], де також містяться короткі описи методу точкових перетворень та суперсиметрії.

Зазвичай функція  $\phi(x)$  вибирається у вигляді поліному від змінної  $x$  [61], експонент [61], гіперболічних функцій [62, 63]. Відмітимо, що відповідним вибором  $\phi(x)$ , можна добитися побудови потенціалу з  $N$  відомими рівнями. Подібні методи використовувалися при вивченні багатовимірних систем [64], неермітових гамільтоніанів [65, 66].

## Розділ 2

# Квазі-точно розв'язувані неермітові гамільтоніани

### 2.1 Вступ до другого розділу

В канонічній квантовій механіці поведінка системи описується ермітовими гамільтоніанами. Для цього наявні дві вагомі підстави: власні значення ермітових операторів — дійсні, що легко доводиться у фізичних [67,68] чи математичних підручниках [69]. Це допускає стандартну інтерпретацію власних значень оператора, як можливих результатів експериментальних вимірювань величини, якій відповідає даний ермітовий оператор. Друга причина пов'язана з еволюцією системи. Вважається, еволюція системи описується нестационарним рівнянням Шрьодінгера. Тому для ермітових гамільтоніанів оператор еволюції унітарний, а це значить, що норма хвильових функцій з часом зберігається. Це дозволяє пов'язати величину хвильової функції з ймовірністю.

З іншого боку дійсний спектр мають не тільки ермітові оператори, існує широкий клас неермітових операторів, спектр котрих дійсний. Без сумніву, вивчення їх властивостей становить не тільки математичний інтерес, але й фізичний. Наскільки нам відомо, перша робота присвячена теорії поля, в якій розглядалися неермітові гамільтоніани, що описували багаточастинкові системи, була опублікована ще в соро-

кових роках минулого століття і належала Паулі [12]. Пізніше час від часу з'являлися інші роботи в теорії поля з неермітовими гамільтоніанами, в яких усувалися розбіжності квантової теорії (як огляд може слугувати [70]).

Також останнім часом комплексні потенціали використовують в оптиці [16, 17, 71], де неермітовість ефективного гамільтоніану виникає внаслідок його побудови зі складнішого ермітового гамільтоніану. У статистичній фізиці неермітові гамільтоніани описують еволюцію нерівноважного процесу [18, 19]. Для обробки експериментальних даних по розсіянню вже понад півстоліття широко використовується так звана “оптична модель”, в якій потенціал взаємодії є комплексним [72, 73].

В серії статей Бендера та співробітників [13–15] чисельними методами досліджувався спектр модельного гамільтоніану, який може виникнути при обчисленнях в квантовій теорії поля [74]:

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} - (ix)^\varepsilon. \quad (2.1)$$

Чисельні розрахунки показували, що при  $\varepsilon \geq 2$  в такого гамільтоніана існують тільки дійсні власні значення. При  $\varepsilon < 2$  в спектрі цього гамільтоніану з'являються комплексні власні значення. Було висуното гіпотезу, що спектр цього гамільтоніану — дійсний. На основі деяких простих міркувань [15], було висловлено припущення, що так звана  $PT$ -симетричність вище наведеного гамільтоніану приводить до дійсного спектру.

Ця серія статей спричинила справжній вибух зацікавлення неермітовими гамільтоніанами. З'явилося багато статей, в яких було знайдено все нові і нові неермітові системи з дійсними спектрами [46, 66, 75–81]. Переважна більшість тих систем описувалася  $PT$ -симетричними гамільтоніанами.

В 2000 році виникло відчуття можливості довести, що  $PT$ -симетричні гамільтоніани мають дійсний спектр. Водночас, були відомі дві такі системи з комплексним спектром, але ці приклади були специфічними. Так, гамільтоніан (2.1) при певних значеннях  $\varepsilon$  мав комплексний спектр, але для цих значень  $\varepsilon$  потенціал цього гамільтоніану не був аналітичною функцією. У праці [82] наведено приклад  $PT$ -симетричного гамільтоніану з комплексними власними значеннями, але відповідні власні функції не були нормованими на дійсній осі (для нормуючого інтегрування використовувалася крива в комплексній площині).

Проте існування цих прикладів поставило під сумнів чи спектр  $PT$ -симетричних гамільтоніанів обов'язково дійсний. Отже, в 2000 році постала задача: чи всім нормованим власним функціям  $PT$ -симетричних гамільтоніанів відповідають дійсні власні значення? Побудувавши численні контрприкладів з допомогою методів суперсиметрії та формінваріантності, на це питання дали відповідь Леваї та Зноїл [42] у цьому ж році.

Не знаючи цієї праці на момент написання статті [25], ми знайшли загальний вигляд для суперпотенціалу, який веде до  $PT$ -симетричного гамільтоніану. Це дало нам змогу теж побудувати приклади квазіточно розв'язуваних  $PT$ -симетричних систем з комплексними власними значеннями. На цій праці в основному базується другий підрозділ цього розділу дисертації.

Оскільки стало зрозуміло, що  $PT$ -симетрія гамільтоніану не гарантує дійсності спектру, постало питання які механізми можуть забезпечити дійсність спектру неермітових операторів. В 2002 році Мостафазадех ввів поняття псевдо-ермітовості [83–85]. Він показав, що  $PT$ -симетрія є частковим випадком псевдо-ермітовості. І що більше,

він довів, що при певних доволі жорстких умовах псевдо-ермітові системи мають тільки дійсні власні значення. Було також доведено і зворотне твердження: довільний оператор з дійсним спектром — псевдо-ермітовий (якщо виконуються специфічні умови повноти власних функцій [84]).

В рамках псевдо-ермітових операторів нам вдалося знайти новий клас гамільтоніанів, спектри яких — дійсні, і які є квазі-точно розв'язуваними з одним відомим рівнем [26]. Цей матеріал викладено в третьому підрозділі. Отже, матеріали цього розділу базуються на результатах викладених в статтях [25, 26] і є коротко підсумовані у “Висновках до другого розділу”.

## 2.2 Факторизація $PT$ -симетричного потенціалу

В цьому підрозділі ми дамо відповідь на наступне питання. Який загальний вигляд суперпотенціалу веде до  $PT$ -симетричного потенціалу. Це дасть нам можливість отримати загальний вираз для квазі-точно розв'язуваного  $PT$ -симетричного потенціалу, для якого є відомою в явному вигляді одна власна функція. В зв'язку з чим варто відмітити, що деякі  $PT$ -симетричні квазі-точно розв'язувані потенціали вивчались в кількох працях [58, 65, 82, 86].

### 2.2.1 $PT$ -симетрія

Розглянемо гамільтоніан, який відповідає одновимірному стаціонарному рівнянню Шрьодінгера

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad (2.2)$$

де  $V(x) = V_1(x) + iV_2(x)$  — комплексний потенціал. Гамільтоніан називається *PT-симетричним*, якщо

$$PTH = HPT, \quad (2.3)$$

де  $P$  — оператор просторового відображення:  $Pf(x) = f(-x)$ , а  $T$  — оператор комплексного спряження:  $Tf(x) = f^*(x)$ . Позначення  $P$  і  $T$  походять від англійських слів “parity” та “time” (парність та час: в квантовій механіці комплексне спряження еквівалентне до часового відображення).

Легко бачити, що  $PT(-\frac{d^2}{dx^2}) = -\frac{d^2}{dx^2}PT$ , тому гамільтоніан (2.2) є *PT-симетричним*, якщо потенціал  $V$  є *PT-симетричним*. В явній формі умова *PT-симетрії* для потенціалу  $V(x)$  записується

$$V^*(-x) = V(x). \quad (2.4)$$

Тобто, дійсна частина *PT-симетричного* потенціалу — парна, а уявна — непарна.

Нехай для *PT-симетричного* гамільтоніану виконується рівняння на власні значення

$$H\psi(x) = E\psi(x)$$

з дійсним власним значенням  $E$ . Подіявши оператором  $PT$  на обидві частини цієї рівності отримаємо

$$PTH\psi(x) = H\psi^*(-x) = PTE\psi(x) = E^*PT\psi(x) = E\psi^*(-x).$$

Оскільки для одновимірного рівняння Шрьодінгера всі нормовані рівні є невинродженими [67], а  $\psi^*(-x)$  є власною функцією  $H$  з тим же власним значенням  $E$ , то

$$\psi^*(-x) = \psi(x)e^{i\alpha}. \quad (2.5)$$

Якщо власна функція задовольняє умові (2.5), то говорять, що спостерігається *непорушена  $PT$ -симетрія*. Якщо  $PT$ -симетрія є непорушеною, то відповідні власні значення є дійсними.

Якщо ж власне значення  $E$  комплексне з відповідною власною функцією  $\psi(x)$ , то легко бачити, що нормована функція  $\psi^*(-x)$  теж власна функція з власним значенням  $E^*$ . Тобто, власні значення  $PT$ -симетричного гамільтоніану або дійсні, або зустрічаються комплексно-спряженими парами.

Зноїлом було показано [87], що величина

$$\langle \psi(x, t) | P | \psi(x, t) \rangle$$

зберігається з часом, якщо еволюція описується  $PT$ -симетричним гамільтоніаном згідно з нестационарним рівнянням Шрьодінгера. Тому цей інтеграл можна розглядати як псевдонорму вектора  $\psi$  (на протилежному до норми, псевдонорма не є для всіх векторів додатньою). Величина  $\psi^*(x, t)\psi(-x, t)$ , яка стоїть під інтегралом, відіграє роль заряду і задовольняє локальному рівнянню неперервності [88].

### 2.2.2 Загальний вигляд суперпотенціалу $PT$ -симетричного потенціалу

Припустимо, що гамільтоніан (2.2) може бути записаним у факторизованій формі

$$H = \frac{1}{2} \left( -\frac{d}{dx} + W \right) \left( \frac{d}{dx} + W \right) + \varepsilon = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} (W^2 - W') + \varepsilon. \quad (2.6)$$

Нагадаємо, що  $W$  називається суперпотенціалом,  $W' = dW/dx$ , а  $\varepsilon$  — енергією факторизації. Зауважимо, що в нашому випадку  $W$  та  $\varepsilon$  можуть набувати комплексних значень.



Факторизація гамільтоніану (2.2), для правильно вибраного суперпотенціалу [5], дає змогу легко знайти вигляд хвильової функції, якій відповідає енергія  $\varepsilon$ :

$$\psi_\varepsilon = C e^{-\int W dx}, \quad (2.7)$$

де  $C$  — стала нормування. Дійсно,  $(\frac{d}{dx} + W)\psi_\varepsilon = 0$ , а значить і  $H\psi_\varepsilon = \varepsilon\psi_\varepsilon$ .

Використовуючи (2.2) та (2.6) ми отримуємо співвідношення між потенціалом та суперпотенціалом

$$V(x) = \frac{1}{2}(W^2 - W') + \varepsilon. \quad (2.8)$$

Тоді умова  $PT$ -симетричності потенціалу (2.4) запишеться

$$(W^*(-x))^2 + \frac{d}{dx}W^*(-x) + 2\varepsilon^* = W^2(x) - \frac{d}{dx}W(x) + 2\varepsilon. \quad (2.9)$$

Отже, з умови  $PT$ -симетричності потенціалу  $V(x)$  випливає умова (2.9), яка накладається вже на суперпотенціал. Щоб розв'язати останнє рівняння, перепишемо його в наступній формі

$$U'_+(x) = U_+(x)U_-(x) + 2(\varepsilon - \varepsilon^*), \quad (2.10)$$

де

$$U_+(x) = W(x) + W^*(-x), \quad (2.11)$$

$$U_-(x) = W(x) - W^*(-x). \quad (2.12)$$

Як видно з дефініцій (2.11) та (2.12)  $U_+$  є  $PT$ -симетричною, а  $U_-$  анти- $PT$ -симетричною функцією:

$$U_+^*(-x) = U_+(x), \quad (2.13)$$

$$U_-^*(-x) = -U_-(x). \quad (2.14)$$

З рівняння (2.10) ми можемо легко виразити  $U_-$  за допомогою заданого  $U_+$  і навпаки. В цьому дослідженні ми виражали  $U_-$  через  $U_+$ , тобто,

$$U_- = \frac{U'_+ - 2(\varepsilon - \varepsilon^*)}{U_+}. \quad (2.15)$$

Тоді з формул (2.11) та (2.12) ми отримали

$$W = \frac{1}{2} \left\{ U_+ + \frac{U'_+ - 2(\varepsilon - \varepsilon^*)}{U_+} \right\}. \quad (2.16)$$

Даний вираз є основним результатом цього підрозділу дисертації. Цікаво відмітити, що рівняння (2.10) та вираз для суперпотенціалу (2.16) є формально подібними до рівняння та суперпотенціалу отриманих в працях [53, 54], де досліджувались дійсні квазі-точно розв'язувані потенціали з двома відомими власними станами.

Підставляючи (2.16) в (2.8), ми отримаємо  $PT$ -симетричний потенціал, який виглядає так

$$V(x) = \frac{1}{8}(U_+^2 + U_-^2) - \frac{1}{4}U'_- + \frac{1}{2}(\varepsilon^* + \varepsilon). \quad (2.17)$$

Зауважимо, що для цього потенціалу ми знаємо в явній формі як мінімум значення енергії  $\varepsilon$  для одного рівня і відповідну хвильову функцію (2.7). Ця функція відповідає дискретному спектру, якщо вона квадратично інтегрована (і, відповідно, прямує до нуля на нескінченності) або до неперервного спектру, якщо вона тільки обмежена. В цих випадках потенціал (2.17) може бути названим  $PT$ -симетричним квазі-точно розв'язуваним з одним відомим власним станом. Також можливий випадок коли функція (2.7) не буде задовільняти необхідним граничним умовам. Тоді ця функція не належить до власних функцій гамільтоніана.

Розглянемо випадок  $PT$ -симетричної хвильової функції, тобто,  $PT\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon$ . З формули (2.7) випливає, що  $W = -\psi'_\varepsilon/\psi_\varepsilon$ . Похідна  $\psi'_\varepsilon$

є анти- $PT$ -симетричною функцією, а значить і суперпотенціал анти- $PT$ -симетричний. Тобто,

$$W^*(-x) = -W(x), \quad (2.18)$$

і тому  $U_+ = 0$ . Щоб використати вище викладений загальний підхід (з використанням виразу (2.16)) ми кладемо  $U_+ = \alpha f(x)$ , де  $\alpha$  прямує до нуля. Тоді з (2.16) ми отримаємо

$$W(x) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{f'}{f} - B \frac{i}{f} \right\}, \quad (2.19)$$

де

$$B = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2 \frac{\varepsilon - \varepsilon^*}{\alpha}.$$

Бачимо, що для отримання скінченного  $B$  мусимо вимагати дійсності енергії. Отже, ми показали, що вираз (2.16) для суперпотенціалу для спеціального випадку (2.18) відтворює добре відомий результат: власне значення, яке відповідає  $PT$ -симетричній хвильовій функції — дійсне (випадок непорушеної  $PT$ -симетрії, формула (2.5)).

### 2.2.3 Приклади факторизованих $PT$ -симетричних потенціалів

Щоб проілюструвати описаний метод, наведемо два явно заданих приклади  $PT$ -симетричних потенціалів. Всі вирази виражаються через  $U_+(x)$ , яка може бути названа генеруючою функцією. Ми можемо вибирати різні  $U_+(x)$  і в результаті отримувати різні  $PT$ -симетричні потенціали. В цих прикладах ми спеціально вибирали такі генеруючі функції  $U_+(x)$ , які ведуть до коректних власних функцій. Отже, отримані  $PT$ -симетричні потенціали є квазі-точно розв'язуваним потенціалами з одним відомим власним станом.

### Приклад 1

Розглянемо

$$U_+ = \frac{i\alpha}{(x + ia)^n}, \quad (2.20)$$

де  $n$  є непарним числом. Тоді

$$U_- = -\frac{n}{x + ia} - \frac{4 \operatorname{Im} \varepsilon}{\alpha} (x + ia)^n, \quad (2.21)$$

$$W = \frac{i\alpha}{2(x + ia)^n} - \frac{n}{2(x + ia)} - \frac{2 \operatorname{Im} \varepsilon}{\alpha} (x + ia)^n, \quad (2.22)$$

$$V = \operatorname{Re} \varepsilon - \frac{\alpha^2}{8} \frac{1}{(x + ia)^{2n}} + 2 \frac{(\operatorname{Im} \varepsilon)^2}{\alpha^2} (x + ia)^{2n} + \\ + \frac{1}{8} \frac{n^2 - 2n}{(x + ia)^2} + 2 \frac{n \operatorname{Im} \varepsilon}{\alpha} (x + ia)^{n-1}. \quad (2.23)$$

Якщо  $n > 1$  ми можемо записати хвильову функцію таким чином

$$\psi_\varepsilon = C(x + ia)^{n/2} \exp \left( \frac{i\alpha}{2(n-1)} \frac{1}{(x + ia)^{n-1}} + 2 \frac{\operatorname{Im} \varepsilon}{\alpha} \frac{(x + ia)^{n+1}}{n+1} \right). \quad (2.24)$$

Коли ж  $n = 1$ , вона записується так

$$\psi_\varepsilon = C(x + ia)^{(1-i\alpha)/2} \exp \left( \frac{\operatorname{Im} \varepsilon}{\alpha} (x + ia)^2 \right). \quad (2.25)$$

Щоб отримати зв'язний стан слід вимагати  $\frac{\operatorname{Im} \varepsilon}{\alpha} < 0$ .

Зауважимо, що у випадку  $n = 1$ , ми маємо  $PT$ -симетричний гармонічний осцилятор плюс регуляризована частина центробіжного виду. Ця система є точно розв'язувана [42, 89]. Отже, цей приклад узагальнює  $PT$ -симетричний гармонічний осцилятор до квазі-точно розв'язуваного  $PT$ -симетричного потенціалу з одним відомим власним рівнем.

Цікаво підкреслити, що в границі  $\operatorname{Im} \varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  і  $\lim 2 \frac{\operatorname{Im} \varepsilon}{\alpha} = B = \text{const}$ , ми отримуємо  $PT$ -симетричну хвильову функцію з відповідним дійсним власним значенням. Це тільки підтверджує результати отримані в попередньому підрозділі.

## Приклад 2

Цей приклад демонструє періодичний  $PT$ -симетричний потенціал.

Покладемо

$$U_+ = \alpha e^{ikx}. \quad (2.26)$$

Далі отримаємо

$$U_- = ik - 4i \frac{\text{Im}\varepsilon}{\alpha} e^{-ikx}, \quad (2.27)$$

а суперпотенціал, потенціал та хвильова функція записуються відповідно,

$$W = \frac{\alpha}{2} e^{ikx} + \frac{ik}{2} - 2i \frac{\text{Im}\varepsilon}{\alpha} e^{-ikx}, \quad (2.28)$$

$$V = \text{Re}\varepsilon - \frac{k^2}{8} + \frac{\alpha^2}{8} e^{2ikx} - 2 \frac{(\text{Im}\varepsilon)^2}{\alpha^2} e^{-2ikx} + 2k \frac{\text{Im}\varepsilon}{\alpha} e^{-ikx}, \quad (2.29)$$

$$\psi_\varepsilon = \exp\left(-\frac{ikx}{2} + \frac{i\alpha}{2k} e^{ikx} - 2 \frac{\text{Im}\varepsilon}{\alpha k} e^{-ikx}\right). \quad (2.30)$$

У випадку  $\text{Im}\varepsilon = 0$  цей квазі-точно розв'язуваний потенціал стає точно розв'язуваним і відповідає потенціалу вивченому у праці [46].

## 2.3 Неермітові системи з дійсними спектрами

Існує кілька методів побудови неермітових гамільтоніанів з дійсним спектром. Перший спосіб полягає в побудові точно розв'язуваних систем з допомогою форм-інваріантності. Велика добірка, побудованих таким чином гамільтоніанів, міститься в праці [42].

Другий спосіб, запроваджений [89] і застосований Зноїлом у багатьох роботах [76, 79, 87], ґрунтується на зсуві в ермітовому гамільтоніані та відповідних хвильових функціях змінної  $x$  на комплексну

сталу. Очевидно, що в новій системі, нові хвильові функції теж будуть власними функціями з тими ж, дійсними, власними значеннями. Докладніше обґрунтування можна подивитися в [90].

Третій спосіб ґрунтується на суперсиметричній квантовій механіці. Для ермітового гамільтоніану будується неермітовий суперпартнер, чий спектр, очевидно — дійсний [46, 78, 83].

Для деяких систем можна безпосередньо, не використовуючи загальних методів, довести, що їх спектр дійсний. Так у [91], використовуючи “точний WKB” метод, доводилась дійсність спектру гамільтоніану з потенціалом  $ix^3 + ax^2$ . Якщо потенціал у неермітового гамільтоніану є поліномом, то для спектральних властивостей такого гамільтоніану можна довести ряд теорем [92, 93]

В 2002 році Мостафазадех написав серію статей [83–85], в яких ввів поняття псевдоермітовості

$$H^+ = \eta H \eta^{-1}, \quad (2.31)$$

як узагальнення  $PT$ -симетрії. При виконанні умови (2.31) оператор  $H$  називається  $\eta$ -псевдоермітовим (історія використання поняття псевдоермітовість у математичній та фізичній літературі коротко описана у [94]). Оператор  $P$  для  $PT$ -симетричних систем відіграє роль  $\eta$ -оператора. Для  $\eta$ -псевдоермітових систем можна ввести новий скалярний добуток

$$(\phi, \psi)_\eta = (\phi, \eta\psi), \quad (2.32)$$

який не змінюється з часом [83]. Псевдоермітовий гамільтоніан, як і  $PT$ -симетричний, має або дійсні власні значення, або комплексні, які зустрічаються комплексноспряженими парами [83].

Якщо оператор  $\eta$  — ермітовий і для нього існує обернений оператор, визначений на всьому просторі функцій, то спектр гамільтоніану

$H$  — дійсний [84]. Псевдоермітові системи з дійсним спектром допускають просту інтерпретацію [95, 96]:  $\eta$ -псевдоермітовий гамільтоніан на просторі  $L_2$ , поводитья як ермітовий в просторі з модифікованим скалярним добутком (2.32).

### 2.3.1 Загальний метод побудови псевдоермітових гамільтоніанів з дійсним спектром

Припустимо, що неермітовий гамільтоніан  $H$  є  $\eta$ -псевдоермітовим:

$$\eta H = H^+ \eta. \quad (2.33)$$

Тут, ми вибрали іншу форму псевдоермітовості, щоб уникнути вимоги на існування оберненого оператора до  $\eta$  (форма псевдоермітовості (2.33) згадана в праці [83]).

Вимагатимемо також ермітовості  $\eta$ . Тоді  $\eta H$  є також ермітовим оператором:  $(\eta H)^+ = H^+ \eta^+ = H^+ \eta = \eta H$ . Розглянемо власну функцію  $\psi$  і відповідне власне значення  $E$  гамільтоніана  $H$ . Тоді, з ермітовостей  $\eta H$  та  $\eta$  випливає

$$\int \psi^* \eta H \psi dx = E \int \psi^* \eta \psi dx, \quad (2.34)$$

дійсність цих двох інтегралів, і за винятком випадку

$$\int \psi^* \eta \psi dx = 0, \quad (2.35)$$

власне значення  $E$  також мусить бути дійсним. І навпаки, якщо цей інтеграл рівний нулю, тоді, зрозуміло, інтеграл у лівій частині формули (2.34) мусить також бути нулем. В цьому випадку з тотожності  $0 = E \cdot 0$  ми нічого не можемо сказати про дійсність  $E$ , воно може бути як дійсним, так і комплексним числом.

Для загального виразу  $\eta$  доволі складно визначити, чи існують такі власні функції  $\psi$ , що задовільняють умову (2.35). Щоб спростити аналіз випадку  $\int \psi^* \eta \psi dx = 0$ , ми конкретизуємо форму оператора  $\eta$  у вигляді

$$\eta = O^+ O. \quad (2.36)$$

В цьому випадку  $\int \psi^* O^+ O \psi dx = \int |O\psi|^2 dx$  є додатнім для всіх  $\psi$  за винятком випадку, коли  $\psi$  належить до ядра оператора  $O$ . Іншими словами, інтеграл  $\int \phi^* \eta \phi dx$  рівний нулю тільки для таких  $\phi$ , для яких виконується

$$O\phi = 0. \quad (2.37)$$

Таким чином, ми звели задачу на знаходження розв'язків інтегрального рівняння (2.35) до розв'язування набагато простішого рівняння (2.37).

Зрозуміло, що з того, що функція  $\phi$  задовольняє рівнянню (2.37) не впливає, що вона є власною функцією гамільтоніана  $H$ . Отже, задача побудови неермітового гамільтоніана з дійсним спектром зводиться до трьох таких кроків:

1. Побудувати пару операторів  $H$  та  $\eta = O^+ O$ , які задовольняють умову (2.33).
2. Знайти множину розв'язків рівняння (2.37).
3. Перевірити чи ці розв'язки є власними функціями гамільтоніана  $H$ .

Якщо деякі з цих розв'язків є власними функціями гамільтоніана  $H$ , то визначити, чи відповідні власні значення дійсні. Знову можливі три варіанти.



1. Жоден з розв'язків рівняння (2.37) не є власною функцією — спектр  $H$  цілковито дійсний, зате можливо порожній.
2. Деякі розв'язки рівняння (2.37) є власними функціями гамільтоніана  $H$ , і для всіх цих власних функцій відповідні власні значення дійсні: спектр  $H$  дійсний, крім того, ми явно знаємо деякі власні функції та власні значення.
3. Деякі розв'язки рівняння (2.37) є власними функціями гамільтоніана  $H$ , і серед них є такі, що відповідні власні значення уявні: спектр гамільтоніану  $H$  не є цілковито дійсним.

В наступному підрозділі ми побудуємо таку пару операторів, яка складається з Шрьодінґерового гамільтоніана

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (2.38)$$

та оператора  $O^+O$ , що задовільняє умову псевдоермітовості (2.33).

### 2.3.2 Псевдоермітовість з диференціальним оператором другого порядку

Виберемо  $O$  у такій формі

$$O = \frac{d}{dx} + f(x) + ig(x), \quad (2.39)$$

де  $f$  та  $g$  є регулярними, дійсними функціями, визначеними на всій дійсній осі. Тоді,

$$O^+ = -\frac{d}{dx} + f(x) - ig(x). \quad (2.40)$$

Підставляючи явні вирази для гамільтоніана (2.38), оператора  $\eta$  (2.36) і оператора  $O$  (2.39) в умову псевдоермітовості (2.33), та прирівнюючи члени з оператором  $\frac{d^2}{dx^2}$ , ми отримаємо

$$\text{Im}V = -2g'. \quad (2.41)$$

Члени без операторів диференціювання приводять до

$$4g'(f' - f^2) + 2g(f' - f^2)' = g''.$$

Домножуючи цю рівність на  $g$  та інтегруючи її, отримаємо

$$f^2 - f' = \frac{2gg'' - g'^2 + \alpha}{4g^2}, \quad (2.42)$$

де  $\alpha$  — дійсна стала інтегрування.

Члени з оператором  $\frac{d}{dx}$  дають

$$2 \operatorname{Re} V' = 2(f^2 - f' - g^2)'.$$

Інтегруючи цей вираз та підставляючи (2.42), можна переписати дійсну частину потенціалу так

$$\operatorname{Re} V = f^2 - f' - g^2 + \beta = \frac{2gg'' - g'^2 + \alpha}{4g^2} - g^2 + \beta, \quad (2.43)$$

де  $\beta$  теж дійсна стала інтегрування.

В рівняннях (2.41-2.43) функція  $g$  відіграє роль генеруючої функції: задаючи  $g$ , отримуємо послідовні вирази для  $\operatorname{Im} V$ ,  $f$  та  $\operatorname{Re} V$ . Рівняння (2.42) відносно шуканої функції  $f$  є рівнянням Рікатті, яке в загальному випадку не розв'язується. У вираз для  $\operatorname{Re} V$  (2.43) входить  $f^2 - f'$ , що дає нам можливість явно виразити дійсну та уявну частину потенціалу через генеруючу функцію  $g$ . Щоб отримати  $PT$ -симетричний гамільтоніан, генеруюча функція  $g$ , як видно з формул (2.41) та (2.43), повинна бути парною функцією, тобто  $g(x) = g(-x)$ .

Слід відмітити, що вибір (2.39) веде до  $\eta = -\frac{d^2}{dx^2} - 2ig\frac{d}{dx} + f^2 - f' + g^2 - ig'$  і оператор  $\eta$  відіграє роль оператора Дарбу другого порядку. Він переплутує оператори  $H$  та  $H^+$ , спектри котрих стають пов'язаними між собою [97]. Формули (2.41-2.43) аналогічні до відповідних результатів праці [98].

Наступний крок полягає в тому, щоб перевірити чи функція, яка задовільняє умову (2.37), є власною функцією  $H$ . Диференціальне рівняння (2.37) елементарно розв'язується. За допомогою  $f$  та  $g$  ми можемо виразити цей розв'язок так:

$$\phi = e^{-\int(f+ig)dx}. \quad (2.44)$$

Розглядаючи  $\phi$  як власну функцію гамільтоніану (2.38) і використовуючи вирази для потенціалу (2.41), (2.43), після громіздких, але простих перетворень, отримаємо

$$-i(g' + 2fg) + \beta = E,$$

де  $E = E_r + iE_i$  є, в загальному випадку, комплексне власне значення гамільтоніану  $H$  (тобто,  $H\phi = E\phi$ ). Так як функції  $f$  та  $g$ , уявна та дійсна частини енергії є дійсними, то  $\beta = E_r$ , а

$$f = -\frac{E_i + g'}{2g}. \quad (2.45)$$

Отже, виходячи з припущення, що  $\phi$  є власною функцією гамільтоніану, рівності (2.45) та (2.42) дають два різних співвідношення, що пов'язують функції  $f$  та  $g$ . Щоб порівняти їх, ми підставимо  $f$  у формі співвідношення (2.45) у рівність (2.42), і після деяких спрощень, отримаємо

$$E_i^2 = \alpha.$$

Тому можн стверджувати, що  $\phi$  може бути власною функцією гамільтоніану (2.38) тільки якщо  $\alpha \geq 0$ . Відмітимо, що вираз для  $f$  (2.45) для випадку  $E_i^2 = \alpha$  задовільняє рівнянню (2.42).

Підсумовуючи скажемо, що вибираючи довільні  $g$  та  $\alpha < 0$ , ми можемо бути впевнені, що спектр відповідного гамільтоніану не містить комплексних власних значень, але ми не знаємо чи він не є порожнім.

Вибираючи для  $\alpha = 0$  відповідну  $g$ , можна сконструювати гамільтоніан з дійсним спектром, і для якого, крім того, відома у явному вигляді одна власна функція. Вибираючи  $g$  та  $\alpha > 0$ , ми повинні перевірити, що відповідне  $\phi$  не належить до простору  $L_2$ . В цьому випадку  $\phi$  є формальною власною функцією і спектр гамільтоніану цілковито дійсний, хоча можливо і порожній. Якщо ж  $\phi$  належить до простору  $L_2$ , то спектр гамільтоніану непорожній, але містить одне комплексне число.

В наступному підрозділі ми проілюструємо цей метод за допомогою прикладів.

### 2.3.3 Приклади неермітових гамільтоніанів з дійсними спектрами

Для конструювання гамільтоніану ми використовуємо формули (2.41) та (2.43), щоб виразити уявну та дійсну частину потенціалу, а формулу (2.45), щоб виразити  $f$ . Існує два шляхи отримання регулярного виразу для  $f$ . Перший: просто вибрати  $g$ , як певну функцію без нулів, і тоді можна надати довільних значень  $E_i$  та  $\alpha$ . Це проілюстровано прикладом 1. У другому способі вибираємо  $g$  як функцію з простим нулем. В цьому випадку ми повинні вибрати певне значення  $E_i$ , щоб уникнути сингулярності. Цей шлях використано у прикладах 2 та 3.

Регулярність  $\text{Im } V$ , як видно з формули (2.41), забезпечується регулярністю генеруючої функції  $g$ . Регулярність  $\text{Re } V$ , як видно з формул (2.43) та (2.42), забезпечується регулярністю функцій  $f$  та  $g$ .

Приклад 1

Вибираючи генеруючу функцію  $g$  парною у вигляді

$$g = e^{-x^2},$$

ми отримуємо  $PT$ -симетричний гамільтоніан

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{\alpha}{4}e^{2x^2} - e^{-2x^2} - 4ixe^{-x^2} + \beta - 1, \quad (2.46)$$

який має дійсний спектр при  $\alpha < 0$ , хоча можливо і порожній.

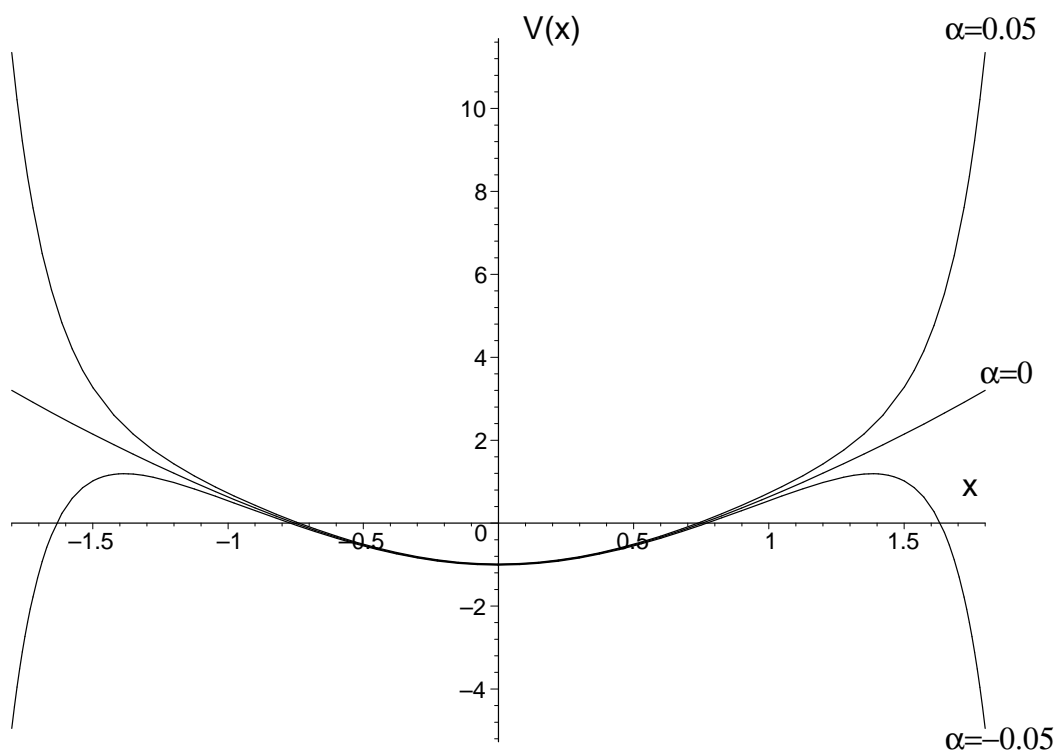


Рис. 2.1: Дійсна частина потенціалу гамільтоніану (2.46) для різних значень параметра  $\alpha$ ;  $\beta = 1$ .

Для  $\alpha = 0$  нам відома одна власна функція

$$\psi_{E=\beta} = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} - i \int e^{-x^2} dx\right). \quad (2.47)$$

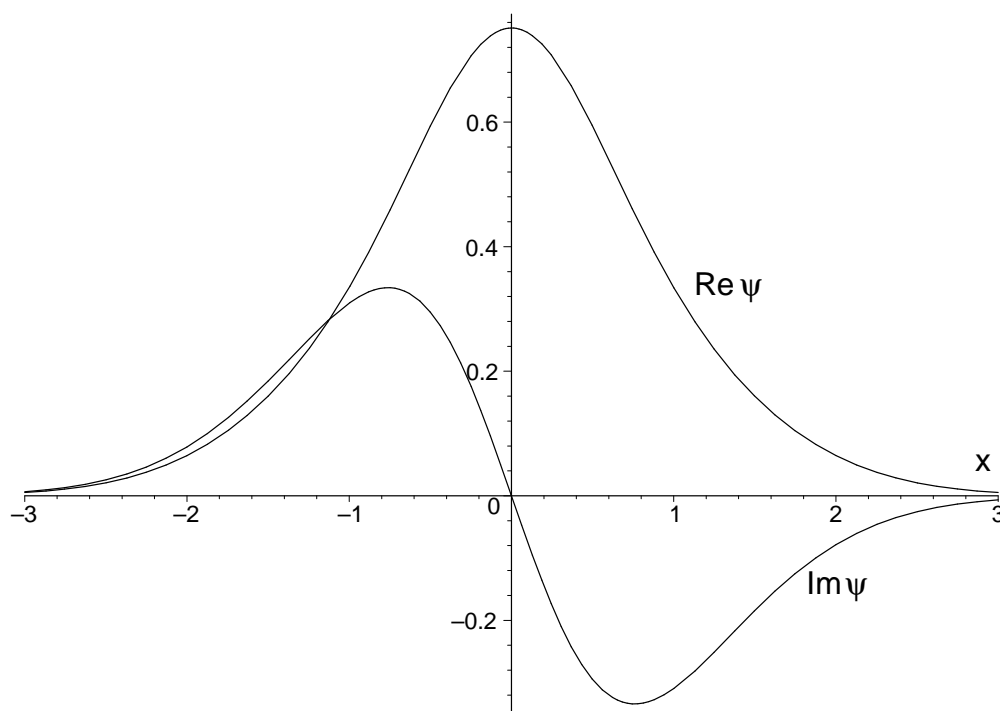


Рис. 2.2: Дійсна та уявна частина хвильової функції (2.47).

Для  $\alpha = E_i^2 > 0$  формальна власна функція

$$\psi_{E=\beta+iE_i} = \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{E_i}{2} \int e^{x^2} dx - i \int e^{-x^2} dx\right)$$

не належить до простору  $L_2$  (якщо  $E_i > 0$ , хвильова функція розбігається при  $x \rightarrow +\infty$  за рахунок другого доданку в експоненті; якщо  $E_i < 0$ , то хвильова функція розбігається при  $x \rightarrow -\infty$ , за рахунок того ж другого доданку).

Отже, ми можемо твердити, що спектр гамільтоніана (2.46) є цілковито дійсним для довільного значення параметра  $\alpha$ .

### Приклад 2

Виберемо генеруючу функцію  $g$  у вигляді

$$g = \text{sh}(x).$$

Тоді, щоб отримати регулярний вираз для  $f = -\frac{E_i + \text{ch}(x)}{2\text{sh}(x)}$ , мусимо покласти  $E_i = -1$ , і тоді  $f = -\frac{1}{2}\text{th}\frac{1}{2}x$ . Також  $\phi = \text{ch}(\frac{1}{2}x)e^{-i\text{ch}(x)}$  не належить до простору  $L_2$ . Отже, спектр оператора

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} - 2i\text{ch}(x) - \text{sh}^2(x)$$

дійсний.

### Приклад 3

Вибираючи генеруючу функцію  $g$  у вигляді

$$g = \text{th}(x),$$

тоді, уникаючи сингулярності, кладемо  $E_i = -1$  і отримуємо

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2i - \frac{1}{4}}{\text{ch}^2(x)} + \beta - \frac{3}{4} \quad (2.48)$$

з власною функцією  $\psi_{E=\beta-i} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}(x)}}e^{-i\ln(\text{ch}(x))}$ . Спектр гамільтоніана (2.48) може бути знайдений з використанням методів суперсиметрії і легко показати, що це власне значення єдине.

## 2.4 Висновки до другого розділу

Знайдено загальний вигляд для суперпотенціалу (2.16)  $PT$ -симетричного гамільтоніану Шрьодінгера. Вибираючи різні  $U_+(x)$  ми отримуємо різні суперпотенціали (2.16) і відповідні  $PT$ -симетричні потенціали, які задаються співвідношеннями (2.8) чи (2.17). Ці  $PT$ -симетричні потенціали є квазі-точно розв'язуваними потенціалами з однією відомою власною функцією (2.7) та відповідним енергетичним рівнем  $\varepsilon$ .

Як ілюстрацію запропонованого методу здійснено факторизацію таких гамільтоніанів:

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \text{Re } \varepsilon - \frac{\alpha^2}{8} \frac{1}{(x + ia)^{2n}} + 2\frac{(\text{Im } \varepsilon)^2}{\alpha^2}(x + ia)^{2n} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8} \frac{n^2 - 2n}{(x + ia)^2} + 2 \frac{n \operatorname{Im} \varepsilon}{\alpha} (x + ia)^{n-1}, \\
H = & - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \operatorname{Re} \varepsilon - \frac{k^2}{8} + \frac{\alpha^2}{8} e^{2ikx} - 2 \frac{(\operatorname{Im} \varepsilon)^2}{\alpha^2} e^{-2ikx} + 2k \frac{\operatorname{Im} \varepsilon}{\alpha} e^{-ikx}.
\end{aligned}$$

Для кожного з цих гамільтоніанів виписано по одній власній функції з власним значенням  $\varepsilon$ . Ці гамільтоніани цікаві в тому сенсі, що при певних значеннях параметрів вони стають точно розв'язуваним потенціалами і досліджувалися раніше.

Грунтуючись на властивостях псевдоермітових операторів, запропоновано новий підхід до побудови неермітових гамільтоніанів з дійсним спектром. Отримані гамільтоніани характеризуються дійсним параметром  $\alpha$ . Якщо  $\alpha \leq 0$  побудовані гамільтоніани мають повністю дійсний спектр. При параметрі  $\alpha \geq 0$  отримані гамільтоніани стають квазі-точно розв'язуваними з одним відомим власним рівнем.

Можливість побудови таких гамільтоніанів показана на таких прикладах

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{\alpha}{4} e^{2x^2} - e^{-2x^2} - 4ixe^{-x^2} + \beta - 1,$$

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} - 2i \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}^2(x),$$

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2i - \frac{1}{4}}{\operatorname{ch}^2(x)} + \beta - \frac{3}{4}.$$

Для двох останніх гамільтоніанів, щоб уникнути сингулярного характеру потенціалів гамільтоніанів значення параметру  $\alpha$  було зафіксовано. Виявлено, що для першого та другого гамільтоніану відповідні спектри дійсні. Спектр третього знайдено повністю і виявлено, що він складається з одного комплексного числа.



## Розділ 3

# Квазі-точно розв'язувані потенціали у багатовимірних просторах

### 3.1 Вступ до третього розділу

У цьому розділі ми застосуємо інверсний метод [52] до побудови багатовимірних квазі-точно розв'язуваних потенціалів. В наступному підрозділі будемо досліджувати багатовимірне стаціонарне рівняння Шрьодінгера. Також дослідимо одновимірне нестаціонарне рівняння Шрьодінгера. Часова змінна  $t$  відіграє роль ще однієї координати, посуті роблячи рівняння Шрьодінгера двовимірним.

Основні результати цього розділу описані у роботах [27, 28].

### 3.2 Багатовимірне стаціонарне рівняння Шрьодінгера з двома відомими розв'язками

В багатовимірному випадку багато точно-розв'язуваних систем дозволяють розділення змінних і тому можуть бути зведеними до одновимірних підзадач [99]. Вивчення багатовимірних систем чи систем з багатьма тілами, для яких неможливо розділити змінні, важливе з фізичної та математичної точок зору.

Однією з найбільш відомих  $N$ -тільних точно-розв'язуваних задач

квантової механіки є модель Калогеро [100, 101]. Ця модель описує проблему з  $N$  тіл з квадратичним плюс інверсно-квадратичним потенціалом взаємодії. Скоро після цих праць Сузерленд розширив модель Калогеро, де частинки розміщені на колі [102–104]. Подальший прогрес був пов'язаний з Ольшаненцького-Переломова інтегрованими системами [105] (як огляд може бути використаний [106]). В праці [107] було наведено явні приклади квазі-точно розв'язуваних  $N$ -тільних задач на лінії. Інші квазі-точно розв'язувані  $N$ -тільні задачі вивчалися в [108, 109].

Недавно було досягнуто значного поступу у вивченні точно розв'язуваності таких систем. В [64] побудовано новий клас квазі-точно розв'язуваних багато-тільних гамільтоніанів з довільною вимірністю простору. Багатовимірне перетворення Дарбу запропоноване в [110] і з його допомогою нові моделі квазі-точно розв'язуваних багатовимірних матричних операторів Шрьодінгера були побудовані. Автори [111] розробили систематичний підхід до побудови точно та квазі-точно розв'язуваних багатотільних систем з використанням лише алгебраїчних методів. Метод багатовимірної суперсиметричної квантової механіки було застосований до вивчення  $N$ -тільних систем і явні приклади точно розв'язуваних 3-частинкових як і квазі-точно розв'язуваних  $N$ -частинкових задач на лінії наведено в роботах [112–114]. Недавно, два нових методи базованих на суперсиметрії вищих порядків було запропоновано для вивчення двовимірних квантових систем, в чиїх гамільтоніанах змінні не розділяються [41].

В цьому підрозділі ми запропонуємо простий метод побудови квазі-точно розв'язуваних потенціалів з двома відомими рівнями в просторі довільної вимірності. Для одновимірного випадку проблема побудови квазі-точно розв'язуваних з двома відомими рівнями повністю розв'я-

зана в межах суперсиметричної квантової механіки [53–55], або з використанням інверсного методу, в якому вибираються дві такі хвильові функції, що ведуть до того самого потенціалу [56, 115]. В цьому розділі дисертаційної роботи саме цей останній спосіб буде узагальнений до багатовимірного випадку.

### 3.2.1 Побудова багатовимірного потенціалу з двома відомими рівнями

Розглянемо рівняння на власні значення

$$H\psi = E\psi \quad (3.1)$$

в  $n$ -вимірному просторі з таким гамільтоніаном

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + V(x_1, \dots, x_n), \quad (3.2)$$

де  $\Delta = (\nabla, \nabla) = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ;  $\nabla$  — набла оператор, який діє в  $n$ -вимірному просторі. Нижні індекси позначають відповідну компоненту координати.

Хвильова функція, яка відповідає найнижчому рівню з власним значенням енергії  $E_0$ , є дійсною, не має нулів і може бути вибрана додатною [35]. Її зручно переписати в такій формі

$$\psi_0 = e^{-F}, \quad (3.3)$$

де  $F = -\ln \psi_0$  — несингулярна функція  $n$  аргументів:  $x_1, \dots, x_n$ .

Підставляючи вираз (3.3) в рівняння (3.1), виразимо потенціал через хвильову функцію  $\psi_0$ :

$$V = E_0 + \frac{1}{2} \frac{\Delta \psi_0}{\psi_0} = E_0 + \frac{1}{2} [(\nabla F)^2 - \Delta F]. \quad (3.4)$$

Хвильову функцію збудженого стану з енергією  $E_1$  запишемо так

$$\psi_1 = \phi e^{-F}, \quad (3.5)$$

де  $\phi = \psi_1/\psi_0$ . Ця хвильова функція мусить приводити до такого ж виразу для потенціалу  $V$  як і  $\psi_0$ . Ця вимога дає:

$$E_0 + \frac{1}{2} \frac{\Delta\psi_0}{\psi_0} = E_1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta\psi_1}{\psi_1}. \quad (3.6)$$

З використанням функцій  $\phi$  та  $F$  останнє рівняння може бути переписане так

$$2(\nabla F, \nabla \phi) = \Delta\phi + 2\varepsilon\phi, \quad (3.7)$$

де

$$\varepsilon = E_1 - E_0.$$

В одновимірному випадку дане рівняння може бути розв'язане для фіксованого  $\phi$ : відносно функції  $F$  це є лінійне диференціальне рівняння першого порядку і функцію  $F$  легко можна виразити через функцію  $\phi$  [56, 115]. Значить, вибираючи різні генеруючі функції  $\phi$ , ми отримуємо різні квазі-точно розв'язувані потенціали з двома відомими власними станами.

Для багатовимірного випадку розв'язання рівняння (3.7) є нетривіальною проблемою. В цьому підрозділі ми знайдемо функцію  $F$ , що задовольняє рівняння (3.7) для кількох спеціальних типів функції  $\phi$ . Відразу зауважимо, що рівняння (3.7) є лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку по відношенню до шуканої функції  $F$ . Будь-який розв'язок цього рівняння може бути представлений у вигляді

$$F = f + \tilde{f}, \quad (3.8)$$

де  $f$  — довільний частковий розв'язок рівняння (3.7), а  $\tilde{f}$  — загальний розв'язок однорідного рівняння

$$(\nabla \tilde{f}, \nabla \phi) = 0. \quad (3.9)$$

В цьому можна переконатися прямою підстановкою функції  $F$  у вигляді розкладу (3.8) в рівняння (3.7). Щоб забезпечити квадратичну

інтегровність хвильових функцій (3.3) та (3.5) ми змушені вибрати такі  $f$  та  $\tilde{f}$ , що  $F \rightarrow +\infty$  при  $|\vec{x}| \rightarrow +\infty$ .

Зауважимо, що в одновимірному випадку однорідне рівняння (3.9) має тільки тривіальний розв'язок  $\tilde{f} = \text{const}$ , який не впливає на вигляд потенціалу (3.4). Новою особливістю багатовимірного випадку є те, що однорідне рівняння (3.9) має багато нетривіальних розв'язків  $\tilde{f}$ . Це дає більше можливостей для конструювання квазі-точно розв'язуваних потенціалів в багатовимірному випадку для заданого  $\phi$  в порівнянні з одновимірним випадком.

*Випадок 1.* Функція  $\phi$  має вигляд

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_i). \quad (3.10)$$

В цьому випадку рівняння (3.7) може бути переписане так

$$2 \sum_{i=1}^n \phi_i' \frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n (\phi_i'' + 2\varepsilon \phi_i), \quad (3.11)$$

де  $\phi_i' = \frac{d\phi_i}{dx_i}$  і  $\phi_i'' = \frac{d^2\phi_i}{dx_i^2}$ .

Частковий розв'язок рівняння (3.11) можна записати у вигляді функції з розділеними змінними

$$f = \sum_{i=1}^n f_i(x_i), \quad (3.12)$$

де

$$\frac{df_i}{dx_i} = \frac{\phi_i'' + 2\varepsilon \phi_i + \lambda_i}{2\phi_i'}, \quad (3.13)$$

сталі  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  повинні задовольняти такій умові

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0. \quad (3.14)$$

Останнє вимога впливає з перерозподілу нуля між змінними з різними індексами у рівнянні (3.11). Свобода у виборі  $\lambda_i$  дає змогу уникнути сингулярностей в рівнянні (3.13): якщо знаменник перетворюється в нуль, то можна вибрати таке  $\lambda_i$ , що і чисельник перетвориться в нуль.

Розв'язок однорідного рівняння

$$\sum_{i=1}^n \phi_i' \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = 0 \quad (3.15)$$

записується так

$$\tilde{f} = \tilde{f}(\chi_1(x_1) - \chi_2(x_2), \chi_1(x_1) - \chi_3(x_3), \dots, \chi_1(x_1) - \chi_n(x_n)), \quad (3.16)$$

де  $\tilde{f}$  довільна функція від  $n - 1$  аргументів і

$$\chi_i(x) = \int^x \frac{dy}{\phi_i'(y)}. \quad (3.17)$$

Остаточно, розв'язок рівняння (3.11) запишемо так

$$F = \sum_{i=1}^n \int^{x_i} \frac{\phi_i''(x) + 2\varepsilon\phi_i(x) + \lambda_i}{2\phi_i'(x)} dx + \tilde{f}(\chi_1(x_1) - \chi_2(x_2), \dots). \quad (3.18)$$

Відзначимо, що у випадку  $\tilde{f} = 0$  змінні в потенціалі (3.4), а значить і в цілому гамільтоніані, є розділеними і задача на власні значення зводиться до  $n$  одновимірних підзадач на власні значення. Саме функція  $\tilde{f}$  забезпечує нерозділеність змінних у потенціалі  $V$ .

*Випадок 2.* Виберемо функцію  $\phi$  в такій формі

$$\phi = \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i). \quad (3.19)$$

Тепер рівняння (3.7) перепишеться так

$$2 \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i' \partial F}{\phi_i \partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i''}{\phi_i} + 2\varepsilon. \quad (3.20)$$

Розв'язування є подібним до попереднього випадку і ми можемо записати

$$F = \sum_{i=1}^n \int^{x_i} \frac{\phi_i''(x) + (\frac{2}{n}\varepsilon + \lambda_i)\phi_i(x)}{2\phi_i'(x)} dx + \tilde{f}(\chi_1(x_1) - \chi_2(x_2), \dots), \quad (3.21)$$

де сталі  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  задовольняють таку ж саму умову (3.14), а функція  $\tilde{f}$  знову є довільною функцією від  $n - 1$  аргументів і

$$\chi_i(x) = \int^x \frac{\phi_i(y)}{\phi_i'(y)} dy. \quad (3.22)$$

Наприкінці підрозділу варто зупинитися на питанні впорядкування таким чином побудованих хвильових функцій. В одновимірному випадку хвильові функції можуть бути впорядковані з використанням осциляційної теореми, яка твердить, що  $n$ -ва власна функція має  $n$  нулів. У багатовимірному випадку відомо тільки, що хвильова функція основного стану не має нулів, а відповідне власне значення — невиродженим [35]; але нам не відомі теореми, яка пов'язує порядок та нулі збуджених станів для багатовимірного випадку. Тому, знаючи енергетичну різницю між рівнями  $\varepsilon$ , не відомо, які саме стани описуються побудованими хвильовими функціями.

### 3.2.2 Приклади багатовимірних гамільтоніанів з двома відомими рівнями

Квазі-точно розв'язуваний потенціал задається виразом (3.4), в ньому функція  $F$  задається виразом (3.18) в 1 випадку і виразом (3.21) в 2 випадку. Для такого квазі-точно розв'язуваного потенціалу ми знаємо значення двох енергетичних рівнів  $E_0$  та  $E_1$ ; також знаємо відповідні хвильові функції (3.3), (3.5). Підбираючи різні функції  $\phi_i$  для випадків 1 та 2 ми отримуємо різні потенціали. Без втрати загальності, ми покладаємо у всіх виразах  $E_0 = 0$  і, відповідно,  $E_1 = \varepsilon$ .

Функції  $\phi_i$  та параметри  $\lambda_i$  повинні бути підбрані таким чином, що порашована функція  $f$  була несингулярною, а хвильові функції  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  були квадратично інтегрованими. Відмітимо, що в багатомірному випадку ми можемо підбирати різні функції  $\tilde{f}$  для забезпечення чи підсилення інтегровності.

*Приклад 1.* Виберемо

$$\phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i x_i^2,$$

що відповідає випадку 1. Для цієї генеруючої функції будемо мати

$$\frac{df_i}{dx_i} = \frac{a_i + \lambda_i + a_i \varepsilon x_i^2}{2a_i x_i}.$$

Знаменник в останній формулі перетворюється в нуль при  $x_i = 0$ , тому щоб забезпечити несингулярність функцій  $f_i$  ми повинні вибрати  $\lambda_i = -a_i$ . Отже, коефіцієнти  $a_i$  повинні підкорятися тій самій умові, що й сталі  $\lambda_i$ :  $\sum a_i = 0$ . Тоді

$$f_i(x_i) = \frac{\varepsilon}{4} x_i^2, \quad \chi_i(x_i) = \frac{1}{a_i} \ln x_i.$$

І остаточно, отримаємо

$$F(x_1, x_2, \dots) = \frac{\varepsilon}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \tilde{f} \left( \frac{x_1^{1/a_1}}{x_2^{1/a_2}}, \frac{x_1^{1/a_1}}{x_3^{1/a_3}}, \dots \right).$$

Тут ми переписали  $\tilde{f}(\frac{1}{a_1} \ln x_1 - \frac{1}{a_2} \ln x_2, \frac{1}{a_1} \ln x_1 - \frac{1}{a_3} \ln x_3, \dots)$  як деяку нову функцію

$$\tilde{f} \left( \frac{x_1^{1/a_1}}{x_2^{1/a_2}}, \frac{x_1^{1/a_1}}{x_3^{1/a_3}}, \dots \right).$$

Застосуємо наші результати до двовимірного випадку. Для цього випадку  $a_1 + a_2 = 0$  і ми можемо вибрати  $a_1 = -a_2 = 1$ . Тоді

$$F(x, y) = \frac{\varepsilon}{4} (x^2 + y^2) + \tilde{f}(xy).$$

Квазі-точно розв'язуваний потенціал і хвильові функції нульового та  $\varepsilon$  енергетичного рівнів запишуться

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \left[ (\tilde{f}')^2 - \tilde{f}'' + \frac{\varepsilon^2}{4} \right] (x^2 + y^2) + \varepsilon xy \tilde{f}' - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\psi_0(x, y) = c_0 e^{-\frac{\varepsilon}{4}(x^2+y^2) - \tilde{f}(xy)},$$

$$\psi_1(x, y) = c_1 (x^2 - y^2) e^{-\frac{\varepsilon}{4}(x^2+y^2) - \tilde{f}(xy)},$$

де  $c_0$  та  $c_1$  — сталі нормування.



Вибираючи  $\tilde{f}$  у вигляді полінома, ми відтворюємо двовимірні потенціали, що досліджувалися у праці [59] як цікаві приклади потенціалів, які не обмежені знизу на нескінченності, проте мають зв'язані стани.

Для  $\tilde{f} = 0$  приклад спрощується до гамільтоніану ізотропного гармонічного осцилятора. Тоді, в діраківській нотації бра та кет векторів,  $\psi_0 = |0, 0\rangle$  є власною функцією, якій відповідає основний стан; а хвильова функція  $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 0\rangle - |0, 2\rangle)$  відповідає другому збудженому рівневі.

Зауважимо, що  $\psi_0$  відповідає основному стану, якщо  $\tilde{f}$  несингулярна функція. Для сингулярної функції  $\tilde{f}$  хвильова функція  $\psi_0$  може описувати збуджений стан. Наприклад, якщо покласти  $\tilde{f} = -\ln(xy)$ . Тоді,

$$\psi_0(x, y) = c_0 x y e^{-\frac{\varepsilon}{4}(x^2 + y^2)}$$

відповідає другому збудженому стану.

*Приклад 2.* Цей приклад ілюструє випадок 2. Вибераємо

$$\phi_i = x_i, \quad \phi = \prod_{i=1}^n x_i.$$

Використовуючи вираз (3.21) отримуємо

$$F = \sum_{i=1}^n \left( \frac{2}{n} \varepsilon + \lambda_i \right) \frac{x_i^2}{4} + \tilde{f}(x_1^2 - x_2^2, x_1^2 - x_3^2, \dots);$$

пам'ятаємо, що  $\sum \lambda_i = 0$ .

Розглянемо спеціальний тривимірний випадок з  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  і  $\tilde{f} = \alpha(2x^2 - y^2 - z^2)^2$ . Тоді

$$V = \left( \frac{\varepsilon^2}{18} - 16\alpha \right) x^2 + \left( \frac{\varepsilon^2}{18} - 4\alpha \right) (y^2 + z^2) + 4\alpha(2x^2 - y^2 - z^2)^2 \left( 2\alpha(4x^2 + y^2 + z^2) + \frac{\varepsilon}{3} \right) - \frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$\psi_0 = c_0 e^{-\varepsilon \frac{x^2+y^2+z^2}{6} - \alpha(2x^2-y^2-z^2)^2},$$

$$\psi_1 = c_1 x y z e^{-\varepsilon \frac{x^2+y^2+z^2}{6} - \alpha(2x^2-y^2-z^2)^2},$$

де  $c_0$  та  $c_1$  — сталі нормування.

Для  $\alpha = 0$  маємо випадок гармонічного осцилятора. Тоді,  $\psi_0 = |0, 0, 0\rangle$  є хвильовою функцією основного стану, а  $\psi_1 = |1, 1, 1\rangle$  відповідає третьому збудженому рівневі. Для  $\alpha \neq 0$  ми отримуємо нетривіальний тримірний квазі-точно розв'язуваний потенціал, змінні якого не можуть бути розділеними.

Варто однак відмітити, що питання про розділення змінних в багатовимірному рівнянні Шрьодінґера є цікавою та складною задачею. Здається, що повністю вона розв'язана тільки для вільної частинки (більш докладну інформацію можна отримати в працях [118, 119]).

### 3.3 Нестационарне рівняння Шрьодінґера з одним відомим розв'язком

1D нестационарне рівняння Шрьодінґера записується так:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V(x, t) \psi. \quad (3.23)$$

Тут і надалі ми вимагатимемо, що хвильова функції  $\psi(x, t)$  належить до простору де гамільтоніан  $H$  діє як ермітовий оператор, і що  $\psi(x, t)$  нормована на одиницю.

Рівняння (3.23) неможливо розв'язати для загального вигляду потенціалу  $V(x, t)$ . Проте можна сконструювати такий потенціал, що для відповідного рівняння Шрьодінґера є відомими або всі розв'язки, або тільки їх частина.

Ми хотіли би виділити три широко відомих підходи до проблеми конструювання розв'язуваних потенціалів. Перший був розроблений Люїсом та Різенфельдом [120] і може бути застосований до кількох класів квантових систем (наприклад: гармонічного осцилятора, гармонічний плюс обернено гармонічний осцилятор [121], лінійний потенціал [122] і т.д.). Замість прямого розв'язування рівняння (3.23), шукається так званий інваріант і з допомогою його власних функцій будується загальний розв'язок.

Другий підхід ґрунтується на перетворенні Дарбу [47,48]. В цьому випадку до стаціонарного чи нестаціонарного рівняння Шрьодінгера з відомими розв'язками застосовується перетворення Дарбу, щоб отримати нестаціонарне рівняння Шрьодінгера з відомими розв'язками.

Третій підхід ґрунтується на точкових перетвореннях [49, 50]. В цьому випадку вибираються нові координати таким чином, що нове рівняння типу (3.23) отримується зі старого, для якого відомі деякі (або навіть всі) розв'язки. Існують прості співвідношення між потенціалами цих рівнянь. Ці співвідношення дають можливість знайти розв'язки нового рівняння, знаючи розв'язки старого.

В цьому розділі ми використаємо інверсний метод [52], щоб побудувати рівняння типу (3.23) з одним відомим розв'язком. Реалізація доволі проста: будуюмо таку нормовану хвильову функцію, що відповідний потенціал дійсний.

### **3.3.1 Побудова нестаціонарного рівняння Шрьодінгера з одним відомим розв'язком**

Роблячи наступний анзац  $\psi(x, t) = e^{-f(x,t)-ig(x,t)}$  в рівняння (3.23),

отримаємо

$$V = g_t + f_x^2 - g_x^2 - f_{xx} + i(2f_x g_x - f_t - g_{xx}), \quad (3.24)$$

де  $f$  та  $g$  є дійсними функціями; функція  $f$  забезпечує квадратичну інтегровність хвильової функції  $\psi$ ; нижні індекси  $t$  та  $x$  позначають часткові похідні по  $t$  та  $x$  відповідно.

Вимагаючи дійсності потенціалу ми отримаємо таку умову

$$f_t + g_{xx} = 2f_x g_x. \quad (3.25)$$

При її виконанні потенціал спрощується до

$$V(x, t) = g_t + f_x^2 - g_x^2 - f_{xx}. \quad (3.26)$$

Для заданої функції  $f$  легко можна розв'язати рівняння (3.25) і знайти функцію  $g$ . Розв'язок записується

$$g(x, t) = c_1(t) \int_{-\infty}^x e^{2f(y,t)} dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{2f(y,t)} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^y e^{-2f(z,t)} dz dy + c_2(t), \quad (3.27)$$

де  $c_1(t)$  та  $c_2(t)$  — довільні дійсні функції від  $t$  (вони є сталими інтегрування по  $x$ ).

Коротко проаналізуємо два спеціальні випадки, коли або потенціал, або густина частинки не залежить від часу.

*Випадок 1.*

Потенціал є функцією тільки від  $x$ :  $V(x, t) = V(x)$ . Добре відомо, що для часовонезалежних потенціалів загальний розв'язок рівняння (3.23) може бути записаний так [67]:

$$\psi(x, t) = \sum_{\alpha} C_{\alpha} e^{-iE_{\alpha}t} \phi_{\alpha}(x), \quad (3.28)$$

де  $\phi_{\alpha}(x)$  та  $E_{\alpha}$  — власні функції та відповідні власні значення оператора  $H$ .

*Вунадок 2.*

Розглянемо  $f(x, t) = f(x)$ . Це відповідає тому, що густина частинки  $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = e^{-2f}$  не залежить від часу. Розв'язок (3.27) може бути спрощений до

$$g(x, t) = c_1(t) \int_{-\infty}^x e^{2f(y)} dy + c_2(t). \quad (3.29)$$

Нам слід визначити, чи наш вибір функцій  $f$  та  $g$  веде до такої хвильової функції  $\psi$ , яка належить до простору, де гамільтоніан системи є ермітовим оператором. Оператор  $H$  містить доданок  $p^2$ , тому для довільної фізично прийнятної хвильової функції  $\psi$  мусить існувати середнє значення кінетичної енергії  $\langle p^2 \rangle$  і так як  $\langle p^2 \rangle \geq \langle p \rangle^2$  то інтеграл  $\langle p \rangle$  мусить існувати також. Щоб визначити чи цей інтеграл існує, ми оцінюємо підінтегральний вираз:  $-i\psi^*(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t)$  на нескінченості.

$$-i\psi^*(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) = if_x(x) e^{-2f} - c_1(t) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} -c_1(t). \quad (3.30)$$

Надалі ми припускаємо, що функція  $f(x)$  не осцилює дуже швидко і прямує до плюс нескінченості, якщо  $x$  прямує до нескінченості (ця умова впливає з потреби квадратичної інтегрованості хвильової функції). Отже, ми можемо знехтувати доданком  $if_x(x) e^{-2f}$ . Якщо  $c_1(t) \neq 0$  тоді  $\langle p \rangle$  розбігається (підінтегральний вираз на нескінченості відмінний від нуля), а  $\psi(x, t)$  не належить до простору, де гамільтоніан  $H$  є ермітовим оператором.

Слід відмітити, що отриманий результат еквівалентний до двох вимог: хвильова функція  $\psi$  квадратично інтегрована і те, що вона не осцилює занадто швидко (тобто,  $f$  є гладкою, а модуль  $g$  не стає нескінченно великим) зі зміною просторової координати.

Отже, єдиним задовільним розв'язком (3.29) рівняння (3.25) є розв'язок з  $c_1(t) = 0$  і  $g(x, t) = c_2(t)$ , а потенціал має таку форму

$$V(x, t) = c_{2t}(t) + f_x^2(x) - f_{xx}(x). \quad (3.31)$$

Розв'язок  $\psi(x, t)$  має вигляд

$$\psi(x, t) = e^{-f(x) - ic_2(t)}. \quad (3.32)$$

Ці формули відповідають випадку координатно-незалежного зсуву потенціалу (на доданок  $c_{2t}(t)$ ) і такого самого зсуву власного значення; функція (3.32) є власною функцією гамільтоніана  $H$ , якщо розглядати час як параметр  $t$ .

#### *Загальний випадок*

Використовуючи рівняння (3.27), ми ще раз оцінюємо на нескінченності вираз  $-i\psi^*(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t)$ .

$$-i\psi^*(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) = if_x(x) e^{-2f(x,t)} - c_1(t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^x e^{-2f(y,t)} dy. \quad (3.33)$$

Для  $x \rightarrow \pm\infty$  перший доданок стає зникаюче малим. Тому при  $x \rightarrow -\infty$  вираз (3.33) прямує до  $-c_1(t)$  і повторюючи аналіз попереднього випадку, ми змушені покласти  $c_1(t) = 0$ . При  $x \rightarrow \infty$  вираз (3.33) прямує до  $-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^x e^{-2f(y,t)} dy$ , який так само має бути нулем. Отже, ми повинні вибрати функцію  $f$  таким чином, що  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2f(y,t)} dy$  є незалежною від часу константою (природнім вибором такої константи є одиниця). Щоб виконати вимогу про часову незалежність інтегралу ми перепишемо  $f$  у такому вигляді

$$f(x, t) = \tilde{f}(x, t) + \frac{1}{2} \ln F(t),$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tilde{f}(x,t)} dx,$$

де  $\tilde{f}(x, t)$  є довільною функцією, для якої інтеграл  $F(t)$  збігається.

Для такого вибору функції  $f(x, t)$  хвильова функція  $\psi(x, t)$  є нормована на одиницю. Фіксуючи  $f(x, t)$ , можна обчислити  $g(x, t)$ , використовуючи рівняння (3.27) і кладучи  $c_1(t) \equiv 0$ , а далі обчислюємо потенціал  $V(x, t)$ , використовуючи рівняння (3.26).

Цікаво обговорити кількість відомих розв'язків для побудованого таким чином нестационарного рівняння Шрьодінгера. Для стаціонарного рівняння кожен наступний розв'язок є дійсний і потребує однієї додаткової умови (кожний розв'язок веде до того самого потенціалу). Тому для стаціонарного випадку просто побудувати рівняння Шрьодінгера з двома [53, 56] чи навіть трьома відомими рівнями [57]. І навпаки, в нашому випадку кожен розв'язок є комплексний і потребує двох додаткових умов. Це є причиною, чому вдалося побудувати рівняння тільки з одним відомим розв'язком.

### 3.3.2 Приклади часово-залежних потенціалів з одним відомим розв'язком

Ми можемо легко знайти вираз для функції  $g(x, t)$ , якщо  $\tilde{f}$  можна записати у такій формі

$$\tilde{f}(x, t) = \tilde{f}(a(t)x + b(t)). \quad (3.34)$$

Щоб забезпечити нормування хвильової функції  $\psi$  ми вимагаємо, щоб коефіцієнт  $a(t)$  не змінював знак. Тоді, після простих, але марудних перетворень, вираз (3.27) спрощується до

$$g(x, t) = \frac{a'(t)}{4a(t)}x^2 + \frac{b'(t)}{2a(t)}x + c(t).$$

Зауважимо, що у випадку (3.34) відповідний гамільтоніан  $H$  може бути перетворений з допомогою точкового перетворення до часово-незалежного гамільтоніана Шрьодінгера [123]: якщо ми введемо нові координати і новий час

$$\bar{x} = a(t)x + b(t), \quad \bar{t} = \int^t a(s)^2 ds, \quad (3.35)$$

тоді із рівняння Шрьодінгера зі старими змінними можна знайти нове з новим потенціалом

$$\bar{V}(\bar{x}) = \frac{1}{a^2}V(x, t) + \frac{x^2}{4a^2} \left( 2\frac{a'^2}{a} - a'' \right) - x \left( \frac{b''}{2a^3} - b'a' \right) + \frac{b'^2}{4a^4} + \frac{c'}{a^2}, \quad (3.36)$$

котрому буде задовольняти новий розв'язок

$$\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{t}) = e^{\frac{i}{4} \left( \frac{a'}{a} x^2 + 2\frac{b'}{a} x + 4c \right)} \psi(x, t). \quad (3.37)$$

А саме хвильове рівняння Шрьодінгера буде часово незалежним рівнянням (потенціал (3.36) не залежить від нового часу  $\bar{t}$ ).

Приклади 1 та 2 ілюструють цей випадок. В третьому прикладі вигляд  $\tilde{f}$  не зводиться до (3.34), а сам приклад є більш технічно складним.

#### Приклад 1

Виберемо  $\tilde{f}$  у такій формі

$$\tilde{f} = (1 + t^2)x^2,$$

тоді

$$f = \tilde{f} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{\pi}{2(1 + t^2)} \right),$$

$$g = \frac{1}{4} \frac{x^2 t}{1 + t^2}$$

$$V(x, t) = \left[ \frac{1 - 3t^2}{4(1 + t^2)^2} + 4(1 + t^2)^2 \right] x^2 - 2(1 + t^2). \quad (3.38)$$

У формулі для потенціалу вираз в квадратних дужках є завжди додатнім. Відповідна хвильова функція записується так

$$\psi(x, t) = \left( \frac{2(1 + t^2)}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-(1+t^2)x^2 - \frac{i}{4} \frac{x^2 t}{1+t^2}}. \quad (3.39)$$

Чим більшим стає значення  $|t|$  тим більше зростає густина частинки в околі початку координат.



Середнє значення гамільтоніану може бути обчислене і становить

$$\langle E \rangle = \left\langle i \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{16} \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^3}.$$

*Приклад 2*

Виберемо  $\tilde{f}$  у такій формі

$$\tilde{f} = x(1 + a \sin \omega t) + e^{-2x(1+a \sin \omega t)},$$

де  $|a| < 1$ . Тоді

$$f = \tilde{f} - \frac{1}{2} \ln 4 (1 + a \sin \omega t),$$

$$g = \frac{1}{4} \frac{x^2 a \omega \cos \omega t}{1 + a \sin \omega t},$$

$$V(x, t) = - \left[ \frac{a \omega^2 \sin \omega t}{1 + a \sin \omega t} + 2 \frac{a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t}{(1 + a \sin \omega t)^2} \right] \frac{x^2}{4} -$$

$$4(1 + a \sin \omega t)^2 e^{-2x(1+a \sin \omega t)} + (1 + a \sin \omega t)^2 (1 - 2e^{-2x(1+a \sin \omega t)})^2 \quad (3.40)$$

Цей коливний потенціал може описувати поведінку частинки в одновимірній пастці Пауля [124]. Звернемо увагу, що існують такі моменти часу, коли потенціальна енергія прямує до  $-\infty$ , якщо значення координати буде прямувати до  $\infty$ . Вигляд потенціалу зображений на рисунку 3.1.

Пронормована хвильова функція, використовуючи вирази для  $f$  та  $g$ , запишеться так

$$\psi(x, t) = \sqrt{4(1 + a \sin \omega t)} e^{-x(1+a \sin \omega t) - e^{-2x(1+a \sin \omega t)} - \frac{i}{4} \frac{x^2 a \omega \cos \omega t}{1 + a \sin \omega t}}. \quad (3.41)$$

Функція (3.41) є  $\frac{2\pi}{\omega}$  періодичною по часі і є квадратично інтегрованою для довільного значення  $\omega$ .

Середнє значення енергії для цієї системи становить

$$\langle E \rangle = \left\langle i \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = - \frac{a \omega^2}{(1 + a \sin \omega t)^4} (a + \sin \omega t) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2x-2e^{-2x}} dx.$$

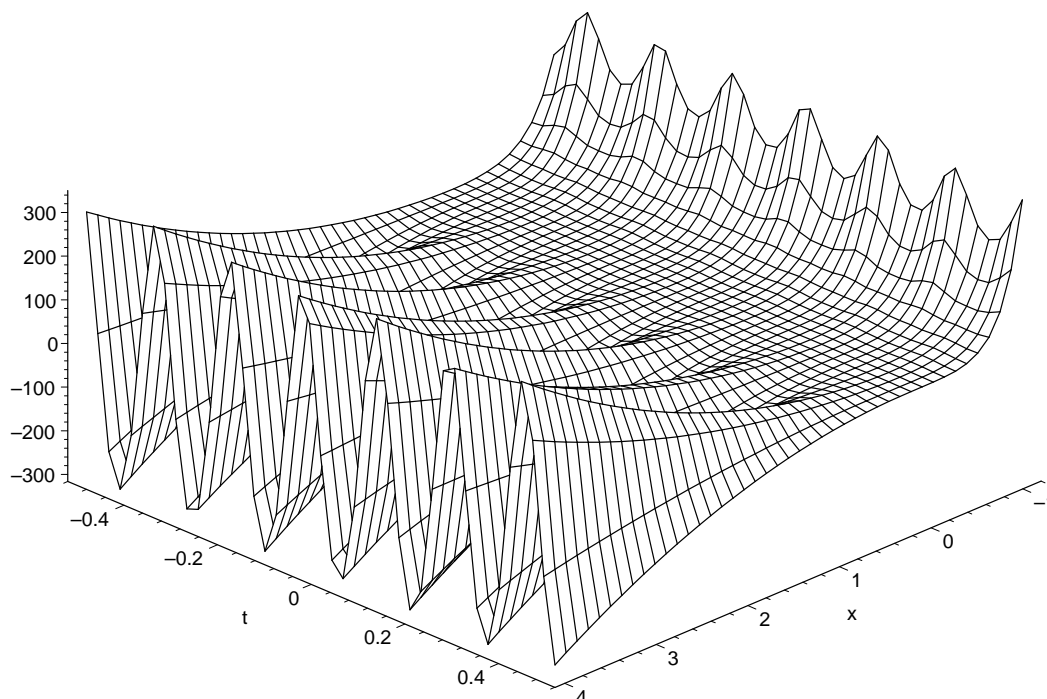


Рис. 3.1: Потенціал (3.40) для  $a = \frac{1}{20}$ ,  $\omega = 40$

Цей інтеграл рівний  $(\pi^2/6 + (\gamma + \ln 2)^2)/16 \approx 0.20367$ , де  $\gamma$  — стала Ейлера.

Цікаво порахувати усереднене по часу значення потенціалу (3.40) в границі  $a \rightarrow 0$ ,  $\omega = \frac{2}{a}$ .

$$\langle V(x, t) \rangle_t = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} V(x, t) dt = -\frac{x^2}{2} - 4e^{-2x} + (1 - 2e^{-2x})^2. \quad (3.42)$$

Усереднене значення потенціалу (3.40) зображене на рисунку 3.2.

Спостерігаємо цікаве явище: для усередненого потенціалу немає зв'язаних станів, проте малі одначе швидкі осциляції потенціалу ув'язнюють частинку. Як ми згадували вище подібні системи є відомі як пастки Пауля. Проте математика, що описує пастки Пауля, доволі громіздка та складна, а з іншого боку існує простий підхід, відомий як квантовий ефект Капіци [125]. Зараз ми порівняємо наш точний ре-

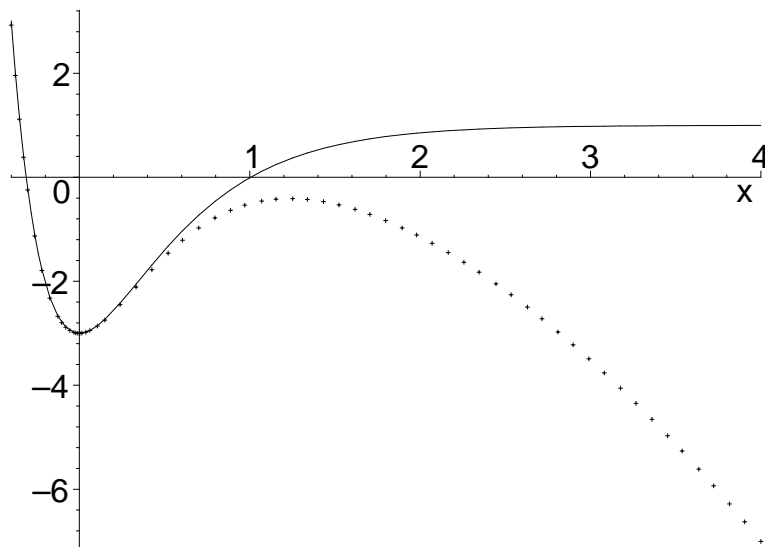


Рис. 3.2: Усереднений потенціал (3.42) — хрестики, ефективний потенціал (3.44) — суцільна лінія.

зультат з наближенням, що випливає з теорії квантового ефекту Капіци.

Відповідно до статті [125], якщо потенціал  $V$  містить швидко осцилюючий доданок  $U$ , тоді просторові властивості густини частинки описуються часово незалежним рівнянням Шрьодінгера з ефективним потенціалом

$$V_{eff}(x) = \langle V \rangle_t + \frac{f_1^2(x) + f_2^2(x)}{2\Omega^2}, \quad (3.43)$$

де  $\Omega$  — частота швидких коливань, а  $\frac{\partial}{\partial x}U = f_1 \cos \Omega t + f_2 \sin \Omega t$ . Для потенціалу (3.40)  $\frac{\partial}{\partial x}U = x\omega \sin \omega t$ . Тому,

$$V_{eff}(x) = -4e^{-2x} + (1 - 2e^{-2x})^2. \quad (3.44)$$

Ефективний потенціал (3.44) зображений на рисунку 3.2. Цей потенціал добре вивчений, називається потенціалом Морзе і є точно розв'язуваним [7]. На противагу до усередненого потенціалу, ефективний потенціал (3.44) має одну власну функцію

$$\psi(x) = 2e^{-x-e^{-2x}} \quad (3.45)$$

з власним значенням, яке рівне 0. Цікаво відмітити, що точкове перетворення (3.35) веде до того самого потенціалу (3.44) і до тієї самої власної функції (3.45), що й наближена теорія квантового ефекту Капіці. Тому квантове наближення Капіці [125] є достатньо добре для потенціалу (3.40).

### Приклад 3

В попередніх прикладах функція  $\tilde{f}$  мала форму (3.34). В цьому прикладі ми виберемо  $\tilde{f}$  у більш складній формі.

$$\tilde{f} = \frac{1+t^2}{2} \operatorname{sh}^2 x - \frac{1}{2} \ln \operatorname{ch} x,$$

тоді

$$f = \frac{1}{4} \ln \frac{\pi}{1+t^2} + \tilde{f},$$

$$g = \frac{t \ln \operatorname{ch} x}{2(1+t^2)}.$$

Як результат ми отримаємо такі вирази для потенціальної енергії та відповідної хвильової функції

$$V(x, t) = \frac{(1-t^2) \ln \operatorname{ch} x}{2(1+t^2)^2} - \frac{t^2 \operatorname{th}^2 x}{4(1+t^2)^2} +$$

$$+ \left( \frac{(1+t^2) \operatorname{sh} 2x - \operatorname{th} x}{2} \right)^2 - (1+t^2) \operatorname{ch} 2x + \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x},$$

$$\psi(x, t) = \sqrt[4]{\frac{1+t^2}{\pi} \operatorname{ch}^2 x e^{-\frac{1+t^2}{2} \operatorname{sh}^2 x - \frac{it}{2(1+t^2)} \ln \operatorname{ch} x}}.$$

Якщо, як і в першому прикладі,  $|t|$  зростає, то потенціальна яма звужується, і відповідно, густина частинки зростає в околі початку координат.

На противагу до попередніх прикладів це рівняння не зводиться за допомогою точкового перетворення (3.35) до часово-незалежної форми.

### 3.4 Висновки до третього розділу

Задача про побудову багатовимірного квазі-точно розв'язуваного потенціалу з двома відомими рівнями зведено до розв'язування рівняння

$$2(\nabla F, \nabla \phi) = \Delta \phi + 2\varepsilon \phi.$$

Яке є неоднорідним лінійним рівнянням першого порядку в часткових похідних відносно невідомої функції  $F$ , функція  $\phi$  відіграє роль генеруючої функції.

Було розв'язано це рівняння для двох часткових типів генеруючої функції  $\phi$ :

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_i), \quad \phi = \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i).$$

Побудовані явні приклади, які ілюструють даний підхід.

Створено методику побудови квазі-точно розв'язуваних нестационарних рівнянь Шрьодінгера з одним відомим розв'язком.

Побудовані явні приклади гамільтоніанів з відповідними хвильовими функціями. Зокрема, побудовано приклад, поведінка частинки в якому підкоряється квантовому ефекту Капіці.

## Розділ 4

# Одновимірні квантові системи у деформованому просторі з мінімальною довжиною

### 4.1 Вступ до четвертого розділу

Протягом останніх років значно зросла зацікавленість до вивчення квантової механіки з деформованою алгеброю Гайзенберга, яка веде до мінімальної невизначеності в координатах. Ці роботи мотивовані декількома незалежними лініями досліджень в теорії струн, в теорії чорних дір та в квантовій гравітації, які передбачають існування малої скінченої межі для можливої мінімальної довжини  $\Delta X$  (див. наприклад, [21, 22, 126], як огляд може слугувати [127]).

В цьому розділі ми будемо розглядати одновимірну квантову механіку з найпростішою — квадратичною деформацією канонічних комутаційних співвідношень:

$$[X, P] = i\hbar(1 + \beta P^2), \quad (4.1)$$

де  $\beta P^2$  — поправка (для малих значень імпульсу вона є невеликою, а для великих значень — суттєво впливає на поведінку частинки). Така деформована алгебра була впроваджена Кемпфом, і ним же разом зі співробітниками інтенсивно досліджувалася [23, 24, 128–130]. Якщо покласти  $\beta = 0$ , отримується канонічна алгебра Гайзенберга.

Для всіх розв'язаних задач в деформованій алгебрі при обчисленні границі  $\beta \rightarrow 0$  результати переходять в уже відомі результати квантової механіки для недеформованого випадку. Розумно припустити, що відповідність результатів при граничному переході від деформованої до недеформованої алгебри Гайзенберга буде виконуватися і для інших задач, які ще не є розв'язаними, або щодо розв'язку яких виникають сумніви. Сформований таким чином принцип відповідності — аналог принципу відповідності квантової та класичної механіки, буде слугувати нам одним з методів верифікації отриманих результатів для деформованої алгебри.

Якщо  $\beta > 0$ , то така деформація спричиняє існування мінімальної довжини  $\Delta X \geq \Delta X_{min} = \hbar\sqrt{\beta}$  [24], тобто, принципово не існує можливості виміряти координату  $X$  з точністю кращою ніж  $\Delta X_{min}$ . Відмітимо, що деформоване комутаційне співвідношення (4.1) призводить до такої ж нерівності Гайзенберга, яка була запропонована у теорії струн [21], в теорії чорних дір [22], і т. п. Бачимо, існують підстави ототожнити оператори, що відповідають фізичним величинам координати та імпульсу з операторами  $X$  та  $P$ , які задовольняють деформованому комутаційному співвідношенню (4.1). Тому, в цьому розділі будемо вимагати, щоб оператори  $X$  та  $P$ , котрі задовольняють (4.1), як і гамільтоніани, що описують еволюцію систем, були ермітовими операторами.

Як бачимо, незначна модифікація канонічних комутаційних співвідношень може спричинити значні ефекти. В цьому розділі ми також дослідимо інші можливі деформації канонічного комутаційного співвідношення. Зокрема такі, які приводять до існування верхнього обмеження на значення кінетичної енергії частинки.

Існування мінімальної довжини може мати цікаві наслідки для

регуляризації розбіжностей у квантовій механіці. При наявності таких деформацій не можна локалізувати частинку в як завгодно малому об'ємі (в [130] було показано, що не існує зв'язаних станів для частинки у достатньо вузькій нескінченно високій потенціальній ямі). Було показано, що така деформація спричиняє ефективне зменшення густини високоенергетичних станів [131,132]. На прикладі ефекту Казимира було показано, що у квантовій електродинаміці зникають розбіжності пов'язані з нескінченною енергією фотонного вакууму [133,134].

З іншого боку використання деформованого комутаційного співвідношення (4.1) значно ускладнює точне розв'язання квантовомеханічних задач. Наскільки ми знаємо, тільки для кількох задач розв'язки були знайдені точно. Це є одновимірний гармонічний осцилятор [24],  $D$ -вимірний ізотропний гармонічний осцилятор [135], тривимірний релятивістський осцилятор Дірака [136]. Відмітимо, що для одновимірного гармонічного осцилятора спектр був знайдений точно [43,44] для більш загального вигляду деформації, яка веде до існування як мінімальної невизначеності координати, так і мінімальної невизначеності імпульсу.

Постає проблема з одного боку дослідження простих квантовомеханічних систем, для яких відомий точний спектр і для яких можна проаналізувати вплив наявності деформацій на поведінку системи. Особливо цікаво дослідити вплив наявності деформацій на системи з сингулярностями. З цієї точки зору важливо дослідити одновимірну кулонівську задачу. Відмітимо, що одновимірні сингулярні системи у деформованому просторі розглядалися у [137], але ця робота містить ряд неточностей, котрі будуть проаналізовані нижче.

Труднощі зі знаходження точних розв'язків квантових задач призвело до розвитку теорій збурень [128,138–140] та чисельних розрахун-



ків [140] при наявності деформації. Точні вирази для спектру одновимірного кулонівського потенціалу були знайдені в нашій недавній праці [29]. В цій же праці ми отримали той самий спектр з допомогою правила квантування Бора-Зомерфельда. В ній використання цього правила було інтуїтивне, але співпадіння його передбачень з точними результатами стимулювала нас до подальших досліджень. В цьому розділі дисертації ми його строго введемо, проаналізуємо умови його застосовності та перевіримо на кількох прикладах.

Отже, у цьому розділі ми дослідимо деякі властивості деформованих комутаційних співвідношень, точно розв'яжемо одновимірний кулонівський потенціал, а також розробимо наближений метод знаходження спектрів у деформованому просторі: квазі-класичне наближення та аналог правила квантування Бора-Зомерфельда. Результати цього розділу ґрунтуються на працях [29, 30], а також були апробовані на конференціях [31, 34].

## 4.2 Комутаційні співвідношення з мінімальною довжиною

Добре відомо [67], що для довільних ермітових операторів  $A$  та  $B$  можна записати нерівність Гайзенберґа:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle C \rangle|, \quad (4.2)$$

де  $C = i[A, B]$  — теж ермітовий оператор, а

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}, \quad \Delta B = \sqrt{\langle (B - \langle B \rangle)^2 \rangle}.$$

Оператори, котрі відповідають фізичним величинам, зазвичай не є обмеженими. Тому треба говорити про області визначення операторів

$A$ ,  $B$ ,  $A^2$ ,  $B^2$  та  $C$ . Для нашого подальшого аналізу достатньо твердження, що нерівність (4.2) виконується для всіх станів, для котрих визначені середні значення операторів  $A^2$ ,  $B^2$ ,  $C$ .

Для комутаційного співвідношення (4.1) нерівність Гайзенберга (4.2) запишеться таким чином

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta \langle P^2 \rangle) \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta \Delta P^2) \quad (4.3)$$

або

$$\Delta X \geq \frac{\hbar}{2} \left( \frac{1}{\Delta P} + \beta \Delta P \right). \quad (4.4)$$

Власне таку форму (4.4) має невизначеність координати, що з'являється у фізиці високих енергій [126, 127].

Зважаючи на те, що  $\Delta P$ ,  $\beta$  — додатні величини, тому  $\Delta X$  як функція від  $\Delta P$  має мінімум при  $\Delta P = 1/\sqrt{\beta}$ , котрий становить

$$\Delta X_{min} = \hbar \sqrt{\beta}.$$

Ненульова мінімальна невизначеність у координаті має один важливий математичний наслідок: не існує фізично прийнятних власних функцій оператора  $X$ . Дійсно, припустимо, що існує така нормована функція  $\psi$ , що

$$X\psi_x = x\psi_x, \quad (4.5)$$

тоді для власної функції  $\psi_x$  невизначеність  $\Delta X = 0$ . Це означає, що порушується нерівність (4.3). Це в свою чергу означає, що не визначене або середнє значення оператора  $X^2$ , або середнє значення оператора  $P^2$ . Але середнє значення  $X^2$  визначене і рівне  $x^2$ . Отже, не визначене середнє значення оператора  $P^2$ . Це означає, що для власних функцій оператора  $X$  не є визначеним оператор кінетичної енергії  $P^2/2m$ . Тобто, гамільтоніан, котрий містить кінетичну енергію у формі  $P^2/2m$ , не є ермітовим оператором на множині власних функцій оператора  $X$ .

В цьому сенсі власні функції оператора  $X$  є фізично неприйнятними або просто нефізичними (це питання детально досліджувалося у [24]). Нижче ми випишемо формальні власні функції оператора  $X$  [24] і покажемо, що для них середнє значення кінетичної енергії дійсно розбігається.

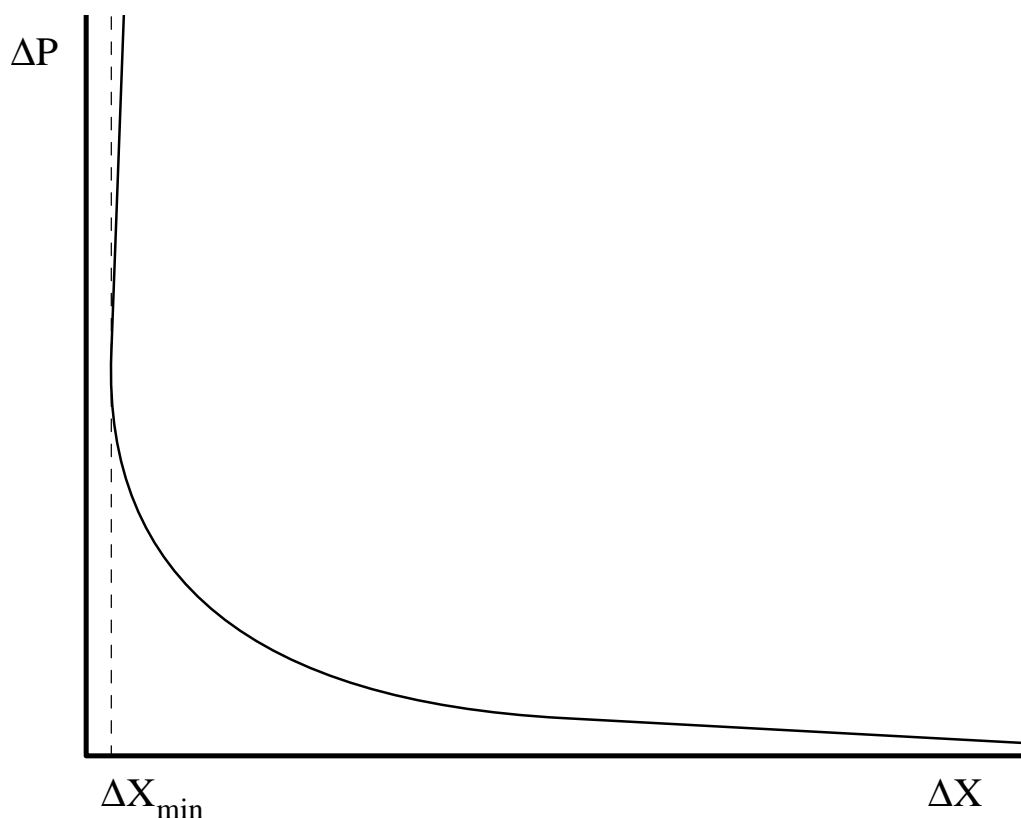


Рис. 4.1: На осях невизначеності імпульсу та координати. Крива позначає невизначеності де нерівність (4.3) перетворюється в рівність, відповідає так званим когерентним станам. Область між кривою та координатними осями — заборонений регіон: для таких значень невизначеностей кінетична енергія нескінченно велика. Над кривою — дозволений регіон. Графік взято зі статті [24].

На рисунку 4.1 зображено області допустимих та недопустимих значень невизначеностей координати та імпульсу. Відмітимо, що в дозволений області можна знайти стани, для яких невизначеність оператора імпульсу як завгодно мала: це дозволяє говорити про існування “гарних” власних функцій оператора  $P$  і розв’язувати квантово-

механічні задачі в імпульсному представленні. Для оператора координати невизначеність спочатку зменшується при одночасному зростанні невизначеності імпульсу, а потім при досягненні мінімального значення  $\Delta X_{min}$  починає зростати, ніколи не прямуючи до нуля.

#### 4.2.1 Імпульсне та квазі-координатне представлення для деформованого простору з мінімальною довжиною

Для комутаційного співвідношення (4.1) легко знайти такий вигляд операторів  $P$  та  $X$ , які йому задовольняють. Можна говорити про імпульсне та так зване квазі-координатне представлення. В імпульсному представленні оператори імпульсу та координати виражаються так

$$P = p, \quad X = i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{d}{dp}. \quad (4.6)$$

Бачимо, що оператор координати не є симетричним відносно операцій множення на  $p$  та диференціювання по  $p$ , і як наслідок не є ермітовим по відношенню до звичайного скалярного добутку. Щоб оператор координати  $X$ , визначений таким чином, був ермітовим, перевизначають скалярний добуток наступним чином [24]:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi^*(p)\psi(p)}{1 + \beta p^2} dp. \quad (4.7)$$

В  $P$  представленні оператор легко знайти власні функції  $\psi_x$  оператора  $X$ , які задовольняють рівняння (4.5), і вони такі [24]:

$$\psi_x(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} e^{-i \frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctg \sqrt{\beta} p}. \quad (4.8)$$

Функції  $\psi_x$  є нормованими на одиницю

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_x^*(p)\psi_x(p)}{1 + \beta p^2} dp = \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} = 1,$$

але для цих функцій середнє значення кінетичної енергії не визначене:

$$\left\langle \psi_x \left| \frac{p^2}{2m} \right| \psi_x \right\rangle = \frac{\sqrt{\beta}}{2m\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^2 dp}{1 + \beta p^2} = \infty.$$

Це явно підтверджує наші попередні елементарні міркування, викладені на сторінці 74, чому власні функції оператора координати нефізичні.

Не зважаючи на те, що оператор  $X$  не має власних значень, можна розв'язувати квантовомеханічні задачі у так званому квазі-координатному представленні. В цьому представленні

$$X = x, \quad P = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{tg}(\sqrt{\beta} p) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{tg}\left(-i\hbar\sqrt{\beta} \frac{d}{dx}\right). \quad (4.9)$$

В цьому представленні оператори  $X$  та  $P$  також задовольняють комутаційне співвідношення (4.1). Оператор  $X$  зводиться до домноження на змінну  $x$  — має простіший вигляд ніж в імпульсному представленні (4.6). Проте це представлення є суто формальним: в ньому можна розв'язувати диференціальні рівняння, які відповідають рівнянням на власні значення, але тяжко знайти коректні умови квантування. “Власні значення”  $x$  оператора  $X$  не мають фізичного сенсу і відповідно неможливо формулювати умови квантування у квазі-координатному представленні.

#### 4.2.2 Деформації, що ведуть до верхньої межі кінетичної енергії

Деформоване комутаційне співвідношення (4.1) допускає подальше узагальнення

$$[X, P] = i\hbar f(X, P), \quad (4.10)$$

тут  $f(X, P)$  — деяка функція від операторів, котра в загальному випадку відмінна від 1. В літературі були запропоновані такі вигляди

деформаційних функцій  $f(X, P)$ :  $1 + \beta P^2$  [24],  $1 + \alpha X^2 + \beta P^2$  [23],  $1 + \beta_1 P^2 + \beta_2 P^4 + \dots$  [131],  $e^{-\beta P^2}$  [141]. Всі з них крім третьої були докладно проаналізовані у відповідних статтях.

Розглянемо таку деформацію канонічного комутаційного співвідношення

$$[X, P] = i\hbar(1 + \alpha X^4 + \beta P^2), \quad (4.11)$$

де  $\alpha X^4 + \beta P^2$  — деформація. Використовуючи узагальнене співвідношення невизначеностей Гайзенберга (4.2) з комутатора (4.11) впливає

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \langle 1 + \alpha X^4 + \beta P^2 \rangle \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \alpha \Delta X^4 + \beta \Delta P^2), \quad (4.12)$$

Ми скористались тим, що для довільного оператора  $A$ , на множині де визначені відповідні середні, виконуються нерівності  $\langle A^4 \rangle \geq \langle A^2 \rangle^2$ ,  $\langle A^2 \rangle \geq \Delta A^2$ . Далі з нерівності (4.12) випливають такі нерівності

$$\begin{aligned} \Delta P &\geq \frac{\hbar}{2} \left( \frac{1}{\Delta X} + \alpha \Delta X^3 + \beta \frac{\Delta P^2}{\Delta X} \right) \geq \frac{\alpha \hbar}{2} \Delta X^3 : & \Delta P &\geq \frac{\alpha \hbar}{2} \Delta X^3, \\ \Delta X &\geq \frac{\hbar}{2} \left( \frac{1}{\Delta P} + \alpha \frac{\Delta X^4}{\Delta P} + \beta \Delta P \right) \geq \frac{\beta \hbar}{2} \Delta P : & \Delta X &\geq \frac{\beta \hbar}{2} \Delta P. \end{aligned}$$

Комбінуючи дві останні нерівності, отримуємо:

$$\Delta X \geq \frac{\alpha \beta \hbar^2}{4} \Delta X^3.$$

Звідки отримуємо верхню межу для невизначеності значення оператора координати

$$\Delta X \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha \beta \hbar}}. \quad (4.13)$$

Також з нерівності (4.12) впливає

$$\Delta X \geq \hbar \left( \frac{1}{\Delta P} + \beta \Delta P \right). \quad (4.14)$$

Розглядаючи вираз в дужках як функцію від  $\Delta P$  і мінімізуючи його значення ми отримаємо

$$\Delta X \geq \hbar \sqrt{\beta}. \quad (4.15)$$

Аналогічно до щойно розглянутого випадку, для невизначеності імпульсу отримаємо

$$\frac{4}{\hbar^2 \sqrt{\alpha \beta^3}} \geq \Delta P \geq \hbar \frac{2}{3} (3\alpha)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.16)$$

З іншого боку, враховуючи  $\sqrt{\langle X^2 \rangle} \sqrt{\langle P^2 \rangle} \geq \Delta X \Delta P$ , нерівність (4.12) можна переписати так

$$\sqrt{\langle X^2 \rangle} \sqrt{\langle P^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2} \langle 1 + \alpha X^4 + \beta P^2 \rangle \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \alpha \langle X^2 \rangle^2 + \beta \langle P^2 \rangle). \quad (4.17)$$

Звідки, діючи подібним чином, отримаємо подвійні нерівності для середніх значень квадратів імпульсу та координати:

$$\frac{4}{\alpha \beta \hbar^2} \geq \langle X^2 \rangle \geq \hbar^2 \beta, \quad (4.18)$$

$$\frac{16}{\hbar^4 \alpha \beta^3} \geq \langle P^2 \rangle \geq \hbar^2 \frac{4}{9} (3\alpha)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.19)$$

Деформоване комутаційне співвідношення (4.11) має два очевидних наслідки: з нерівностей (4.15), (4.16) випливає, що оператори імпульсу та координати не мають власних значень. Це в свою чергу тягне висновок про неможливість побудови координатного чи імпульсного представлення. У цьому випадку потрібно працювати в узагальненому представленні Фока або в еквівалентному відповідному представленні Бергмана [23].

Другий, цікавий з космологічної точки зору, наслідок про обмеження середнього значення квадратів координати та імпульсу частинки. Що можна інтерпретувати як існування верхньої межі розмірів Всесвіту, та як існування верхньої межі для кінетичної енергії. Бачимо, що накладання обмежень на мікрорівні комутаційних співвідношень може мати прямі наслідки в космічних масштабах. Цікаво, що були праці [142], в котрих досліджувався вплив комутаційних співвідношень (4.1) на рух космічних тіл.

З іншого боку алгебра (4.11) має ряд недоліків. Отже, незрозуміло як інтерпретувати стани, для котрих не виконуються нерівності (4.12). Для алгебри (4.1) невиконання цих нерівностей означало розбіжність середнього значення кінетичної енергії — що має пряму фізичну інтерпретацію. В нашому випадку крім розбіжності кінетичної енергії можлива, ще й розбіжність  $\langle X^4 \rangle$ . Ця величина не має прямого фізичного сенсу: з її розбіжності ми не можемо відкинути відповідні стани як нефізичні. Для прикладу наведемо [137] де стверджувалося, що деформована алгебра  $[X, P] = ie^{\beta P^2}$ , подібна до алгебри Састрі [141], веде до існування мінімальної довжини. Дійсно, формально для цієї алгебри з нерівності Гайзенберга випливає існування мінімальної довжини. Для власних функцій оператора координати розбігалися середні від  $e^{\beta P^2}$  і нерівність втрачала сенс. Але існували середні від кінетичної енергії, що на нашу думку свідчить про фізичну допустимість власних функцій оператора координати. Тобто, в цьому випадку не можна говорити про існування мінімальної довжини.

Звичайно можлива ситуація коли оператори  $P$  та  $X$  — обмежені оператори. Але нам не вдалося знайти явне представлення, яке задовольняє комутаційне співвідношення (4.11) і в котрому можна ефективно проводити обчислення: ми не змогли безпосередньо проаналізувати, середні від яких величин розбігаються, в станах для яких порушуються нерівності (4.18-4.19).

### 4.2.3 Деформована алгебра з верхньою межею кінетичної енергії з точно розв'язуваним гамільтоніаном

Розглянемо таку деформацію

$$[th\alpha X, P] = i\hbar \left( \frac{\alpha}{ch^2\alpha X} + \beta P^2 + \delta \right), \quad (4.20)$$



тут  $\frac{\alpha}{\text{ch}^2 \alpha X}$  — член, що відповідає канонічній алгебрі Гайзенберга,  $\beta P^2 + \delta$  — деформаційна поправка. Прийmemo, що для всіх станів виконується  $\Delta \text{th} \alpha X \leq 1$  (коли б оператор  $X$  мав би повну систему власних функцій, це було б очевидним). Отже,

$$\Delta P \geq \Delta \text{th} \alpha X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (\beta \Delta P^2 + \delta). \quad (4.21)$$

Звідси

$$\frac{\hbar \delta}{2} \leq \Delta P \leq \frac{2}{\hbar \beta}, \quad \hbar \sqrt{\beta \delta} \leq \Delta \text{th} \alpha X \leq \alpha \Delta X. \quad (4.22)$$

А для середніх значень квадратів операторів виконується

$$\frac{\hbar^2 \delta^2}{4} \leq \langle P^2 \rangle \leq \frac{4}{\hbar^2 \beta^2}, \quad \hbar^2 \beta \delta \leq \alpha^2 \langle X^2 \rangle. \quad (4.23)$$

Дана деформація так само, як і попередня характеризується неіснуванням власних станів операторів координати та імпульсу. Для дозволених нерівністю (4.21) станів кінетична енергія обмежена зверху. Але на противагу до алгебри (4.11) в комутаційне співвідношення (4.20) входять або обмежені оператори  $1$ ,  $\text{th} \alpha X$ ,  $1/\text{ch}^2 \alpha X$ , або оператори, які мають чіткий фізичний сенс:  $P$ ,  $P^2$ .

Тому ми можемо говорити, що для всіх фізично допустимих станів виконуються нерівності (4.22), (4.23). Так, як і для алгебри (4.20) нам не вдалося побудувати явного представлення, то ми можемо виділити три можливих варіанти:

1. Не існує таких операторів  $P$  та  $X$ , котрі задовольняють комутаційне співвідношення (4.20).
2. Такі оператори існують, і для всіх станів виконуються нерівності (4.22), (4.23). Оператор імпульсу — обмежений.
3. Такі оператори існують, для деяких станів виконуються нерівності (4.22), (4.23); для інших середнє від  $P^2$  розбігається.

Перший варіант — тривіальний. Будемо вважати, що реалізуються другий або третій варіанти. Покажемо, як в такій абстрактній алгебрі можна розв'язувати задачі на власні значення. Подібним чином була розв'язана задача на знаходження спектру гармонічного осцилятора в деформованому просторі з мінімальним значенням імпульсу та координати [43, 44].

Задля простоти записів покладемо  $\hbar = 1$ ,  $2m = 1$ . Введемо оператори народження–знищення:

$$A = \xi p - i\eta \operatorname{th} \alpha x, \quad (4.24)$$

$$A^+ = \xi p + i\eta \operatorname{th} \alpha x. \quad (4.25)$$

На основі цих операторів побудуємо гамільтоніани–суперпартнери

$$\begin{aligned} H_- = A^+ A &= \xi^2 p^2 + \eta^2 \operatorname{th}^2 \alpha x + i\xi\eta [\operatorname{th} \alpha x, p] = \\ &= (\xi^2 - \xi\eta\beta\alpha) p^2 - \frac{\eta^2 + \xi\eta\alpha}{\operatorname{ch}^2 \alpha x} + \eta^2 - \xi\eta\delta, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$H_+ = AA^+ = (\xi^2 + \xi\eta\beta\alpha) p^2 - \frac{\eta^2 - \xi\eta\alpha}{\operatorname{ch}^2 \alpha x} + \eta^2 + \xi\eta\delta. \quad (4.27)$$

Шукаємо спектр гамільтоніана (4.26). Цей гамільтоніан є аналогом, так званого, гамільтоніану Розена–Морзе в недеформованому випадку:  $p^2 - \frac{a}{\operatorname{ch}^2 x}$ , який є точно розв'язуваним [7]. Якщо покласти параметри деформації  $\beta$ ,  $\delta$  рівними нулю, то ми власне до нього і прийдемо.

Для пошуку спектру будуємо форм-інваріантний ланцюжок:

$$H_+(\xi_{n-1}, \eta_{n-1}) = H_-(\xi_n, \eta_n) + \epsilon_n, \quad (4.28)$$

тут  $\xi_0 = \xi$ ,  $\eta_0 = \eta$ .

Прирівнюючи коефіцієнти при  $1/\operatorname{ch}^2 \alpha x$ , при  $p^2$  та при 1 отримаємо такі рівняння

$$\eta_{n-1}^2 - \xi_{n-1}\eta_{n-1}\alpha = \eta_n^2 + \xi_n\eta_n\alpha,$$

$$\begin{aligned}\xi_{n-1}^2 + \xi_{n-1}\eta_{n-1}\beta\alpha &= \xi_n^2 - \xi_n\eta_n\beta\alpha, \\ \epsilon_n &= (\eta_{n-1}^2 - \eta_n^2) + \delta(\xi_{n-1}\eta_{n-1} + \xi_n\eta_n).\end{aligned}\quad (4.29)$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь отримаємо чотири пари розв'язків:

$$\begin{aligned}\xi_n &= \xi_{n-1}, & \eta_n &= -\eta_{n-1}; \\ \xi_n &= -\xi_{n-1}, & \eta_n &= \eta_{n-1}; \\ \xi_n &= \frac{\xi_{n-1} + \alpha\beta\eta_{n-1}}{\sqrt{1 + \alpha^2\beta}}, & \eta_n &= \frac{\eta_{n-1} - \alpha\xi_{n-1}}{\sqrt{1 + \alpha^2\beta}}; \\ \xi_n &= -\frac{\xi_{n-1} + \alpha\beta\eta_{n-1}}{\sqrt{1 + \alpha^2\beta}}, & \eta_n &= -\frac{\eta_{n-1} - \alpha\xi_{n-1}}{\sqrt{1 + \alpha^2\beta}}.\end{aligned}\quad (4.30)$$

Перша та друга пари тривіальні (гамільтоніани  $H_-$ ,  $H_+$  переходять один в один), а четверта приводить до тих самих результатів, що й третя. Надалі використовуємо розв'язок (4.30). Рекурентне співвідношення (4.30) можна записати у зручній матричній формі (нагадаємо, що  $\xi_0 = \xi$ ,  $\eta_0 = \eta$ ):

$$\begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2\beta}} & \frac{\alpha\beta}{\sqrt{1+\alpha^2\beta}} \\ -\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2\beta}} & \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2\beta}} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.\quad (4.31)$$

Позначимо  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2\beta}}$ ,  $\sin \theta = \alpha\sqrt{\frac{\beta}{1+\alpha^2\beta}}$ . Тоді, скориставшись тождеством

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sqrt{\beta} \sin \theta \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sqrt{\beta} \sin n\theta \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.\quad (4.32)$$

отримаємо

$$\eta_n = \eta \cos n\theta - \xi \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sin n\theta.$$

Розв'язком (4.29) є

$$\epsilon_n = (\eta_{n-1}^2 - \eta_n^2) \left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right)$$

звідки одразу знаходимо енергетичний спектр гамільтоніану (4.26)

$$E_n = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n = (\eta^2 - \eta_n^2) \left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right). \quad (4.33)$$

Квантове число  $n$  змінюється від 0 до деякого  $n_{max} = \left[\frac{1}{\theta} \arctg \frac{\eta\sqrt{\beta}}{\xi}\right]$ , яке знайшли як мінімальне ціле, для якого виконується

$$\eta_n \leq 0.$$

Якщо  $\eta_n < 0$  — зміниться знак для  $n$  оператора народження (4.24). У недеформованому випадку це призводить до ненормованості хвильової функції. Якщо скористатися принципом відповідності, сформованим у вступі до розділу, то в цьому місці ми повинні обірвати спектр. Крім того при виконанні цієї умови  $\epsilon_n \leq 0$ :  $E_n$  як функція від  $n$  починає зменшуватися при зростанні квантового числа  $n$ . Така поведінка спектру є нефізичною. Але, зрозуміло, що певні умови зміни квантового числа  $n$  можна отримати тільки маючи конкретне представлення.

На рисунку 4.2 зображені для порівняння спектри гамільтоніана

$$H = p^2 - \frac{30}{\text{ch}^2 x} \quad (4.34)$$

в звичайному та деформованому просторах. Відмітимо, що наявність деформації піднімає енергетичні рівні. Мало того найвищий рівень у деформованому просторі має додатне власне значення. У недеформованому просторі власні значення гамільтоніана з всюди від'ємною потенціальною енергією теж від'ємні.

Здійснимо граничний перехід  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$ . В цій границі

$$\theta = \alpha\sqrt{\beta}, \quad \cos n\theta = 1, \quad \sin n\theta = n\alpha\sqrt{\beta},$$

$$\eta_n = \eta - n\xi\alpha, \quad E_n = \eta^2 - \eta_n^2, \quad n = 0, 1, \dots \left[\frac{\eta}{\alpha\xi}\right],$$

що співпадає зі спектром задачі для потенціалу Розена–Морзе для недеформованого випадку, отриманого в межах недеформованої квантової механіки [7]. Це непрямо підтверджує отримані нами результати.

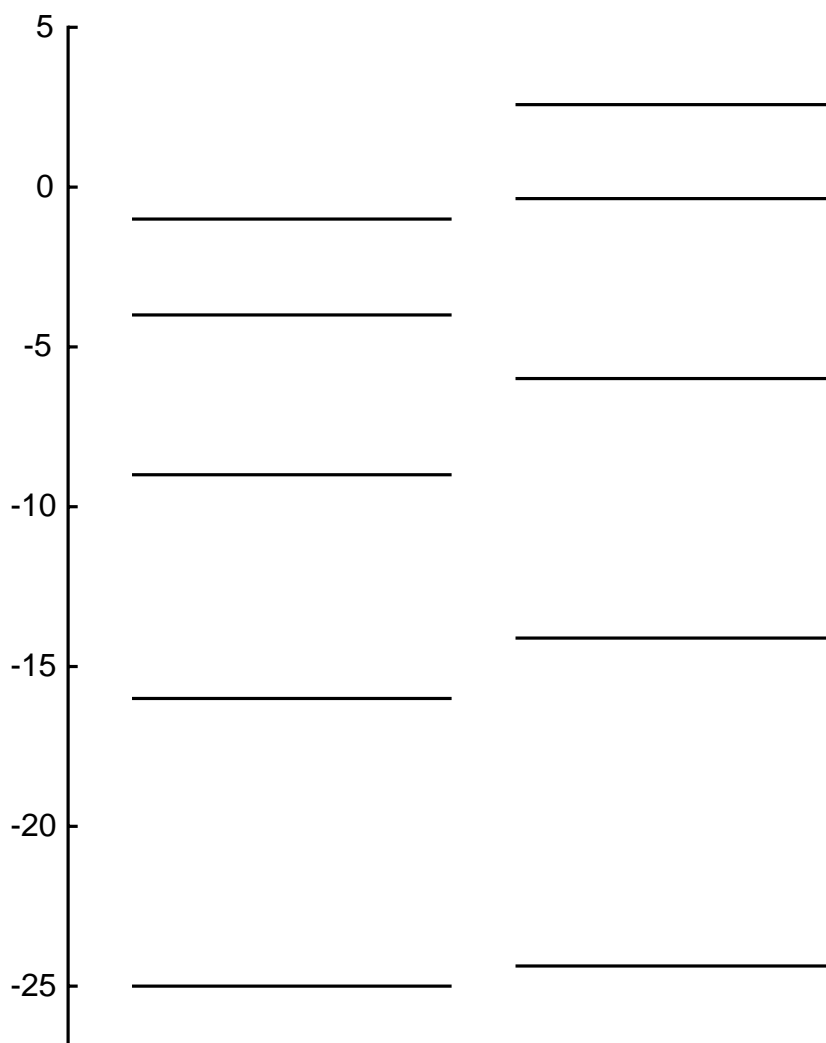


Рис. 4.2: Спектр гамільтоніану (4.34) в недеформованому просторі — зліва. Спектр цього ж гамільтоніану в деформованому просторі ( $\beta = 0.01$ ,  $\delta = 0.1$ ) — справа.

### 4.3 Точний розв'язок одновимірної задачі Кулона в деформованому просторі

У цьому підрозділі ми досліджуємо спектр такого гамільтоніану

$$H = P^2 - \frac{\alpha}{X}, \quad (4.35)$$

якому відповідає наступне рівняння на власні значення

$$P^2\psi - \frac{\alpha}{X}\psi = E\psi, \quad (4.36)$$

тут ми поклали  $\hbar = 1$  і  $2m = 1$ ,  $\alpha$  — параметр зв'язку;  $1/X$  позначає обернений оператор до  $X$ , повне означення якого ми дамо нижче.

Недавно потенціал  $-\frac{1}{X}$  вивчався для недеформованого випадку у працях [143, 144]. Існує подібний сингулярний потенціал  $-\alpha/|X|$ , котрий був вивчений більш детально. Так як ці потенціали сингулярні — існує велика кількість підходів до вибору умови квантування (стаття [145] може розглядатися як міні-огляд з цієї проблематики) і відповідно до різних симетричних (ермітових) доозначень оператора  $-\alpha/|X|$  різні спектри можуть бути отримані [146] (автори [143, 144] теж отримали різні спектри).

Хоча, потенціал  $-\alpha/X$  не вивчався так інтенсивно як потенціал  $-1/|X|$ , він має декілька цікавих застосувань у теоретичній фізиці. В [147] було показано, що цей потенціал з'являється при вивченні масових спектрів мезонів (кварк-антикваркові системи) в рамках теорії осциляторів Дірака. При таких високих енергіях якраз і може проявитися деформація простору.

### 4.3.1 Імпульсне представлення Кулонівського гамільтоніану в деформованому просторі та його власні функції

Для недеформованого випадку дія оператора  $1/X$  в імпульсному просторі може бути записана так [148]

$$\frac{1}{X}\psi(p) = -i \int_{-\infty}^p \psi(q) dq. \quad (4.37)$$

В деформованому випадку його дію можна записати подібно:

$$\frac{1}{X}\psi(p) = -i \int_{-\infty}^p \frac{\psi(q)}{1 + \beta q^2} dq. \quad (4.38)$$

Для таких означень оператора  $1/X$  виконуються рівності  $\frac{1}{X}X\psi(p) = X\frac{1}{X}\psi(p) = \psi(p)$ , як в недеформованому так і в деформованому ви-

падку. Але в недеформованому випадку застосування формули (4.37) веде до існування лишень тривіальних розв'язків  $\psi(p) = 0$  [144]. Застосовуючи ту саму ж процедуру як в праці [144] легко показати, що в деформованому випадку також існують лише тривіальні розв'язки. Детальніше це буде пояснено в кінці цього підрозділу, коли будуть отримані явні вирази для власних функцій.

Щоб отримати нетривіальні розв'язки необхідно дещо переозначити оператор  $1/X$ . Ми змінимо означення (4.38) таким чином

$$\frac{1}{X}\psi(p) = -i \int_{-\infty}^p \frac{\psi(q)}{1 + \beta q^2} dq + c, \quad (4.39)$$

де  $c$  — константа. Для такого означення виконується  $X \frac{1}{X} = 1$ , але  $\frac{1}{X}X \neq 1$ . Значення цієї константи буде знайдено на початку наступного підрозділу. Відмітимо, що для недеформованого випадку наявність сталої  $c$  в імпульсному представленні відповідає розриву першої похідної власної функції в початку координат в координатному представленні (якщо функція рівна 0 в початку координат) [144].

Розглянемо це питання більш докладно згідно цієї праці. Власні функції в координатному представленні мають вигляд

$$\psi_n(x) = \theta(x)xL_{n-1}^1\left(\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}, n = 1, 2, \dots,$$

де  $\theta(x)$  — функція Гевісайда,  $L_n^m(x)$  — приєднаний поліном Лагера. Суттєво, що власні функції рівні нулеві для від'ємних  $x$ . Графік власної функції основного стану ( $n = 1$ ) наведено на рисунку 4.3.

Перехід від координатного до імпульсного простору відбувається за допомогою фур'є-перетворення. Для оператора імпульсу  $-\frac{d^2}{dx^2}$  він здійснюється так:

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \frac{d^2}{dx^2} \psi_n(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ipx} \frac{d^2}{dx^2} \psi_n(x) dx =$$

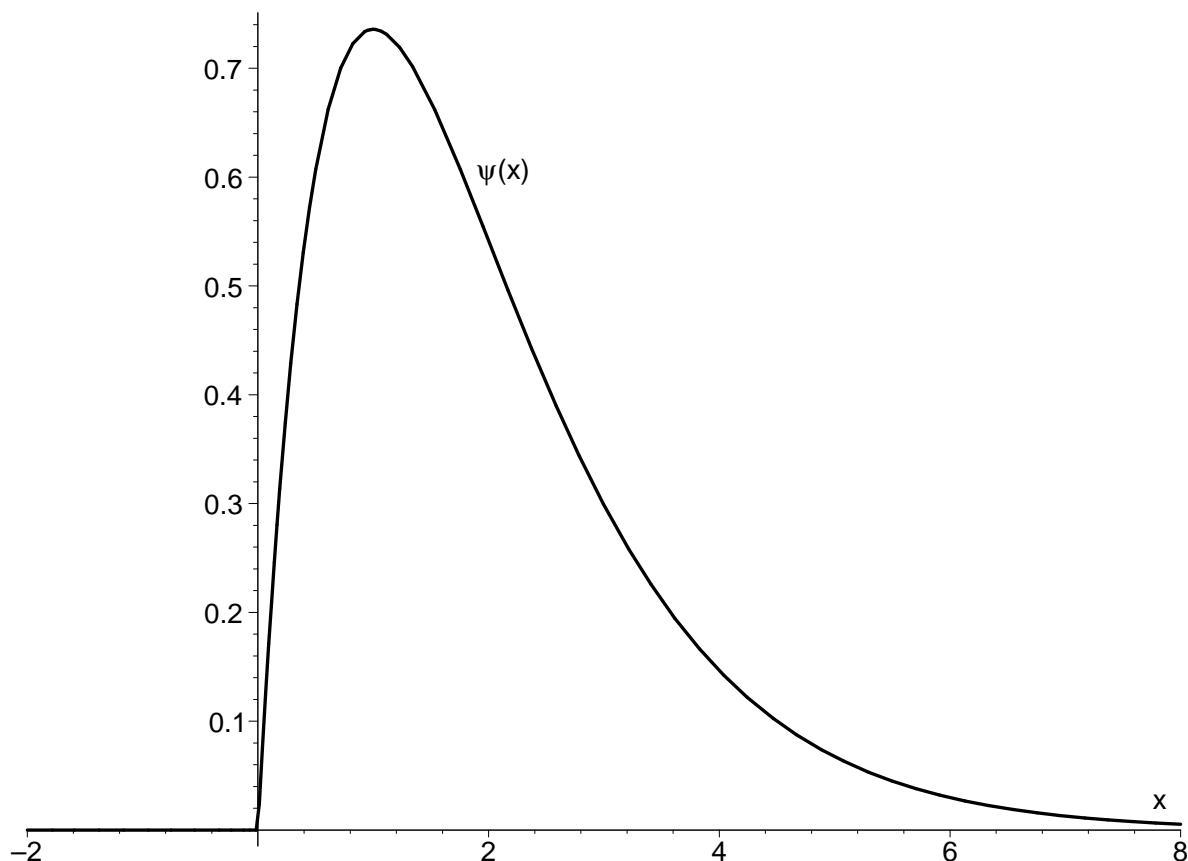


Рис. 4.3: Власна функція основного стану потенціалу  $-1/X$  для недеформованого випадку в координатному представленні у відповідності до праці [144]. Перша похідна має розрив в початку координат.

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx} \left. \frac{d}{dx} \psi_n(x) \right|_0^\infty - \frac{ip}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-ipx} \frac{d}{dx} \psi_n(x) dx = \\
 &= \left. \frac{d}{dx} \psi_n(x) \right|_{x=0} + \frac{p^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-ipx} \psi_n(x) dx.
 \end{aligned}$$

Другий член останньої рівності відповідає домножуванню власної функції в імпульсному представленні на  $p^2$ , звичайній дії кінетичної енергії. Перший член — константа, яка виникає внаслідок розриву першої похідної власної функції в початку координат.

Домножуючи рівняння на власні значення (4.36) на оператор  $X$  зліва ми отримаємо нове рівняння, котре не залежить від константи  $c$ .

$$XP^2\psi - \alpha\psi = EX\psi. \quad (4.40)$$



В імпульсному представленні це рівняння в явному вигляді виглядає так

$$i(1 + \beta p^2) [p^2 \psi'(p) + 2p\psi(p) - E\psi'(p)] - \alpha\psi(p) = 0, \quad (4.41)$$

де штрих ' позначає похідну по змінній  $p$ . Це рівняння легко інтегрується, і

$$\psi_\epsilon(p) = \frac{C_\epsilon}{\epsilon + p^2} \exp \left[ \frac{-i\alpha}{1 - \epsilon\beta} \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \operatorname{arctg} \frac{p}{\sqrt{\epsilon}} - \sqrt{\beta} \operatorname{arctg} \sqrt{\beta} p \right) \right], \quad (4.42)$$

де ми ввели перепозначення  $\epsilon = -E$ ; константа нормування  $C_\epsilon$  легко обчислюється і становить

$$C_\epsilon = \sqrt{\frac{2}{\pi} \epsilon^{\frac{3}{4}} \frac{1 + \sqrt{\epsilon\beta}}{\sqrt{1 + 2\sqrt{\epsilon\beta}}}}.$$

Якщо  $\epsilon \leq 0$ , то інтеграл нормування для власної функції (4.42)  $\langle \psi_\epsilon | \psi_\epsilon \rangle$  розбігається. Тому будемо вимагати, щоб  $\epsilon > 0$ .

Враховуючи властивості тригонометричних функцій ми можемо переписати власну функцію наступним чином

$$\psi_\epsilon(p) = \frac{C_\epsilon}{\epsilon + p^2} \left( \frac{\sqrt{\epsilon} + ip}{\sqrt{\epsilon} - ip} \right)^{-\frac{\alpha}{2\sqrt{\epsilon(1-\epsilon\beta)}}} \left( \frac{1 + i\sqrt{\beta}p}{1 - i\sqrt{\beta}p} \right)^{\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{2(1-\epsilon\beta)}} \quad (4.43)$$

В границі  $\beta \rightarrow 0$  ця власна функція є еквівалентна до відповідної власної функції для недеформованого випадку з праці [148].

Функція (4.42) задовольняє диференціальному рівнянню (4.40), але не задовольняє початковому рівнянню (4.36), якщо оператор  $1/X$  визначений у формі заданій формулою (4.38): якщо підставити хвильову функцію (4.42) у рівняння (4.36), то відповідний інтеграл береться, але очікуваної рівності не отримується. Якщо ж визначити оператор  $1/X$  у формі (4.39), то можна знайти таку сталу  $c$ , що власна функція (4.42) буде задовольняти і вихідне рівняння на власні значення (4.36), і більш зручне диференціальне рівняння (4.40). Ця стала буде знайдена в наступному підрозділі.

Оскільки радіальне рівняння і одновимірне рівняння для кулонівської задачі є однаковими, то процедура розв'язування рівняння на власні значення для атома водню в тривимірному деформованому просторі [149] веде до правильних виразів власних функцій в одновимірному просторі. Тому вирази для власних функцій з праці [149], і вирази знайдені нами (4.43) співпадають. В праці [149] умова квантування була вибрана як умова однозначності власної функції (4.43). Стверджувалося, що ця умова еквівалентна рівності  $\frac{\alpha}{2\sqrt{\epsilon(1-\epsilon\beta)}} = n$ , але вплив множника в других круглих дужках у виразі (4.43) на однозначність був знехтуваний. В наступному підрозділі ми обговоримо коректну умову квантування.

### 4.3.2 Енергетичний спектр для одновимірної задачі Кулона

Що визначити сталу  $c$  виконаємо над рівняння (4.41) такі перетворення. Після ділення його на  $i(1 + \beta p^2)$  і наступного інтегрування по  $p$  ми отримаємо

$$p^2\psi(p) + i\alpha \int_{-\infty}^p \frac{\psi(q)dq}{1 + \beta q^2} - \alpha c[\psi] = E\psi(p), \quad (4.44)$$

де  $c[\psi]$  — константа інтегрування (по відношенню до  $p$ ), в загальному, будучи функціоналом власної функції  $\psi$ .

Останнє рівняння (4.44) має вигляд рівняння на власні значення (4.36). Порівнюючи ці два рівняння, ми зможемо виразити дію оператора  $1/X$  на власну функцію таким чином

$$\frac{1}{X}\psi(p) = -i \int_{-\infty}^p \frac{\psi(q)dq}{1 + \beta q^2} + c[\psi]. \quad (4.45)$$

Підставляючи вираз для власної функції (4.42) в рівняння на власні

значення (4.44) ми отримаємо значення константи  $c$ :

$$c[\psi_\epsilon] = \frac{1}{\alpha} \lim_{p \rightarrow -\infty} (p^2 + \epsilon) \psi_\epsilon(p) = \frac{C_\epsilon}{\alpha} \exp\left(\frac{i\alpha\pi}{2(\sqrt{\epsilon} + \sqrt{\beta\epsilon})}\right). \quad (4.46)$$

Умову квантування виведемо з такого ланцюжка міркувань. Будемо вимагати, щоб гамільтоніан (4.35) був ермітовим оператором на множині своїх власних функцій (4.42). Легко бачити, що оператор  $p^2$  є ермітовим оператором на множині цих функцій. Звідси, ми будемо вимагати, щоб оператор потенціальної енергії  $-\alpha/X$ , а значить і оператор  $1/X$  був ермітовим оператором на множині власних функцій гамільтоніану (4.35). Отже, вимагаємо

$$\left\langle \frac{1}{X} \psi_{\epsilon_i} \middle| \psi_{\epsilon_j} \right\rangle = \left\langle \psi_{\epsilon_i} \middle| \frac{1}{X} \psi_{\epsilon_j} \right\rangle. \quad (4.47)$$

Вимогу ермітовості гамільтоніана зі сингулярним потенціалом на множині власних функцій вперше згадав Ендрюс [150] для координатного представлення, а пізніше ця вимога використовувалася у праці [148] вже в імпульсному представленні.

Відмітимо, що якщо власна функція не є квадратично інтегрованою, то поняття скалярного добутку, а значить і ермітовості гамільтоніана на цій функції втрачають сенс. Тобто, можна вважати, що вимога квадратичної інтегрованості власної функції (а це найбільш вживаний спосіб квантування) також є вимогою ермітовості відповідного гамільтоніана на множині власних функцій.

Використовуючи вигляд (4.45) для оператора  $1/X$  запишемо умову на ермітовість явним чином

$$\begin{aligned} & i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_{\epsilon_j}(p)}{1 + \beta p^2} dp \int_{-\infty}^p \frac{\psi_{\epsilon_i}^*(q)}{1 + \beta q^2} dq + c^*[\psi_{\epsilon_i}] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_{\epsilon_j}(p)}{1 + \beta p^2} dp = \\ & -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_{\epsilon_i}^*(p)}{1 + \beta p^2} dp \int_{-\infty}^p \frac{\psi_{\epsilon_j}(q)}{1 + \beta q^2} dq + c[\psi_{\epsilon_j}] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_{\epsilon_i}^*(p)}{1 + \beta p^2} dp. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Відповідно до того, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p)dp \int_{-\infty}^p g(q)dq = \int_{-\infty}^{\infty} g(p)dp \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(q)dq - \int_{-\infty}^p f(q)dq \right],$$

і

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_{\epsilon}(p)dp}{1 + \beta p^2} = \frac{2C_{\epsilon}}{\alpha} \sin g(\epsilon), \quad (4.49)$$

де

$$g(\epsilon) = \frac{\alpha\pi}{2(\sqrt{\epsilon} + \sqrt{\beta\epsilon})},$$

умова (4.48) спрощується до

$$\sin[g(\epsilon_i) - g(\epsilon_j)] = 0.$$

В результаті треба вимагати, щоб  $g(\epsilon_i) - g(\epsilon_j) = \pi m$ , де  $m$  є цілим числом. Тому, якщо зробити припущення, що деяке число  $\epsilon_0$  дійсно належить до спектру гамільтоніана, то ми автоматично накладаємо наступну умову на решту власних значень  $\epsilon$ :

$$\frac{\alpha}{2(\sqrt{\epsilon} + \sqrt{\beta\epsilon})} = \frac{\alpha}{2(\sqrt{\epsilon_0} + \sqrt{\beta\epsilon_0})} + m \quad (4.50)$$

чи

$$\frac{\alpha}{2(\sqrt{\epsilon} + \sqrt{\beta\epsilon})} = \delta + n, \quad (4.51)$$

де  $n = m + \left[ \frac{\alpha}{2(\sqrt{\epsilon_0} + \sqrt{\beta\epsilon_0})} \right]$  – ціле (тут  $[x]$  позначає цілу частину  $x$ ), параметр  $\delta$  є дробовою частиною  $\frac{\alpha}{2(\sqrt{\epsilon_0} + \sqrt{\beta\epsilon_0})}$ , а його значення лежить в межах  $0 \leq \delta < 1$ .

Отже, ми отримали сімейство можливих спектрів, кожен з яких однозначно задається значенням параметру  $\delta$ . Існування різних спектральних сімей для гамільтоніану одновимірної кулонівської задачі з математичної точки зору означає, що існують різні ермітові розширення оператора  $1/X$ . З фізичної точки зору, на нашу думку, це означає можливість апроксимувати сингулярний потенціал різними регулярними, і як наслідок, отримати різні спектри (порівняйте з [145], де

внаслідок різних доозначень сингулярних потенціалів виникали різні сімейства спектрів). Отже, як ми бачимо, існування мінімальної довжини не усуває сингулярності потенціалу  $-1/X$ .

Для недеформованого випадку в більшості статей вважається, що  $\delta = 0$  (див., наприклад [144]). Це відповідає такій умові квантування: хвильова функція в нулі занулюється ( $\psi(x)|_{x \rightarrow 0} = 0$ ). Ми проаналізуємо випадок  $\delta = 0$  в деформованому випадку більш детально. В цьому випадку умова квантування (4.51) спрощується до:

$$\frac{\alpha}{2(\sqrt{\epsilon} + \sqrt{\beta\epsilon})} = n, \quad (4.52)$$

де  $n$  — ціле. Це рівняння не має жодного скінченного розв'язку для  $n = 0$  і є квадратним рівнянням по відношенню до  $\sqrt{\epsilon}$  якщо  $n \neq 0$ . Воно має два дійсних розв'язки, які мають такий вигляд

$$\sqrt{\epsilon_{1,2}} = \frac{-1}{2\sqrt{\beta}} \pm \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{n} \sqrt{\beta}}. \quad (4.53)$$

Відповідно до факту, що  $\sqrt{\epsilon} > 0$ , ми повинні зберегти тільки один розв'язок зі знаком “+” і, що більше, ми повинні вимагати, щоб  $n$  та  $\alpha$  мали той самий знак, якщо  $\alpha > 0$ , ми отримаємо, що  $n$  — натуральне число.

Отже, спектр гамільтоніану (4.36) для  $\delta = 0$  виражається таким чином

$$E_n = -\epsilon = -\frac{1}{4\beta} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{n} \sqrt{\beta}} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.54)$$

На рисунку 4.4 наведено для порівняння спектри одновимірної кулонівської задачі (4.36) для недеформованого та для деформованого випадків. Як бачимо наявність деформації зміщає усі енергетичні рівні вверх.

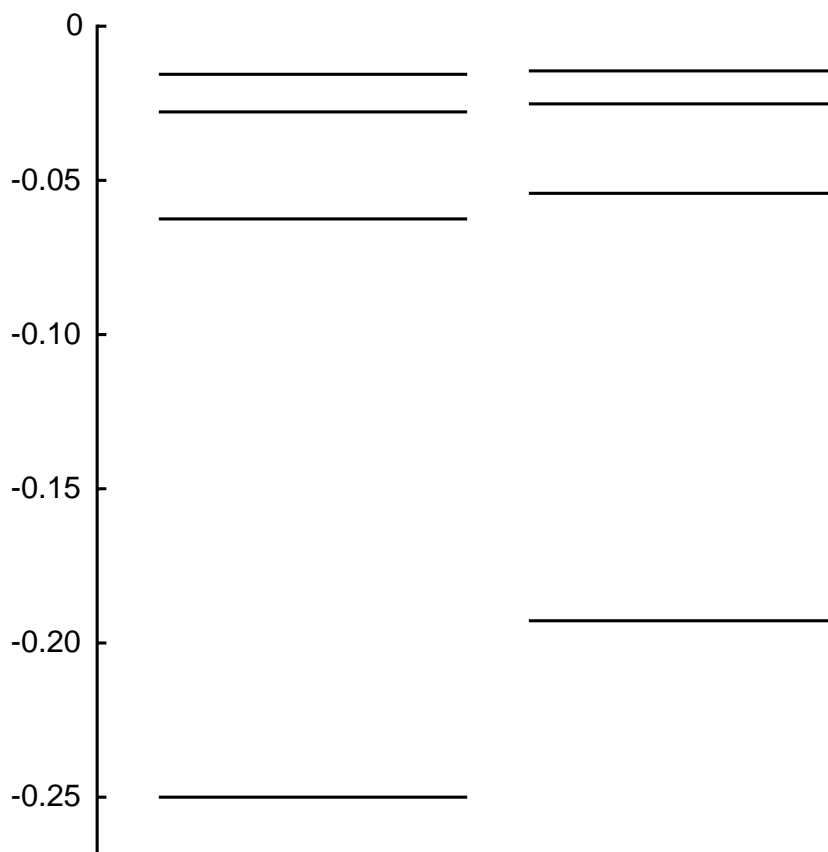


Рис. 4.4: Чотири найнижчі рівні гамільтоніану (4.36) для недеформованого простору згідно з [144] — ліва колонка, для деформованого простору згідно з формулою (4.54) — права колонка.  $\alpha = 1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\beta = 0.1$ .

Для малих  $\beta$  енергетичний спектр можна наблизити так

$$E_n = -\frac{\alpha^2}{4n^2} + \frac{\alpha^3}{4n^3}\sqrt{\beta} - \frac{5\alpha^4}{16n^4}\beta + o(\beta^{3/2}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Перший доданок описує спектр атома водню для  $\hbar = 1$ ,  $m = 1/2$  та  $\alpha = e^2$ . Неаналітична залежність спектру від параметру деформації  $\beta$  вказує на розбіжність теорії збурень по ньому. Це буде більш докладно проаналізовано в наступному підрозділі.

Цікаво відмітити, що при  $\delta = 0$  власні функції (4.42) є однозначними функціями комплексної змінної  $p$  за винятком двох скінченних розрізів (перший розріз йде від  $i\sqrt{\epsilon}$  до  $i/\sqrt{\beta}$ , другий від  $-i\sqrt{\epsilon}$  до  $-i/\sqrt{\beta}$ ). Умова однозначності широко використовується як кри-

терій квантування для задачі  $1/X$  [144, 148, 149], але з нашої точки зору умова однозначності не є переконливим критерієм квантування. Адже для неоднозначної функції типу  $\text{arctg}p$ , завжди можна вибрати однозначну вітку: наприклад, вибрати її головне значення. Таким чином доозначена власна функція буде поводитись як однозначна і буде задовольняти відповідне рівняння на власні значення.

В загальному випадку, для  $\delta \neq 0$  енергетичний спектр може бути отриманий подібним способом і він є таким

$$E_n = -\frac{1}{4\beta} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{n + \delta} \sqrt{\beta}} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.55)$$

Тут, відповідно до факту, що  $\delta > 0$  ми отримали один додатковий квантовий рівень з головним квантовим числом  $n = 0$ . Якщо спрямувати  $\delta$  до 0 для  $n = 0$ , ми отримаємо нескінченно глибоке значення для власного значення, а відповідна хвильова функція стає всюди зникаючою малою. Подібні властивості виконуються і для недеформованого випадку [145].

Потенційно цікавою рисою потенціалу  $-1/X$  є те, що перша поправка до енергетичного спектру пропорційна до  $\sqrt{\beta}$ . Це надає нам принципову можливість виявити наявність деформованих комутаційних співвідношень (4.1) для менших значень параметра  $\beta$ . Для попередньо розв'язаних задач (гармонічний осцилятор [138], атом водню [139]) перша поправка пропорційна до  $\beta$ . З іншого боку, складно сказати чи можливо, використовуючи теперішнє експериментальне обладнання, виявити поправки до енергетичних спектрів, спричинених деформацією простору з мінімальною довжиною для квантових систем, котрі описуються одновимірним потенціалом  $-1/X$ .

### 4.3.3 Наближені методи в застосуванні до задачі Кулона в деформованому просторі

Як уже відмічалось на початку цього підрозділу для задачі  $-1/X$  (як і для  $-1/|X|$ ) навіть у недеформованому просторі, відповідно до різних умов квантування, різні автори знаходять різні спектри. У деформованому просторі задачі на власні значення значно ускладнюються (ми, зокрема, позбавлені можливості апелювати до розв'язку задачі в координатному представленні). Тому цікаво було б знайти, чи хоча б оцінити спектр у деформованому просторі іншими методами. Як незалежні способи, нами було вибрано теорію збурень та правило квантування Бора-Зомерфельда. Докладніше обґрунтування правила квантування Бора-Зомерфельда можна знайти у наступному підрозділі.

Для недеформованого випадку хвильові функції в імпульсному представленні, які відповідають енергії  $-\epsilon$ , записуються так (вони отримуються при граничному переході  $\beta \rightarrow 0$  з формули (4.42)):

$$\psi_{\epsilon}^0(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\epsilon^{\frac{3}{4}}}{\epsilon + p^2} \exp \left[ -\frac{i\alpha}{\sqrt{\epsilon}} \operatorname{arctg} \frac{p}{\sqrt{\epsilon}} \right]. \quad (4.56)$$

Гамільтоніан одновимірної задачі Кулона в квазі-координатному представленні такий

$$H = \frac{1}{\beta} \operatorname{tg}^2(\sqrt{\beta}p) - \frac{\alpha}{x} \approx p^2 + \frac{2}{3}\beta p^4 - \frac{\alpha}{x}. \quad (4.57)$$

Доданок  $\frac{2}{3}\beta p^4$  відіграє роль оператора збурення. Середнє значення від оператора збурення, якщо воно існує, — додатне. Саме цим можна пояснити той факт, що для деформованих задач спектр лежить вище ніж для недеформованих (дивіться, наприклад, рисунки 4.2 та 4.4). Відмітимо, що подібним чином будував теорію збурень для атома водню



Брау [139]. Поправка до енергетичного рівня, спричинена збуренням, рівна

$$\Delta E = \frac{2}{3}\beta \int_{-\infty}^{\infty} dp \psi_{\epsilon}^{0*}(p) p^4 \psi_{\epsilon}^0(p) dp = \frac{4\beta}{3\pi} \epsilon^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p^4 dp}{(\epsilon + p^2)^2} = \infty.$$

Розбіжність цього інтегралу вказує на неможливість застосувати звичайну теорію збурень по параметру  $\beta$ . Звідси можна зробити висновок про неаналітичну залежність спектру від  $\beta$ . Вигляд спектру (4.55) підтверджує цей висновок.

Для одновимірного недеформованого випадку оператори координати та імпульсу задовольняють  $[x, p] = i$ , а правило квантування Бора-Зомерфельда записується так

$$\oint p dx = 2\pi(n + \delta), \quad (4.58)$$

де  $n$  — ціле невід'ємне число, а  $\delta$  є параметром, котрий залежить від граничних умов [67] ( $0 \leq \delta < 1$ ). Щоб підтвердити наші розрахунки, ми сформулюємо та застосуємо правило квантування Бора-Зомерфельда для деформованого випадку в цьому підрозділі. В наступному підрозділі ми це правило строго виведемо та проілюструємо його використання на додаткових прикладах.

Оператор  $X = i(1 + \beta p^2) \frac{d}{dp}$  ми формально перепишемо так

$$X = (1 + \beta p^2)x, \quad x = i \frac{d}{dp}. \quad (4.59)$$

Тут оператори  $x$  та  $p$ , позначені малими літерами, задовільняють канонічне комутаційне співвідношення  $[x, p] = i$ .

Класичний гамільтоніан, що відповідає нашій системі, записується так

$$H(x, p) = p^2 - \frac{\alpha}{(1 + \beta p^2)x}. \quad (4.60)$$

В останній формулі  $x$  та  $p$  — класичні змінні. На основі закону збереження енергії  $H(x, p) = E$  ми можемо виразити  $p$  як функцію  $x$ .

Але відповідний інтеграл — надзвичайно громіздкий. Щоб спростити обчислення використаємо тотожність  $\oint p dx = - \oint x dp$  і виразимо  $x$  як функцію імпульсу  $p$ :

$$x = \frac{\alpha}{(1 + \beta p^2)(p^2 - E)}. \quad (4.61)$$

Коли частинка рухається від початку координат до деякої точки класичного повороту, значення імпульсу  $p$  змінюється від  $+\infty$  до  $0$ , коли ж частинка повертається до початку координат, значення  $p$  змінюється від  $0$  до  $-\infty$ . Тому,  $-\oint x dp = \int_{-\infty}^{\infty} x dp$  і

$$2\pi(n + \delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{(1 + \beta p^2)(p^2 - E)} dp = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{\epsilon + \epsilon\sqrt{\beta}}}. \quad (4.62)$$

Тут взято до уваги, що для зв'язаних станів власні значення  $E$  є від'ємними, і ми знову ввели перепозначення  $E = -\epsilon$ .

Умова (4.62) співпадає з умовою квантування (4.51) і ми отримуємо такий самий спектр як і у формулі (4.55). Це співпадіння послужило підставою для більш детального дослідження способу квантування Бора-Зомерфельда та квазі-класичного підходу в цілому.

#### 4.4 Квазікласичне наближення в деформованому просторі з мінімальною довжиною

Стартуємо з одновимірного рівняння Шрьодінгера в деформованому просторі

$$\left[ \frac{P^2}{2m} + U(X) \right] \psi = E\psi, \quad (4.63)$$

причому оператори координати та імпульсу задовольняють наступне деформоване комутаційне співвідношення:

$$[X, P] = i\hbar f(P), \quad (4.64)$$

де  $f(P)$  деяка функція від  $P$ , в загальному випадку  $f(P) \neq 1$ . Ми вимагатимемо щоб  $f(P)$  була парною функцією. Ця вимога забезпечує інваріантність комутатора (4.64) по відношенню до дзеркального відображення:  $X \rightarrow -X$ ,  $P \rightarrow -P$ . Спочатку ми розглянемо загальну форму деформації. Частковий вигляд деформації у формі (4.1) буде проаналізовано більш детально в кінці цього підрозділу.

Щоб побудувати квазікласичну теорію розглянемо задачу в так званому квазі-координатному представленні:

$$X = x, \quad P = P(p), \quad p = -i\hbar \frac{d}{dx}. \quad (4.65)$$

З означень (4.64) та (4.65) отримаємо

$$\frac{dP(p)}{dp} = f(P). \quad (4.66)$$

З останньої рівності видно, що функція  $P(p)$  є непарною функцією (плюс константа інтегрування, яку ми для простоти подальшого аналізу покладемо рівною нулеві).

Щоб знайти дію оператора кінетичної енергії на хвильову функцію запишемо її у такому вигляді

$$\psi(x) = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(x) \right] \quad (4.67)$$

а оператор кінетичної енергії  $T(p) = \frac{P^2(p)}{2m}$  представимо у вигляді ряду по степенях  $p$ :

$$T \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right) = T_0 + T_1 \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right) + \frac{1}{2!} T_2 \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right)^2 + \frac{1}{3!} T_3 \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right)^3 + \dots \quad (4.68)$$

Обчислимо дію перших чотирьох доданків розкладу на хвильову функцію (4.67). Дія першого очевидна — зводиться до домноження на сталу  $T_0$ . Дію решти трьох можна побачити з таких співвідношень:

$$\left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(x) \right] = S'(x) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(x) \right],$$

$$\begin{aligned} \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2 \exp\left[\frac{i}{\hbar}S(x)\right] &= (S'(x)^2 - i\hbar S''(x)) \exp\left[\frac{i}{\hbar}S(x)\right], \\ \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^3 e^{\frac{i}{\hbar}S} &= (S'(x)^3 - 3i\hbar S'(x)S''(x) - \hbar^2 S'''(x)) e^{\frac{i}{\hbar}S}. \end{aligned}$$

Тут штрих позначає похідну по  $x$ . На основі вигляду цих формул можна зробити припущення, що дія  $n + 1$  члену розкладу оператора кінетичної енергії в лінійному наближенні по  $\hbar$  зводиться до

$$\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^n e^{\frac{i}{\hbar}S} = \left(S'(x)^n - i\hbar\frac{n(n-1)}{2}S'(x)^{n-2}S''(x)\right) e^{\frac{i}{\hbar}S}. \quad (4.69)$$

Тоді з цього припущення випливає, що дія  $n + 2$  члена розкладу зведеться до

$$\begin{aligned} \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^{n+1} e^{\frac{i}{\hbar}S} &= \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right) \left(S'(x)^n - i\hbar\frac{n(n-1)}{2}S'(x)^{n-2}S''(x)\right) e^{\frac{i}{\hbar}S} = \\ &= \left(S'(x)^{n+1} - i\hbar\frac{n(n+1)}{2}S'(x)^{n-1}S''(x) - \hbar^2\frac{n(n-1)}{2}(S'(x)^{n-1}S''(x))'\right) e^{\frac{i}{\hbar}S}. \end{aligned}$$

Бачимо, що в лінійному наближенні загальна форма (4.69) зберігається. Тому, з принципу математичної індукції випливає, що припущення (4.69) — вірне.

Ряд

$$T_0 + T_1 S'(x) + \frac{1}{2!} T_2 S'(x)^2 + \frac{1}{3!} T_3 S'(x)^3 + \dots$$

згортається до  $T(S'(x))$ . А ряд

$$-\frac{i\hbar}{2} S''(x) \left( \frac{1}{2!} 2T_2 + \frac{1}{3!} 3 \cdot 2T_3 S'(x) + \frac{1}{4!} 4 \cdot 3T_4 S'(x)^2 + \dots \right)$$

згортається до  $-\frac{i\hbar}{2} S''(x) T'(S'(x))$ .

Отже, в лінійному наближенні при розкладі по степенях  $\hbar$

$$P^2 \psi(x) = \left[ P^2(S'(x)) - \frac{i\hbar}{2} [P^2(S'(x))]'' S''(x) + \dots \right] \psi(x). \quad (4.70)$$

Відмітимо, що тут і надалі знак штриха позначає похідну від функції по відповідному аргументові функції. Так, наприклад:  $S'(x) = \frac{dS(x)}{dx}$ , а

$P'(S'(x)) = \frac{dP(S'(x))}{dS'(x)}$ . Розкладаючи  $S(x)$  в степеневий ряд по  $\frac{\hbar}{i}$

$$S(x) = S_0(x) + \frac{\hbar}{i}S_1(x) + \dots \quad (4.71)$$

ми отримаємо таку систему рівнянь для  $S$ :

$$\frac{P^2(S'_0(x))}{2m} + U(x) = E, \quad (4.72)$$

$$\frac{[P^2(S'_0(x))]'}{2m} \frac{\hbar}{i} S'_1(x) - \frac{i\hbar}{4m} [P^2(S'_0(x))]'' S''_0(x) = 0. \quad (4.73)$$

Тут перше рівняння не містить степенів  $\hbar$ , друге містить перший степінь. Третім рівнянням, яке містить  $\hbar^2$ , і наступними, які містять вищі степені  $\hbar$  ми знехтували. Система двох останніх рівнянь елементарно інтегрується і розв'язки записуються таким чином

$$S_0(x) = \int^x p \left( \pm \sqrt{2m(E - U(x))} \right) dx = \pm \int^x p(P) dx, \quad (4.74)$$

$$S_1(x) = -\frac{1}{2} \ln \left| [P^2(S'_0(x))]' \right| = -\frac{1}{2} \ln |2P(x)f(P)|, \quad (4.75)$$

де  $P = \sqrt{2m(E - U(x))}$  є функцією  $x$ ;  $p(P)$  — обернена функція до  $P(p)$ . При спрощенні отриманих результатів було взято до уваги, що  $p(P)$  так само як і  $P(p)$  непарна функція. Константи інтегрування в попередніх виразах опускалися, оскільки ми їх врахували в остаточному виразі для хвильової функції:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{|Pf(P)|}} \left( C_1 \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int^x p dx \right] + C_2 \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int^x p dx \right] \right). \quad (4.76)$$

Щоб отримати вираз для правила квантування Бора-Зомерфельда, ми повинні проаналізувати поведінку хвильової функції (4.76) на нескінченності, і розглянути умови зшивання в околі класичних точок повороту. Для зв'язаних станів цей аналіз веде до наступної умови квантування Бора-Зомерфельда

$$\int_{x_1}^{x_2} p dx = \pi \hbar (n + \delta), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.77)$$

де  $x_1$  та  $x_2$  є координатами точок повороту і задовольняють рівності  $U(x) = E$ ,  $\delta$  залежить від граничних умов і властивостей функції  $f(P)$  в околі 0. Якщо потенціальна енергія  $U(x)$  є гладкою функцією і якщо  $f(0) \neq 0$ , тоді  $\delta = 1/2$ .

Зауважимо, що для нових малих операторів  $x$  та  $p$  виконується канонічне комутаційне співвідношення, тому правило квантування (4.77) очікуване і використовувалося нами і в статті [29], і в попередньому підрозділі, як самоочевидне. В тій статті наступний рецепт знаходження спектру з допомогою правила квантування Бора-Зомерфельда використовувався: ми переписували гамільтоніан в малих операторах  $x$  та  $p$ , які задовольняли канонічне комутаційне співвідношення  $[x, p] = i\hbar$ . Далі з рівняння  $H(x, p) = E$  ми знаходили  $p = p(x, E)$ . І використовуючи правило квантування Бора-Зомерфельда (4.77), знаходили енергетичні рівні гамільтоніана.

Правило квантування (4.77) може бути зведене до більш зручної форми, використовуючи такий ланцюжок перетворень

$$\oint p dx = - \oint x dp = - \oint x dP \frac{dp}{dP}. \quad (4.78)$$

Тоді беручи до уваги вирази (4.65) та (4.66), отримаємо еквівалентну форму правила квантування Бора-Зомерфельда

$$- \oint \frac{X dP}{f(P)} = 2\pi\hbar(n + \delta). \quad (4.79)$$

Застосування цього правила не потребує переходу від початкових операторів  $X$  та  $P$  до канонічно спряжених операторів  $x$  та  $p$ ; і може бути використано до задачі на знаходження власних значень відразу.

WKB наближення застосовне, якщо другий член розкладу (4.70) набагато менший ніж перший. Тобто, воно коректне, якщо

$$P^2 \gg \frac{\hbar}{2} |[P^2(S'(x))]'' S''(x)| \approx \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d^2 P^2}{dp^2} \frac{dp}{dx} \right|, \quad (4.80)$$

тут ми наблизили  $S'(x) \approx p = S'_0(x)$ . Така апроксимація коректна в лінійному наближенні по степенях  $\hbar$ . Далі, використовуючи тотожність

$$\frac{d^2 P^2}{dp^2} = \frac{d}{dp}(2P f(P)),$$

ми отримали

$$P^2 \gg \hbar \left| \frac{d}{dx} P f(P) \right|. \quad (4.81)$$

Для недеформованого випадку вважається, що WKВ наближення є коректним для великих значень квантового числа  $n$  [67]. При наявності деформацій, умова застосовності (4.81) WKВ наближення може порушуватися як для дуже малих так і для дуже великих квантових чисел. Ми проаналізуємо це порушення більш детально для конкретного випадку деформації

$$f(P) = (1 + \beta P^2). \quad (4.82)$$

Цьому вигляду деформації, відповідно до формули (4.9), відповідає

$$P(p) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{tg} \sqrt{\beta} p, \quad p(P) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{arctg} \sqrt{\beta} P. \quad (4.83)$$

Така деформація (4.82–4.83) для гладких функцій потенціальної енергії  $U(x)$  дає  $\delta = 1/2$ .

Умова (4.81) запишеться так

$$P^2 \gg \hbar (1 + 3\beta P^2) \left| \frac{dP}{dx} \right|. \quad (4.84)$$

Для малих значень імпульсу ( $\beta P^2 \ll 1$ ) добре відомий вигляд умови застосовності WKВ наближення [67] впливає як наслідок попереднього виразу:

$$\hbar \left| \frac{d(1/P)}{dx} \right| \ll 1. \quad (4.85)$$

Для великих значень імпульсу ( $\beta P^2 \gg 1$ ) виконується наступна нерівність:

$$3\hbar\beta \left| \frac{dP}{dx} \right| \ll 1. \quad (4.86)$$

Можна зробити таку грубу оцінку для похідної від імпульсу

$$\left| \frac{dP}{dx} \right| \approx \frac{P}{a} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda a}, \quad (4.87)$$

де  $a$  — характерний розмір системи і приблизно рівний  $x_2 - x_1$ ,  $\lambda$  — довжина хвилі де-Бройля, яка відповідає імпульсу  $P$ . Ця оцінка при використанні формул (4.85), (4.86) дозволяє оцінити межі застосовності WKB наближення:

$$a \gg \lambda \gg \frac{\Delta X_{min}^2}{a}, \quad (4.88)$$

де  $\Delta X_{min} = \hbar\sqrt{\beta}$  мінімальна роздільна здатність, яка спричинена наявністю деформації. Цікаво відмітити, що якщо  $a \approx \Delta X_{min}$  то WKB наближення не є коректним для жодних значень імпульсу (головного квантового числа). Цей результат є очікуваним, бо характерний розмір системи повинен бути більшим ніж мінімальна довжина. Інакше на менших масштабах вся фізика та математика втрачає сенс: всі стани частинки стають нефізичними, для них кінетична енергія розбігається.

#### 4.4.1 Приклади застосування квазікласичного наближення до одновимірних задач у деформованому просторі

##### *Гармонічний осцилятор*

Запишемо гамільтоніан системи у стандартному вигляді

$$H = P^2 + X^2, \quad (4.89)$$

тут і надалі в цьому розділі ми з міркувань простоти поклали  $m = 1/2$ ,  $\omega = 2$  і  $\hbar = 1$ .

З  $H(P, X) = E$  отримаємо

$$X = \sqrt{E - P^2} \quad (4.90)$$



і умова квантування Бора-Зомерфельда (4.79) запишеться так

$$2 \int_{-\sqrt{E}}^{\sqrt{E}} \frac{\sqrt{E - P^2}}{1 + \beta P^2} dP = \frac{2\pi}{\beta} \left( \sqrt{1 + \beta E} - 1 \right) = 2\pi(n + 1/2). \quad (4.91)$$

З останнього рівняння знайдемо, що

$$E_n = (2n + 1) + \beta \left( n^2 + n + \frac{1}{4} \right). \quad (4.92)$$

Точний вираз для спектру гармонічного осцилятора був отриманий Кемпфом і співробітниками [24] виглядає так

$$E_n = (2n + 1) \left( \frac{\beta}{2} + \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{4}} \right) + \beta n^2 \approx (2n + 1) + \beta \left( n^2 + n + \frac{1}{2} \right) + O(\beta^2). \quad (4.93)$$

Як легко можна помітити, вирази записані формулами (4.92) та (4.93) в лінійному наближенні по  $\beta$  різняться на  $\beta/4$  і асимптотично співпадають для великих значень  $n$ .

Подвійна нерівність (4.88) записується наступним чином

$$\sqrt{n} \gg \frac{1}{\sqrt{n}} \gg \frac{\beta}{\sqrt{n}}. \quad (4.94)$$

Отже, при  $\beta \ll 1$  вона спрощується до звичайної умови застосовності WKВ наближення

$$n \gg 1.$$

### *Ангармонічний осцилятор*

Гамільтоніан запишемо так

$$H = P^2 + \gamma^N X^N, \quad (4.95)$$

де  $N$  — додатне парне число,  $\gamma^N$  — константа зв'язку.

Тоді з рівняння  $H(P, X) = E$  послідовно отримаємо

$$X = \frac{1}{\gamma} (E - P^2)^{1/N}. \quad (4.96)$$

i

$$2 \int_{-\sqrt{E}}^{\sqrt{E}} \frac{XdP}{1 + \beta P^2} = 2\pi(n + 1/2). \quad (4.97)$$

Цей інтеграл легко обчислюється в лінійному наближенні по  $\beta$ :

$$\frac{1}{1 + \beta P^2} \approx 1 - \beta P^2$$

і така оцінка спектру отримується

$$E_n = E_n^0 \left( 1 + \frac{2\beta}{(1 + 2/N)(3 + 2/N)} E_n^0 \right), \quad (4.98)$$

де  $E_n^0$  позначає енергію  $n$ -рівня отриману за допомогою методу Бора-Зомерфельда для випадку коли  $\beta = 0$ . Ці значення просто рахуються і є добре відомими [68]:

$$E_n^0 = \left[ \pi \frac{\Gamma(3/2 + 1/N)}{\Gamma(1/2)\Gamma(1 + 1/N)} \gamma(n + 1/2) \right]^{\frac{2N}{2+N}}. \quad (4.99)$$

Якщо  $N = 2$  відтворюється результат (4.92), отриманий для одновимірного гармонічного осцилятора в попередньому прикладі.

В границі  $N \rightarrow \infty$  потенціал  $\gamma^N X^N$  набуває форми нескінченно високої прямокутної ями. У цього випадку формула (4.98) спрощується до

$$E_n = \left( \frac{\pi\gamma(n + \frac{1}{2})}{2} \right)^2 + \frac{2}{3}\beta \left( \frac{\pi\gamma(n + \frac{1}{2})}{2} \right)^4, \quad (4.100)$$

Тут  $2/\gamma$  відіграє роль ширини потенціальної ями. Попередньо задача на власні значення для потенціальної ями була розглянута у праці [130] для довільного вигляду деформаційної функції  $f(P)$ . В лінійному наближенні по  $\beta$  їхній підхід для конкретного вигляду деформаційної функції  $f(P) = 1 + \beta P^2$  дає

$$E_n = \left( \frac{\pi n \gamma}{2} \right)^2 + \frac{2}{3}\beta \left( \frac{\pi n \gamma}{2} \right)^4, \quad (4.101)$$

Різниця між формулами (4.100) та (4.101) виникає як наслідок граничного переходу (адже  $\delta = 1/2$  для скінчених  $N$ , а для  $N = \infty$   $\delta = 0$ ).

Зауважимо, що безпосередній розгляд нескінченно високої ями у WKB наближенні дає той самий результат як і формула (4.101).

Вираз (4.88) дає наступну умову

$$1 \ll n \ll \frac{1}{\gamma^2 \beta}$$

застосовності WKB наближення для нескінченно високої потенціальної ями ( $N \rightarrow \infty$ ). Видно, що наближення не є справедливим для малих  $n$  (як і в не деформованому випадку), але так само стає хибним і для дуже великих  $n$ .

$-1/X^2$  потенціал

Розглянемо такий гамільтоніан

$$H = P^2 - \frac{\gamma}{X^2}, \quad \gamma > 0. \quad (4.102)$$

Зауважимо, що тільки для негативних значень енергії можуть існувати зв'язані стани. З рівняння  $H(X, P) = E$  знаходимо

$$X = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{P^2 - E}}. \quad (4.103)$$

Тоді правило квантування (4.79) може бути переписати таким способом

$$\begin{aligned} & 4 \int_0^\infty \frac{\sqrt{\gamma} dP}{\sqrt{P^2 - E}(1 + \beta P^2)} = \\ & = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{1 + E\beta}} \ln \left( \frac{2 + 2\sqrt{1 + E\beta} + E\beta}{2 - 2\sqrt{1 + E\beta} + E\beta} \right) = 2\pi(n + \delta), \end{aligned} \quad (4.104)$$

де  $\delta$  залежить від граничних умов (якщо вважати, що бар'єр в 0 є непроникним то  $\delta = 3/4$ , інакше  $\delta = 1/2$ ). Рівняння (4.104) може бути розв'язане для малих  $\beta$ , і цей розв'язок дає

$$E_n = -\frac{4}{\beta} e^{-\pi(n+\delta)/\sqrt{\gamma}}. \quad (4.105)$$

Для  $\beta \rightarrow 0$  видно, що  $E_n \rightarrow -\infty$ . Це відповідає факту, що для недеформованого випадку не існує жодного зв'язаного стану для цього потенціалу. Отже, деформація простору веде до можливого існування зв'язаних станів для потенціалу  $-1/X^2$ : для даного випадку деформація усуває сингулярність потенціалу. Також відмітимо, що результат (4.105) був отриманий з припущення, що  $\beta E_n \ll 1$ . Для малих значень  $n$  це припущення не виконується. Тому отриманий результат вірний тільки для великих  $n$ .

Спроба проаналізувати застосовність WKБ наближення за допомогою формули (4.88) наштовхується на серйозні труднощі: в точці сингулярності і  $\frac{dP}{dx}$ , і  $P$  зростають до нескінченності. І відповідно, правило (4.88) вказує на незастосовність WKБ наближення для будь-яких значень квантового числа  $n$ . Зауважимо, що WKБ наближення стикається з таким ж проблемами для сингулярних потенціалів і в недеформованому просторі (як приклад аналізу застосовності WKБ наближення можна навести працю [145]). Але при цьому WKБ наближення дає правильні результати для недеформованого випадку. Тому ми можемо очікувати, що отримані результати для спектру (4.105) мають задовільну точність.

Наступні міркування непрямо підтверджують формулу (4.105). Якщо ввести перенормовані оператори координати та імпульсу

$$\tilde{X} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}X, \quad \tilde{P} = \sqrt{\beta}P \quad (4.106)$$

то комутаційне співвідношення набуде вигляду незалежного від параметру деформації  $\beta$

$$[\tilde{X}, \tilde{P}] = i(1 + \tilde{P}^2), \quad (4.107)$$

а гамільтоніан перепишеться так

$$H = \frac{1}{\beta} \left( \tilde{P}^2 - \frac{\gamma}{\tilde{X}^2} \right). \quad (4.108)$$

Оскільки комутатор (4.107) не залежить від  $\beta$ , а в гамільтоніані (4.108)  $\beta$  виноситься за дужки, то спектр гамільтоніану повинен бути пропорційним до  $1/\beta$ , що і демонструється формулою (4.105).

#### 4.4.2 Приклади застосування квазікласичного наближення до тривимірних задач зі сферичною симетрією у деформованому просторі

В попередніх підрозділах ми вивели правило квантування Бора-Зомерфельда (4.77) і (4.79) для одновимірного простору і на декількох прикладах ми показали, що застосування цього правила веде до задовільних результатів. Приклади, наведені в цьому підрозділі показують, що ми можемо використовувати це правило і до тривимірних задач з радіальною симетрією та отримувати результати задовільної точності.

Зазвичай одновимірне деформоване комутаційне співвідношення узагальнюється до наступного вигляду у тривимірному випадку [138]:

$$[X_i, P_j] = i(1 + \beta P^2)\delta_{ij} + i\beta' P_i P_j. \quad (4.109)$$

Для цього комутаційного співвідношення існує просте імпульсне представлення для операторів імпульсу та координат:

$$X_i = (1 + \beta p^2)x_i + \beta' p_i \sum_{j=1}^3 p_j x_j, \quad P_i = p_i. \quad (4.110)$$

В квазі-класичному наближенні оператори замінюються відповідними змінними, які комутують, і

$$X^2 = [1 + (\beta + \beta')p^2]^2 x_p^2 + (1 + \beta p^2)^2 \frac{L^2}{p^2}. \quad (4.111)$$

Тут ми перейшли до сферичної системи координат  $(p, \theta, \phi)$ ;  $x_p = \frac{(\vec{x} \cdot \vec{p})}{p}$  позначає “радіальну частину” координати,  $L^2$  — кутову частину квадрату радіус-вектора. В недеформованому випадку тривимірна задача

з радіальною симетрією в квазі-класичному підході ефективно зводиться до одновимірної задачі заміною  $L^2$  на  $(l + 1/2)^2$  [67],  $l$  — орбітальне квантове число. В цьому підрозділі покажемо на прикладах, що і в деформованому просторі ця заміна веде до задовільної точності результатів.

### *Атом водню*

Класичний гамільтоніан записується так

$$H(p, x) = P^2 - \frac{\gamma}{X} = p^2 - \frac{\gamma}{\sqrt{[1 + (\beta + \beta')p^2]^2 x_p^2 + (1 + \beta p^2)^2 \left(\frac{l+1/2}{p}\right)^2}}. \quad (4.112)$$

Відмітимо, що енергія зв'язаних станів є від'ємною. Далі з рівняння  $H(p, x) = E$  отримаємо

$$x_p = \frac{1}{1 + (\beta + \beta')p^2} \sqrt{\frac{\gamma^2}{(p^2 - E)^2} - (1 + \beta p^2)^2 \left(\frac{l + 1/2}{p}\right)^2} \quad (4.113)$$

і умова квантування Бора-Зомерфельда запишеться так

$$2 \int_{p_{min}}^{p_{max}} x_p dp = 2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (4.114)$$

тут  $p_{max}$ ,  $p_{min}$  позначають додатні корені такого рівняння

$$\frac{\gamma^2}{(p^2 - E)^2} - (1 + \beta p^2)^2 \left(\frac{l + 1/2}{p}\right)^2 = 0. \quad (4.115)$$

У лівій частині цього рівняння стоїть підкореневий вираз з формули (4.113).

Інтеграл (4.114) є надзвичайно громіздкий, тому ми розклали його за степенями  $\beta$  та  $\beta'$ . В лінійному наближенні він спроститься до

$$\begin{aligned} \int_{p_{min}}^{p_{max}} x_p dp \approx & \int_{p_{min}}^{p_{max}} \sqrt{\dots} dp - (\beta + \beta') \int_{p_{min}}^{p_{max}} \sqrt{\dots} p^2 dp - \\ & - \beta \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 \int_{p_{min}}^{p_{max}} \frac{dp}{\sqrt{\dots}}, \end{aligned} \quad (4.116)$$

де введено позначення

$$\sqrt{\dots} = \sqrt{\frac{\gamma^2}{(p^2 - E)^2} - \left(\frac{l + 1/2}{p}\right)^2}.$$

У цьому ж лінійному наближенні рівняння на знаходження  $p_{max}$ ,  $p_{min}$  (4.115) зводиться до простішого, яке легко розв'язується:

$$\frac{\gamma^2}{(p^2 - E)^2} - \left(\frac{l + 1/2}{p}\right)^2 = 0.$$

Поправка до рівняння (4.116) спричинена наближеним визначенням  $p_{max}$ ,  $p_{min}$  — квадратична по  $\beta$ ,  $\beta'$ . Тому нею ми нехтуємо.

Інтегрування виразу (4.116) приводить до

$$\begin{aligned} \pi \left(n + \frac{1}{2}\right) &= -\pi \left(l + \frac{1}{2}\right) + \frac{\gamma\pi}{2\sqrt{-E}} - \\ &- \pi(\beta + \beta')\gamma \left(\frac{\gamma}{4(l + 1/2)} - \frac{\sqrt{-E}}{2}\right) - \pi\beta\frac{\gamma^2}{4} \frac{1}{l + 1/2}. \end{aligned} \quad (4.117)$$

Тоді розв'язок рівняння (4.114) в лінійному наближенні буде

$$E_{n,l} \approx -\frac{\gamma^2}{4n^2} + \frac{\gamma^4}{8n^3} \left(\beta \left[\frac{2}{l + 1/2} - \frac{1}{n}\right] + \beta' \left[\frac{1}{l + 1/2} - \frac{1}{n}\right]\right). \quad (4.118)$$

Раніше вирази для спектру атому водню були отримані в лінійному наближенні Бенчиком та співробітниками [140] за допомогою теорії збурень. Їхній вираз у порівнянні з нашим містить один додатковий член

$$\frac{\gamma^4}{16n^3} \frac{2\beta - \beta'}{l(l + 1)(l + 1/2)}.$$

Для великих  $l$  цей вираз є набагато меншим в порівнянні з рештою членів. Отже, для атому водню правило квантування Бора-Зомерфельда забезпечує задовільну точність.

*Гармонічний осцилятор*

Гамільтоніан системи в малих канонічних змінних записується так

$$H = P^2 + X^2 = p^2 + [1 + (\beta + \beta')p^2]^2 x_p^2 + (1 + \beta p^2)^2 \frac{(l + 1/2)^2}{p^2}. \quad (4.119)$$

Далі з рівняння  $H(p, x) = E$  отримуємо

$$x_p = \frac{1}{1 + (\beta + \beta')p^2} \sqrt{E - p^2 - (1 + \beta p^2)^2 \left(\frac{l + 1/2}{p}\right)^2}. \quad (4.120)$$

Відповідний контурний інтеграл може бути почислений точно, але остаточні вирази будуть доволі громіздкими. З іншого боку, як ми бачили на попередніх прикладах, правило квантування Бора-Зомерфельда дає правильні результати тільки в лінійному наближенні по  $\beta$ ,  $\beta'$ . Тому ми числимо цей інтеграл в лінійному наближенні:

$$\frac{\pi}{2}E - \frac{\pi}{2}(\beta - \beta')(l + 1/2)^2 - \pi(l + 1/2) - \frac{\pi}{8}(\beta + \beta')E^2 = 2\pi(n_p + 1/2), \quad (4.121)$$

звідки отримуємо

$$E_n = 2n + 3 + (\beta + \beta')(n + 3/2)^2 + (\beta - \beta')(l + 1/2)^2, \quad (4.122)$$

де ми ввели звичайне позначення  $n = 2n_p + l$ . Спектр тривимірного гармонічного осцилятора був порахований точно у [135]. Різниця між їхнім точним та нашим наближеним результатом становить

$$2\beta - \frac{\beta'}{2}. \quad (4.123)$$

Знову бачимо, що метод квантування Бора-Зомерфельда дає асимптотично точні результати для великих  $n$  та  $l$ : для великих значень квантових чисел різниця між точним та наближеним значенням спектру (4.123) стає набагато меншою ніж основний член наближення (4.122).



## 4.5 Висновки до четвертого розділу

В цьому розділі було отримано два основних результати: спектр одновимірної кулонівської задачі в деформованому просторі

$$E_n = -\frac{1}{4\beta} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{n + \delta} \sqrt{\beta}} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

та побудовано правило квантування Бора-Зомерфельда для випадку деформованого простору. Також, розглядалися деформації, які приводять до обмеження кінетичної енергії. На прикладі алгебр з такими деформаціями було показано можливість пошуку спектрів гамільтоніанів алгебраїчними методами, навіть якщо невідоме представлення операторів координати та імпульсу.

Спектр кулонівської задачі шукався з умови, що відповідний гамільтоніан є ермітовим оператором на множині своїх власних функцій.

Було показано, що наявність деформації (4.1) не усуває сингулярності потенціалу  $-1/X$ . Правильність отриманого спектру була перевірена використанням правила квантування Бора-Зомерфельда.

Розвинуто квазікласичне наближення і, відповідно, отримано вираз для правила квантування Бора-Зомерфельда в деформованому просторі:

$$-\oint \frac{X dP}{f(P)} = 2\pi\hbar(n + \delta).$$

Проаналізовано межі застосовності цього наближення. Правильність правила квантування перевірена на прикладах, які мають точні розв'язки (гармонічний осцилятор, атом водню, ...). Отримано добре узгодження точних значень спектрів та наближених, отриманих з допомогою правила квантування Бора-Зомерфельда. Показано, що отримане правило може бути застосоване також до тривимірних систем з радіальною симетрією.

## ВИСНОВКИ

1. Знайдено загальний вигляд для суперпотенціалу  $PT$ -симетричного гамільтоніану Шрьодінгера. Завдяки цьому побудовано зручний метод факторизації  $PT$ -симетричних гамільтоніанів, що дало змогу знайти один рівень таких гамільтоніанів. Для ілюстрації методу побудовано два квазі-точно розв'язувані гамільтоніани з одним відомим рівнем.
2. Грунтуючись на властивостях псевдоермітових операторів запропоновано новий підхід до побудови неермітових гамільтоніанів з дійсним спектром. Отримані гамільтоніани характеризуються дійсним параметром  $\alpha$ . Якщо  $\alpha < 0$  побудовані гамільтоніани мають повністю дійсний спектр. Якщо  $\alpha = 0$  спектр теж повністю дійсний, крім того явно стає відомий один рівень. При  $\alpha > 0$  отримані гамільтоніани теж квазі-точно розв'язувані з одним відомим власним рівнем, але цей рівень — комплексний. Застосування методу проілюстровано трьома прикладами.
3. Задачу про побудову багатовимірного квазі-точно розв'язуваного потенціалу з двома відомими рівнями було зведено до розв'язування неоднорідного лінійного рівнянням першого порядку в часткових похідних. Це рівняння розв'язано для двох часткових виглядів генеруючої функції. Побудовані явні приклади, які ілю-

струють даний підхід.

4. Розвинуто методику побудови квазі-точно розв'язуваних нестационарних рівнянь Шрьодінгера з одним відомим розв'язком. Побудовані явні приклади гамільтоніанів з відповідними хвильовими функціями. Зокрема, проаналізовано приклад, в якому поведінка частинки підкоряється квантовому ефекту Капіці.
5. Вперше точно розв'язана одновимірна кулонівська задача у деформованому просторі з мінімальною довжиною. Умова ермітовості гамільтоніана на множині його власних функцій слугувала умовою квантування. На прикладі цього гамільтоніану показано, що наявність деформації, яка приводить до існування мінімальної невизначеності координати, необов'язково усуває проблеми пов'язані зі сингулярністю потенціалу.
6. Узагальнено квазікласичне наближення на випадок одновимірного деформованого простору. Проаналізовано його застосовність. Вперше знайдено правило квантування Бора-Зомерфельда:

$$- \oint \frac{XdP}{f(P)} = 2\pi\hbar(n + \delta).$$

Правильність правила квантування перевірена на одновимірних прикладах, які мають точні розв'язки. Отримано добре узгодження результатів. На прикладах показано, що правило квантування можна застосовувати для тривимірних потенціалів з радіальною симетрією.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Dirac P. A. M. The physical interpretation of quantum mechanics // Proc. Roy. Soc. London A.— 1942.— V. 180, No. 980.— P. 1–40.
- [2] Schrödinger E. A Method of Determining Quantum-Mechanical Eigenvalues and Eigenfunctions // Proc. R. Irish Acad. A.— 1940.— V. 46.— P. 9–16; Further Studies on Solving Eigenvalue Problems by Factorization // Proc. R. Irish Acad. A.— 1940.— V. 46.— P. 183–206.
- [3] Infeld L., Hull T. E. The Factorization Method // Rev. Mod. Phys.— 1951.— V. 23, No. 1.— P. 21–68.
- [4] Nicolai H. Supersymmetry and spin systems // J. Phys. A.— 1976.— V. 9, No. 9.— P. 1497–1506.
- [5] Witten E. Dynamical breaking of supersymmetry // Nucl. Phys. B.— 1981.— V. 188, Iss. 3.— P. 513–554.
- [6] Генденштейн Л. Э. Нахождение точных спектров уравнения Шредингера с помощью суперсимметрии // Письма в Журн. эксп. теор. физ.— 1983.— Т. 38, вып. 6.— С. 299–302.
- [7] Cooper F., Khare A., Sukhatme U. Supersymmetry and quantum mechanics // Phys. Rep.— 1995.— V. 251, Iss. 5–6.— P. 267–385.

- [8] Singh V., Biswas S. N., Dutta K. Anharmonic oscillator and the analytic theory of continued fractions // Phys. Rev. D.— 1978.— V. 18, No. 6.— P. 1901–1908.
- [9] Flessas G. P. Exact solutions for a doubly anharmonic oscillator // Phys. Lett. A.— 1979.— V. 72, Iss. 4–5.— P. 289–290.
- [10] Razavy M. A potential model for torsional vibrations of molecules // Phys. Lett. A.— 1981.— V. 82, Iss. 1–2.— P. 7–9.
- [11] Khare A. Some comments about the exact solutions for the doubly anharmonic oscillator // Phys. Lett. A.— 1981.— V. 83, Iss. 6–8.— P. 237–238.
- [12] Pauli W. On Dirac's New Method of Field Quantization // Rev. Mod. Phys.— 1943.— V. 15, No. 3.— P. 175–207.
- [13] Bender C. M., Boettcher S. Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having  $PT$  Symmetry // Phys. Rev. Lett.— 1998.— V. 80, No. 24.— P. 5243–5246.
- [14] Bender C. M., Boettcher S., Meisinger P. N.  $PT$ -Symmetric Quantum Mechanics // J. Math. Phys.— 1999 — V. 40, Iss. 5.— P. 2201–2229.
- [15] Bender C. M. The complex pendulum // Phys. Rep.— 1999.— V. 315, Iss. 1–3.— P. 27–40.
- [16] Keller C., Oberthaler M. K., Abfalterer R., Bernet S., Schmiedmayer J., Zeilinger A. Tailored Complex Potentials and Friedel's Law in Atom Optics // Phys. Rev. Lett.— 1997.— V. 79, No. 18.— P. 3327–3330.

- [17] Berry M., O'Dell D. Diffraction by volume gratings with imaginary potentials // J. Phys. A.— 1998.— V. 31, No. 8.— P. 2093–2101.
- [18] Fogedby H. C., Eriksson A. B., Mikheev L. V. Continuum Limit, Galilean Invariance, and Solitons in the Quantum Equivalent of the Noisy Burgers Equation // Phys. Rev. Lett.— 1995.— V. 75, No. 10.— P. 1883–1886.
- [19] Hatano N., Nelson D. R. Localization Transition in Non-Hermitian Quantum Mechanics // Phys. Rev. Lett.— 1996.— V. 77, No. 3.— P. 77–79.
- [20] Snyder H. S. Quantized Space-Time // Phys. Rev.— 1947.— V. 71, No. 1.— P. 38–41.
- [21] Gross D. J., Mende P. F. String theory beyond the Planck scale // Nucl. Phys. B.— 1988.— V. 303, Iss. 3.— P. 407–454.
- [22] Maggiore M. A generalized uncertainty principle in quantum gravity // Phys. Lett. B.— 1993.— V. 304, Iss. 1–2.— P. 65–69.
- [23] Kempf A. Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry // J. Math. Phys.— 1994.— V. 35, Iss. 9.— P. 4483–4496.
- [24] Kempf A., Mangano G., Mann R. B. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation // Phys. Rev. D.— 1995.— V. 52, Iss. 2.— P. 1108–1118.
- [25] Tkachuk V. M., Fityo T. V., Factorization and superpotential of the PT symmetric Hamiltonian // J. Phys. A.— 2001.— V. 34, No. 41.— P. 8673–8677.

- [26] Fityo T. V. A new class of non-Hermitian Hamiltonians with real spectra // J. Phys. A.— 2002.— V. 35, No. 28.— P. 5893–5897.
- [27] Tkachuk V. M., Fityo T. V., Multidimensional quasi-exactly solvable potentials with two known eigenstates // Phys. Lett. A.— 2003.— V. 309, Iss. 5–6.— P. 351–356.
- [28] Fityo T. V., Tkachuk V. M. Time-dependent Schrödinger equation with one known solution // J. Phys. Stud. (Lviv).— 2005.— V. 9, No. 4.— P. 299–303.
- [29] Fityo T. V., Vakarchuk I. O., Tkachuk V. M., One dimensional Coulomb-like problem in deformed space with minimal length // J. Phys. A.— 2006.— V. 39, No. 9.— P. 2143–2149.
- [30] Fityo T. V., Vakarchuk I. O., Tkachuk V. M., WKB approximation in deformed space with minimal length // J. Phys. A.— 2006.— V. 39, No. 2.— P. 379–387.
- [31] Фітьо Т. Деформована алгебра Гайзенберга з верхнім обмеженням імпульсу // Всеукраїнська конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики Еврика–2003, Львів, 21–23 травня 2003р.: збірник тез.— Львів.— 2003.— С. 157.
- [32] Фітьо Т. В. Побудова багатовимірних квазіточно розв'язуваних потенціалів з двома відомими власними функціями // Конференція молодих учених і аспірантів ІЕФ–2003, Ужгород, 10–12 вересня 2003р.: програма і тези доповідей.— Ужгород.— 2003.— С. 70.

- [33] Фітьо Т. Новий клас неермітових операторів з дійсним спектром // Міжнародна конференція студентів і молодих вчених з теоретичної та експериментальної фізики Еврика-2005, Львів, 24–26 травня 2005р.: збірник тез.— Львів.— 2005.— С. 30–31.
- [34] Fityo T., Tkachuk V., Vakarchuk I. 1D Coulomb problem with deformed Heisenberg algebra // Sixth International Conference: Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics, Kyiv, June 20–26, 2005:  
<http://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2005/Fityo.html>.
- [35] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. IV: Анализ операторов.— Москва: Мир, 1982.— 428 с.
- [36] Адрианов А. А., Борисов Н. В., Иоффе М. В. Квантовые системы с одинаковыми спектрами энергии // Письма в Журн. эксп. теор. физ.— 1984.— Т. 39, вып. 2.— С. 78–81.
- [37] Tkachuk V. M., Vakarchuk S. I.  $N = 4$  Supersymmetry of Electron in the Magnetic Field // Journal of Physical Studies (Lviv).— 1996.— V.1, No. 1.— P.39–41.
- [38] Tkachuk V. M., Vakarchuk S. I. Supersymmetry of the Electron in a Three-Dimensional Magnetic Field // Phys. Lett. A.— 1997.— V. 228, Iss. 3.— P. 141–145.
- [39] Morse Ph. Diatomic molecules according to the wave mechanics. II. Vibrational levels // Phys. Rev.— 1929.— V. 34, Iss. 1.— P. 57–64.
- [40] Barclay D. T. et al. New exactly solvable Hamiltonians: Shape-invariance and self-similarity // Phys. Rev. A.— 1993.— V. 48, No. 4.— P. 2786–2797.



- [41] Cannata F., Ioffe M., Nishnianidze D. N. New methods for the two-dimensional Schrödinger equation: SUSY-separation of variables and shape invariance // J. Phys. A.— 2002.— V. 35, No. 6.— P. 1389–1404.
- [42] Lévai G., Znojil M. Systematic search for  $PT$ -symmetric potentials with real energy spectra // J. Phys. A.— 2000.— V. 33, No. 40.— P. 7165–7180.
- [43] Quesne C., Tkachuk V. M. Harmonic oscillator with nonzero minimal uncertainties in both position and momentum in a SUSYQM framework // J. Phys. A: Math. Gen.— 2003.— V. 36, No. 41.— P. 10373–10389.
- [44] Quesne C., Tkachuk V. M. More on a SUSYQM approach to the harmonic oscillator with nonzero minimal uncertainties in position and/or momentum // J. Phys. A.— 2004.— V. 37, No. 43.— P. 10095–10113.
- [45] Darboux M. G., Sur une proposition relative aux équations linéaires // C. R. Acad. Sci. Paris.— 1882.— V. 94.— P. 1456–1459; arXiv: physics/9908003.
- [46] Cannata F., Junker G., Trost J. Schrödinger operators with complex potential but real spectrum // Phys. Lett. A.— 1998.— V. 246, Iss. 3–4.— P. 219–226.
- [47] Bagrov V. G., Samsonov B. F. Supersymmetry of a nonstationary Schrödinger equation // Phys. Lett. A.— 1996.— V. 210, Iss. 1–2.— P. 60–64.

- [48] Cannata F., Ioffe M., Junker G., Nishnianidze D. Intertwining relations of non-stationary Schrödinger operators // J. Phys. A.— 1999.— V. 32, No. 19.— P. 3583–3598.
- [49] Bluman G., Shtelen V. New classes of Schrödinger equations equivalent to the free particle equation through non-local transformations // J. Phys. A.— 1996.— V. 29, No. 15.— P. 4473–4480.
- [50] Mostafazadeh A. Time-dependent diffeomorphisms as quantum canonical transformations and the time-dependent harmonic oscillator // J. Phys. A.— 1998.— V. 31, No. 30.— P. 6495–6503.
- [51] Натанзон Г. А. Исследование одномерного уравнения Шредингера, порождаемого гипергеометрическим уравнением // Вестник Ленинградского университета.— 1971.— №10, вып. 10.— С. 22–28.
- [52] Ushveridze A. G. Quasi-Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics.— Bristol [England]; Philadelphia: Institute of Physics, 1994.— xiv + 465 p.
- [53] Tkachuk V. M. Quasi-exactly solvable potentials with two known eigenstates // Phys. Lett. A.— 1998.— V. 245, Iss. 3–4.— P. 177–182.
- [54] Tkachuk V. M. Supersymmetric Method for Constructing Quasi-Exactly and Conditionally-Exactly Solvable Potentials // J. Phys. A.— 1999.— V. 32, No. 7.— P. 1291–1300.
- [55] Tkachuk V. M., Supersymmetric approach for generating quasi-exactly solvable potentials with arbitrary two known eigenstates // J. Phys. A.— 2001.— V. 34, No. 32, P. 6339–6348.

- [56] Dolya S. N., Zaslavskii O. V. A general approach to potentials with two known levels // J. Phys. A.— 2001.— V. 34, No. 10.— P. 1981–1989.
- [57] Kuliya T. V., Tkachuk V. M. Quasi-Exactly Solvable Potentials with Three Known Eigenstates // J. Phys. A.— 1999.— V. 32, No. 11.— P. 2157–2169.
- [58] Debergh N., Ndimubandi J., van den Bossche B. A General Approach of Quasi-Exactly Solvable Schrödinger Equations with Three Known Eigenstates // Int. J. Mod. Phys. A.— 2003.— V. 18, No. 29.— P. 5421–5432.
- [59] Vachaspati T. Bound states in bottomless potentials // Phys. Rev. A.— 2002.— V. 66, No. 1.— 014104—P. 1–2.
- [60] Gangopadhyaya A., Khare A., Sukhatme U. P. Methods for generating quasi-exactly solvable potentials // Phys. Lett. A.— 1995.— V. 208, Iss. 4–6.— P. 261–268.
- [61] Турбинер А. В. Квантовая механика: задачи, промежуточные по отношению к точнорешаемым и точнонерешаемым // Журн. эксп. теор. физ.— 1988.— Т. 94, вып. 2.— С. 33–44.
- [62] Заславский О. Б., Ульянов В. В., Цукерник В. М. К теории низкотемпературной восприимчивости спиновых систем с магнитной анизотропией // Физ. низк. темп.— 1983.— Т. 9, № 5.— С. 511–519.
- [63] Заславский О. Б., Ульянов В. В. Новые классы точных решений уравнения Шредингера и описание спиновых систем с помощью потенциальных полей // Журн. эксп. теор. физ.— 1984.— Т. 87, Вып. 5(11).— С. 1724–1733.

- [64] Ghosh R. K., Rao S. Exactly solvable models in arbitrary dimensions // *Phys. Lett. A.*— 1998.— V. 238, Iss. 4–5.— P. 213–218.
- [65] Bender C. M., Boettcher S. Quasi-exactly solvable quartic potential // *J. Phys. A.*— 1998.— V. 31, No. 14.— P. L273–L277.
- [66] Bagchi B., Cannata F., Quesne C. PT-symmetric sextic potentials // *Phys. Lett. A.*— 2000.— V. 269, Iss. 2–3.— P. 79–82.
- [67] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика (нерелятивистская теория).— Москва: Наука, 1989.— 768с.
- [68] Вакарчук І. О. Квантова механіка.— Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2004.— 784с.
- [69] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. I: Функциональный анализ.— Москва: Мир, 1977.— 358 с.
- [70] Kleefeld F. Non-Hermitian Quantum Theory and its Holomorphic Representation: Introduction and Some Applications // preprint arXiv: hep-th/0408028.— 2004.
- [71] Horne M., Jex I., Zeilinger A. Schrödinger wave functions in strong periodic potentials with application to atom optic // *Phys. Rev. A.*— 1999.— V. 59, No. 3.— P. 2190–2202.
- [72] Woods R. D., Saxon D. S. Diffuse Surface Optical Model for Nucleon-Nuclei Scattering // *Phys. Rev.*— 1954.— V. 95, Iss. 2.— P. 577–578.
- [73] Menet J. J. H., Gross E. E., Malanify J. J., Zucker A. Total-Reaction-Cross-Section Measurements for 30-60-MeV Protons and the Imaginary Optical Potential // *Phys. Rev. C.*— 1971.— V. 4, No. 4.— P. 1114–1129.

- [74] Bender C., Milton K. Nonperturbative calculation of symmetry breaking in quantum-field theory // Phys. Rev. D.— 1999.— V. 55, No. 6.— P. 3255–3259.
- [75] Andrianov A. A., Ioffe M. V., Cannata F., Denonder J.-P. SUSY quantum mechanics with complex superpotentials and real energy spectra // Int. J. Mod. Phys. A.— 1999.— V. 14, No. 17.— P. 2675–2688.
- [76] Znojil M., Cannata F., Bagchi B., Roychoudhury R. Supersymmetry without hermiticity within symmetric quantum mechanics // Phys. Lett. B.— 2000.— V. 483, Iss. 1–3.— P. 284–289.
- [77] Bagchi B., Roychoudhury R. A new  $PT$ -symmetric complex Hamiltonian with a real spectrum // J. Phys. A.— 2000.— V. 33, No. 1.— P. L1–L3.
- [78] Cannata F., Ioffe M., Roychoudhury R., Roy P., A new class of  $PT$ -symmetric Hamiltonians with real spectra // Phys. Lett. A.— 2001.— V. 281, Iss. 5–6.— P. 305–310.
- [79] Znojil M.  $PT$ -symmetrized Supersymmetric Quantum Mechanics // Czech. J. Phys.— 2001.— V. 51, No. 4.— P. 420–428.
- [80] Bagchi B., Mallik S., Quesne C. Generating complex potentials with real eigenvalues in supersymmetric quantum mechanics // Int. J. Mod. Phys. A.— 2001.— V. 16, No. 16.— P. 2859–2872.
- [81] Dorey P., Dunning C., Tateo R. Supersymmetry and the spontaneous breakdown of  $PT$  symmetry // J. Phys. A.— 2001.— V. 34, No. 28.— P. L391–L400.

- [82] Khare A., Mandal B. P. A  $PT$ -invariant potential with complex QES eigenvalues // Phys. Lett. A.— 2000.— V. 272, Iss. 1–2.— P. 53–56.
- [83] Mostafazadeh A. Pseudo-Hermiticity versus  $PT$  symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian // J. Math. Phys.— 2002.— V. 43, No. 1.— P. 205–214.
- [84] Mostafazadeh A. Pseudo-Hermiticity versus  $PT$  symmetry. II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with a real spectrum // J. Math. Phys.— 2002.— V. 43, No. 5.— P. 2814–2816.
- [85] Mostafazadeh A. Pseudo-Hermiticity versus  $PT$  symmetry III: Equivalence of pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries // J. Math. Phys.— 2002.— V. 43, No. 8.— P. 3944–3951.
- [86] Bagchi B., Mallik S., Quesne C., Roychoudhury R. A  $PT$ -symmetric QES Partner to the Khare Mandal potential with real eigenvalues // Phys. Lett. A.— 2001.— V. 289, Iss. 1–2.— P. 34–38.
- [87] Znojil M. Conservation of pseudo-norm in  $PT$  symmetric quantum mechanics // Rendic. Circ. Mat. Palermo, Ser. II, Suppl.— 2004.— V. 72.— P. 211–218; preprint arXiv: math-ph/0104012.— 2001.
- [88] Bagchi B., Quesne C., Znojil M. Generalized continuity equation and modified normalization in  $PT$ -symmetric quantum mechanics // Mod. Phys. Let. A.— 2001.— V. 16, No. 31.— P. 2047–2057.
- [89] Znojil M.,  $PT$ -symmetric harmonic oscillators // Phys. Lett. A.— 1999.— V. 259, Iss. 3–4.— P. 220–223.
- [90] Ahmed Z. Pseudo-Hermiticity of Hamiltonians under imaginary shift of the co-ordinate: real spectrum of complex potentials // Phys. Lett. A.— 2001.— V. 290, Iss. 1–2.— P. 19–22.

- [91] Delabaere E., Pham F. Eigenvalues of complex Hamiltonians with  $PT$ -symmetry. I // Phys. Lett. A.— 1998.— V. 250, Iss. 1–3.— P. 25–28; Delabaere E., Pham F. Eigenvalues of complex Hamiltonians with  $PT$ -symmetry. II // Phys. Lett. A.— 1998.— V. 250, Iss. 1–3.— P. 29–32.
- [92] Dorey P., Dunning C., Tateo R. Spectral equivalences, Bethe ansatz equations, and reality properties in  $PT$ -symmetric quantum mechanics // J. Phys. A.— 2001.— V. 34, No. 28.— P. 5679–5704.
- [93] Shin K. C. On the Reality of the Eigenvalues for a Class of  $PT$ -Symmetric Oscillators // Commun. Math. Phys.— 2002.— V. 229, No. 3.— P. 543–564.
- [94] Mostafazadeh A. Probability Interpretation for Klein-Gordon Fields and the Hilbert Space Problem in Quantum Cosmology // preprint arXiv: gr-qc/0205049.— 2002.
- [95] Kretschmer R., Shymanowski L. The Interpretation of Quantum-Mechanical Models with Non-Hermitian Hamiltonians and Real Spectra // preprint arXiv: quant-ph/0105054.— 2001.
- [96] Kretschmer R., Shymanowski L. Quasi-Hermiticity in infinite-dimensional Hilbert spaces // Phys. Lett. A.— 2004.— V. 325, Iss. 2.— P. 112–117.
- [97] Debergh N., Samsonov B. F., van den Bossche B. Darboux transformations for quasi-exactly solvable Hamiltonians // Int. J. Mod. Phys. A.— 2002.— V. 17, Iss. 11.— P. 1577–1587.
- [98] Fernandez C. D. J. SUSUSY Quantum Mechanics // Int. J. Mod. Phys. A.— 1997.— V. 12, Iss. 1.— P. 171–176.

- [99] Miller W., Jr. *Symmetry and Separation of Variables*.— Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co., Advanced Book Program, 1977.— xxx + 285 p.
- [100] Calogero F. Solution of a Three-Body Problem in One Dimension // *J. Math. Phys.*— 1969.— V. 10, Iss. 12.— P. 2191–2196.
- [101] Calogero F. Solution of the One-Dimensional N-Body Problems with Quadratic and/or Inversely Quadratic Pair Potentials // *J. Math. Phys.*— 1971.— V. 12, Iss. 3.— P. 419–436.
- [102] Sutherland B. Quantum Many-Body Problem in One Dimension: Ground State // *J. Math. Phys.*— 1971.— V. 12, Iss. 2.— P. 246–250.
- [103] Sutherland B. Exact Results for a Quantum Many-Body Problem in One Dimension // *Phys. Rev. A.*— 1971.— V. 4, Iss. 5.— P. 2019–2021.
- [104] Sutherland B. Exact Results for a Quantum Many-Body Problem in One Dimension. II // *Phys. Rev. A.*— 1972.— V. 5, Iss. 3.— P. 1372–1376.
- [105] Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Quantum completely integrable systems connected with semi-simple Lie algebras // *Lett. Math. Phys.*— 1977.— V. 2, No. 1.— P. 7–13.
- [106] Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Quantum integrable systems related to lie algebras // *Phys. Rep.*— 1983.— V. 94, Iss. 6.— P. 313–404.
- [107] Minzoni A., Rosenbaum M., Turbiner A. Quasi-exactly-solvable many-body problems // *Mod. Phys. Lett. A.*— 1996.— V. 11, No. 24.— P. 1977–1984.



- [108] Hou X., Shifman M. A quasi-exactly solvable  $N$ -body problem with the  $sl(N + 1)$  algebraic structure // Int. J. Mod. Phys. A.— 1999.— V. 14, No. 19.— P. 2993–3003.
- [109] Boreskov K. G., Lopez J. C. V., Turbiner A. V. Solvability of the  $F_4$  integrable system // Int. J. Mod. Phys. A.— 2001.— V. 16, No. 29.— P. 4769–4801.
- [110] González-López A. and Kamran N. The multidimensional Darboux transformation // Journal of Geometry and Physics.— 1998.— V. 26, Iss. 3–4.— P. 202–226.
- [111] Gómez-Ullate D., González-López A., Rodríguez M. A. New algebraic quantum many-body problems // J. Phys. A.— 2000.— V. 33, No. 41.— P. 7305–7335.
- [112] Ioffe M. V., Neelov A. I. Multiparticle SUSY quantum mechanics and representations of the permutation group // J. Phys. A.— 2000.— V. 33, No. 8.— P. 1581–1595.
- [113] Ioffe M. V., Neelov A. I. Intertwining relations for the matrix Calogero-like models: supersymmetry and shape invariance // J. Phys. A.— 2002.— V. 35, No. 35.— P. 7613–7628.
- [114] Cannata F., Ioffe M. Exactly solvable three-body systems with internal degrees of freedom // J. Phys. A.— 2001.— V. 34, No. 6.— P. 1129–1139.
- [115] Caticha A. Construction of exactly soluble double-well potentials // Phys. Rev. A.— 1995.— V. 51, Iss. 5.— P. 4264–4267.

- [116] Brihaye Y., Debergh N., Ndimubandi J. On a Lie algebraic approach of quasi-exactly solvable potentials with two known eigenstates // *Mod. Phys. Lett. A.*— 2001.— V. 16, No. 19.— P. 1243–1251.
- [117] Турбинер А. В. Задача о спектре в квантовой механике и процедура “нелиниарезации” // *Усп. физ. наук.*— 1984.— Т. 144, вып. 1.— С. 35–78.
- [118] Zhdanov R. Z. Separation of variables in  $(1+2)$ -dimensional Schrödinger equations // *J. Math. Phys.*— 1997.— V. 38, Iss. 2.— P. 1197–1217.
- [119] Zhdanov R., Zhalij A. On separable Schrödinger equations // *J. Math. Phys.*— 1999.— V. 40, Iss. 12.— P. 6319–6338.
- [120] Lewis H. R. Jr., Riesenfeld W. B. An Exact Quantum Theory of the Time-Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time-Dependent Electromagnetic Field // *J. Math. Phys.*— 1969.— V. 10, Iss. 8.— P. 1458–1473.
- [121] Kaushal R. S., Parashar D. Time-dependent-harmonic plus inverse-harmonic potential in quantum mechanics // *Phys. Rev. A.*— 1997.— V. 55, Iss. 4.— P. 2610–2614.
- [122] Shen J. Q. Solutions of the Schrödinger equation for the time-dependent linear potential // preprint arXiv: quant-ph/0310179.— 2003.
- [123] Finkel F., González-López A., Kamran N., Rodríguez M. A. On form-preserving transformations for the time-dependent Schrödinger equation // *J. Math. Phys.*— 1999.— V. 40, Iss. 7.— P. 3268–3274.

- [124] Paul W. Electromagnetic traps for charged and neutral particles // *Rev. Mod. Phys.*— 1990.— V. 62, Iss. 3.— P. 531–540; Пауль В. Электромагнитные ловушки для заряженных и нейтральных частиц // *Усп. Физ. Наук.*— 1990.— Т. 160, вып. 12.— С. 109–127.
- [125] Cook R. J., Shankland D. G., Wells A. L. Quantum theory of particle motion in a rapidly oscillating field // *Phys. Rev. A.*— 1985.— V. 31, No. 2.— P. 564–567.
- [126] Witten E. Reflections on the Fate of Spacetime // *Phys. Today.*— 1996.— V. 49, Iss. 4.— P. 24–30.
- [127] Szabo R. J. Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces // *Phys. Rep.*— 2003.— V. 378.— P. 207–299.
- [128] Kempf A. and Mangano G. Minimal length uncertainty relation and ultraviolet regularization // *Phys. Rev. D.*— 1997.— V. 55, No. 12.— P. 7909–7920.
- [129] Kempf A. Fields over Unsharp Coordinates // *Phys. Rev. Lett.*— 2000.— V. 85, No. 14.— P. 2873–2876.
- [130] Detournay S., Gabriel C. and Spindel Ph. About maximally localized states in quantum mechanics // *Phys. Rev. D.*— 2002.— V. 66.— 125004—P. 1–8.
- [131] Kempf A. Mode generating mechanism in inflation with a cutoff // *Phys. Rev. D.*— 2001.— V. 63.— 083514—P. 1–5.
- [132] Chang L. N., Minic D., Okamura N. and Takeuchi T. Effect of the minimal length uncertainty relation on the density of states and the cosmological constant problem // *Phys. Rev. D.*— 2002.— V. 65.— 125028—P. 1–7.

- [133] Harbach U., Hossenfelder S. The Casimir effect in the presence of a minimal length // *Phys. Lett. B.*— 2006.—V. 632, Iss. 2–3.— P. 379–383.
- [134] Nouicer Kh. Casimir effect in the presence of minimal lengths // *J. Phys. A.*— 2005.— V. 38, No. 46.— P. 10027–10035.
- [135] Chang L. N., Minic D., Okamura N. and Takeuchi T. Exact solution of the harmonic oscillator in arbitrary dimensions with minimal length uncertainty relations // *Phys. Rev. D.*— 2002.— V. 65.— 125027—P. 1–8.
- [136] Quesne C., Tkachuk V. M., Dirac oscillator with nonzero minimal uncertainty in position // *J. Phys. A.*— 2005.— V. 38, No. 8.— P. 1747–1765.
- [137] Nouicer Kh. Regularized One Dimensional Coulomb Potential Induced by the Presence of Minimal Length // preprint arXiv: quant-ph/0512003.— 2005.
- [138] Kempf A. Non-pointlike particles in harmonic oscillators // *J. Phys. A.*— 1997.— V. 30, No. 6.— P. 2093–2101.
- [139] Brau F. Minimal length uncertainty relation and the hydrogen atom // *J. Phys. A.*— 1999.— V. 32, No. 44.— P. 7691–7696.
- [140] Benczik S., Chang L.N., Minic D. and Takeuchi T. The hydrogen atom with minimal length // *Phys. Rev. A.*— 2005.— V. 72.— 012104—P. 1–4.
- [141] Sastry R. R. Quantum mechanics of smeared particles // *J. Phys. A.*— 2000.— V. 33., No. 46.— P. 8305–8318.

- [142] Benczik S., Chang L. N., Minic D., Okamura N., Rayyan S., Takeuchi T. Short distance versus long distance physics: The classical limit of the minimal length uncertainty relation // *Phys. Rev. D.*— 2002.— V. 66.— 026003—P. 1–11.
- [143] Reyes J. A. and del Castillo-Mussot M. 1D Schrödinger equations with Coulomb-type potentials // *J. Phys. A.*— 1999.— V. 32, No. 10.— P. 2017–2025.
- [144] Ran Y., Xue L., Hu S. and Su R.-K. On the Coulomb-type potential of the one-dimensional Schrödinger equation // *J. Phys. A.*— 2000.— V. 33, No. 50.— P. 9265–9272.
- [145] Gordeyev A. N., Chhajlany S. C. One-dimensional hydrogen atom: a singular potential in quantum mechanics // *J. Phys. A.*— 1997.— V. 30, No. 19.— P. 6893–6909.
- [146] Tsutsui I., Fulop T., Cheon T. Connection conditions and the spectral family under singular potentials // *J. Phys. A.*— 2003.— V. 36, No. 1.— P. 275–287.
- [147] Moshinsky M. Penetrability of a one-dimensional Coulomb potential // *J. Phys. A.*— 1993.— V. 26, No. 10.— P. 2445–2450.
- [148] Nunez Yopez H. N., Vargas C. A., Brito A. L. S. The one-dimensional hydrogen atom in momentum representation // *Eur. J. Phys.*— 1987.— V. 8, No. 3.— P. 189–193.
- [149] Akhoury R., Yao Y.-P. Minimal length uncertainty relation and the hydrogen spectrum // *Phys. Lett. B.*— 2003.— V. 572, Iss. 1–2.— P. 37–42R.

- [150] Andrews M. Singular potentials in one dimension // Am. J. Phys.—  
1976.— V. 44, No. 11.— P. 1064–1066.